NUMERO : 298 DATA : 07/06/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Mazza

MATERIA : Meccanica Analitica
Prof. Preziosi

PRIMA LEZIONE

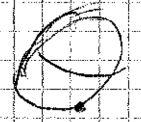
MECCANICA ANALITICA

VINCOLI

POSIZIONE DI 1 PUNTO NON È LIBERO

$f(x)=0$ X COORDINATE DEL PUNTO
(DEVO SODDISFARE 1 RELAZIONE)

X ESEMPIO SE IL PUNTO DEVE STARE SU UNA SFERA



DEVO IMPORRE LA RELAZIONE

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$\downarrow$

VINCOLO BILATERALE INDIPENDENTE DAL TEMPO

VINCOLO UNILATERALE " "

QUANDO $x^2+y^2+z^2 \geq R^2$ OVVERO QUANDO IL PUNTO NON PUÒ PENETRARE LA SFERA MA PUÒ STARE IN QUALSIASI ALTRA POSIZIONE

SE PER ESEMPIO LA SFERA FOSSE UN PALLONE CHE SI STA GONFIANDO R DIPENDEREBBE DAL TEMPO

$$f_i(x_i, t)=0$$

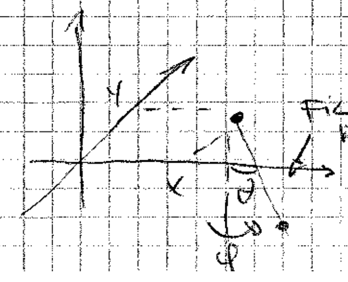
OGNI VOLTA CHE IMPONGO UN VINCOLO GENERICO VIENE FUORI UNA REAZIONE VINCOLARE

COORDINATE LAGRANGIANE (q_h) (CHIAMATE IN QUESTO MODO)

φ, θ QUANTITÀ CAPACI DI DESCRIVERE IL MOTO

SUPERFICIE DIMINUISCE DI 1 I GRADI DI LIBERTÀ

CURVA " DI 2 " "



GRADI DI LIBERTÀ = 3 + 3

$$|x_1 + x_2| = \ell$$

TROVO 4 QUANTITÀ DATO CHE SONO SU 1 SUPERFICIE

MATRICE D'INERZIA

$$\underline{\underline{I}}_O \begin{vmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_y & I_{yz} \\ & & I_z \end{vmatrix}$$

O = CENTRO DEL SIST. DI RIFERIM. RISPETTO A CUI CALCOLO LA MATRICE D'INERZIA

TIPICAMENTE IL PUNTO È IL BARICENTRO

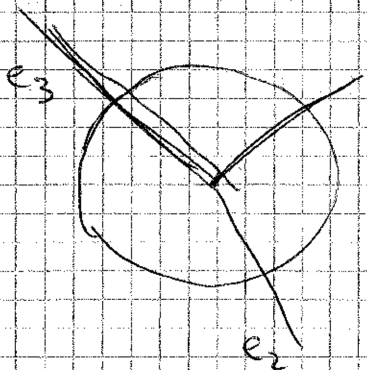
MATRICE REALE, SIMMETRICA, DIAGONALIZZABILE

POSSO TROVARE UNA TERNA DI AUTOVETTORI | MOLTIPLICANDOLI x LA MIA MATRICE LA DIAGONALIZZO.

$$\{e_1, e_2, e_3\} \Rightarrow \underline{\underline{I}}_O \, e_i = I_i \, e_i$$

ASSI PRINCIPALI D'INERZIA

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$ MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA



ASSI PRINCIPALI (INCONTRANO IL CENTRO DELLA SFERA)

SE ORIGINE DEL SIST. DI RIF. COINCIDE CON IL BARICENTRO

SIST. RIFERIM. BARICENTRO

$$\underline{\underline{I}}_G \, e_i = I_{G_i} \, e_i$$

MATR. INERZIA BARICENTRALE

DIAGONALIZZO

ASSI PRINC D'INERZIA

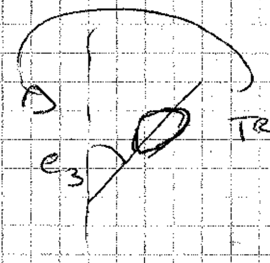
MOM. PRINC D'INERZIA

SE

$$I_{G_1} = I_{G_2}$$

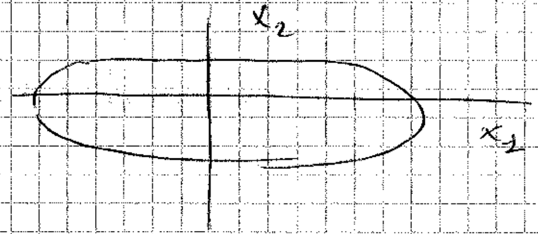
GIROSCOPIO

e_3 = ASSE GIROSCOPICO



MECC. ANALITICO 20/03/2012

(2)



SUPPONGO

$$I_{x_1} < I_{x_2}$$

$$\Downarrow$$

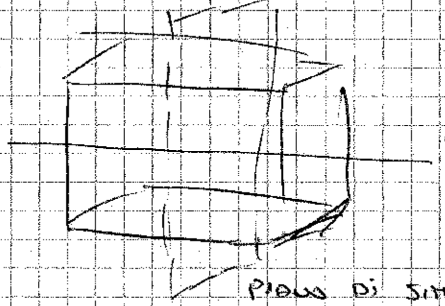
DISTANZE MEDIE DEL MIO CORPO SONO MINORI IN x_1 RISPETTO x^2

$$\text{dist } x_1 < \text{dist } x_2$$

SEMIASSE x_1 > SEMIASSE x_2

SIMMETRIA

SE IL CORPO HA 1 PIANO DI SIMMETRIA L'ASSE ORTOGONALE AL PIANO È UN ASSE PRINCIPALE



- SFERA ASSI PRINC TUTTI QUELLI CHE CONVERGONO NEL BARICENTRO.

- OGNI CORPO HA ALMENO UNA TERNA DI ASSI RISPETTO A 1 PUNTO

SE

→ $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ SE TUTTI I MOM D'INERZIA PRINCIPALI SONO DIVERSI LA TERNA È UNICA

→ $I_1 = I_2 \neq I_3$ TUTTI GLI ASSI CHE APPARTENGONO DEL PIANO FORMATO DA e_1, e_2 SONO PRINCIPALI, IL 3° ASSE SARÀ PERPENDICOLARE A QUEL PIANO.

→

---

x CAPIRE SE 1 ASSE È PRINC CALCOLO I SUOI PRODOTTI D'INERZIA, SE SONO NULLI, L'ASSE È PRINCIPALE (I_{AB}, I_{AC})

DATO 1 PUNTO DI 1 CORPO E DATI LO FASCIO DEGLI ASSI x QUEL PUNTO QUELLE CON MOM. D'INERZIA MASSIMO E MINIMO SONO RETTE (ASSI) PRINC

$$I_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) \sin 2\theta = 0$$

• CASO

$I_x = I_y$ E $I_{xy} = 0 \Rightarrow \forall\theta$ OK QUALUNQUE ~~TERNA~~ $\{x_1, x_2, z\}$ È PRINCIPALE

• CASO

$I_x = I_y$ E $I_{xy} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$I_{xy} \cos 2\theta = 0 \rightarrow \cos 2\theta = 0 \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$$

ASSI PRINC = BISETTRICI DEI QUADRANTI DEL MIO SIST. DI RIFERIMENTO

• CASO

$I_x \neq I_y$ E $I_{xy} \neq 0$

$$\frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) \sin 2\theta = I_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \rightarrow Tg\, 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcTg}\left(\frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}$$

HO 1 CORPO E HO MATRICE D'INERZIA
PER CALCOLARE GLI ASSI APPLICO QUESTO (CORPI PIANI)

SE MI INTERESSANO I MOMENTI PRINC ~~DUE~~ D'INERZIA SOSTITUISCO NELL EQ DELL ELLISSOIDE E OTTENGO I_1, I_2

$$\bullet\ I_1 = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y - \sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4\left(I_{xy}\right)^2}\right)$$

$$\bullet\ I_2 = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + \sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4\left(I_{xy}\right)^2}\right)$$

MOMENTI D'INERZIA PRINCIPALI

IN GENERE NEI PROBLEMI SI DÀ LA MATRICE D'INERZIA E SI RICAVA IL RESTO (ASSI PRINC, MOM. D'INERZIA PRINC ... ECC)

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcTg} \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{6} m a b}{\frac{1}{6} m (b^2 - a^2)}$$

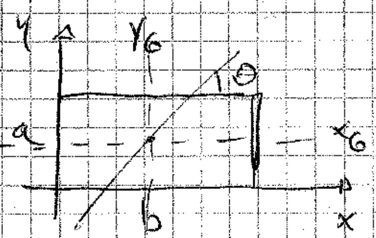
SE IL TRIANGOLO E' ISOSCELE $(a = b)$

$$I_1 = \frac{m}{12}\left(2a^2 - \sqrt{a^4 + a^4 - a^4}\right) = \frac{m}{12} a^2$$

$$I_2 = \frac{m}{12} \cdot 3a^2 = \frac{m}{2} a^2$$

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcTg} \frac{a^2}{0} = \frac{1}{2} \operatorname{arcTg}(\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$



m = MASSA

TROVO MOMENTO ~~ASSE~~ D'INERZIA PASSANTE X IL BARICENTRO E INCLINATO DI θ RISPETTO AL PIANO ORIZZONTALE

SUPPONIAMO DI AVERE LA MATRICE D'INERZIA

$$I_O \Rightarrow I_x, I_y, I_z$$

DEVO FARE I MOMENTI D'INERZIA DEGLI ASSI PASSANTI X IL BARICENTRO
HO I MOMENTI NELL'ORIGINE DEVO TROVARE QUELLI DEL BARICENTRO (PUNTO TRASLATO RISP. ORIGINE)

APPLICO HIGENS

DISTANZA

$$I_{x_G} = I_{x_O} - m\, d^2_{x_G}$$

$$I_x - m\frac{a^2}{2} = \frac{m a^2}{12}$$

$$I_{y_G} = I_y - m\, d^2_{y_G} = \frac{m b^2}{12}$$

$I_{x_G y_G} = 0$ E' NULLO POICHE x_G E y_G SONO ASSI PRINCIPALI QUELLI DI SIMMETRIA (PRODOTTO D'INERZIA NULLO)

$$I_x = \int_C \rho\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{m}{\pi R^2 h}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} r\,(r^2\sin^2\theta + z^2)\,dz\,d\theta\,dr$$

$r \rightarrow$ JACOBIANO

$$\frac{m}{\pi r^2 h}\Big[\iiint \underbrace{r^3\sin^2\theta\,dz\,d\theta\,dr}_{A} + \iiint \underbrace{r z^2\,dz\,d\theta\,dr}_{B}\Big]$$

$$A = \int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\theta\left(\frac{h}{2}-\left(-\frac{h}{2}\right)\right)d\theta\,dr = h\int_0^R r^3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,dr$$

$$= h\int_0^R r^3\left[-\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} dr =$$

$$h\int_0^R r^3\left[0+\pi-0-0\right] = \pi h\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \pi h\frac{R^4}{4}$$

$$B = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3\frac{1}{3}-\left(-\frac{h}{2}\right)^3\frac{1}{2}\right]d\theta\,dr$$

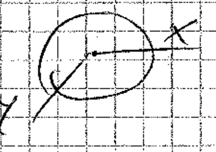
$$= \frac{h^3}{8}\cdot\frac{2}{3}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr = \frac{h^3}{12}\int_0^R r\,2\pi\,dr =$$

$$= \frac{h^3}{6}\pi\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^R = \frac{h^3\pi r^2}{12}$$

$$I_x = \frac{m}{\pi R^2 h}\left[\frac{\pi h R^4}{4}+\frac{h^3\pi r^2}{12}\right] = \frac{m}{12}\left[3R^2+h^2\right]$$

ESSENDO UNA CIRCONFERENZA
$=$ ANCHE $I_y = I_x$
TUTTI GLI ASSI CHE ARRIVANO
NEL BARICENTRO SONO PRINC

QUINDI I MOMENTI D'INERZIA
SARANNO UGUALI



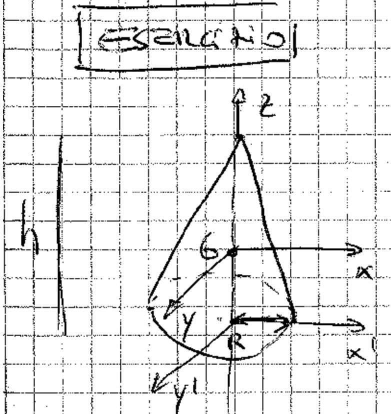
PONENDO $h=0$ HO UN DISCO PIANO

$I_x = I_y = \dfrac{mR^2}{4}$ $\qquad$ $I_z = \dfrac{mR^2}{2}$ $\qquad$ MOMENTO D'INERZIA DI UN DISCO CHE RUOTA SU UN ASSE BARICENTRALE

• $I_z = \ldots$

3) $I_a = I_a^{P} - I_a^{V} = \frac{189}{4} m\ell^2 - \frac{151}{12} m\ell^2 = \frac{104}{3} m\ell^2$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$



CALCOLARE I MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA

CONO OMOGENEO DI MASSA m

TROVARE ASSI PRINCIPALI ECC.

- z È ASSE PRINCIPALE PER SIMMETRIE

POSSO PRENDERE ARBITRARIAMENTE GLI ASSI POICHÉ ESSENDO UN CERCHIO POSSO RUOTARE GLI ASSI A PIACERE

$\{x_G, y_G, z\}$

$$z_G = \frac{\int_C \cancel{\rho}\, z\, dx\, dy\, dz}{\int_C \cancel{\rho}\, dx\, dy\, dz} = \frac{N}{D}$$

COORD CILINDRICHE, HO CAMBIATO COORD QUINDI METTO JACOBIANO

$$N = \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} z\, \underbrace{r}_{\text{JACOBIANO}}\, dr\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} z\left[\frac{R^2}{h^2}(h-z)^2\right]\frac{1}{2}\, dz\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left(zh^2 + z^3 - 2hz^2\right) dz\, d\theta = \frac{R^2}{2h^2}\int_0^{2\pi}\left[h^2\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{2hz^3}{3}\right]_0^h d\theta$$

$$= \frac{R^2}{2h^2}\, 2\pi\left[\frac{h^4}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2}{3}h^4\right] = \frac{R^2}{h^2}\pi\frac{h^4}{12} = \frac{\pi R^2 h^2}{12}$$

$$D = \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} \underbrace{r}_{\text{JACOBIANO}}\, dr\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2}(h-z)^2\, dz\, d\theta =$$

$$\frac{R^2}{2h^2}\int_0^{2\pi}\left[h^2 z + \frac{z^3}{2} - \frac{2hz^2}{2}\right]_0^h d\theta = \frac{R^2}{2h^2}\, 2\pi\left[h^3 + \frac{h^3}{3} - h^3\right] =$$

$$\frac{R^2}{3h^2}\pi h^3 = \frac{R^2\pi h}{3}$$

MECCANICA ANALITICA
27/03/2012 (1)

LAVORO

Biscari cap. 6.2

LAVORO

$$dL = \sum \underline{F}_i \cdot d\underline{x}_i = \sum \underline{F}_i \, d\underline{x}_i$$

LAVORO EFFETTIVO

POSSO DISTINGUERE TRA FORZE ATTIVE O REAZIONI DOVUTE DAI VINCOLI

LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \sum F_i \, \delta x$$

LAVORO CHE VIRTUALMENTE POTREBBE GENERARE LE FORZE IN BASE A SPOSTAM. VIRTUALI

$$dx_i = \sum \frac{\delta x_i}{\delta q_h} dq_h + \frac{\delta x}{\delta t} dt$$

CAMBIAM. COORD. LAGRANGIANE

CAMBIAM. RISPETTO AL TEMPO

$$\delta x_i = \sum \frac{\delta x_i}{\delta q_h} \delta q_h$$

DIPENDE SOLO DAL CAMBIAM. DELLE COORD. LAGRANGIANE

$$dL = \sum^{N} F_i \left(\sum^{m} \frac{\delta x_i}{\delta q_h} dq_h + \frac{\delta x_i}{\delta t} dt \right)$$

$$= \sum^{m} \left(\sum^{N} F_i \cdot \frac{\delta x_i}{\delta q_h} \right) dq_h + \sum F_i \cdot \frac{dx_i}{dt} dt$$

$$\delta L = \sum^{m} \underbrace{\left(\sum^{N} F_i \frac{\delta x_i}{\delta q_h} \right)}_{Q_h} \delta q_h = \sum Q_h \delta q_h$$

COMPONENTE LAGRANGIANA DELLE FORZE

FORZA CONSERVATIVA, ROTORE NULLO

$$\frac{\delta F_J}{\delta x_K} = \frac{\delta F_K}{\delta x_J}$$

DERIVATA COMPONENTE J DELLA FORZA - ...

QUANDO LE FORZE SONO CONSERVATIVE

SI HA CHE

$$F = \nabla U$$

VARIAZ. DI POTENZIALE

$$F \cdot dx = \nabla U \cdot dx = dU$$

MOMENTO COSTANTE

$$U = M\Theta \quad \text{(MOMENTO PER L'ANGOLO)}$$

MOLLA A SPIRALE

$$U = -\frac{1}{2}k\Theta^2$$

COMPONENTE LAGRANGIANA

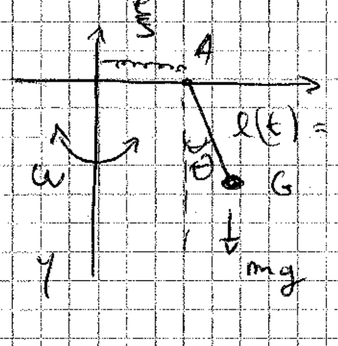
$$Q_h^{\ell} = \sum F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} = \sum \nabla U \frac{\partial x_i}{\partial q_h}$$

CASO DI 1 FORZA IN 1 DIMENSIONE

$$Q_h = F \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_h}\right)$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h}$$

SISTEMA



PENDOLO

$\ell(t) = \ell_0 + \alpha t$ LUNGHEZZA PUÒ CRESCERE NEL TEMPO

G DEFINITO DA 2 COORDINATE ξ e Θ

CALCOLO I LAVORI DELLE FORZE

$$dL^g = mg\,\underline{j} \cdot dx_G$$

$$x_G = \left(\xi + \ell(t)\sin\theta\right)\underline{i} + \left(\ell(t)\cos\theta\right)\underline{j}$$

$$dx_G = \left(d\xi + \ell(t)\cos\theta\, d\theta + \ell'(t)\sin\theta\, dt\right)\underline{i}$$

$$-\left(\ell t \sin\theta\, d\theta + \ell'(t)\cos\theta\, dt\right)\underline{j}$$

$$Q^{\omega}_{\xi} = m\omega^2 \left(\xi + \ell(t) \sin\theta \right) = \frac{\delta U^{\omega}}{\delta \xi}$$

$$Q^{\omega}_{\theta} = '' \left(\;\; '' \;\; \right) \ell(t) \cos\theta = \frac{\delta U^{\omega}}{\delta \theta}$$

UGUALE

$$U^{\omega} = \frac{1}{2} m \omega^2 x_G$$

$$\frac{1}{2} m\omega^2 \left(\xi + \ell(t) \sin\theta \right)^2$$

$$\frac{\delta U}{\delta \theta} = \cancel{\frac{1}{2}} m \omega^2 \cancel{2} \left(- - \right) \ell(t) \cos\theta$$

IN QUESTO CASO LE FORZE SONO CONSERVATIVE

INTRODUCIAMO UNA FORZA NON CONSERVATIVA

ATTRITO CON L'ARIA

$$F = -h(\underline{v}_G)\, \underline{v}_G$$ DIPENDE DALLA VELOCITÀ

$h(\underline{v}_G)$: FUNZIONE DELLA VELOCITÀ

TROVO LA VELOCITÀ

PRENDO LA RIGA x_G E LA DERIVO RISPETTO AL TEMPO

$$v_G = \underbrace{\left(\dot{\xi} + \ell(t) \cos\theta\, \dot{\theta} + \ell'(t) \sin\theta \right)}_{\mathrm{I}} i + \underbrace{\left(-\ell(t) \sin\theta\, \dot{\theta} + \ell'(t) \cos\theta \right)}_{\mathrm{II}} j$$

MODULO

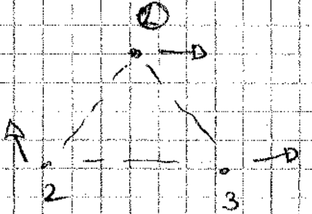
$$v_G = \sqrt{(\;\mathrm{I}\;)^2 + (\;\mathrm{II}\;)^2}$$

$$dL = -h(v) \left(\mathrm{I}\, i + \mathrm{II}\, j \right) \cdot \left[\left(d\xi + \ell(t) \cos\theta\, d\theta + \ell'(t) \sin\theta\, dt \right) i + \left(-\ell(t) \sin\theta + \ell'(t) \cos\theta \right) j \right]$$

$$\delta L = -h(v) \cdot \left(\mathrm{I}\, i + \mathrm{II}\, j \right) \cdot \left[\left(\delta \xi + \ell(t) \cos\theta\, \delta\theta \right) i - \left(\ell(t) \sin\theta\, \delta\theta \right) j \right]$$

DIMOSTRO QUESTO CALCOLO

$$dL = \underset{\text{RISULTANTE}}{R} \cdot dx_0 + \underset{\text{MOMENTO}}{M_0} \cdot \underset{\text{ROTAZ}}{\varphi}$$



$$\dot{x}_i = \dot{x}_0 + \omega \times (x_i - x_0)$$

LE VELOCITÀ SONO LEGATE

$$dx_i = dx_0 + \varphi \times (x_i - x_0)$$

SPOSTAM. SONO LEGATI

$$dL = \sum F_i \, dx_i = \sum F_i \cdot [dx_0 + \varphi \times (x_i - x_0)] =$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$= \sum F_i \cdot dx_0 + \sum_{i=1}^{m} F_i \cdot \varphi \times (x_i - x_0)$$

PROPRIETÀ PRODOTTO MISTO

$$= \left(\sum F_i\right) dx_0 + \varphi \cdot \sum (x_i - x_0) \times F_i = R \cdot dx_0 + M_0 \cdot \varphi$$

RISULT. SPOSTAM. DI UN SUO PUNTO — MOMENTO STESSO PUNTO — ANGOLO ROTAZIONE

SE INVECE DI UN SISTEMA DI PUNTI HO UN CORPO CONTINUO AL POSTO DI 1 SOMMATORIA HO 1 INTEGRALE

$$dL = \int_V F \cdot dx \, dV$$

$$R = \sum^{N} F_i \qquad \int_V F \, dV$$

CASO DISCRETO — VOLUME — CASO CONTINUO

$$M_0 = \sum^{N} (x_i - x_0) \times F_i \qquad \int_V (x_i - x_0) \times F \, dV$$

$$Q = \sum^{N} m_i v_i \qquad \int_V \rho v \, dV$$

Dimostrazione

$U^{\omega} = \frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2$ usando $dL = R \cdot dx_G + M_G \cdot \varphi$

$$\underline{R} = \int_V \rho \omega^2 x \underline{i} \, dV = \left(\int_V \rho x \, dV \right) \omega^2 \underline{i} = m \omega^2 x_G \underline{i}$$

$$= m\omega^2 (\xi + \ell \sin\theta) \underline{i}$$

$$M_A = \int_V (\underline{x} - x_A) \times \rho \omega^2 x \, i \, dV =$$

$$- \rho \omega^2 \left[\frac{z^2}{2} \xi \sin\theta + \frac{z^3}{3} \sin\theta \cos\theta \right]_0^{2\ell} \underline{k}$$

$$- \rho \omega^2 \left[2\ell^2 \xi \cos\theta + \frac{8}{3} \sin\theta \cos\theta \right] \underline{k}$$

$$\underline{R} = \int_0^{2\ell} -\frac{h}{2\ell}\left[(\dot{\xi} + z\cos\theta\dot{\theta})\underline{i} - z\sin\theta\dot{\theta}\underline{j}\right] dz$$

$$-\frac{h}{2\ell}\left[\left(\dot{\xi}z + \frac{z^2}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\underline{i} - \frac{z^2}{2}\sin\theta\dot{\theta}\underline{j}\right]_0^{2\ell}$$

$$= -\frac{h}{2\ell}\left[(\dot{\xi}2\ell + 2\ell^2\cos\theta\dot{\theta})\underline{i} - 2\ell^2\sin\theta\dot{\theta}\underline{j}\right] = -hV_G$$

$$\boxed{\underline{R} = -h\left[(\dot{\xi} + \ell\cos\theta\dot{\theta})\underline{i} - \ell\sin\theta\dot{\theta}\underline{j}\right]}$$

$$M_A = \int_0^{2\ell} \underbrace{(z\sin\theta\underline{i} + z\cos\theta\underline{j})}_{\text{BRACCIO}} \times \underbrace{(\underline{f}d)}_{\text{FORZA A FETTA}}\, dz$$

$$= \int_0^{2\ell} (z\sin\theta\underline{i} + z\cos\theta\underline{j}) \times \left(-\frac{h}{2\ell}\left((\dot{\xi} + z\cos\theta\dot{\theta})\underline{i} - z\sin\theta\dot{\theta}\underline{j}\right)\right) dz$$

$$= -\frac{h}{2\ell}\int_0^{2\ell} -z^2\sin^2\theta\dot{\theta}\underline{k} - (\dot{\xi}z\cos\theta + z^2\cos^2\theta\dot{\theta})\underline{k}$$

$$= +\frac{h}{2\ell}\left[\dot{\xi}\frac{z^2}{2}\cos\theta + \frac{z^3}{3}\dot{\theta}\right]_0^{2\ell}\underline{k}$$

$$\boxed{M_A = \frac{h}{2\ell}\left[\dot{\xi}2\ell^2\cos\theta + \frac{8}{3}\ell^3\dot{\theta}\right]\underline{k} = h\ell\left(\dot{\xi}\cos\theta + \frac{4}{3}\ell\dot{\theta}\right)\underline{k}}$$

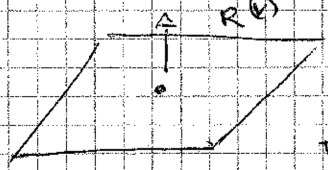
CONTROLLO CHE GLI ADDENDI ABBIANO UNITÀ DI MISURA COERENTI X VEDERE SE MANCA UN PEZZO

$$\delta L = -h(\dot{\xi} + \ell\cos\theta\dot{\theta})\delta\xi - h\ell\left(\dot{\xi}\cos\theta + \frac{4}{3}\ell\dot{\theta}\right)\delta\theta$$

IL SEGNO È NEGATIVO PERCHÉ IL LAVORO È DISSIPATIVO cap. 8.2

Vincoli ideali

Punto messo vincolato a rimanere su ~~una superficie~~ un piano



La forza di reazione vincolare

componente verticale che impedisce al peso di passare attraverso il piano

questa superficie è ideale se può esercitare forze verticali, eliminando attriti.

Per questo motivo

$$\delta L^{(v)} = 0$$

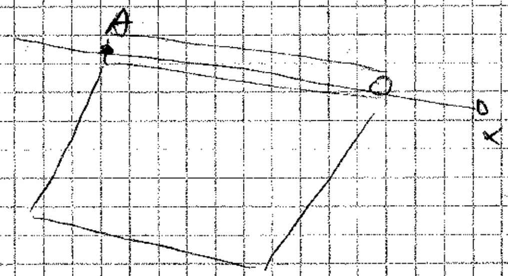
lavoro virtuale

solo nel caso che il piano è fisso
vincoli indipendenti dal tempo

Per vincoli ideali si calcola il lavoro virtuale, per il reale non posso dire nullo.

Lamina sorretta da un filo

Può scorrere o ruotare



Spostamenti possibili

δx_i

e $\delta \theta_i$

$$\delta L = R\, dx_A + M_A \cdot \delta\varphi$$

$$= R\, dx + M_{A_x} \hat{z}\, d\theta = 0$$

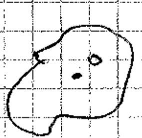
Deve essere zero
per annullarsi la componente della somma delle reazioni quando scorre e i momenti quando ruota devono essere zero

$$R_x = M_{A_x} = 0$$

Tutte le varie situazioni coincidono con

$$\boxed{\delta L^{(v)} = 0}$$ se i vincoli sono bilaterali (caso bilaterale)

Solido con punto fisso



$$\delta L = M_O \cdot \delta\varphi$$

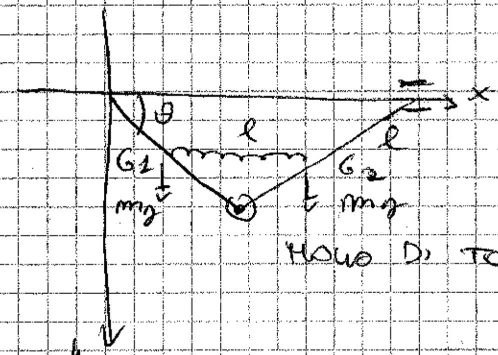
$$\Downarrow\ M_O = 0$$

$$-mg\,l\cos\theta + F(\xi + l\sin\theta) - \frac{1}{2}k\xi^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = F - k\xi \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\,l\sin\theta + F\,l\cos\theta \end{cases}$$

PONGO TUTTO UGUALE A ZERO

$$\begin{cases} \xi = F/k \\[1ex] \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{F}{mg} \rightarrow \theta = \mathrm{arctg}\, F/mg \end{cases}$$



IN POSIZ. RIPOSO MOLLA LA DISTANZA DEI BARICENTRI È l

POTENZ. ELASTICO MOLLA È SEMPRE NEGATIVO

ALLUNGAMENTO MOLLA MENO RIPOSO

TORSIONE

$$U = mg\,y_{G_1} + mg\,y_{G_2} - \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{1}{2}h\theta^2$$

$$= mg\frac{l}{2}\sin\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}k(l\cos\theta - l)^2 - \frac{1}{2}h\theta^2$$

$$= mg\,l\sin\theta - \frac{1}{2}kl^2(1-\cos\theta)^2 - \frac{1}{2}h\theta^2$$

CALCOLO POSIZ. EQUILIBRIO

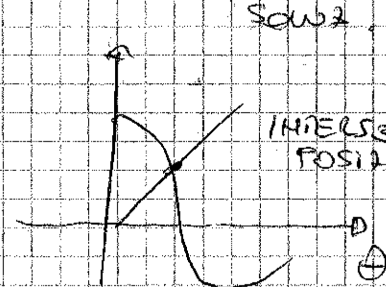
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mg\,l\cos\theta - kl^2(1-\cos\theta)(\sin\theta) - h\theta = 0$$

CASO

$k=0 \qquad mg\,l\cos\theta - h\theta = 0$

$$\cos\theta = \frac{h}{mg}\theta$$

SOLUZ. GRAFICO



INTERSEZ. = POSIZ. EQUILIB.

$$\begin{cases} (\omega^2 l - 2g)\sin\theta_1 + \omega^2 l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\cos\theta_1 = 0 \\ -g\sin\theta_2 + \omega^2 l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\cos\theta_2 = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI

NEL CASO CI SIA UNA SOLA ASTA QUINDI 1 SOLO θ

$$U = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta + m\omega^2 l^2 \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$mgl\sin\theta\left(-1 + \frac{\omega^2 l}{g}\cos\theta\right) = 0$$

HO COME SOLUZIONI $\sin\theta = 0$ $\quad \theta = 0, \pi$

$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l} = \lambda$ $\quad \theta = \arccos\lambda$

ESISTE $\frac{g}{\omega^2 l} < 1 \rightarrow \omega > \sqrt{g/l}$

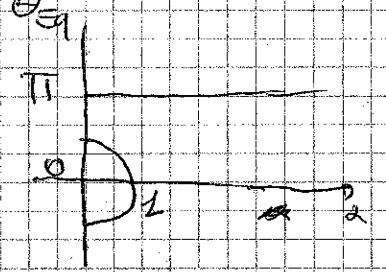


DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE

SE VELOCITÀ ANGOLARE È MOLTO ALTA (λ VICINO A ZERO) HO 4 POSIZ. DI EQUILIBRIO

CON VELOCITÀ ANGOLARE ALTA HO 2 POSIZ. DI EQUILIBRIO

ESERCIZIO

DATO IL POTENZIALE CALCOLO I PUNTI DI STABILITÀ DEL SISTEMA

$$U(\theta) = -k_1 \cos\theta - k_2 \sin^2\theta \qquad k_1, k_2 \geq 0 \,,\ \theta \in [0, 2\pi)$$

PER I PUNTI DI STABILITÀ DERIVO IL POTENZIALE E LO PONGO = A ZERO

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = k_1 \sin\theta - 2k_2 \cos\theta \sin\theta =$$

$$= \sin\theta \left(k_1 - 2k_2 \cos\theta \right) = 0$$

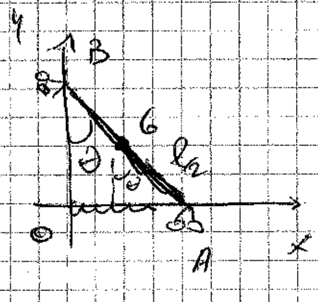
$$\sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \cancel{2\pi}, \pi$$

$$k_1 - 2k_2 \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{k_1}{2k_2}$$

QUANDO È VERIFICATO POSSO DIRE CHE

$$\left| \frac{k_1}{2k_2} \right| \leq 1 \qquad \theta = \pm \arccos\left(\frac{k_1}{2k_2}\right)$$

ESERCIZIO



ASTA LUNGA ℓ, MASSA m

CALCOLA POTENZIALE, PUNTI DI EQUILIBRIO

GRADO DI LIBERTÀ = 1

$$q = \theta$$

DOMINIO DI ESISTENZA DEL MIO GRADO DI LIBERTÀ

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

SE ABBASSO L'ASTA GLI INFILO IL LIMITE È $\frac{\pi}{2}$

POTENZIALI CHE INFLUENZANO IL SISTEMA

$$U(F_{peso}) = -mg\,y_G = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

PESO NEGATIVO XKÈ HO POSTO Y VERSO L'ALTO

$$U(F_{molla}) = -\frac{1}{2}k(AO)^2 = -\frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta$$

$\left(\text{ALLUNGAMENTO}^2 - \text{LUNGHEZZA MOLLA RIPOSO}\right)$ — $\overset{\text{RIPOSO}}{\underset{0}{\text{"}}}$

$$U = \underbrace{-mg\frac{\ell}{2}}_{k_1}\cos\theta \underbrace{-\frac{1}{2}k}_{k_2}\sin^2\theta\,\ell^2$$

PER I PUNTI DI EQUILIBRIO FACCIO LA DERIVATA E PONGO = A ZERO

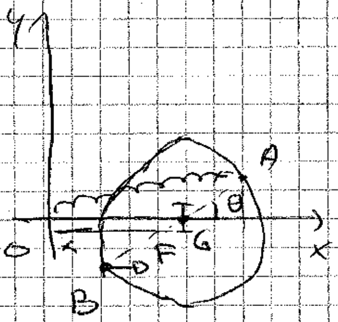
SOLUZ. $\sin\theta \rightarrow \theta = 0, \cancel{\pi}, \cancel{2\pi}$ PER IL DOMINIO

$K \geq \frac{mg}{gl}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

GRADI DI LIBERTÀ

$q = \{x, \theta\}$ PER x INDICO RISPETTO A COSA MI RIFERISCO



CARRELLO NEL BARICENTRO

F, FORZA COSTANTE

$$U = U_{peso} + U_{molla} + U_{F_B}$$

$U_{peso} = -mg \cdot 0$

ORDINATA DEL BARICENTRO

$\bullet\ U_{molla} = -\frac{1}{2}k(AO)^2 = -\frac{1}{2}k\left(x^2 + r^2\cos^2\theta + 2xr\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)$

$A = (x + r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$\bullet\ U_{F_B} = \int F\, dB = F\int dB = \underline{F} \cdot \underline{B}$

$= (F, 0)\cdot(x - r\cos\theta,\ -r\sin\theta)^T = F(x - r\cos\theta)$

$B = (x - r\cos\theta,\ -r\sin\theta$

$$x_G = \frac{1}{m} \sum m_i (x_G + x_{i,r})$$

DERIVATO DELLA POSIZ. E' LA VELOCITA'

$$\cancel{V_G = \frac{1}{m} \sum m_i (V_G + V_{i,r})}$$

$$\cancel{= \frac{1}{m} \Big(\sum m_i\Big) V_G + \frac{1}{m} \sum m_i \cdot V_{i,r}}$$

$$\Big(\sum m_i\Big) V_G \;\; = \;\; V_G$$

PER UN CORPO RIGIDO

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot I_G \cdot \omega$$

DOVE

$$I_G = \sum m_i \Big[|x_i - x_G|^2 \underline{\underline{1}} - (x_i - x_G) \times (x_i - x_G) \Big]$$

MATR. IDENTITA'

PER QUANTITA' DI MOTO DIMOSTRATO DA

$$K_0 = I_0 \omega$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2$$

$$V_i = V_G + \omega \times (x_i - x_G)$$

$$V_i^2 = V_G^2 + 2 V_G \cdot \omega \times (x_i - x_G) + [\omega \times (x_i - x_G)]^2$$

$$[\omega \times (x_i - x_G)]^2 = \omega^2 |x_i - x_G|^2 - [\omega (x_i - x_G)]^2$$

$$= \frac{1}{2} m V_G^2 + \underline{V_G} \cdot \underline{\omega} \times \cancel{\sum m_i (\underline{x_i} - \underline{x_G})} + \qquad \text{POSIZ. DEL BARICENTRO QUANDO SONO NEL BARICENTRO}$$

$$\cancel{\sum m_i (x_i - x_G)} = 0$$

$$+ \frac{1}{2} \sum m_i \Big\{ \omega^2 |x_i - x_G|^2 - [\omega \cdot (\underline{x_i} - \underline{x_G})]^2 \Big\}$$

$$\underline{\omega} \, \underline{\underline{I}}_G \, \underline{\omega} = \sum m_i |x_i - x_G|^2 \, \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\omega}$$

$$- m_i \, \omega \cdot [(\underline{x_i} - \underline{x_G}) \times (x_i - x_G)] \, \omega$$

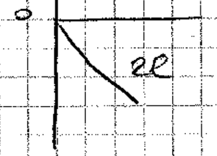
$$= \omega (x_i - x_G) [(x_i - x_G) \cdot \omega]$$

HO IL SECONDO PEZZO DEL TEOR DI KONIG

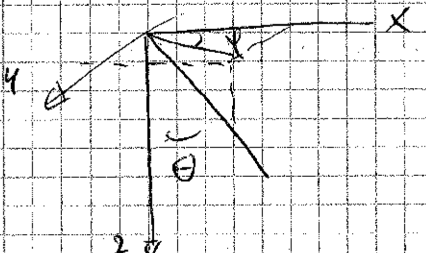
ASTA LUNGA $2l$, CORREGGI

$$= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + m l \cos\theta \, \dot{\xi} \dot{\theta} + \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

ASTA CON PUNTO FISSO



$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m (2l)^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

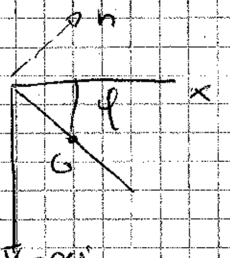


ASTA CHE PUÒ ~~ESTER~~ RUOTARE ANCHE LUNGO IL PIANO DEL FOGLIO

2 VELOCITÀ ANGOLARI

$\omega = \dot{\varphi} \cdot \underline{k}$ → LUNGO L'ASSE DELLE z

$+ \dot{\theta} \cdot \underline{n}$

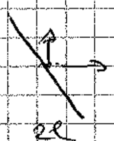


VISTO DALL'ALTO

ASTA ~~VETTORE~~ SI ACCORCIA E SI ALLUNGA DALL'ALTO FORSE RUOTANDO

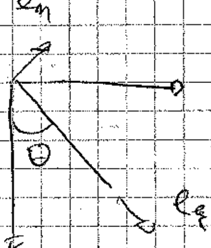
$$T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I} \, \underline{\omega}$$

POSSO CALCOLARE RISPETTO ALLA TERNA FISSO DEL CORPO O QUELLA STANDARD DEL LABORATORIO



$$I_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m l^2 \end{pmatrix}$$

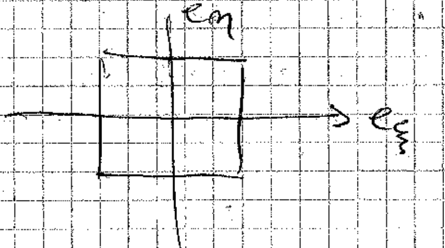
TENSORE D'INERZIA



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m l^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\theta}_n n \cdot I_O \cdot \dot{\theta}_n = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

VETTORE n PERPENDICOLARE AL FOGLIO



$\frac{1}{12} m\ell^2$ mom. inerzia lungo e_ξ

$\frac{1}{12} m\ell^2$ " e_η

$\frac{1}{6} m\ell^2$ mom. inerzia rispetto piano perpendicolare e/o somma dei due

$$\frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{2} \dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} m\ell^2\right) \dot\theta^2 = \frac{1}{3} m\ell^2 \dot\theta^2$$

2° metodo

Huygens + formula più semplice

$$I_O = I_G + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2 = \frac{1}{6} m\ell^2 + \frac{1}{2} m\ell^2$$

10.3.2

Energia cinetica per sistemi olonomi

Si può scrivere

$$T = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \, \underline{\underline{A}}(q) \, \dot{q} + \underline{B}(q) \cdot \dot{q} + C$$

se i vincoli sono indipendenti dal tempo

$$T = \frac{1}{2} \dot{q} \, \underline{\underline{A}}(q) \, \dot{q} = \sum_{h,k=1}^{m} \frac{1}{2} A_{hk}(q) \cdot \dot{q}_h \dot{q}_k$$

con vincoli indipendenti dal tempo rimangono i termini con velocità al quadrato

Dimostraz.

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

$$v_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

velocità in coord. lagrangiane

calcolo il quadrato

$$v_i^2 = \underbrace{\sum \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k}^T \dot{q}_h \dot{q}_k}_{\text{tutte le combinazioni}} + \underbrace{2\sum \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \dot{q}_h}_{\text{doppio prodotto}} + \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2}_{\text{quadrato}}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(I_G + mR^2\right)}_{\text{MATRICE ENERG CINETICA}} \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m V_0^2 \sin^2 \omega t}_{C}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 113

$$\frac{d(T-U)}{dt} = 0 \qquad E = T - U$$

ENERGIA MECCANICA

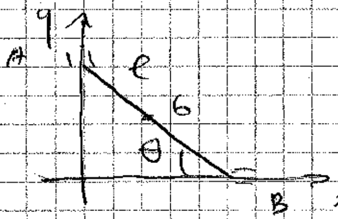
DATO UN SISTEMA (CE LE CARATTERISTICHE) ALLORA

$$T - U = \text{cost}$$

CONSERV. ENERG. MECCANICA

ESEMPIO

SCALA APPOGGIATA AL MURO



m GRADI DI LIBERTÀ
VINCOLI LISCI, BILATERALI, IND. TEMPO
FORZE CONSERVATIVE

$m = 1 \Rightarrow \Uparrow \qquad T - U = \text{cost} \Downarrow$

1 GRADO DI LIBERTÀ

CALCOLO EN. POTENZIALE E CINETICA

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ y_G = \frac{\ell}{2}\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_G &= -\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G &= \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta} \end{aligned} \qquad V_G = \sqrt{\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2}$$

$$V_G^2 = \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2$$

$$I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$U = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$$

- POTENZIALE DELL'OBIETTIVO NON NOTO CHE SI RAGGIUNGE LA POS DI EQUILIBRIO
- DERIVATA POTENZIALE DEVE DARMI LA FORZA

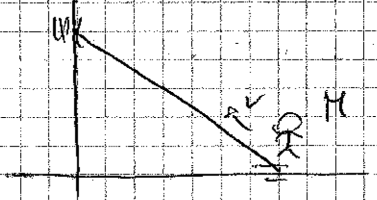
$$\frac{1}{6} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{\ell}{2}\sin\theta = \text{cost}$$

$\theta(t=0) = \theta_0$

$\dot{\theta}(t=0) = 0$

$$\dot{\theta}^2 =$$

$$\text{"} = mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_0 \qquad \frac{3g}{\ell}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$



$m = 1$
NON POSSO USARE IL TEOR. DELL' ENERG. CINETICA

IN QUESTO CASO L'OMINO MENTRE SCENDE CAUSA UN LAVORO E CIOE' UNA FORZA NON CONSERVATIVA

EQUAZIONI DI LAGRANGE

(12.3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h = \frac{\delta U}{\delta q_h}$$

NEL CASO DI SIST. CONSERVATIVO

PUNTO DI PARTENZA

RELAZ. DI ALEMBERT PER VINCOLI BILATERALI

$$\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)}$$

(VINCOLI LISCI BILATERALI)

$$\delta L^{a} = \sum Q_h \delta q_h \qquad Q_h = \sum F_i \cdot \frac{\delta x_i}{\delta q_h}$$

LAVORO FORZE ATTIVE

COMP. LAGRANGIANE FORZE . SPOSTAMENTI VIRTUALI

$$\delta L^{(m)} = -\sum \tau_h \delta q_h \qquad \tau_h = \sum (m_i a_i) \frac{dx_i}{\delta q_i}$$

LAVORO FORZE INERZIA

$$\delta x_i = \sum \frac{\delta x_i}{\delta q_h} \delta q_h$$

$$m_i a_i = F_i$$

$$\sum(-m_i a_i + F_i) \cdot \delta x_i = 0$$

$$\sum(-m_i a_i + F_i) \cdot \sum \frac{\delta x_i}{\delta q_h} \delta q_h = 0$$

$$\sum\Big(\underbrace{-\sum m_i a_i \cdot \frac{\delta x_i}{\delta q_h}}_{\tau_h} + \underbrace{\sum F_i \cdot \frac{\delta x_i}{\delta q_h}}_{Q_h}\Big) \delta q_h = 0$$

$$\sum(-\tau_h + Q_h)\delta q_h = 0 \Rightarrow \boxed{Q_h = \tau_h}$$

ESEMPIO

DATI DALL' ESERC. PRECEDENTE

$$T = \frac{1}{6} m l^2 \dot\theta^2$$

$$U = - mg \frac{l}{2} \sin\theta$$

USANDO LE EQ DI LAGRANGE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3} m l^2 \ddot\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$ NON DIPENDE IN QUESTO CASO DA θ

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = - mg \frac{l}{2} \cos\theta$$

EQ. LAGRANGE

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot\theta = - mg \frac{l}{2} \cos\theta$$

$$\ddot\theta = \frac{-3g}{2l} \cos\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

EQ. LAGRANGE

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \left(\cos\theta \ddot{\theta} - \sin\theta \dot{\theta}^2 \right) = -kx$$

HO 2 COORDINATE
LAGRANGIANE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m l \cos\theta \dot{x} + \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}$$

DERIVARE TUTTO RISPETTO
AL TEMPO

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m l \left(\cos\theta \ddot{x} - \cancel{\sin\theta \dot{\theta} \dot{x}} \right) + \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta}$$

TERMINI

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \cancel{-\frac{1}{2} m l \sin\theta \dot{x} \dot{\theta}}$$

→ UGUALE

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg \frac{l}{2} \sin\theta$$

EQ. LAGRANGE

$$\frac{1}{2} m l \cos\theta \ddot{x} + \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} = -mg \frac{l}{2} \sin\theta$$

SISTEMA DI 2 EQUAZIONI NELLE INCOGNITE x E θ CHE
MI PERMETTE DI DETERMINARE IL MOTO

SE MI CHIEDONO LE ~~POSIZ~~ POSIZ DI EQUILIBRIO
DEVO CONTROLLARE QUANDO IL SECONDO TERMINE DELL' EQ È
UGUALE A ZERO (DERIVATA DEL POTENZIALE $= 0$)

$$\overbrace{-kx = 0 \qquad -mg \frac{l}{2} \sin\theta = 0}$$

$$x = 0 \qquad \theta = 0, \pi \qquad (x_{eq}, \theta_{eq}) = (0,0), (0,\pi)$$

• spesso dim partendo dalla forma matriciale

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}} = \underline{\underline{A}}(q,t)\,\dot{\underline{q}} + B(q,t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}} = \underline{\underline{A}}(q,t)\,\ddot{\underline{q}} + \frac{dA}{dt}(q,t)\,\dot{\underline{q}} + \frac{dB}{dt}(q,t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = C(q,t,\dot{q})$$

Mettendo insieme ottengo

$$\underline{\underline{A}}\,\ddot{\underline{q}} = \underline{C}$$

$$\ddot{\underline{q}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{C}$$

il passaggio mi è assicurato dal fatto che $\underline{\underline{A}}$ è simmetrica, definita positiva.

$A \in Sym^+$

$\boxed{\text{Stabilità}}$ (P. 12.5)

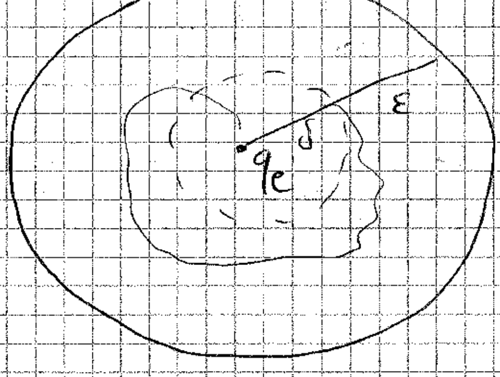
Se un sistema è conservativo calcolo quando il potenziale ha punti stazionari per trovare le equazioni di equilibrio.

$$\frac{\partial U}{\partial q_h}(\underline{q}) = 0$$

$$\forall \varepsilon\ \exists\ \delta, \delta' > 0 : \text{se } \|\underline{q_0} - \underline{q_e}\| < \varepsilon,\ \|\dot{q}_0\| < \delta'$$

$$\Rightarrow \|q(t) - q_e\| < \varepsilon,\quad \|\dot{q}(t)\| < \varepsilon$$

Perturbando una pos. di equilibrio gli spostamenti saranno piccoli



Gli spostamenti devono rimanere nella sfera data da ε

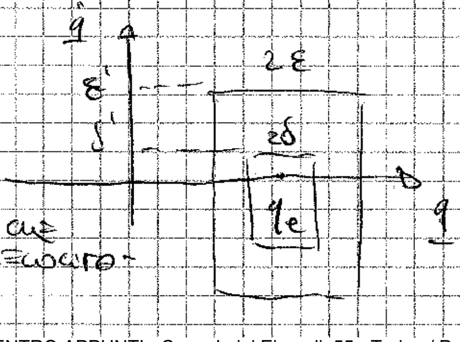
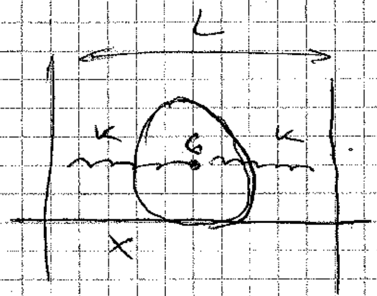


Grafico che considera la velocità

ESEMPIO



CALCOLO EQ. LAGRANGE E POS. EQUILIBRIO

$\dot{x} = R\dot{\theta}$

$V_G = \dot{x}$

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_G \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_G}{R^2}\right) \dot{x}_G$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{I_G}{R^2}\right) \dot{x}$$

DERIV. TOTALE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{I_G}{R^2}\right) \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$U = -\frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k (L - x)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx - k(L-x)(-1)$$
$$= -2kx + kL$$

EQ. LAGRANGE

$$\left(m + \frac{I_G}{R^2}\right) \ddot{x} = -2kx + kL$$

POS. EQUILIBRIO

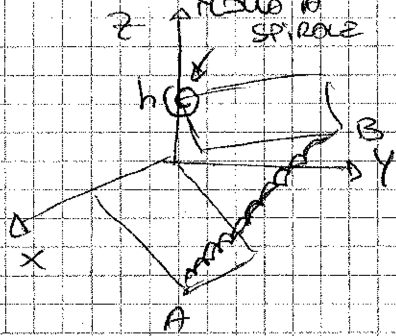
$$2kx = kL \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

STABILITA'

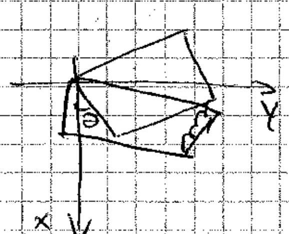
$$\frac{\partial U^2}{\partial x^2} = -2k < 0$$

POSIZ. DI EQUILIBRIO È STABILE

PROBLEMA



DUE LAMINE CHE RUOTANO PARALLELAMENTE



2 GRADI DI LIBERTÀ PERCHÈ POSSO RUOTARE LE 2 LAMINE DI CERTI ANGOLI

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} I_z \dot\theta_2^2$$

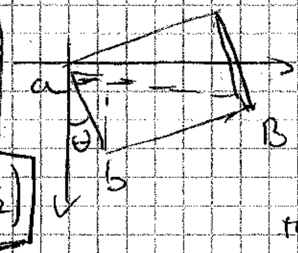
→ NON SERVO CALCOLANDO I MOM. DI INERZIA RISPETTO AL BARICENTRO MA RISP. L'ASSE USCENTE DAL FOGLIO. LAMINE INCERNIERATE ALL'ASSE z

$$U = \underbrace{-\frac{1}{2}\hat{k}\theta_2^2}_{\text{MOLLA A SPIRALE}} - \underbrace{\frac{1}{2}k\xi^2}_{\text{MOLLA}}$$

$$\begin{cases} x_B = a\cos\theta_1 - b\sin\theta_1 \\ y_B = a\sin\theta_1 + b\cos\theta_1 \end{cases}$$

DISTANZA TRA 2 PUNTI

$$\xi^2 = \left[a(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) - b(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \left[a(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) + b(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\right]^2 + h^2$$



DISEGNO FATTO GUARDANDO DALL'ALTO

$$= a^2 + a^2 + b^2 + b^2 - 2a^2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$-2b^2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$+ h^2$$

$$\begin{cases} x_A = a\cos\theta_2 - b\sin\theta_2 \\ y_A = a\sin\theta_2 + b\cos\theta_2 \end{cases}$$

I DOPPI PRODOTTI SI ELIDONO A VICENDA (?) CONTROLLA

$$U = -\frac{1}{2}\hat{k}\theta_1^2 + k(a^2+b^2)\cos(\theta_1-\theta_2) - \frac{1}{2}k(2a^2+2b^2+h^2)$$

POSIZIONI DI EQUILIBRIO

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \theta_2} = -\hat{k}\theta_2 - k(a^2+b^2)\sin(\theta_1-\theta_2) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \theta_2} = +k(a^2+b^2)\sin(\theta_1-\theta_2) \end{array}\right\} = 0$$

Eq. LAGRANGE

$$\begin{cases} I_z \ddot{\theta}_1 = -\hat{k}\theta_1 - k(a^2+b^2)\sin(\theta_1-\theta_2) \\ I_z \ddot{\theta}_2 = k(a^2+b^2)\sin(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

$$U = -\frac{1}{2}\hat{K}\theta_1^2 + K(a^2+b^2)\cos(\theta_1-\theta_2) - \frac{1}{2}K(2a^2+2b^2+R^2)$$ 1 MEC AM (7...

posso lasciarlo perdere perché è una costante e quindi anche non scriver

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -\hat{K}\theta_1 - K(a^2+b^2)\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = +K(a^2+b^2)\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2) = 0$$

dalla seconda $\longrightarrow$ $\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)=0$ $\xrightarrow{\text{sostituisco nella prima}}$ $-\hat{K}\theta_1=0$ $\rightarrow$ $\begin{cases}\theta_1=0\\ \mathrm{sen}\,\theta_2=0\end{cases}$

cioè

$\theta_1=\theta_2=0$; $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$

Vedo quale delle due posizioni è stabile

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = -\hat{K} - K(a^2+b^2)\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} = -K(a^2+b^2)\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = K(a^2+b^2)\cos(\theta_1-\theta_2)$$

se $\theta_1=\theta_2=0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H}}_{(q_e)} = \begin{pmatrix} -\hat{K}-K(a^2+b^2) & K(a^2+b^2) \\ K(a^2+b^2) & -K(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{H}} < 0$ ok

$\det \underline{\underline{H}} = \hat{K}K(a^2+b^2) + K^2(a^2+b^2)^2 - K^2(a^2+b^2)^2 = \hat{K}K(a^2+b^2) > 0$ ok

} ok POSIZIONE STABILE

$\overline{V}(\theta) = -k\ell^2(\lambda\cos\theta + \sin^2\theta)$ $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ MEC.AN (8

$\boxed{n=1}$
al variare di λ vedere le posizioni di equilibrio (se sono stabili o no)

Perciò

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = k\ell^2\lambda\sin\theta - 2k\ell^2\cos\theta\sin\theta = 0$$

$\sin\theta = 0$ $\theta = 0, \pi$

$$k\ell^2\sin\theta(\lambda - 2\cos\theta) = 0 \rightarrow \cos\theta = \frac{\lambda}{2} \qquad \theta = \pm\cos^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = k\ell^2\left[\cos\theta(\lambda - 2\cos\theta) + \sin\theta(2\sin\theta)\right]$$

- $\theta = 0$

$$k\ell^2\left[\lambda - 2\right]$$

se
$\lambda \geq 2 \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\Big|_0 \geq 0$ INSTABILE

$\lambda < 2 \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\Big|_0 < 0$ STABILE

- $\theta = \pi$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\Big|_\pi = k\ell^2(-\lambda - 2)$$

se $\lambda \leq -2 \rightarrow$ INSTABILE

$\lambda > -2$ STABILE

- $\theta = \pm\arccos\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

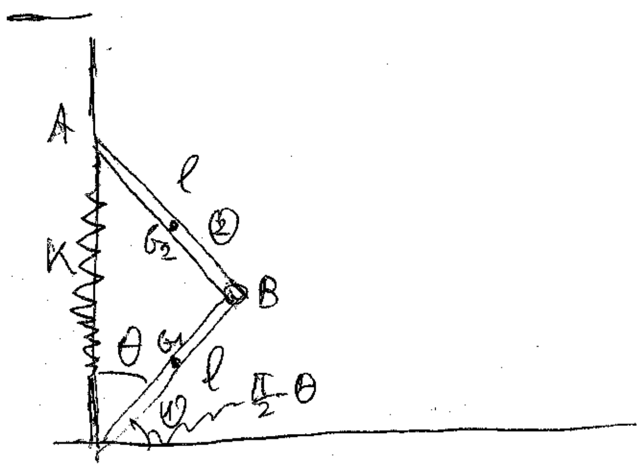
$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\Big|_{\arccos(\frac{\lambda}{2})} = k\ell^2\left[\frac{\lambda}{2}(\lambda - \lambda) + 2\sin^2\left(\arccos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\right]$$

$$= k\ell^2\left[2\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}}\right)^2\right] = 2k\ell^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) < 0$$

$\nearrow$ $-2 \leq \lambda \leq 2$ INSTABILE

$\searrow$ $\lambda < -2 \vee \lambda > 2$ STABILE

MECAN (8



$$V = -2K\ell^2\cos^2\theta - 2mg\ell\cos\theta$$

Calcolo l'energia cinetica del sistema

Scrivo l'equaz. del moto

$$T = T_{asta\,1} + T_{asta\,2}$$

$$T_{asta\,1} = \frac{1}{2}mV_{G1}^2 + \frac{1}{2}I_{G1}\omega^2$$

$$G_1 = \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$$

$$V_{G1} = \left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot\theta, -\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta\right)$$

$$T_{asta\,1} = \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_{G1}\dot\theta^2$$

$$G_2 = \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta, 2\ell\cos\theta - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) = \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{3}{2}\ell\cos\theta\right)$$

$$V_{G2} = \left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot\theta, \frac{3}{2}\ell\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta\right)$$

$$T_{asta\,2} = \frac{1}{2}m\left[\frac{\ell^2}{4}\cos^2\theta\,\dot\theta^2 + \frac{9}{4}\ell^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot\theta^2\right] + \frac{1}{2}I_{G_2}\dot\theta^2$$

Equazione del moto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left[\frac{\ell^2}{4}\cos^2\theta\cdot 2\dot\theta + \frac{9}{4}\ell^2\operatorname{sen}^2\theta\cdot 2\dot\theta\right] + \frac{1}{2}I_{G_2}\dot\theta^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{\ell^2}{2}\left(-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 + \cos^2\theta\cdot\ddot\theta\right) + \frac{9}{2}\ell^2\left(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\ddot\theta\right) + I_G\,\ddot\theta\right]$$

(1)

$$T_D = \frac{1}{2} \cancel{m_2 V_A^2} + \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 =$$

perché in A ho un moto istantaneo di puro rotolamento $(V_A = 0)$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2$$

Scrivo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(T+U) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}(T+U) = 0$$

$$U = U_{Asta} + U_{molla} + U_{disco} = -mg\left(\frac{l}{2}\cos\theta + r\right) - \frac{k}{2}\left(l^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + 0$$

rispetto a φ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\varphi}\right) = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi} = 0$$

Rispetto a θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} m_1 l^2 \dot{\theta}\right) + mg\left(-\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta\right) - k l^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\theta} - mg \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta - k l^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

se $n=2$ ho due equazioni

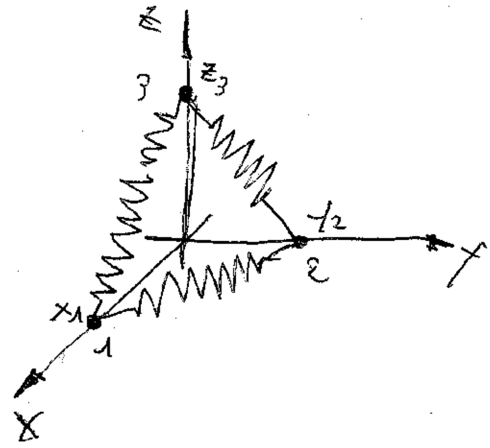
Suppongo che $V_A \neq 0$

$$A = (l \operatorname{sen}\theta, r)$$

$$V_A|_D = V_A|_A$$

Stabilità per sistemi con n=3

(esercizio dove non c'è la grafica)



$$\underline{F} = \frac{F}{\sqrt{3}}(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k})$$

$$\underline{q} = \{x_1, y_2, z_3\}$$

masse uguali, molle uguali

$$\underline{F}\cdot \underline{x}_1 = \frac{F}{\sqrt{3}}(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k})\cdot(x_1\underline{i})$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_3^2\right)$$

$$U = -\frac{1}{2}K(y_2^2+z_3^2) - \frac{1}{2}K(x_1^2+y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2+z_3^2) + \frac{F}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{F}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{F}{\sqrt{3}}z_3$$

$$= -K(x_1^2+y_2^2+z_3^2) + \frac{F}{\sqrt{3}}(x_1+y_2+z_3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -2kx_1 + \frac{F}{\sqrt{3}} = m\ddot{x}_1$$

$$m\ddot{x}_1 = -2Kx_1 + \frac{F}{\sqrt{3}}$$

EQ. DI LAGRANGE

$$m\ddot{y}_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2} = -2ky_2 + \frac{F}{\sqrt{3}}$$

$$m\ddot{z}_3 = \frac{\partial U}{\partial z_3} = -2kz_3 + \frac{F}{\sqrt{3}}$$

Posizioni d'equilibrio

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y_2} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial z_3} = 0 \end{cases}$$

MEC-AN

$$\begin{cases} x_A = x - \frac{L}{2}\cos\theta \\ y_A = y + \frac{L}{2}\sin\theta \end{cases}$$

$$C = (L, 0) \qquad \begin{cases} x_C = L \\ y_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = x + \frac{L}{2}\cos\theta \\ y_B = y - \frac{L}{2}\sin\theta \end{cases}$$

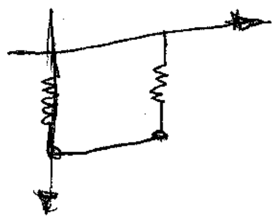
$$|OA|^2 = x^2 - Lx\cos\theta + \frac{L^2}{4} + y^2 + Ly\sin\theta$$

$$|BC|^2 = \left(x + \frac{L}{2}\cos\theta - L\right)^2 + \left(y - \frac{L}{2}\sin\theta\right)^2 =$$

$$= x^2 + Lx\cos\theta + \frac{L^2}{4} + y^2 - Ly\sin\theta + L^2 - 2Lx - L^2\cos\theta$$

Perciò

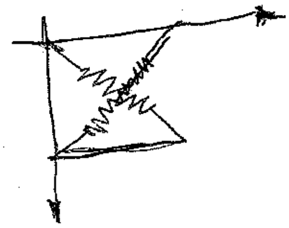
$$U = -\frac{1}{2}k\left(2x^2 + 3\frac{L^2}{2} + 2y^2 - 2Lx - L^2\cos\theta\right) + mgy$$



$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k(2x - L) = 0 \qquad x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -k(2y) + mg = 0 \qquad y = \frac{mg}{2k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{k}{2}L^2\sin\theta = 0 \qquad \theta = 0, \pi$$

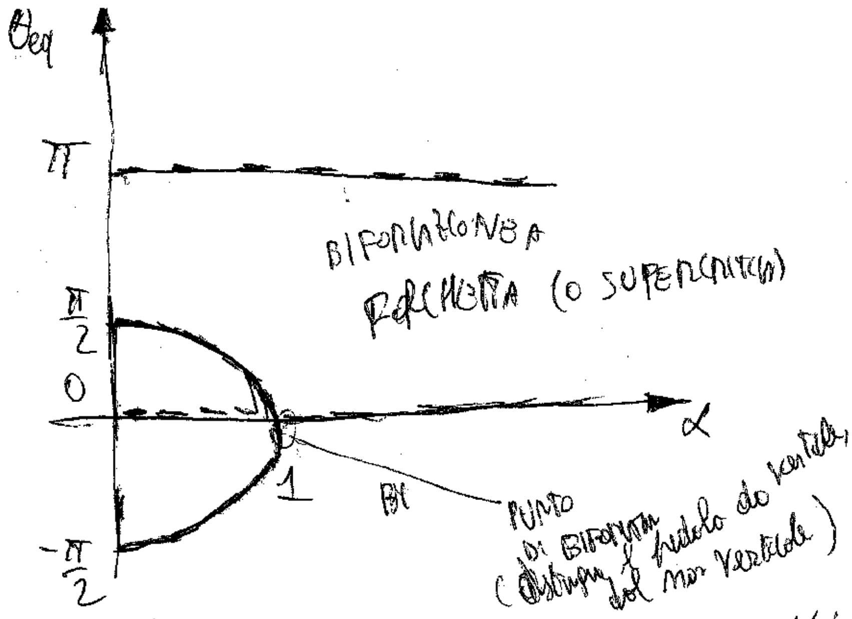


Stabilità

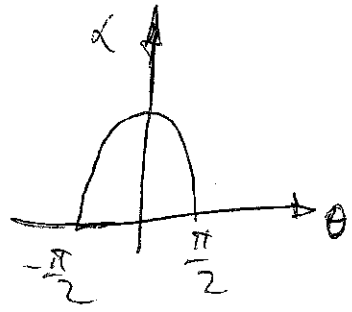
$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} -2k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2}L^2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Se $\theta = 0 \Rightarrow$ stabile

Se $\theta = \pi \Rightarrow$ instabile



TRATTEGGIATO = INSTABILE



BIFORCAZIONE

(non c'è sul libro → vedi sul portale)

$\underline{\ddot{q}} = \underline{f}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \cancel{t})$

MATRICE ENORME

Non compariva (?)

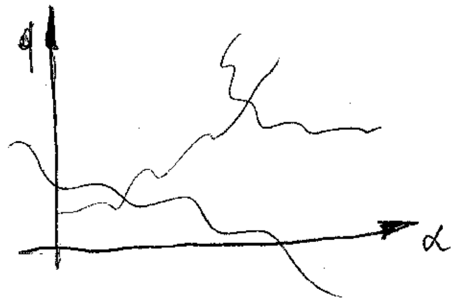
$\underline{\underline{A}}\,\underline{\ddot{q}} = \underline{f}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \cancel{t})$

MATRICE ENERGIA CINETICA

$\underline{f}(\underline{q}, \underline{0}) = 0$ $\qquad$ $\underline{f}(\underline{q}, \underline{0}; \underline{\alpha}) = 0$

n equazioni in n incognite più m parametri

$f(q; \alpha) = 0$



$\operatorname{sen}\theta(\cos\theta - \alpha) = 0$

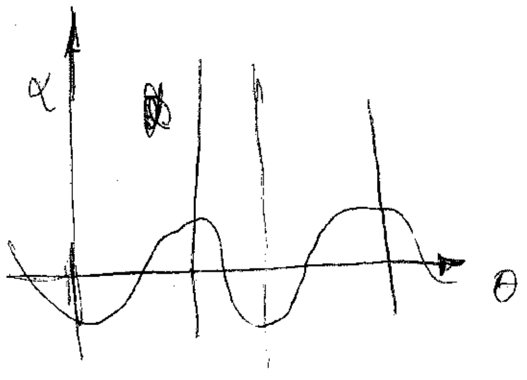
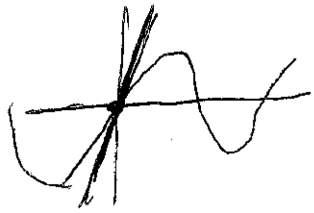


DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE

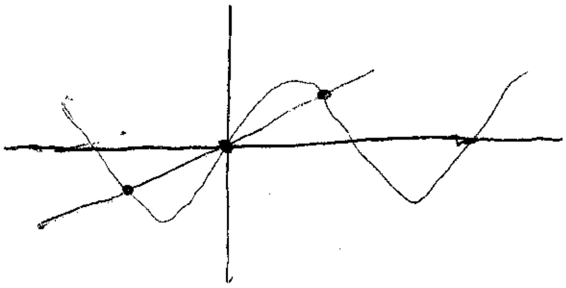
α = PARAMETRO DI BIFORCAZIONE

MECCAN 94

Se $\alpha = \frac{K}{mgh} > 1$ $\theta = 0$ Unica soluzione

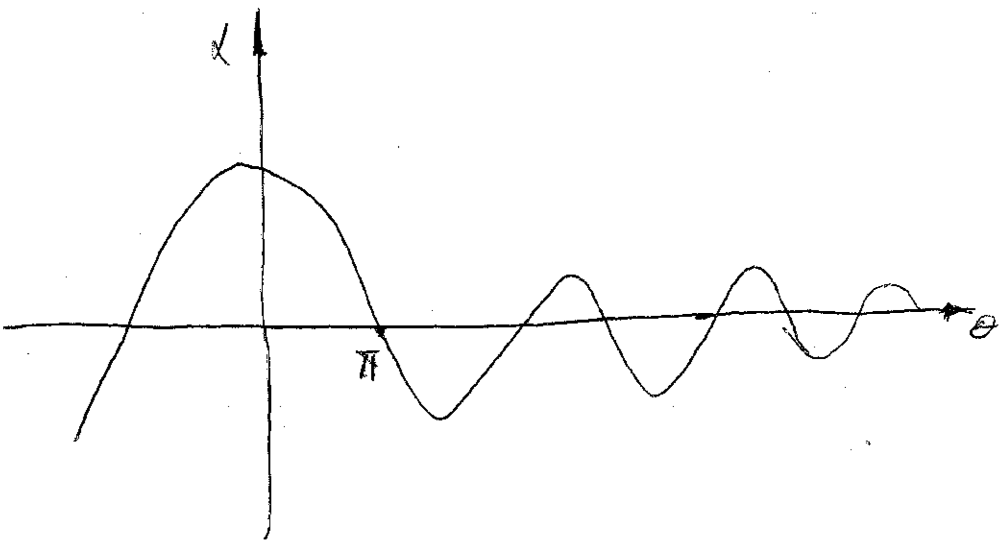


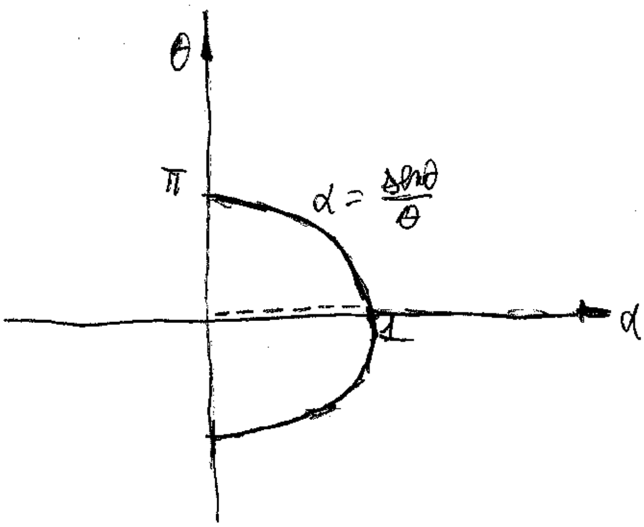
$\frac{K}{mgh} < 1$ Tre soluzioni



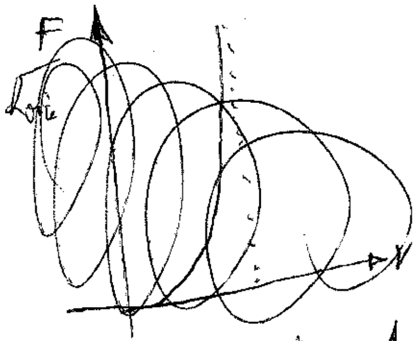
$\alpha\theta = \operatorname{sen}\theta$

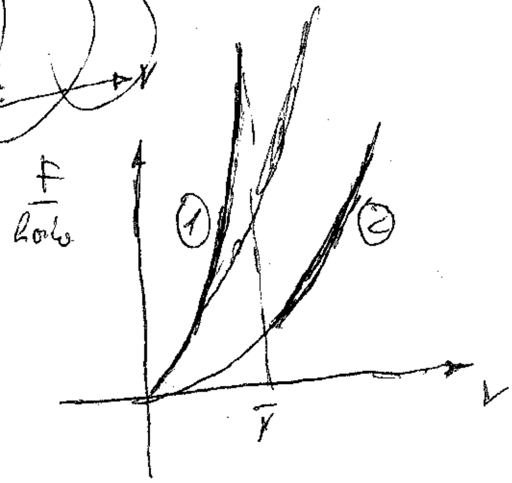
$\alpha = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ se $\theta \neq 0$



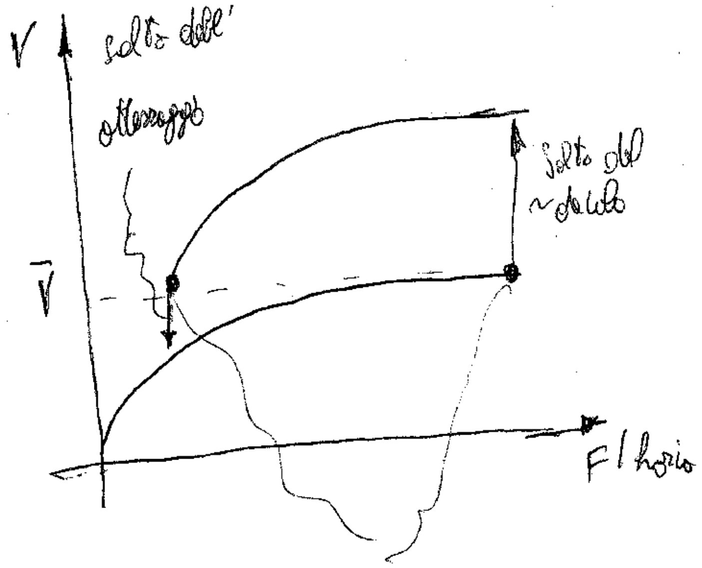


$$\frac{F}{h_{orio}} = v^3 \qquad (2')$$



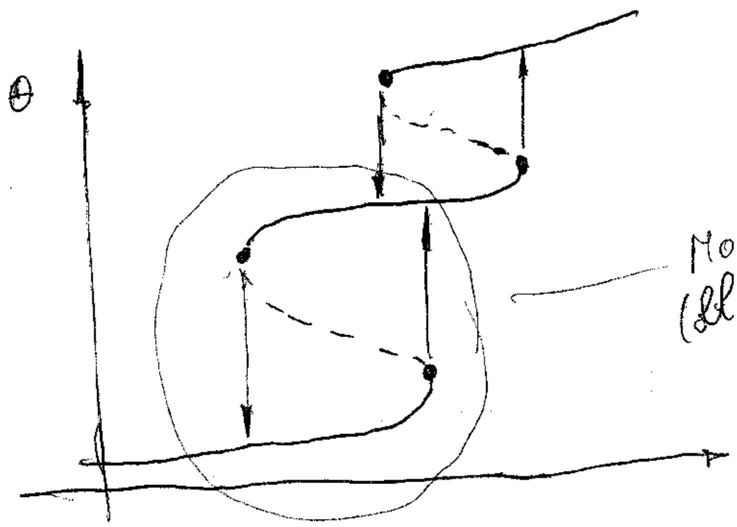


$$\frac{F}{h_{orio}} = v^3 + \frac{h_{acqu}}{h_{orio}} v^3 \qquad (1)$$



TURNING POINT

DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE

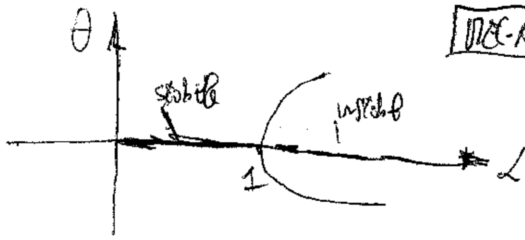


MODELLO DI ISTERESI MECCANICA
(all'andata ho un comportamento, al ritorno un altro)

MEC-AN 9

• $\theta = 0$

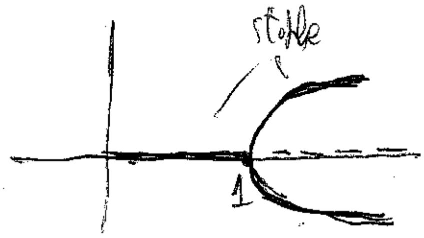
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -6k + Fl < 0 \qquad \alpha = \frac{Fl}{6k} < 1$$



$\theta \neq 0$ $\quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{6k}{Fl}$

$$-6k + Fl\cos\theta = 6k(-1 + \alpha\cos\theta) = 6k\left(-1 + \frac{\theta}{tg\theta}\right) < 0$$

$$\frac{\theta}{tg\theta} < 1 \qquad \frac{tg\theta}{\theta} > 1$$



secondo asta

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot\theta^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{m}{2} v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot\theta^2\right)$$

$$I_O = \frac{1}{3}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad I_G = \frac{1}{12}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{3}{4} l \cos\theta \\ y_G = \frac{l}{4} \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x_G = -\frac{3}{4} l \operatorname{sen}\theta\, \dot\theta \\ \dot y_G = \frac{1}{4} l \cos\theta\, \dot\theta \end{cases} \qquad v_G^2 = \left(\frac{9}{16} l^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{16} l^2 \cos^2\theta\right)\dot\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{96} + \frac{9}{32}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{32}\cos^2\theta\right) m l^2 \dot\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = (\ )\, m l^2 \ddot\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot\theta^2 m l^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, m l^2 \dot\theta^2$$

EQ. DEL MOTO

$$(\ )\, m l^2 \ddot\theta + \frac{1}{4} m l^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot\theta^2 = -6k\theta + Fl\operatorname{sen}\theta$$

MEC-AN (10

$$U_\Omega = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M \ell^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\Omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M R^2 + M(\ell+R)^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\Omega^2\right]\cdot 2 =$$

$$= \left\{\frac{2}{5} R^2 + \left[\frac{1}{3}\ell^2 + (\ell+R)^2\right]\operatorname{sen}^2\theta\right\} M\Omega^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -Mg(3\ell+2R)\operatorname{sen}\theta - 4k(\ell+2R)^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2[\;\;] M\Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta =$$

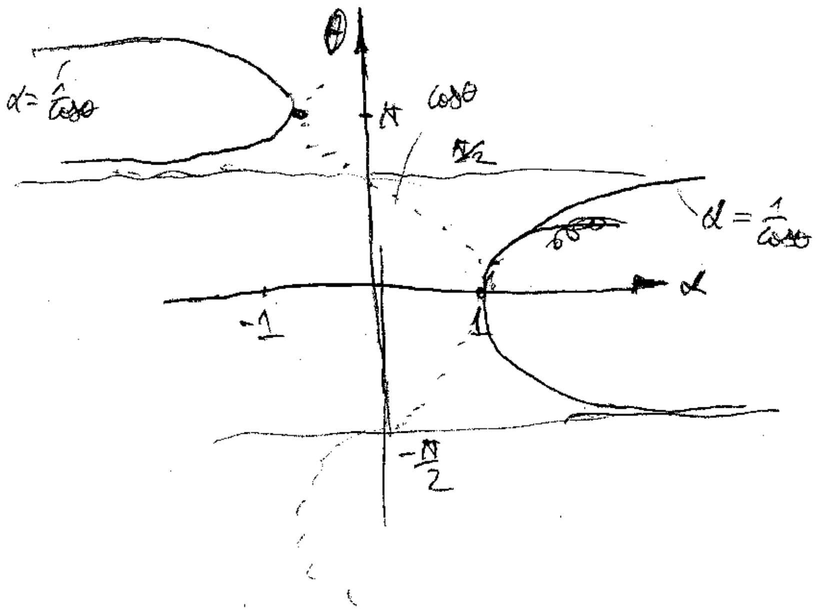
$$= -a \operatorname{sen}\theta + b \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$a = Mg(3\ell+2R)$$

$$b = 2\left[\frac{1}{3}\ell^2 + (\ell+R)^2\right]M\Omega^2 - 4k(\ell+2R)^2$$

$$\alpha = \frac{2[\;\;]M\Omega^2 - 4k(\ell+2R)^2}{Mg(3\ell+2R)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad \theta = 0, \pi \qquad \cos\theta = \frac{a}{b} \equiv \frac{1}{\alpha}$$

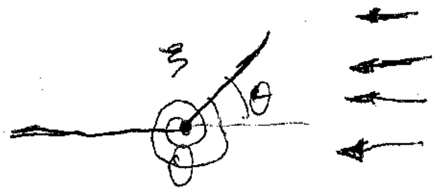


Stabilità

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -a\cos\theta + b(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

FLAP CONTROVENTO

MEC-AN



$$U = -\frac{1}{2}K\theta^2$$

$$\begin{cases} x = \xi\cos\theta \\ y = \xi\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\xi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = \xi\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\underline{F} = -h(\theta)\,\underline{V}_{rel}$$

$$\underline{F} = -h(\underline{\dot{x}} - \underline{V}) = -h(\xi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\,\underline{i} + \xi\cos\theta\,\dot{\theta}\,\underline{j} + V\underline{i})$$

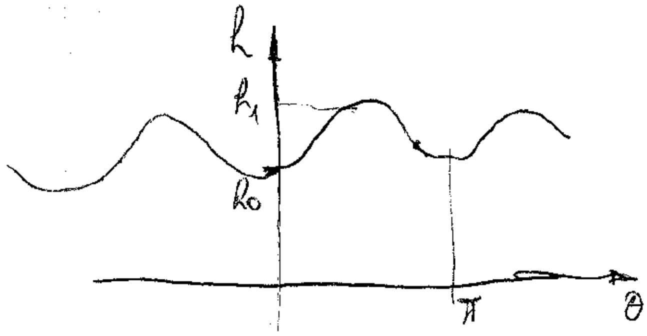
$$\delta\underline{x} = (-\xi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underline{i} + \xi\cos\theta\,\underline{j})\,\delta\theta$$

$$\delta L = \int_0^L \underline{F}\cdot\delta\underline{x}\,d\xi = \int_0^L \left[(V - \xi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta})(-\xi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\delta\theta) + (\xi\cos\theta\,\dot{\theta})(\xi\cos\theta\,\delta\theta)\right]d\xi =$$

$$= \int_0^L -h\left[-V\xi\,\mathrm{sen}\,\theta + \xi^2\,\dot{\theta}\right]d\xi\,\delta\theta$$

$$= -h\left[-V\frac{L^2}{2}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{L^3}{3}\dot{\theta}\right]\delta\theta$$

$$I\ddot{\theta} = -K\theta + hV\frac{L^2}{2}\mathrm{sen}\,\theta - h\frac{L^3}{3}\dot{\theta}$$



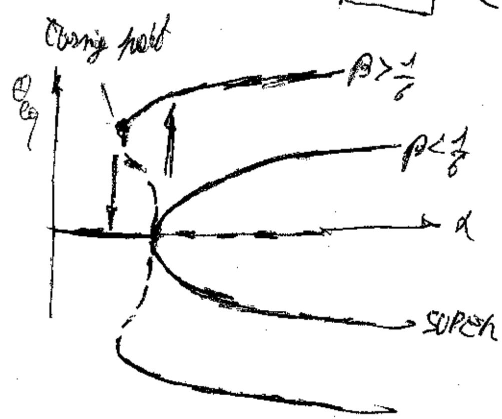
$$h = h_0 + h_1\,\mathrm{sen}^2\theta$$

MEC AN (10)

$$-K + k_0 V \frac{L^2}{2} \cos\theta + k_1 V \frac{L^2}{2} 3 \,\mathrm{sen}^2\theta \cos\theta = f$$

se $\theta = 0$

$$-k + k_0 V \frac{L^2}{2} < 0 \iff \alpha < 1 \quad \text{cioè}$$



12.6 - 12.7

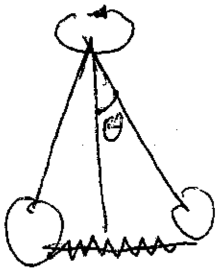
PICCOLI MOTI E FREQUENZE DI OSCILLAZIONI PROPRIE

(continua dell'esercizio precedente)

$$\theta = \theta_{eq} + \hat{\theta} \quad \text{perturbazione piccola}$$

$\cos\theta = \frac{1}{\alpha}$ $\quad \alpha = \frac{b}{a}$ $\quad \theta = 0 \quad \alpha < 1$ $\quad \theta = \pi \quad \alpha < 1$

$$I\ddot{\theta} = -a \,\mathrm{sen}\theta + b \,\mathrm{sen}\theta \cos\theta$$



$\theta_{eq} = 0$ $\quad$ stabile se $\alpha < 1$

$$\theta = 0 + \hat{\theta}$$

$$\mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}(\theta_{eq} + \hat{\theta}) = \mathrm{sen}\hat{\theta} \approx \hat{\theta}$$

$$\cos\theta = \cos(0 + \hat{\theta}) = \cos\hat{\theta} \approx 1 + \frac{\hat{\theta}^2}{2} \approx 1$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\hat{\theta}}$$

$$I\ddot{\hat{\theta}} = -a\hat{\theta} + b\hat{\theta} = -(a-b)\hat{\theta} \quad \text{se } a > b$$

$$\ddot{\hat{\theta}} + \frac{a-b}{I}\hat{\theta} = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A \,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{a-b}{I}}\,t + B \,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{a-b}{I}}\,t$$

OSCILLATORE ARMONICO $\qquad \omega = \sqrt{\frac{a-b}{I}}$

$\cos\theta = \cos(\theta + \hat{\theta}) = \cos\hat{\theta} \simeq 1 + \cancel{\frac{\hat{\theta}^2}{2}}$ SI TOGLIE PERCHÈ VOGLIO UNA EQ. LINEARE

$\ddot{\theta} = \ddot{\hat{\theta}}$

$I\ddot{\hat{\theta}} = -a\hat{\theta} + b\hat{\theta} = -(a-b)\hat{\theta}$

$\ddot{\hat{\theta}} + \frac{a-b}{I}\hat{\theta} = 0$ OSCILLATORE ARMONICO

VERO SE $\frac{a-b}{I} > 0$, $a > b$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{a-b}{I}}$

$x = A\sin\omega t + B\sin\omega t$

CASO 2

$\theta = \pi$

$\theta = \pi + \hat{\theta}$

$\sin\theta = \sin(\pi + \hat{\theta}) = -\sin\hat{\theta} \simeq -\hat{\theta}$

$\cos\theta = \cos(\pi + \hat{\theta}) = -\cos\hat{\theta} \simeq -\left(1 + \frac{\hat{\theta}^2}{2}\right) = -1$

$(\cos\pi\cos\hat{\theta} - \sin\pi\sin\hat{\theta})$

$\ddot{\theta} = \ddot{\hat{\theta}}$

$I\ddot{\hat{\theta}} = a\hat{\theta} + b(-\hat{\theta})(-1) = (a+b)\hat{\theta}$

$\ddot{\hat{\theta}} + \frac{-a-b}{I}\hat{\theta} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 113

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\dot q} = A(q)\,\ddot q + A'(q)\,\dot q^2$$

$$\frac{\delta T}{\delta q} = \frac{1}{2}A'(q)\,\dot q^2$$

LAGRANGE

$$A(q)\ddot q + \frac{1}{2}A'(q)\,\dot q^2 = U'(q)$$

$q = q_e$ POS EQUILIBRIO STABILE $\Leftrightarrow$ $U''(q_e) < 0$

$U'\,q_e = 0$

$$A(q_e)\,\ddot{\hat q} = \cancel{U'(q_e)} + U''(q_e)$$

EQ LAGRANGE APPROSSIMATA PER I PICCOLI MOTI TYLOR

1 TERMINE COEFF. MATRICE EQUILIBRIO CALCOLATO NEL PUNTO PER LA PERTURBAZIONE

$$\ddot q + \frac{-U''(q_e)}{A(q_e)}\,\hat q = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{-U''(q_e)}{A(q_e)}}$$

FREQ OSCILLAZ PROPRIA

$$T = \frac{1}{2}A(q)\,\dot q^2 = \frac{1}{2}A(q_e)\,\dot{\hat q}^2$$

$\rightarrow$ HO GIÀ UN TERMINE AL 2° ORDINE

$$U = \cancel{U(q_e)} + \cancel{U'(q_e)}_{0}\,\hat q + U''(q_e)\,\frac{\hat q^2}{2}$$

ESPANSIONE SERIE TYLOR ARRESTATO AL SECONDO ORDINE

$$A(q_e)\,\ddot{\hat q} = -U''(q_e)\,\hat q$$

~~PER~~ APPROSSIMANDO ENERG CINETICA E POTENZIALE

POSSO TROVARE LA FREQ. OSCILLAZIONE

$$\omega = \sqrt{\frac{-U''(q_e)}{A(q_e)}} \qquad \text{COEFFICIENTI}$$

PER ASSIUNARLI CHE OTTENGO VALORI POSITIVI

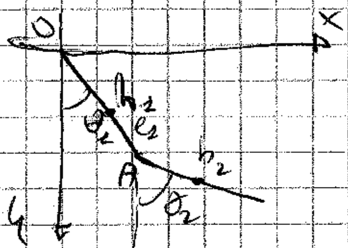
$$\left[H(q_e) + \omega^2 A(q_e) \right] C = 0$$

$$\left[\underbrace{A^{-1}(q_e)\, H(q_e)}_{\text{SIMMETRICA DEF. POSITIVO}} \underbrace{- \omega^2 I}_{\text{SIMMETRICA DEF. NEGATIVO}} \right] C = 0$$

$$\left[M - \lambda I \right] u = 0$$

PRODOTTO MATRICI DEF POSITIVO E' DEF POSITIVO

ESERCIZIO BIPENDOLO



EN. POT. CINETICA
LAGRANGE
STABILITA'
EQ. PICCOLE OSC.

POS EQ $\theta_1 = \theta_2 = 0$

h_1 POS. BARICENTRO

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

RISPETTO O — RISPETTO G_2

$$\begin{cases} x_{G_2} = \ell_1 \sin\theta_1 + h_2 \sin\theta_2 \\ y_{G_2} = \ell_1 \cos\theta_1 + h_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{G_2} = \ell_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 + h_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_{G_2} = -\ell_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 - h_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$V_{G_2}^2 = \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \ell_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \ell_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2$$

ALTRO MODO

$$A(q_e)\,\ddot{\hat{q}} = H(q_e)\,\hat{q}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & H & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

$$\det\left[\omega^2 A(q_e) + H(q_e)\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} (I_2 + m_1 l_1^2)\omega^2 - (m_1 h_1 + m_2 l_1)g & m_2 l_1 h_2 \omega^2 \\ m_2 h_1 l_2 \omega^2 & (I_2 + m_2 h_2^2)\omega^2 - m_2(h_2 g) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det = 0$$

SCHEMA RIASSUNTIVO

$(\sin(\omega t + \varphi))$ TROVO SOLUZ. PARTICOLARE

$T, U \longrightarrow$ eq LAGRANGE $\xrightarrow[\text{LINEARIZZ.}]{}$ PICCOLI MOTI $\longrightarrow$ FREQUENZE PROPRIE

APPROSSIMAZIONE DI 2° ORDINE

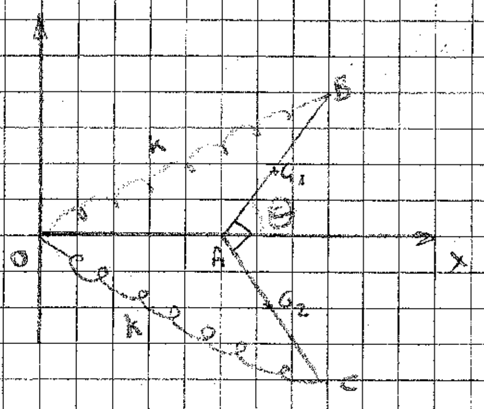
A, H

$$A(q_e)\,\ddot{q} + H(q_e)\,q = 0$$

$$\det\left[\omega^2 A + H\right] = 0$$

Esercizi

13/01/2006 (20060113)



l, m

$\emptyset_A$

$G_1\left(x+\frac{l}{2}\cos\theta, \frac{l}{2}\sin\theta\right)$

$G_2\left(x+\frac{l}{2}\sin\theta, -\frac{l}{2}\cos\theta\right)$

$A(x,0)$

$B(x+l\cos\theta, l\sin\theta)$

$C(x+l\sin\theta, -l\cos\theta)$

$U = U_{peso\,1} + U_{peso\,2} + U_{molla\,1} + U_{molla\,2}$

$U = -mg\frac{l}{2}\sin\theta + mg\frac{l}{2}\cos\theta - \frac{k}{2}\left[x^2+l^2+2xl\cos\theta\right] - \frac{k}{2}\left[x^2+l^2+2xl\sin\theta\right]$

$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx - kl\cos\theta - kx - kl\sin\theta = -2kx - kl(\cos\theta+\sin\theta) = 0$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{k}{2}\left[-2xl\sin\theta + 2xl\cos\theta\right] = 0$

se $x=0$

$\cos\theta + \sin\theta = 0 \quad \cos\theta = -\sin\theta \rightarrow P_1 = \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$

$\searrow P_2 = \left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2k$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial x} = -kl(-\sin\theta + \cos\theta)$

$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = mg\frac{l}{2}\sin\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta - \frac{k}{2}\left[-2xl\cos\theta - 2xl\sin\theta\right]$

posso calcolare l'Hessiana