



**appunti**  
www.centroappunti.it

**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO : 296**

**DATA : 28/05/2012**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE : Barberis**

**MATERIA : Idraulica**

**Prof. Ridolfi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

2012

# Idraulica

Fabiana Barberis

17/01/2012

I fluidi: caratteristica → la resistenza che oppongono ad essere deformate sono tanto minori quanto è più lenta la deformazione. Inoltre la deformazione è permanente.

Nei fluidi non vale Hooke  $D = E\epsilon$ , contro la celerità dello sforzo il tempo è fondamentale.

- I liquidi fanno fatica ad essere compressi, non cambiano volume
- I gas hanno bassissima resistenza alla deformazione

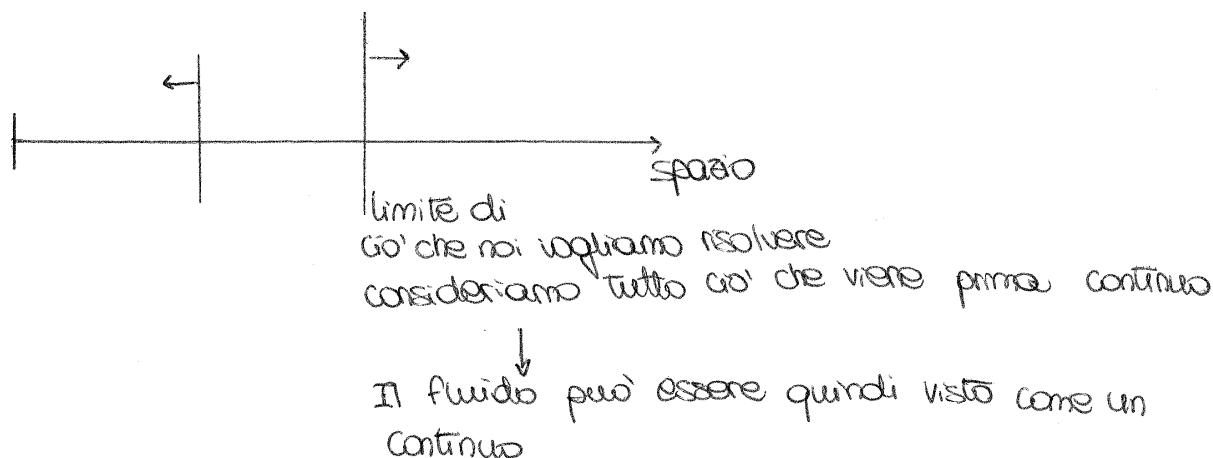
Fluido: gran vuoto con ogni tanto delle masse concentrate  
questo significa che varrà in crisi le regole matematiche studiate finora.

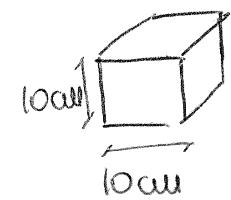
Finora si sono studiati concetti differentiabili  $\frac{dx}{\Delta}$   
↑  
posso far andare le distanze a zero

Per risolvere il problema: concetto di scala

- ↳ • Ci sono cose che hanno molta influenza, altre invece hanno influenza nella 7,8 cifra decimale  
• anche i tempi sono importanti

Ponte di Alessandria → fiume da problemi se si studiano alla scala del ponte (metri) non si capiscono, se si studiano alla scala dei tui allora si capiscono





$$V = 10^3 \text{ cm}^3$$

$$\Delta p = f \cdot 10^1 \approx 10^5 \text{ N/m}^2$$

↑  
spostamento

se porto questa  
acqua a 10, 20 m di  
profondità

Quindi  $p = p(\theta, f)$  → tagliamo fuori i problemi con la temperatura  
diciamo che i liquidi sono quasi incomprensibili

Arriveremo a dire

$$p \approx \text{cost}$$

la celerità di propagazione delle onde di pressione è

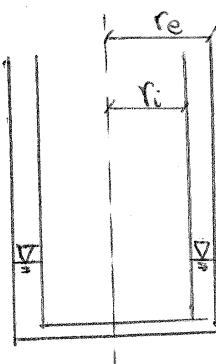
$$c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$$

la celerità delle onde di pressione che si propagano nell'acqua è  
molto più veloce che nell'aria.

Se  $\epsilon$  rende ad infinito allora abbiamo a che fare con un fluido  
incomprensibile.

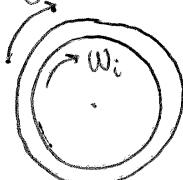
Aria nella stanza è comprensibile ma se lo muovo mano, dall'altra  
parte della stanza se ne accorgono in frazioni di secondo; siccome  
a noi interessa nell'arco di minuti come l'aria si muove, la  $\epsilon$  per  
noi è come se tendesse ad infinito e quindi possiamo considerare l'aria  
come fluido incomprensibile

## 2 Viscosità dinamica



$\nabla$  simbolo superficie libera

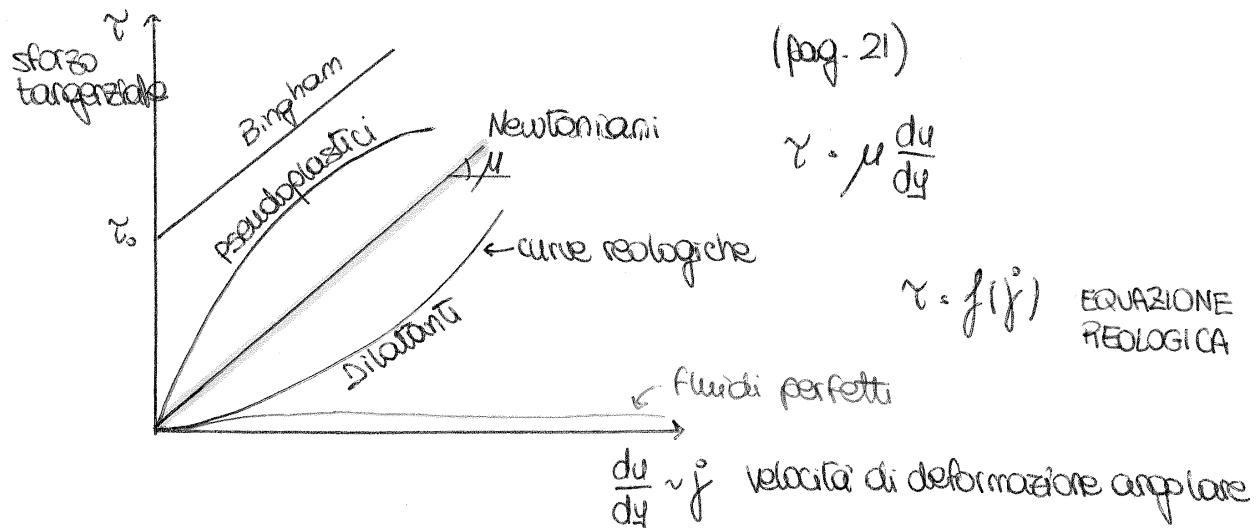
$w_o$  = velocità di rotazione del cilindro esterno



Il fluido perché è viscoso si  
attacca alla parete del cilindro  
esterno e ruota, ruota anche  
lo strato di fluido più interno e  
così via fino a far ruotare  
il cilindro interno

Il fluido viscoso si attacca perché reagisce alle deformazioni con  
tensioni tangenziali

$$T \propto \underbrace{(2\pi r_i \cdot h)}_{\tau}, \Delta v = w_o r_e - w_i r_i, \frac{1}{\Delta r}$$



Newtoniani  $\rightarrow \mu = \text{cost}$

Tixotropici  $\rightarrow$  resistenza diminuisce nel tempo

tanto più si muovono tanto più i legami al suo interno si rompono

$$\tau = G\dot{\gamma}$$

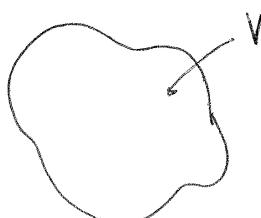
$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{G} + \frac{\tau}{\mu}$$

denendo rispetto al tempo

componente elastica      componenti fluido newtoniano

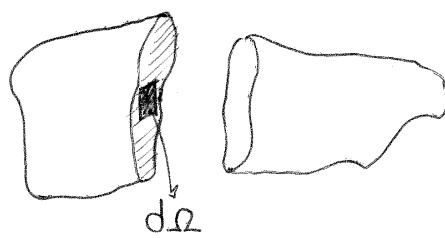
← fluidi elastoviscosi (ghiacciai, lava)

Gli occupano di fluidi freddi newtoniani



$F$   $\rightarrow$  forze dovute al fatto che il fluido ha una massa  $\rightarrow$  forza peso

$F$  di superficie  $\rightarrow$  c'è una superficie di contatto tra la massa fluida e una superficie esterna o che taglia la massa fluida al suo interno



$$\lim_{de \rightarrow 0} \frac{dF}{d\Omega} = \overline{f}_\Omega \text{ SFORZO}$$

dipende dalla giacitura

$d\Omega$   $\frac{dF}{d\Omega}$   
normale  $\vec{n}$

positiva normale entrante  
su  $d\Omega$  ci sarà una forza infinitesima intorno al punto O  $d\Omega$

Cambia a seconda di  $d\Omega$

## FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO

Fluidi tixotropici lo sforzo tangenziale diminuisce gradualmente nel tempo per tendere infine ad un valore limite, in corrispondenza al quale il fluido si comporta come newtoniano

Fluidi neoprotici all'aumentare del tempo, gli sforzi tangenziali continuano a incrementarsi fino a diventare grandissimi, tanto che il fluido finisce per assumere l'effetto di un solido

## FLUIDI ELASTOVISCOSI

Maxwell

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{G} + \frac{\vec{\gamma}}{\mu}$$

↗                   ↑  
componente       componente  
elastica          Fluido newtoniano

G = modulo di elasticità tangenziale

Facendo anche equilibrio alla rotazione avremo

$$\phi_{xy} = \phi_{yx}$$

$$\phi_{xz} = \phi_{zx}$$

$$\phi_{yz} = \phi_{zy}$$

Avremo sei componenti in una matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{matrice simmetrica} \\ \text{tensore di second'ordine} \end{array}$$

Questa matrice per i solidi dipende dallo stato di deformazione  
per i fluidi dalla celerità di deformazione

Questa matrice è sempre diagonalizzabile: per un determinato sistema di riferimento posso avere 3 componenti anziché 6

$$\{x, y, z\} \rightarrow \begin{pmatrix} \circ & 0 & 0 \\ 0 & \circ & 0 \\ 0 & 0 & \circ \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{i valori sulla diagonale sono gli} \\ \text{autovalori} \\ \text{Da questi si ricavano gli autovettori} \\ \text{che sono proprio } x, y, z \text{ per le} \\ \text{quali si ha una matrice del genere} \end{array}$$

- Qualunque sia il sistema di riferimento la somma dei valori sulla diagonale è sempre la stessa
- Comunque oriento il sistema di riferimento, se ho sempre una matrice diagonale allora gli autovalori sono uguali

$\downarrow$   
e' il caso della statica dei fluidi

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} p \text{ stato di tensione} \\ \text{pressione} \\ \vec{\phi}_n = p \cdot \vec{n} \end{array}$$

## STATICA DEI FLUIDI [pag. 29]

$\vec{u} = 0$  in ogni punto, in ogni parte della massa fluida  
 ↓  
 vettore velocità

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$$

Il fluido risponde con tensioni tangenziali nel momento in cui viene deformato

$$\tau = \mu \frac{d\vec{u}}{dn}$$

siccome  $\vec{u} = 0 \rightarrow \tau = 0$  non abbiamo mai tensioni tangenziali in un fluido fermo, in qualsiasi sistema di riferimento.

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

↑  
 stato di tensione  
 della statica

↓  
 è solo un numero  
 $p$  = pressione

Abbiamo quindi solo i termini sulla diagonale  $\rightarrow$  autovalori tutti uguali

$$\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = p$$

↑  
 pressione

Tornando al tetraedro di Cauchy

$$\textcircled{x} \quad \phi_{nx} = \phi_n \cos \hat{n}_x = \phi_{xx} \cos \hat{n}_x + 0 + 0 \quad \phi_{yx} = \phi_{zx} = 0$$

$$\phi_n = \phi_{xx}$$

$$\textcircled{y} \quad \phi_{ny} = \phi_n \cos \hat{n}_y = \phi_{yy} \cos \hat{n}_y + 0 + 0$$

$$\phi_n = \phi_{yy}$$

$$\textcircled{z} \quad \phi_{nz} = \phi_n \cos \hat{n}_z = \phi_{zz} \cos \hat{n}_z + 0 + 0$$

$$\phi_n = \phi_{zz}$$

$$\phi_n = \phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} \leftarrow \text{sono tutte uguali}$$

Le forze finora considerate devono essere in equilibrio perché il prisma non si muove

$$p\vec{F} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

$$p\vec{F} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$p\vec{F} = \text{grad } p$$

← Equazione indefinita della statica dei fluidi

$$\boxed{\vec{F} = \text{grad } V}$$

↑                      ↑  
forza                  potenziale  
vettore con  
componenti

$$\Rightarrow F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

■ Se  $\vec{F}$  ammette potenziale possiamo scrivere

$$\boxed{p \text{grad } V = \text{grad } p}$$

le superfici equipotenziali sono anche superfici isobare

■ se il fluido è incompressibile  $p = \text{cost}$

allora

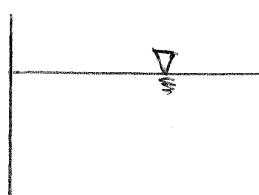
$$\boxed{\vec{F} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right)}$$

cioè tutte le forze di massa  
ammettono potenziale

$$V = \frac{p}{\rho}$$

$p\vec{F} = \text{grad } p \rightarrow$  risolvendo l'equazione differenziale ottengo  $p = p(x, y, z)$   
ma è difficile perché bisogna integrare

In tanti problemi mi interessa sapere la risultante delle pressioni su una superficie.



serbatoio

## legge di Stevin [pag. 3A]

Ipotesi 1:  $p = \text{cost}$  fluido incompressibile

Ipotesi 2:  $\vec{F} = -\rho g \vec{z}$   $\uparrow z$  forza peso

$$\rho \vec{F} = \rho g \vec{z}$$

$$-\rho g \vec{z} = \rho \vec{g}$$

$1$   
costante

$$\rho g (z + f) = 0$$

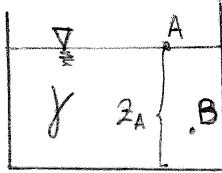
$$z + \frac{f}{\rho g} = \text{costante}$$

$$h = z + \frac{f}{\rho g} = \text{cost}$$

← carico pressometrico - legge di Stevin

$h$  = quota pressometrica

$f$  = altezza pressometrica



Tutti i punti sulla superficie libera sono alla pressione atmosferica

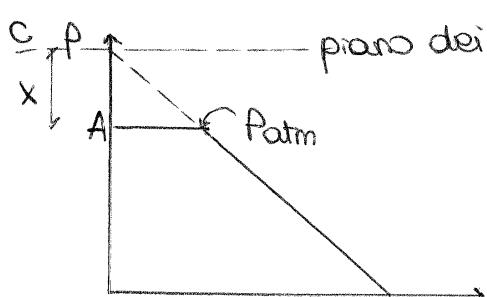
$$h_A = z_A + \frac{f_A}{\rho g} = z_A + \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

$$h_B = h_A \text{ per la legge di Stevin}$$

$$h_B = z_B + \frac{f_B}{\rho g} = z_A + \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

$$P_B = P_{atm} + \rho g (z_A - z_B)$$

← è lineare



piano dei carichi idrostatici assoluti

↓  
stiamo trattando  
la pressione assoluta

$P_{ass} = 0$  nel piano dei  
carichi idrostatici  
assoluti

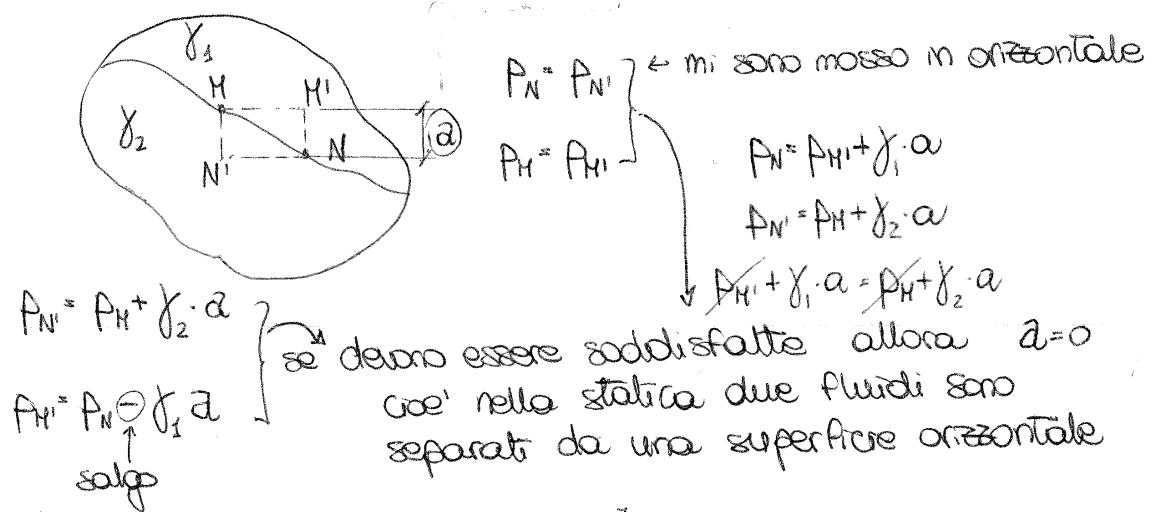
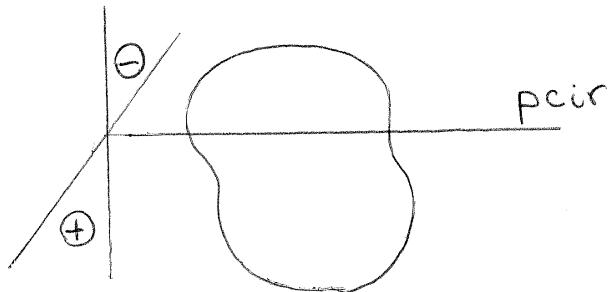
acqua : 10,33 m

Mercurio : 0,76 m

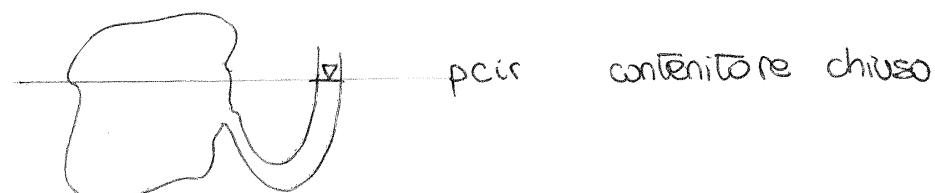
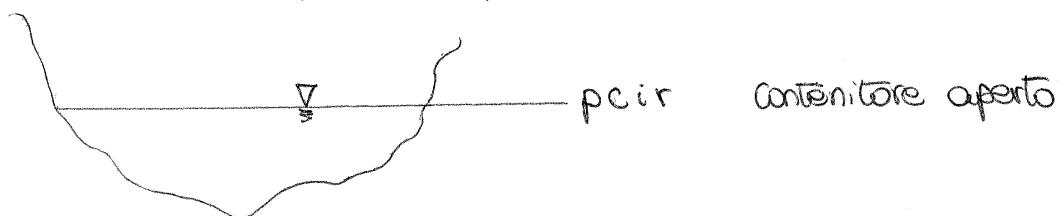
$$h_C = (z_A + x) + 0$$

$$h_A = z_A + \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

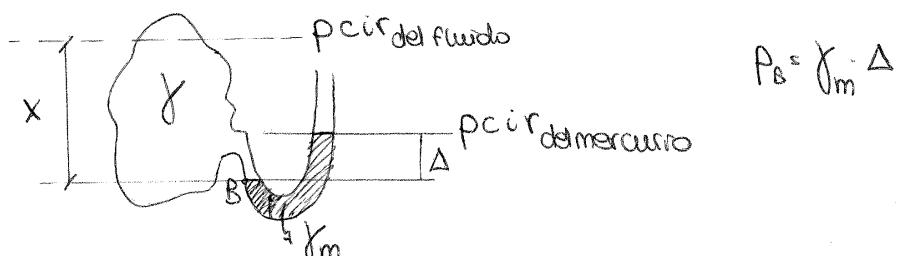
$$h_A = h_C$$



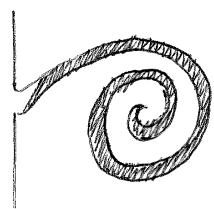
Misura della pressione [pag. 38]



Per individuare il pcir uso il manometro a mercurio  
cioè serve per sapere la pressione almeno in un punto



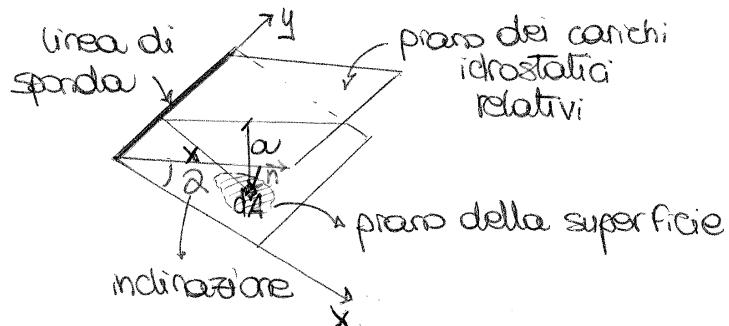
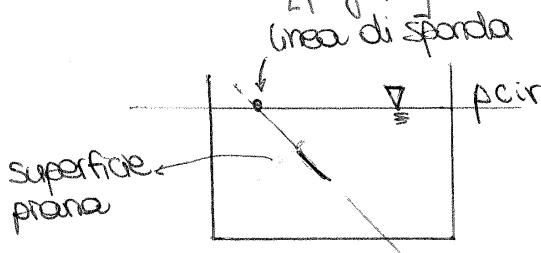
## Manometri metallici



Misurano la pressione nel baricentro dello strumento

Manometro di Bourdon

Risultante spinta esercitata su una superficie piana immersa in fluidi fermi [pag. 43]



$\vec{s}$  spinta esercitata dal fluido sulla superficie

- $\vec{s}$  • direzione perpendicolare alla superficie
- $\vec{s}$  • verso
- modulo → prendiamo dA avremo  $p dA = \gamma dA$   
 $\int p dA = \int \gamma dA = \gamma \int dA = \gamma M = \gamma A$   
 $\int \gamma dA = \gamma \sin^2 \alpha \int x dA = \gamma \sin^2 \alpha M = \gamma \sin^2 \alpha x_G A$

$$|\vec{s}| = \int_A \gamma \sin^2 \alpha x dA = \gamma \sin^2 \alpha \int_A x dA = \gamma \sin^2 \alpha M = \gamma \sin^2 \alpha x_G A$$

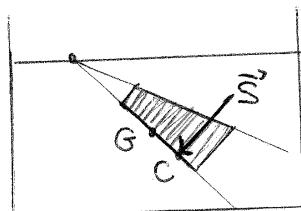
A momento statico

$\sin^2 \alpha x_G = a_g$  affondamento del baricentro

Quindi  $\gamma \sin^2 \alpha x_G A = \gamma a_g A = p_g A$   
pressione nel baricentro della superficie

$$|\vec{s}| = p_g \cdot A$$

• punto di applicazione o CENTRO DI SPINTA



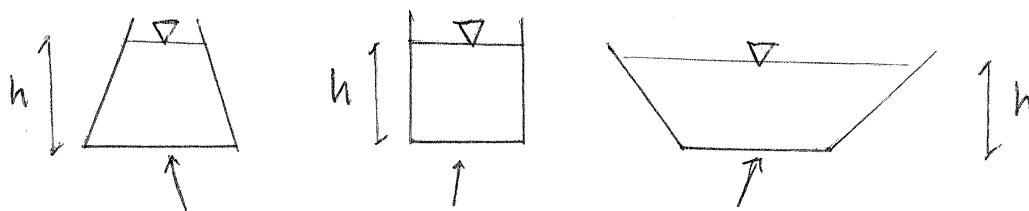
C = centro di spinta  $C \neq G$

■ trapezio delle pressioni

Tanto più la superficie tende ad essere parallela al  $p_{air}$   
tanto più c si avvicina a G

Paradosso

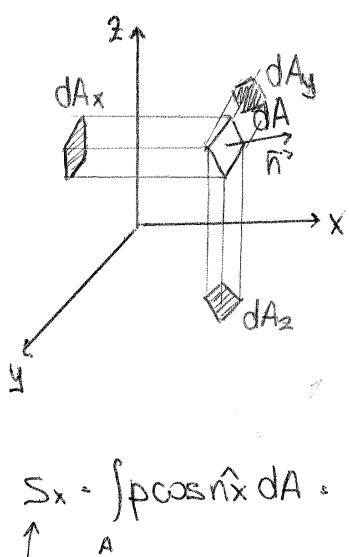
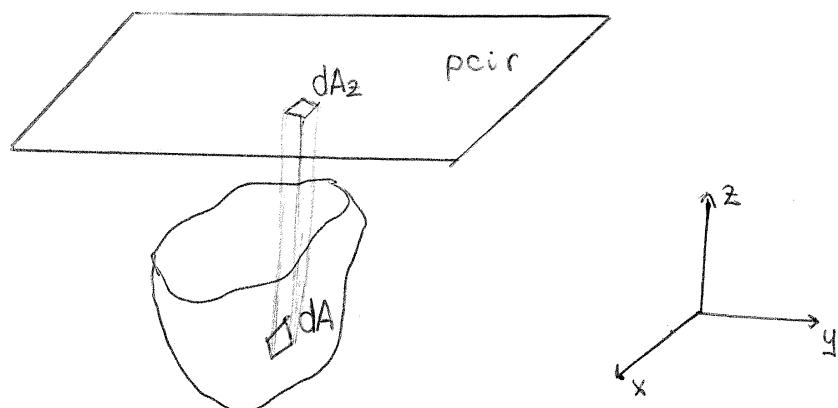
Conta il piano dei carichi e non il volume d'acqua



da sollecitazione c' è sempre  
la stessa perché  
il piano dei carichi c' è sempre  
alla stessa altezza  $h$

SUPERFICIE CURVA: risultante spinta esercitata da un fluido fermo

[pag. 17]



$p_dA$  sarà normale alla superficie  $\vec{n}$

Componente lungo asse x:  $p_dA \cos \hat{n} \hat{x} = dS_x$   
asse y:  $p_dA \cos \hat{n} \hat{y} = dS_y$   
asse z:  $p_dA \cos \hat{n} \hat{z} = dS_z$

$dA \cos \hat{n} \hat{x}$  è la proiezione  $dA$  sul piano  $x=0$   
e così via per gli altri

$$dA_x = dA \cos \hat{n} \hat{x}$$

$$S_x = \int p \cos \hat{n} \hat{x} dA = \int p dA_x$$

sprinta totale  
del fluido sulla  
superficie curva  
lungo x

$dA_x, dA_y, dA_z$  sono superfici piane

ci riportiamo alla regola

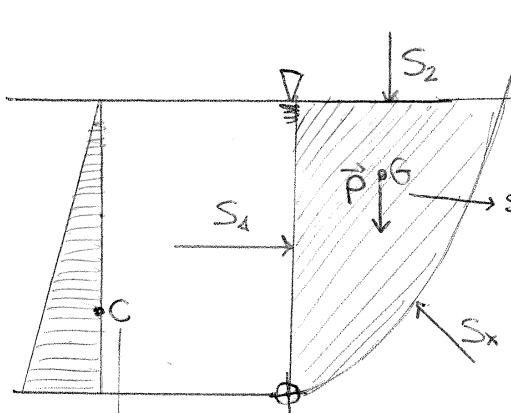
$$S_x = \int h g_x A_x$$

$$S_y = \int h g_y A_y$$

$$S_z = \int h g_z A_z$$

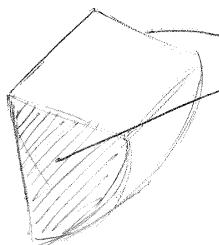
$\int$  affond. = pressione baricentro

Trovare spinta su una paratorta  $\uparrow T$



scelgo questo volume con superfici piane e una curva  
 $\vec{P} + \vec{F}_c = 0$  equazione globale

sta a  $\frac{2}{3}$  del piano delle pressioni  $\gamma \cdot h$



non le studiamo perché sono identiche e opposte

$$\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_x = 0$$

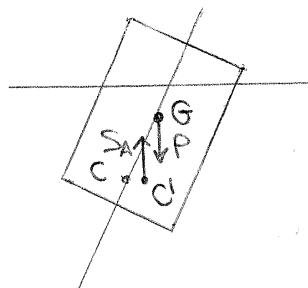
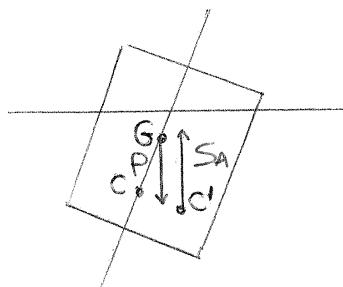
$$\vec{S}_x = -(\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2)$$

conosco  
la forza  
peso

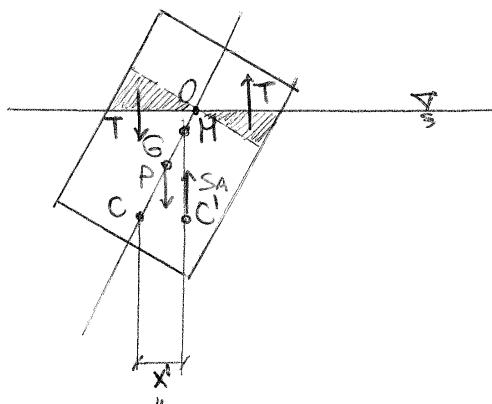
$S_2 = 0$  perché non c'è fluido, c'è posta sul  
piano dei carichi  
idrostatici relativi

facilmente calcolabili con le  
formule

- G sopra C: si crea coppia che fa tornare indietro il galleggiante



Si crea invece una coppia che tende a far inclinare ancora di più il corpo  
(Se c' si sposta di poco)



spostamento del  
centro di carena

M = metacentro

Se M non cade fra C e G allora tutto va bene e l'equilibrio è stabile

$\bar{CM} > \bar{CG}$  eq. stabile

$\bar{CM} < \bar{CG}$  eq. instabile

$\bar{CM}$  = altezza metacentrica del corpo

### Calcoliamo $\bar{CM}$

Il corpo si è ruotato intorno al punto O → c'è un triangolo immerso  
che prima non c'era  
Si crea una coppia T  
dovuta alla spinta  
d'archimede del triangolo  
che entra

La coppia T ha traslato C in C'

# CINEMATICA DEI FLUIDI [pag. 75]

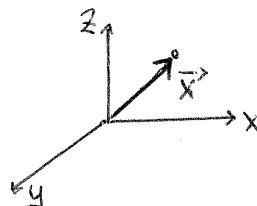
vuole descrivere il moto dei fluidi

## APPROCCIO LAGRANGIANO

Una massa fluida è composta da più particelle, si vuole descrivere la traiettoria che ogni particella compie.

$$\vec{x} \rightarrow (x, y, z)$$

vettore che punta in ogni istante alla posizione della particella.



$$x = x(t, x_0, y_0, z_0)$$

$$y = y(t, x_0, y_0, z_0)$$

$$z = z(t, x_0, y_0, z_0)$$

Come evolvono nel tempo le coordinate  $x, y, z$  (coordinate di  $\vec{x}$ ) rispetto ad una condizione iniziale  $(x_0, y_0, z_0)$

Descrivere per tutte le particelle e per tutte le possibili condizioni iniziali la variazione della traiettoria di ciascuna particella.

Approccio immediato, poiché c'è analogia con il corpo solido.

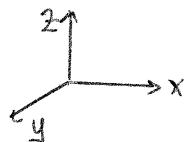
Approccio immediato, poiché c'è analogia con il corpo solido.  
(usato per i processi di trasporto nei fluidi)

## APPROCCIO EULERIANO

Il concetto di particella all'interno di un fluido non è chiaro, soprattutto per tempi lunghi e' impossibile studiare il moto di queste traiettorie.

Interessa il campo di moto: come è fatto il vettore velocità in tutti i punti della massa fluida (eventualmente variabile nel tempo) indipendentemente dalle particelle della massa fluida

$$\vec{v} \rightarrow (u, v, w)$$



$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

Definire il campo di moto in ogni punto ed in ogni istante

$\Delta$  Indipendentemente dalle traiettorie

Sommo e sottraggo al numeratore la quantità

$$\vec{A}_p = \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t) + \vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_B(t)$$

velocità in B all'istante  $t$   
che muovendo un'altra  
particella

$$= \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s}$$

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left( \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|$$

MOTO DELLA VELOCITÀ DELLA  
PARTICELLA

L'accelerazione per EULER è'

$$\boxed{\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|}$$

lagrange

e' la  $\vec{v}$  fissa nello spazio  
non la  $\vec{v}$  legrangiana

elemento aggiuntivo, tiene  
conto di come la velocità cambia  
per lo spazio, moltiplicato per il modulo  
della velocità

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|$$

Accelerazione  
locale

Accelerazione  
convettiva come la  
particella sta esplorando  
il campo di moto attorno al punto

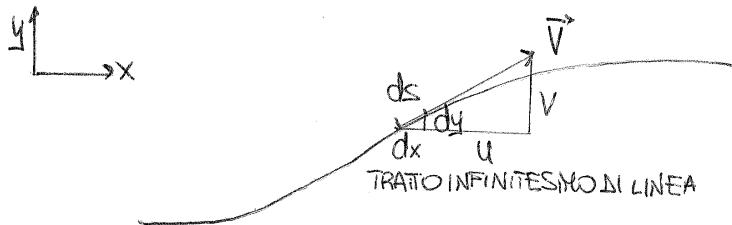
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}| \quad \text{riferita alla coordinata curvilinea } s$$

DERIVATA EULERIANA

(derivata sostanziale)

Riferita a x,y,z

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w$$



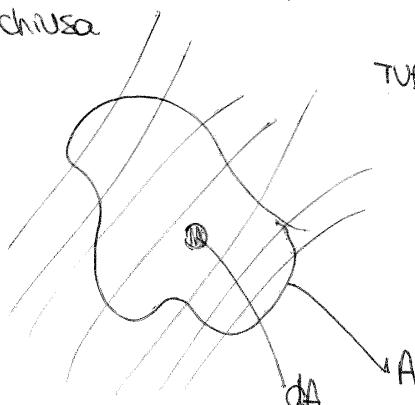
Equazione della linea di corrente all'istante  $t_*$

Il triangolo  $\tilde{v}uv$  è simile al triangolo  $dx dy ds$  quindi  $\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

### PORTATA [pag. 79]

Consideriamo una qualunque linea chiusa all'interno della massa fluida e considereremo in un tempo  $t_*$  tutte le linee di corrente che si appoggiano alla linea chiusa



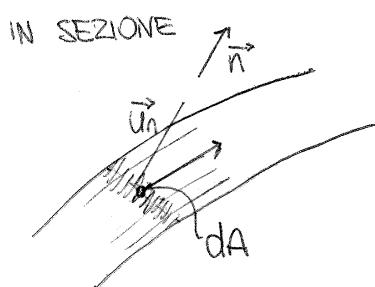
TUBO DI FLUSSO

formato dalle linee di corrente che passano per tutti i punti della linea chiusa

Prendendo una generica superficie  $dA$  all'interno del tubo di flusso, posso definire la portata infinitesima

$$dQ = v_n dA \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}^* dA$$

componente di velocità normale alla superficie  $dA$

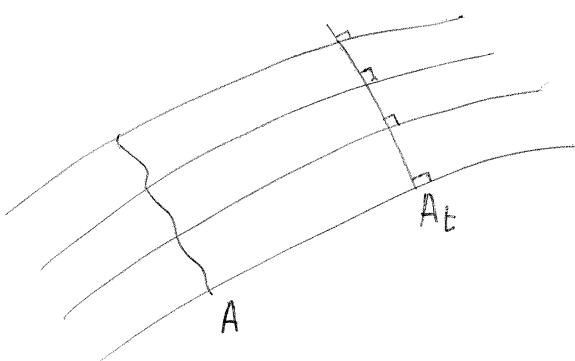


$$Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n}^* dA$$

Volume di fluido che passa nell'unità di tempo attraverso il tubo generico di sezione  $dA$

sezione trasversale

Se sceglio la superficie  $A$  normale in ogni punto alle linee di corrente



$$Q = \int_A \vec{V} dA \quad \leftarrow \text{posso eliminare il prodotto scalare } \vec{V} \cdot \vec{n}^* = V$$

### VELOCITÀ MEDIA [pag. 79]

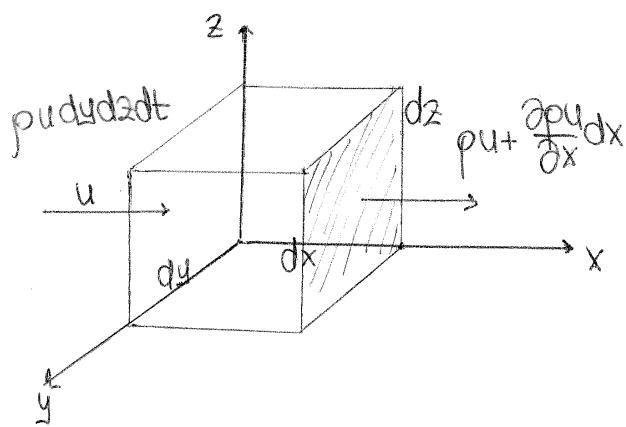
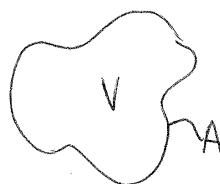
$$U = \frac{Q}{A} = \frac{Q_{A_t}}{A_t}$$

# EQUAZIONE DI CONTINUITÀ [pag. 81]

4 principi fondamentali:

- principio di conservazione della massa
- principio di conservazione dell'energia
- principio di conservazione della quantità di moto
- principio di conservazione del momento della quantità di moto

I Non si formano mai buchi all'interno della massa fluida



piano yz ( $x=0$ )

massa che entra attraverso la superficie nel tempo

$\rho u dy dz dt$

portata in volume  
(velocità per area)

Volume che entra

massa che esce attraverso la superficie

$$\left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy dz dt$$

INCREMENTO di  $p$  e  $u$

$\frac{\partial u}{\partial x} dx \rightarrow$  come la velocità cambia per unità di  $x$ , per il  $dx$  in questione

Non stiamo nell'ipotesi di

fluido incompressibile

⚠ Il segno di  $u$  esprime se la portata è entrante o uscente

## OSSERVAZIONI

- Moto permanente: niente cambia nel tempo, tutte le derivate parziali rispetto al tempo sono nulle

$$\text{div}(\vec{pV}) = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

- $p = \text{costante}$

$$\text{div}(\vec{pV}) = 0$$

NB costante è nel tempo  
uniforme è nello spazio  
uniforme e costante: stesso  
valore nello spazio e nel tempo

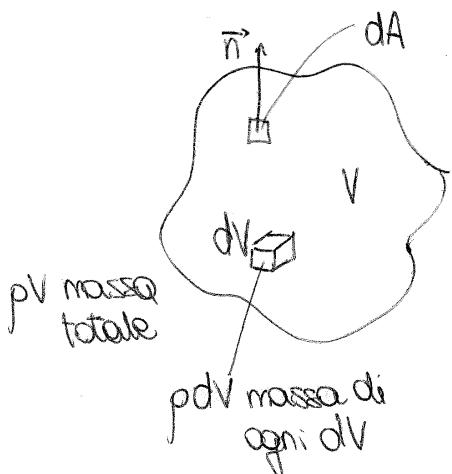
- $p = \text{cost}$

$p = \text{uniforme}$

$$p \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad \text{div}(\vec{V}) = 0$$

(si parla di campo solenoidale)

## EQUAZIONE DI CONTINUITÀ IN FORMA GLOBALE [pag. 83]



$$\vec{V} \cdot \vec{n} dA = \vec{v}_n dA$$

portata che nel generico istante attraversa  $dA$

Volume:  $\int \vec{V} \cdot \vec{n} dA dt$

$$\text{massa: } \int_A p \vec{V} \cdot \vec{n} dA dt$$

$$\int_V pdV = dt \int_A p \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$$\frac{d}{dt} \int_V pdV dt = \int_V \frac{\partial}{\partial t} pdV dt = \left[ \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV \right] dt$$

variazione di massa totale per effetto dei cambiamenti di densità

Poiché la variabile di integrazione ( $dV$ ) non dipende dalla variabile di derivazione

Per il principio di conservazione della massa

$$dt \int_A p \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \left( \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV \right) dt$$

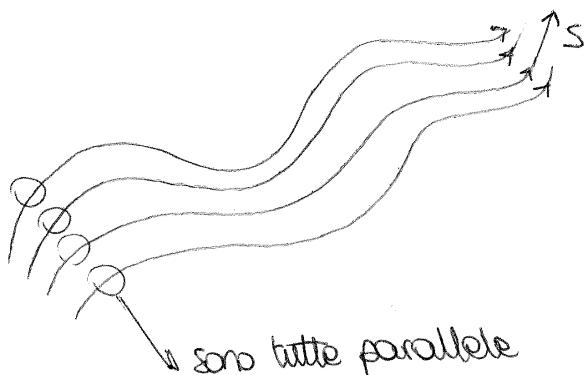
$$\int_A p \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV$$

EQUAZIONE INTEGRALE  
DI CONTINUITÀ

## CORRENTI [pag. 85]

le traiettorie sono parallele tra di loro

C'è una sola direzione principale del moto



Possiamo individuare una coordinata  $s$  tale che si possa studiare come le varie grandezze varino con  $s$  e con il tempo  $t$ .

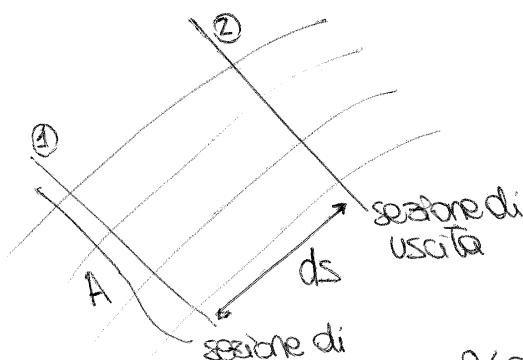
$$Q = Q(s, t) \quad \text{portata}$$

$$U = U(s, t) \quad \text{velocità media}$$

$$P = P(s, t) \quad \text{pressione}$$

$$A_t = A_t(s, t) \quad \text{area trasversale}$$

Si può riscrivere il principio di conservazione della massa



$$\textcircled{1} \quad p Q dt$$

$$\textcircled{2} \quad \left( p Q + \frac{\partial p Q}{\partial s} ds \right) dt$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} = \frac{\partial(pQ)}{\partial s} ds dt$$

$$A ds = \text{volume}$$

$$p A ds = \text{massa}$$

$$-\frac{\partial p A}{\partial t} ds dt \quad \text{variazione di massa nel tempo}$$

$$\frac{\partial(pQ)}{\partial s} ds dt - \frac{\partial(pA)}{\partial t} ds dt$$

$$\boxed{\frac{\partial(pQ)}{\partial s} + \frac{\partial(pA)}{\partial t} = 0}$$

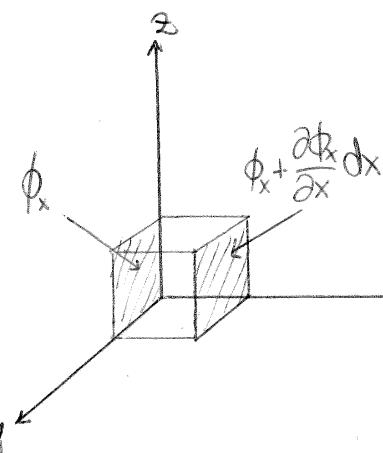
EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI CONTINUITÀ DELLE CORRENTI

IDRAULICA

## Equazione chiave della meccanica

$$\vec{R} = m\vec{A}$$

### EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI (pag. 91)



Volumetto  $dxdydz$

Vogliamo scrivere  $\vec{R} = m\vec{A}$  riferito al volumetto

$$d\vec{R} = dm\vec{A}$$

Vogliamo scriverlo sotto un punto di vista euleriano

$$d\vec{R} = \boxed{A} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \leftarrow \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$\boxed{dm} = pdxdydz$

$\boxed{d\vec{R}}$  forze di massa → all'interno del volumetto c'è contenuto una massa

forze di superficie

forze di massa:  $\vec{F}_p dxdydz$

che agiscono sul volumetto

massa volumetto

forze di superficie:

$\phi_x$  · sforzo che agisce sulla superficie di normale x

$$\underbrace{\phi_x dz dy}_{\text{superficie}} - (\phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx) dz dy = - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dxdydz$$

Risultante delle forze di superficie sulle due facce di normale x

sulle superficie di normale y:  $- \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy dxdz$

sulle superficie di normale z:  $- \frac{\partial \phi_z}{\partial z} dz dxdy$

→ EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA

$$F_p dxdydz - \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dxdydz = pdxdydz (\vec{A})$$

$\downarrow$   
 $dR$

Piano reologico

$$\begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \dots \\ \vdots & & \\ \frac{\partial w}{\partial z} & \dots \end{pmatrix}$$

stato  
tensionale

gradien<sup>e</sup>  
spaziale di

funzione dipendente  
dai tipi di fluidi

considerati → noi ci occuperemo di  
fluidi • newtoniani  
• perfetti

$$\boxed{\begin{aligned} p(\vec{F} - \vec{A}) &\dots \\ \frac{\partial p}{\partial t} &\dots \\ p = p(\dots) &\dots \end{aligned}}$$

## FLUIDI PERFETTI (pag. 93)

Per i fluidi perfetti la curva reologica è una curva sottratta  
non ci sono mai tensioni tangenziali

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz} \end{pmatrix} \quad \phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz}$$

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

lo stato di tensione  
si riduce da un  
tensorre ad uno scalare  
(come nella statica)

← Equazione di Euler (1775)

5 incognite, 5 equazioni  
sistema risolvibile

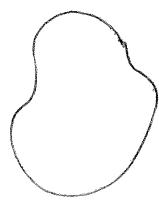
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\vec{v}) = 0$$

$$p = \text{cost}$$

Il fluido perfetto o' stato inventato da Euler

Idrogeno ed Eva liquido si comportano come fluidi perfetti

Sufficiamo di riuscire a risolvere l'equazione



$u, v, w, p, \rho \leftarrow$  verrà a conoscenza di tutto ciò  
in ogni istante e in ogni  
punto  $\rightarrow$  troppe informazioni da leggere  
e organizzare

Per descrivere un decimetro cubo di fluido  
devo sapere  $u, v, w, p, \rho$  di tantissimi punti ( $10^3$ ) per ogni lato del  
cubetto.

Per evitare di avere così tante informazioni che mi ampliano il problema  
utilizzo l'integrale  $\rightarrow$  serve per buttare via molte informazioni

$$\int \rho (\vec{F} - \vec{A}) = \int \text{grad} \Phi$$

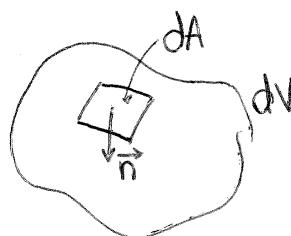
Roviamo a fare l'integrale direttamente sull'equazione indefinita  
della dinamica

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \rho \vec{A} dV + \int_V \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) dV$$

## a Teorema di Green

$$\int_V \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) dV = - \int_A (\vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z) dA$$

describe come  
si comporta la  
superficie del  
fluido

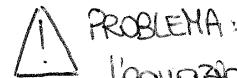


$$Q = - \int_A \vec{\Phi}_n dA$$

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \quad \text{equazione indefinita della meccanica dei fluidi}$$

Quale fluido si considera?

- fluido perfetto
- fluido newtoniano
- fluido non newtoniano



PROBLEMA:  
l'equazione è fortemente  
non lineare

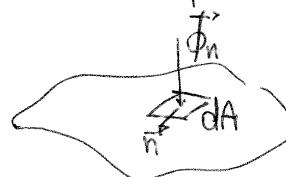
Si integra nello spazio:

$$\int \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \int \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}}_2$$

Per il teorema di Green può essere scritto

$$\boxed{A} \int \vec{F}_n dA$$

$\hookrightarrow$  sforzo che localmente agisce sull'elemento  $dA$  di normale  $n$



$$\boxed{B} \int_V \rho \vec{A} dV - \int_V \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dV - \int_A \rho \vec{V} v_n dA$$

$$\boxed{C} \int_V \rho \vec{F} dV$$

EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

$$\boxed{\int_V \rho \vec{F} dV - \int_V \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{V} v_n dA = - \int_A \vec{F}_n dA}$$

equazione indefinita  
della dinamica di  
qualsiasi fluido

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{F}_c = 0$$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e + (-\vec{M}_u) = 0}$$

↓                    ↓  
entrante      uscente

■ Se il moto è permanente:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$I = - \int \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV = 0$$

rimane

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0 \quad \text{l'equazione diventa molto più abbordabile}$$

■ Non abbiamo fatto ipotesi sul tipo di fluido

■ Non abbiamo fatto ipotesi sul tipo di moto

## RASSUMENDO

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}$$

Sapere tutto sul fluido, in ogni punto,  
in ogni istante, si separano i casi:

- fluido perfetto ...
- fluido newtoniano ...
- fluido non newtoniano ...

Integrazione

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

eq. globale della meccanica dei fluidi

Non conosco il comportamento locale  
del fluido

dunque la direzione  $\vec{S}$   $A_s = \frac{Du}{Dt} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial s^2}$

dunque la direzione  $n$   $A_n = \frac{u^2}{r} \leftarrow$  accelerazione centripeta

dunque la direzione  $b$   $A_b = 0 \leftarrow$  perché non abbiamo accelerazione sul piano osculatore

$$\frac{\partial}{\partial s} (z + \frac{P}{\gamma}) = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (z + \frac{P}{\gamma}) = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{u^2}{r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} (z + \frac{P}{\gamma}) = 0$$

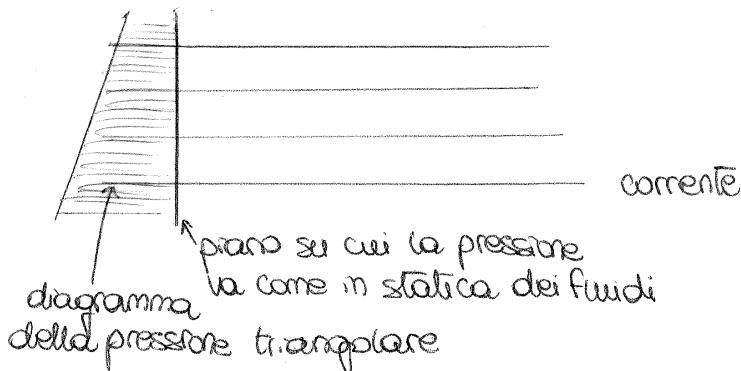
$\uparrow$   
in questo caso è costante  $h = z + \frac{P}{\gamma}$  carico pressometrico  
Questa parte descrive la statica

Quando le traiettorie sono rettilinee e parallele  $\rightarrow$  CORRENTI

con le correnti il raggio del cerchio osculatore  $r \rightarrow \infty$  e quindi la seconda equazione è nulla

$$\frac{\partial}{\partial n} (z + \frac{P}{\gamma}) = 0$$

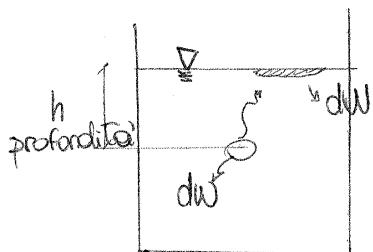
sul piano individuato dalla normale e binormale, il carico pressometrico rimane costante



$$h = \text{cost su } \{ \vec{n}, \vec{b} \}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}mu^2}{mq} = \boxed{\frac{u^2}{2g}}$$

↑  
Energia cinetica per unità di peso



$$p = f \cdot h$$

prendo l'elementino  $dV$  e lo distribuisco sulla superficie



Non c'è costata alcuna energia per spostare  $dV$  in superficie. Il lavoro per farlo è zero perché si è spostato qualcosa che aveva risultante nulla.

Il fluido ha guadagnato energia a scapito della pressione, che in superficie è diventata zero.

$$\frac{pdVgh}{pdVgf} = h \quad \rightarrow \text{energia che tiene conto della pressione per unità di peso}$$

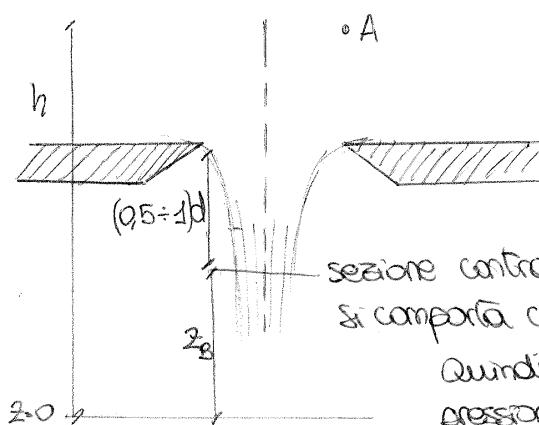
$$p \cdot fh \rightarrow f = \frac{fh}{f} = h$$

$$z + \frac{p}{f} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost}$$

↓      ↓      ↓  
 energia potenziale per unità di peso    energia che tiene conto della pressione per unità di peso    energia cinetica per unità di peso

d'energia meccanica si conserva  $\rightarrow$  deriva dalle ipotesi

Nel moto permanente di un fluido perfetto pesante incompressibile l'energia meccanica specifica si mantiene costante lungo ogni traiettoria



sezione contratta dove il fluido in movimento si comporta come una corrente

quindi tutti i punti sul bordo hanno pressione nulla

$$h = z + \frac{p}{\rho g} = z$$

siccome abbiamo la corrente anche tutti i punti del fluido all'interno avranno la stessa  $h$  e perciò pressione nulla

- consideriamo il fluido perfetto
- abbiamo campo della gravità
- fluido incompressibile  $p = \text{cost}$  perché il serbatoio è piccolo
- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  moto permanente perché il foro è piccolo e quindi il fluido nel serbatoio varrà lentamente

Applichiamo Bernoulli  $H_A = H_B$

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{u_B^2}{2g}$$

$u_A^2$  molto piccolo

$$(z_A + \frac{p_A}{\rho g}) - z_B = \frac{u_B^2}{2g}$$

$\rightarrow u_B = \sqrt{2g[h_s + (0,5 \div 1)d]}$

$h - z_B = h_s + (0,5 \div 1)d$   
 ↑  
 profondità del  
 foro rispetto al livello  
 del fluido

$$\text{Area del foro} \quad A = \pi \frac{d^2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{A_c}{A} \approx 0,6$$

tutto questo è stato fatto in funzione di un punto casuale A, poterà essere fatto per ogni punto

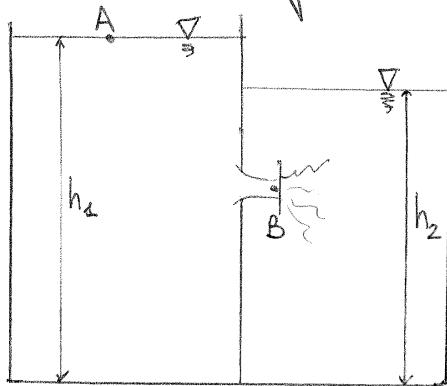
Tutti i punti sulla sezione contratta hanno stessa velocità  $u_B$

Area della sezione contratta è 0,6 volte l'area del foro da dati sperimentali

$$Q = A_c \cdot u_B$$

→ PORTATA

## ■ Getto sommerso pag. 118



$$H_A = H_B$$

$$z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g}$$

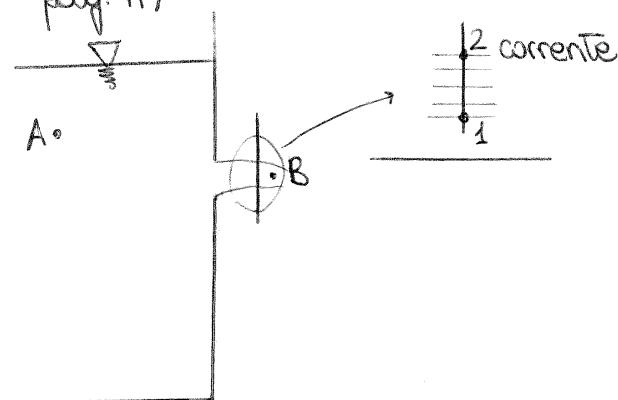
$$h_1 \quad \quad \quad h_2$$

$$Q = C_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$A_c \quad \quad \quad U_B$$

$$C_c : A$$

## ■ pag. 119



Ci aspettiamo che il carico pressometrico sia costante

$h = \text{cost}$

$$\begin{cases} z_1 \neq z_2 \\ P_1 = P_2 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} h = \text{cost} ?! \text{ Impossibile} \\ \end{array} \right.$$

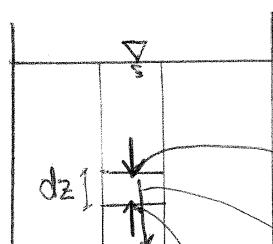
E' sbagliata l'ipotesi che le traiettorie siano rettilinee e parallele  
possiamo dire che ci sia una sezione contratta ma non abbiamo  
traiettorie rettilinee quindi il carico pressometrico non e' costante

Vogliamo pero' applicare Bernoulli come facciamo?  
sul contorno la pressione e' nulla

$$z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g} \rightarrow \text{incognita}$$

trascurare  
perche' siamo  
a basse  
velocità

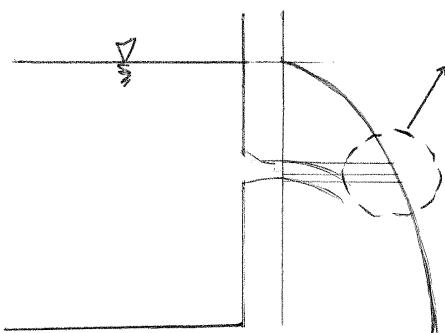
dobbiamo scoprire quanto  
vale per poter applicare la formula



Elementino fermo perché le forze si equilibrano

queste 3 forze si fanno  
equilibrio

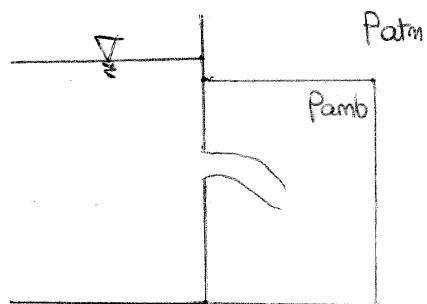
Per trovare la portata bisogna fare il valor medio della velocità



se in questo intorno possiamo approssimare la parabola ad una retta, così e' più facile trovarne il valor medio

se si ha un getto piccolo abbastanza distante dal piano dei carichi, si può prendere la velocità nel baricentro

Se ci fosse stata la pressione ambiente anziché la pressione atmosferica avremmo



$$\bullet P_{amb} > P_{atm} = 0$$

$$U_B = \sqrt{2g(h_s - z_A - \frac{P_{amb}}{\rho})} \quad \text{diminuisce portata}$$

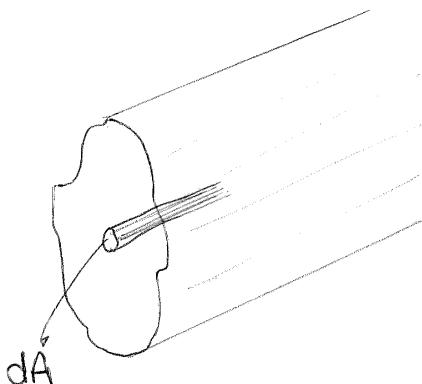
$$\bullet P_{amb} < 0$$

$$U_B = \sqrt{2g(h_s - z_A + \frac{P_{amb}}{\rho})} \quad \text{aumenta portata}$$

Avremo una portata tanto più piccola quanto maggiore è la pressione

## ESTENSIONE TEOREMA DI BERNOULLI alle CORRENTI (pag. 137)

Il teorema di Bernoulli si concentra sulle singole traiettorie  
Sarebbe bello avere una formula con la velocità media e non la  
velocità in un singolo punto.



• Moto permanente

$$\frac{\partial pQ}{\partial s} + \frac{\partial pA}{\partial t} = 0$$

||  
0

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$\int dQ =$  peso del fluido nell'unità di tempo

valgono tutte le ipotesi  
del teorema di  
Bernoulli

$$\int dQ H = dP$$

↓  
potenza attraverso il tubo  
infinitesimo

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (\text{Bernoulli})$$

Integro

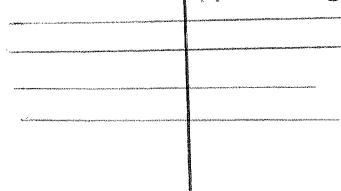
$$\int_p^P dP = \int_Q^A \int_A A \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) u dA$$

$dQ = \text{velocità} \cdot \text{area infinitesima}$

$p$        $Q$       costante

La potenza che transita in una corrente è costante

$A =$  sezione trasversale



$$\int_A \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) u dA + \int_A \frac{u^2}{2g} u dA =$$

$$= \int_A hQ + \int_A \frac{u^3}{2g} dA$$

Q si inventa un parametro di Coriolis

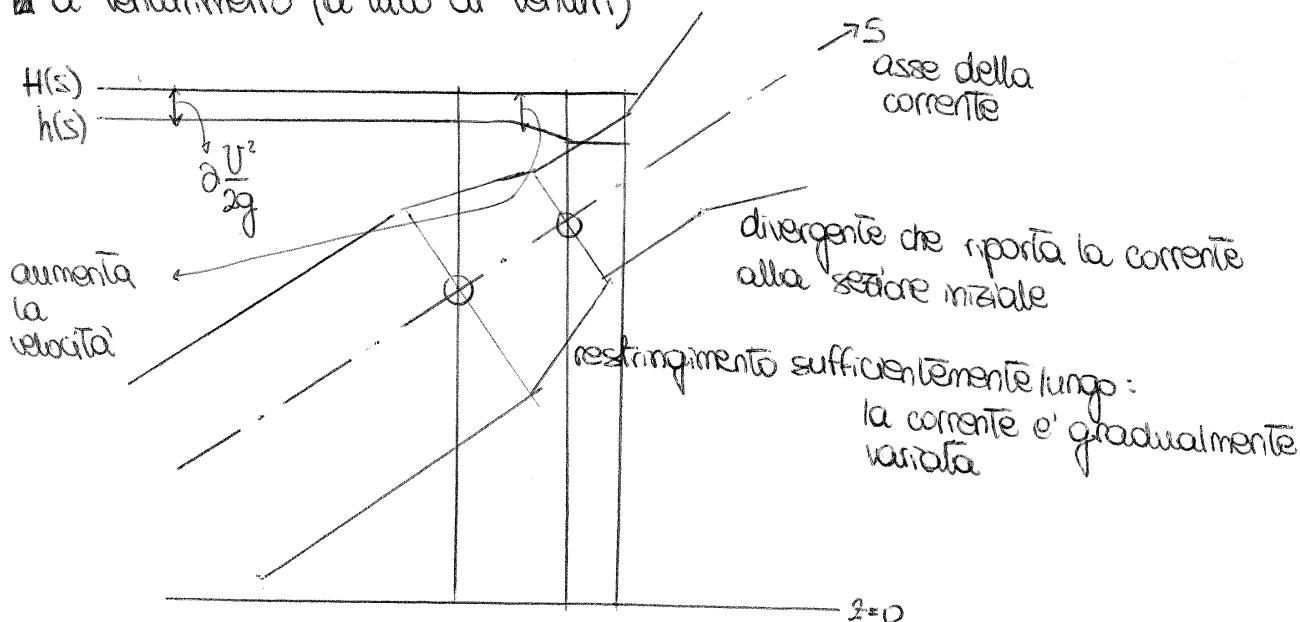
$$\bar{Q} = \frac{\int u^3 dA}{U^3 A}$$

$$U = \frac{Q}{A}$$

velocità media

## APPLICAZIONI DELL'ESTENSIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI (pag. 123)

### a venturimetro (a tubo di venturi)



Valgono le ipotesi di Bernoulli

① fluido perfetto

zona sufficientemente corta per poter ritenere le dissipazioni piccole e trascurabili

② fluido incompressibile

$$p = \text{cost}$$

③ moto permanente  $\rightarrow$  imposto da noi

④ campo della gravità

le traiettorie si mantengono pressoché rettilinee e parallele, hanno un angolo di convergenza piccolo

Posso dire che il carico totale  $H$  sostanzialmente è costante.

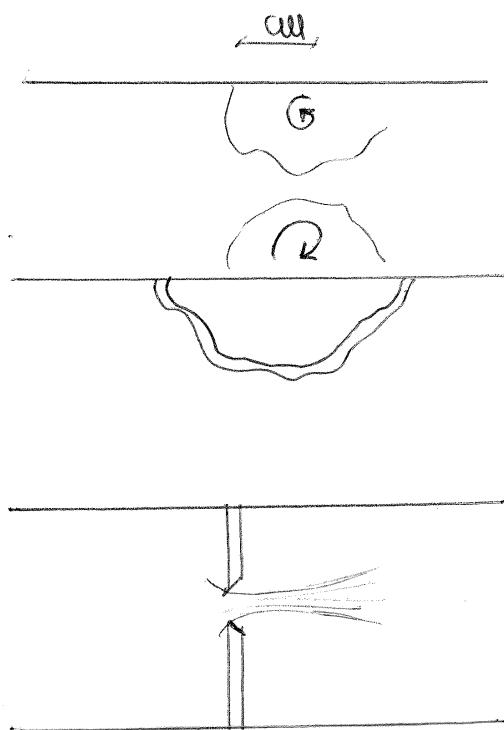
Il carico pressometrico differisce per il termine cinetico

1° tratto:  $H(s) \parallel h(s)$  con una distanza pari a  $2 \frac{U^2}{g}$

2° tratto: il carico pressometrico  $h(s)$  diminuisce poiché la corrente sta guadagnando Energetica

3° tratto (a sezione costante):  $h(s)$  costante

## ■ Metodi alternativi

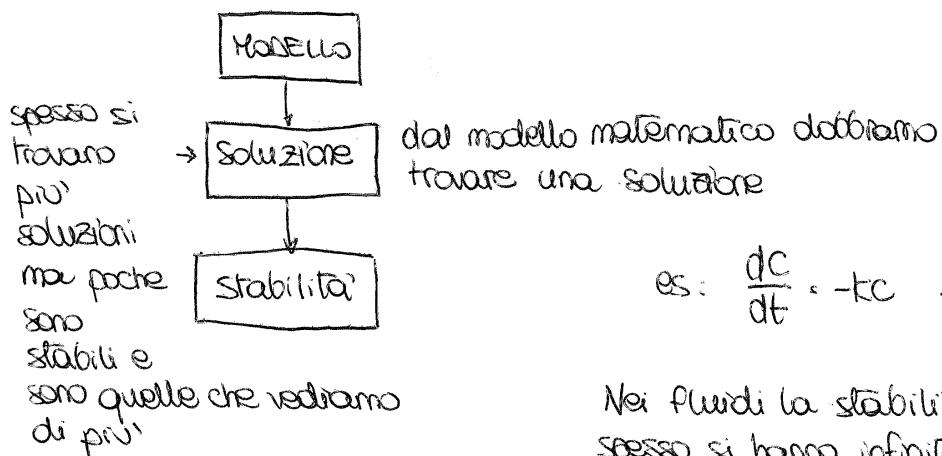


Si forma una sezione contratta.

## INSTABILITÀ DI KELVIN-HELMHOLTZ

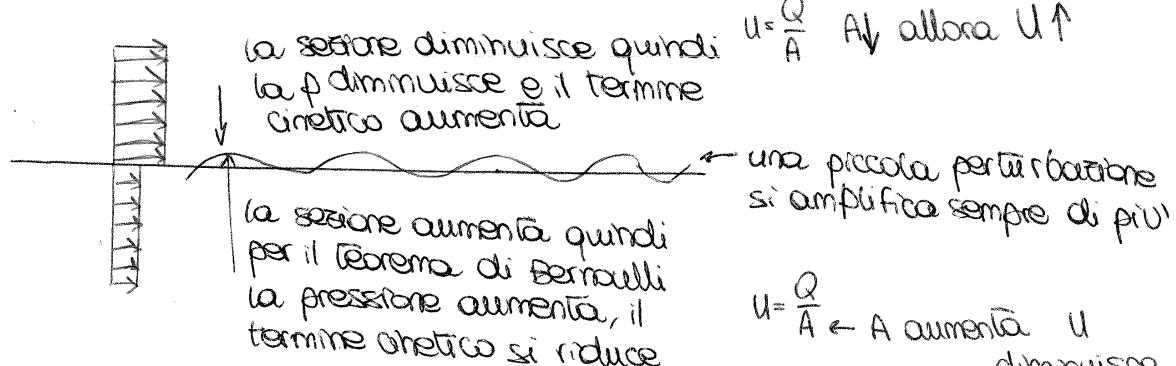
Concetto di instabilità.

Abbiamo un modello



Nei fluidi la stabilità è importante perché spesso si hanno infinite soluzioni e bisogna cercare quelle stabili

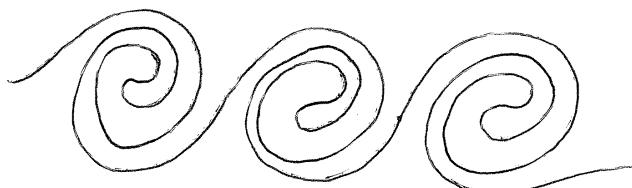
Due fluidi perfetti di differenti velocità



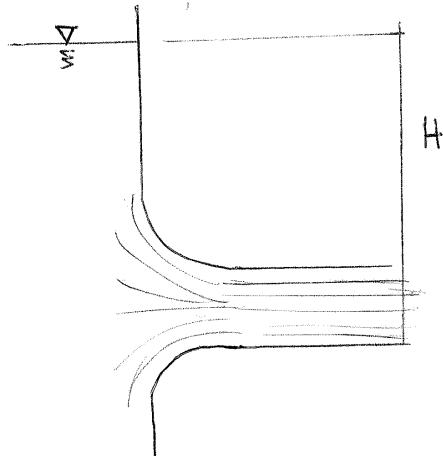
Piani

$$H = z + \frac{P}{\rho} + \lambda \frac{U^2}{2g} = \text{cost}$$

se questo diminuisse la  $P$  aumenta



Se avessimo avuto un raccordo  $Q = \Omega \sqrt{2gh}$



## EQUAZIONE DI NAVIER - STOKES (per un fluido gerenco)

Volumen finito

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \rightarrow \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p$$

Fluidi perfetti

vale per tutti i fluidi  $\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{H}_e - \vec{H}\vec{u} = 0$

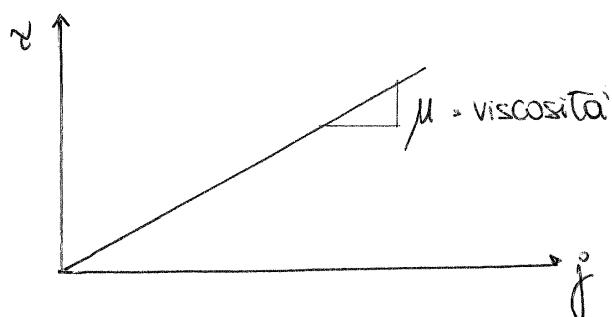
Nel caso di un fluido perfetto

$$\vec{F}_c = \int \vec{\phi}_n dA = \int p \cdot \vec{n} dA = \vec{\Pi}$$

da questa abbiamo dedotto il teorema di Bernoulli

teorema di Bernoulli esteso alla corrente

fluidi Newtoniani  $\vec{\gamma} \neq 0$



$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \mu \text{grad}(\text{div } \vec{u}) \leftarrow \text{Equazione di Navier-Stokes}$$

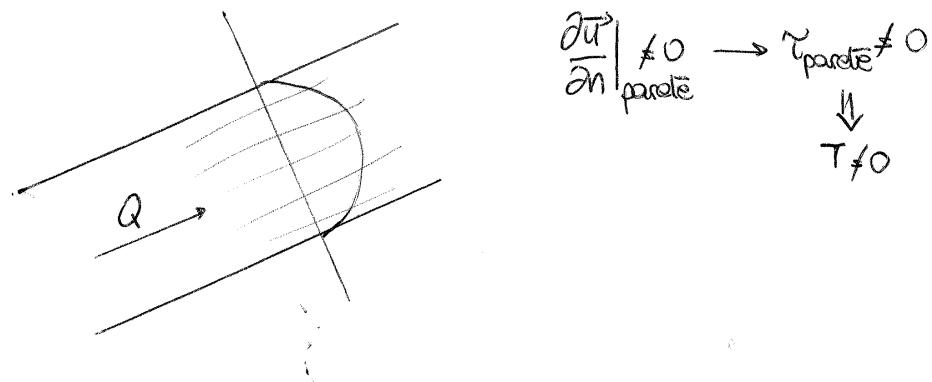
Laplaciano  
somma delle  
derivate seconde

Per i fluidi incompressibili  $\text{div } \vec{u} = 0$

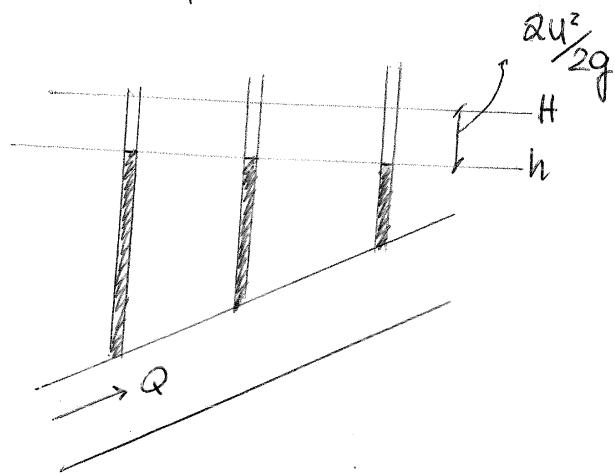
$$\boxed{\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}}$$

$\vec{A}$  = accelerazione convettiva non lineare che rende l'equazione complessa

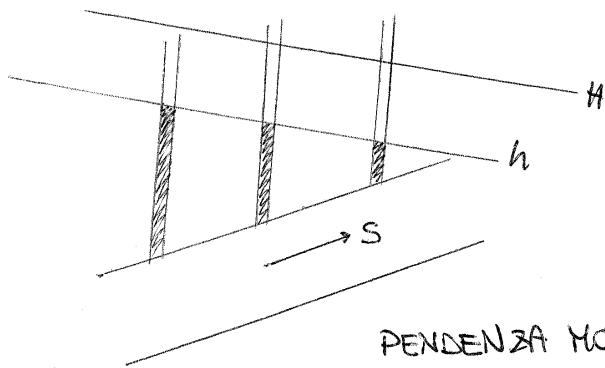
## PENDENZA MOTRICE



Per un fluido perfetto



Fluido reale newtoniano: per muoverlo serve energia perché lui ne butta via per attrito



## PENDENZA MOTRICE

$$i(s) = - \frac{dh}{ds} \rightarrow H(s) = H_0 - \int_0^s i(s) ds$$

$\Omega = \text{cost}$  / unif.

$$i(s) = - \frac{dh}{ds} \quad \downarrow i \neq i(s)$$

$$H(s) = H_0 - s \cdot i$$

$$\vec{M}_u = \vec{F}_e \text{ perche' } p_u = p_e \quad Q_u = Q_e \quad u \text{ e' velocità media}$$

Averemo quindi

$$T_{\text{bordo}} = -\gamma A L s m \alpha + p_1 A - p_2 A = -\gamma A \cancel{\frac{(z_2 - z_1)}{L}} + p_1 A - p_2 A$$

$$T_{\text{bordo}} = -\gamma A \left[ (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) \right] = -\gamma A \left[ h_1 - h_2 \right] = i \cdot L$$

perche'  $h$  e' semplicemente traslato rispetto a  $H$

$$|T_{\text{bordo}}| = -\gamma A i L$$

$$|T_{\text{bordo}}| = P_{\text{fluido}} \cdot i$$

$$\tau_o = \frac{\gamma A i L}{K P} = \frac{\gamma A i}{P} = f_i R$$

pendenza motrice  
raggio idraulico =  $\frac{A \text{ area sezione}}{P \text{ perimetro sezione}}$

$$\boxed{\tau_o = f_i R}$$

- Ogni volta che incremento la pendenza motrice aumentano le tensioni
- A seconda del tipo di fluido  $\gamma \uparrow \tau_o \uparrow$

Che significato fisico ha il RAGGIO IDRAULICO?

Se io faccio una sezione rettangolare o di qualcosa formo otengo comunque

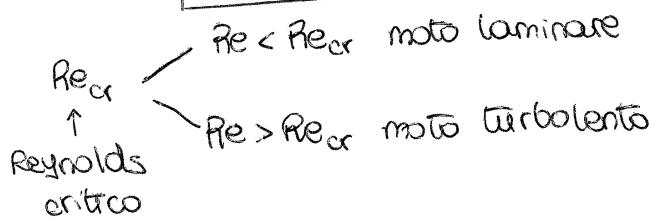
$$\tau_{o,\text{medio}} = f_i R$$

$R = \frac{A}{P}$  ← tanto più è grande l'area tanto più portata ce' ↑  
 se io ho ○ abbiamo più area e meno perimetro rispetto a tutte le altre figure. Meno perimetro si ha meno superficie si ha su cui ci sono gli altri da un indicazione dell'efficienza idraulica

## Numero di Reynolds

Serve per distinguere se siamo in un moto laminare o turbolento

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$



$\rho$  = densità

$U$  = scala tipica della velocità

$L$  = scala tipica lunghezza

$\mu$  = viscosità

Il numero Re è adimensionato: il problema ha sempre una scala tipica  $\rightarrow$  mosca, aeroplano

- ↓      ↓
- dimensione piccola    • dimensione grande
- velocità piccola    • velocità grande

$$Re \propto \frac{F_{inertia}}{F_{viscosa}}$$

$$F_{viscosa} = \mu \frac{U}{L} L^2 = \mu U L$$

Esempio: fiume



Voglio avere un'idea delle forze viscose sul fondo

→ voglio solo un'ordine di grandezza

$$F_{visc} = \gamma_{visc} A$$

$$\mu \frac{du}{dy} \sim \frac{U_m}{L}$$

$$F_{visc} = \mu \frac{U}{L} \cdot A \cdot \mu \frac{U}{L} L^2 = \mu U L$$

$$F_{inertia} = \int \frac{\partial p v}{\partial t} dV$$

volume

velocità

$$F_{inertia} = \rho L^3 \frac{U}{t} = \rho L^2 U^2$$

$L, U, L/t$

scala tipica del tempo  
scala tipica delle velocità

$$Re = \frac{\rho L^2 U^2}{\mu L} = \frac{\rho L U}{\mu}$$

scala tipica lunghezza

Tiene conto di quanto sono più importanti le forze di inerzia rispetto a quelle viscose

$$\rho \frac{U_0^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x^1} + \gamma \frac{\partial h'}{\partial x^1} = - \frac{\rho U_0^2}{L} \frac{\Delta u'}{\Delta t^1} + \mu \frac{U_0}{L^2} \nabla^2 u'$$

Divido tutto per  $\rho \frac{U_0^2}{L}$

$$\frac{\partial p'}{\partial x^1} + \left( \frac{\gamma g}{U_0^2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x^1} = - \frac{\Delta u'}{\Delta t^1} + \frac{\mu}{U_0 L \rho} \nabla^2 u'$$

← Equazioni dove tutte le cose sono adimensionate e variano tra 0 e 1

Nei coefficienti c'è legata la scala del problema studiato

$$\frac{1}{F_r^2} \quad \frac{1}{Re}$$

↑                   ↑  
Sono i numeri più importanti della meccanica dei fluidi

| Re  $\rightarrow 0$   $\Rightarrow$  Creeping flows

| Re  $\rightarrow \infty$   $\Rightarrow$  il termine viscoso non ha più valore e quindi i fluidi si comportano come fluidi perfetti

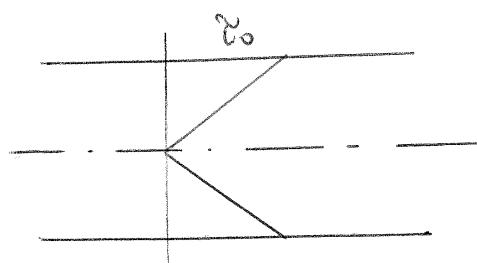
Un aeroplano ha Re molto grande quindi l'aria intorno si comporta come un fluido perfetto

### Moto laminare (pag. 180)

- Moti all'interno dei massi porosi : l'acqua si muove lentamente tra i pori dei terreni quindi si muove di moto laminare perché ha Re molto basso (acquiferi, giacimenti petroliferi)

- Processi di lubrificazione

- Sistema circolatorio



d'andamento delle tensioni tangenziali e lineare

$$u_{\max} \cdot \frac{\gamma i D^2}{16 \mu} \quad U = \frac{\gamma i D^2}{32 \mu} \rightarrow U_s = \frac{u_{\max}}{2}$$

corrente circolare in moto laminare

$$Q = U \cdot A = U \cdot \pi \frac{D^2}{4} = \frac{\gamma i D^4 \pi}{128 \mu}$$

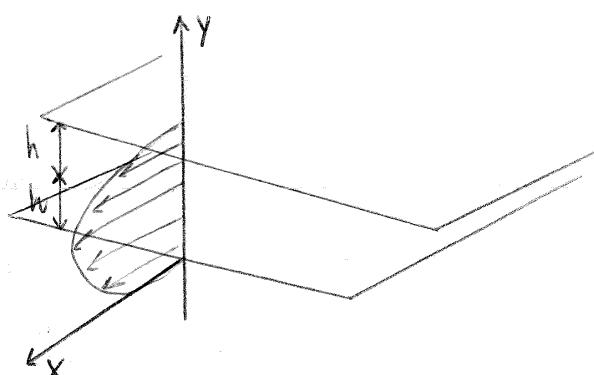
$$\frac{i = 128 \mu Q}{\pi \gamma D^4}$$

$\rightarrow$  in un moto laminare ogni volta che si dimezza il diametro del condotto, le dissipazioni sono 16 volte maggiori! ( $D^4$ )

pendenza motrice = energia che devo buttare dentro per spostare la corrente di un'unità di lunghezza

### EQUAZIONE DI POISSON

MOTO DEL FLUIDO ATTRAVERSO 2 LASTRE



lastre infinite quindi  
attraverso moto piano sul  
piano xy  
Moto laminare

Partiamo dall'equazione di Navier Stokes

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\text{Componente } x: \rho \left( \text{grad}(-gz) - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u$$

↑  
forza peso  
 $\frac{\partial}{\partial x} (-gz)$  componente lungo x

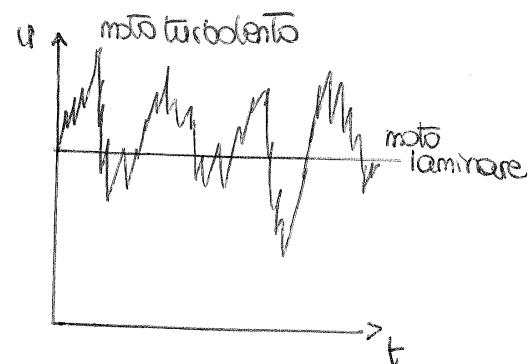
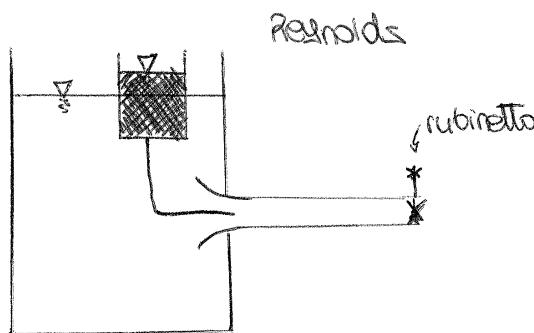
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \text{anche } w=0$$

c'è solo  
se il moto  
è verso  
ai sbarri  
studiando  
moto permanente

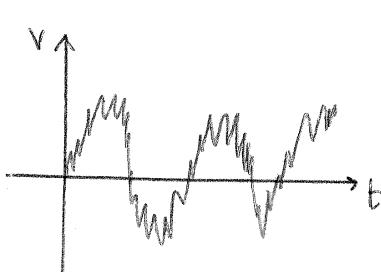
moto laminare  
non sempre la  
stessa velocità  
lungo x

Accelerazione  
Euleriana nulla

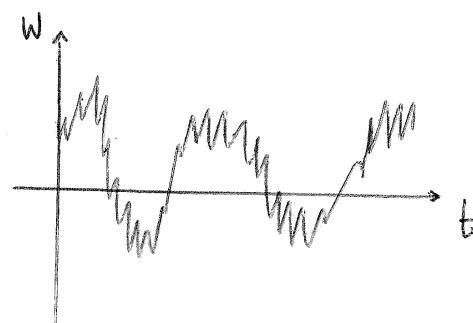
# MOTO TURBOLENTO



Misurando la velocità in un punto vedo che ci sono ondulazioni attorno ad un valore medio



oscilla attorno a 0



Tutte le grandezze che consideriamo oscillano in questo modo, sembrano variare a caso, in realtà seguono le equazioni di Navier Stokes ma è molto difficile risolverle.

- Ragioni:
- ingegneristiche
  - fisiche
  - speculatori

CARATTERISTI CHE GENERALI (pag. 188)

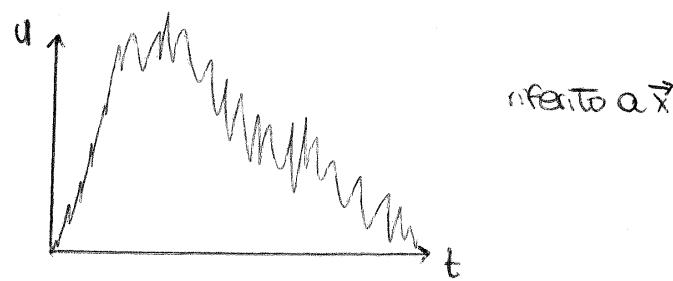
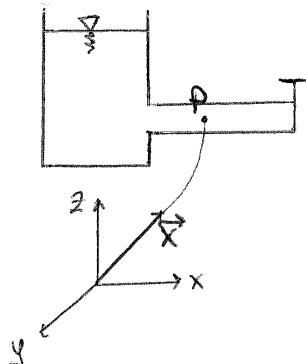
- Casualità
- Trasporto: enorme incremento del processo di trasporto.  
l'efficienza di un fluido turbolento dei processi di trasporto sono molto molto elevati [caffè, zucchero]
- Vorticità: moti rotatori incastriati l'uno dentro l'altro

$$\vec{w} = \text{rot} \vec{u}$$

↑  
vorticità

- Dissipazione: ci sono molte dissipazioni rispetto al moto laminare (ci si muore anche in direzioni che non servono)

Kolmogorov ha ipotizzato che la turbolenza sia un CAMPO STOCASTICO  
casuale



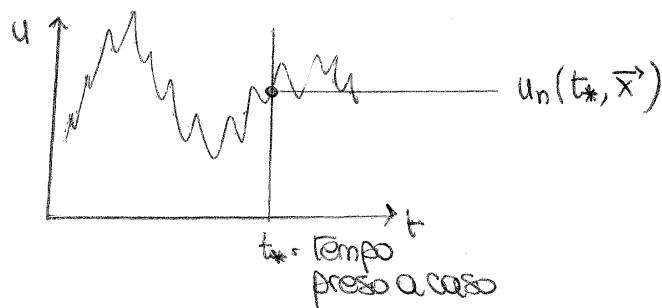
Se uno fa questo esperimento si ha una realizzazione (accadimento di un certo processo casuale) del campo stocastico

Per ogni punto dello spazio ed a ogni istante è come se qualcuno stesse lanciando un dado, in questo caso nel grafico ho considerato tanti lanci di un dado in un solo punto. P.

Possiamo fare tante realizzazioni di questo genere.

Guardando tante realizzazioni di un processo casuale posso con maggiore voltezza cercare di conoscere il fenomeno.

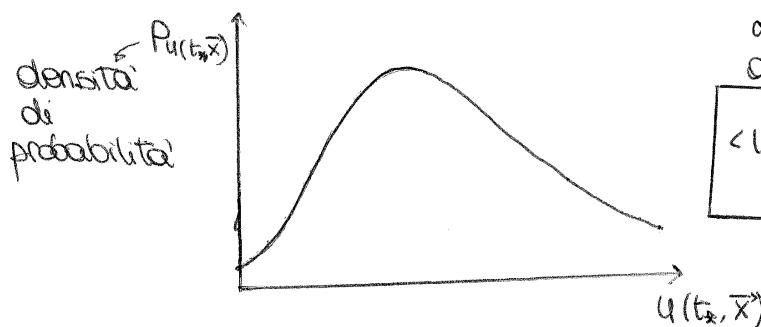
Ennesima realizzazione



Lo faccio per tutte le realizzazioni fino all'ennesima, sempre a  $t_*$  leggo  $u$

Ottengo:  $u_1, u_2, \dots, u_n$

con questi valori posso tracciare

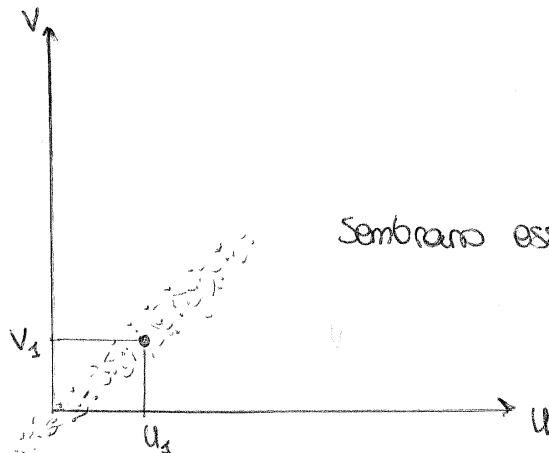


la media sarà la media di questa distribuzione

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u p_u du$$

media d'insieme

media di tutte le realizzazioni possibile del singolo processo



Sembra essere correlati tra loro

In questo caso

$\langle uv \rangle$  è molto diverso da 0

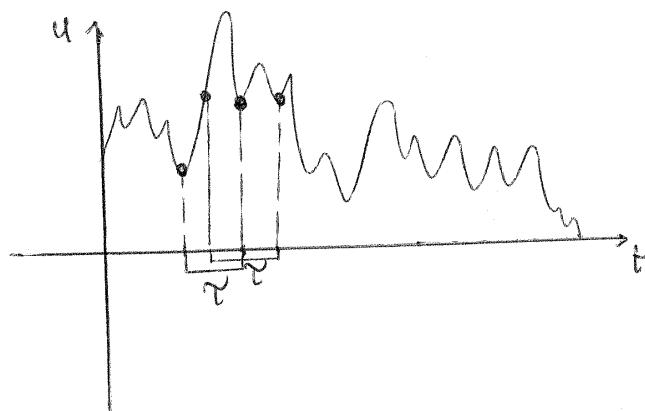
$$R_{uv}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2)$$



$$R_{uv}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau)$$

$$\frac{t_1 \quad t_2 \quad t_3}{\sim}$$

$R_{uv}(\tau) \rightarrow$  autocovarianza: stessa variabile, tempi diversi, distanti  $\tau$



$$u(t+\tau)$$

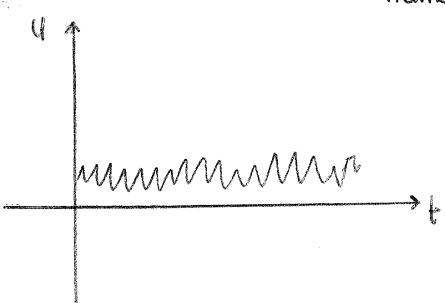
$$R_{uu}(\tau)$$



$$\langle uu \rangle$$

↑ numero molto grande

$$u(t+\tau)$$



sono più correlate del caso di prima

ma  $\langle uu \rangle$  è più basso di quello di prima!

Quando è che sono correlati questi due operatori

$$\left. \begin{array}{l} \langle \cdot \rangle \\ \overline{\cdot} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Teorema ergonico} \\ \text{se } \overline{f} < \infty \end{array}$$

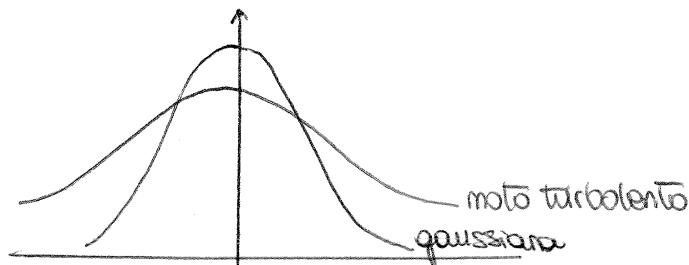
↓

$$T \langle \cdot \rangle = \overline{\cdot}$$

se la scala integrale è finita cioè esiste un tempo in cui la variabile smette di essere correlata

"da morte biologica" è il punto in cui la correlazione va a zero"

la turbolenza non segue la gaussiana



### EQUAZIONE DELLA MEDIA

$$\langle \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \rho(\vec{F} - \vec{A}) \cdot \text{grad} p - \mu \nabla^2 \vec{u} \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{array} \right.$$

convenzione degli indici ripetuti di Einstein:  $x_1, x_2, x_3$   
 $x \neq z$

$$\text{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_z}{\partial x_z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_z} \quad u_1, u_2, u_3$$

↓

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \rho(\vec{F} - \vec{A}) \cdot \text{grad} p - \mu \nabla^2 \vec{u} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right.}$$

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i$$

$$\downarrow \quad U_i = \langle \tilde{u}_i \rangle$$

$$\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \rangle = 0 \rightarrow \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0}$$

Equazione continuità  
Moto medio

Moto medio  $\overline{U}$   
 Moto turbolento  
 da TURBOLENZA  
 influenza tutto  
 il moto MEDIO

$$\tilde{u}_i = \langle u_i \rangle + u_i$$

$\downarrow$

Valore istantaneo      Valore medio

Equazione di continuità:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 & \text{MOTORE RIGIDO} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{MOTORE TURBOLENTO} \end{cases}$$

## EQUAZIONE DI REYNOLDS

Equazione di Navier-Stokes

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) \cdot \text{grad} \vec{p} - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

scritta con la notazione indiciale

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{ij} q$$

d<sub>ij</sub> indice  
di Kronecker  $\begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

q agisce solo sulla direzione 2  
 quindi i delta di Kronecker agisce  
 solo quando  $i=3$

$$\frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho + P) + \nu \frac{\partial^2 (U_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} q$$

Cercare l'equazione che governa solo il moto medio: effettuare la  
MEDIA D'INSIEME di tutta l'equazione

operatore lineare  
 basta fare la  
 media  
 d'insieme di  
 ogni membro  
 dell'equazione

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{\partial \langle U_i U_j \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - g f_{iz}$$

$$T \downarrow \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle U_i U_j \rangle) - g f_{iz}$$

$$\text{dove } \langle U_i U_j \rangle = - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \rho \langle U_i U_j \rangle \right]$$

TENSIONI OPPORTUNE

Il fluido poiché Newtoniano, risponde con delle tensioni tangenziali che incidono sulla velocità

TENSIONI VISCOSO

TENSORE Celerità di deformazione

$$\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

fanno nascere tensioni  $\langle U_i U_j \rangle$  perché incidono sulla velocità

sulla velocità

conta la struttura di covariante del moto turbolento (dovuta al fatto che  $U_i$  e  $U_j$  non sono indipendenti)

### TENSIONE DI REYNOLDS

Eredità della turbolenza sul moto medio

Materice

$$\rho \begin{pmatrix} \langle U_1 U_1 \rangle & \langle U_1 U_2 \rangle & \langle U_1 U_3 \rangle \\ \langle U_2 U_1 \rangle & \langle U_2 U_2 \rangle & \langle U_2 U_3 \rangle \\ \langle U_3 U_1 \rangle & \langle U_3 U_2 \rangle & \langle U_3 U_3 \rangle \end{pmatrix}$$

NB  $\langle U_i \rangle = 0$   
 $\langle U_j \rangle = 0$

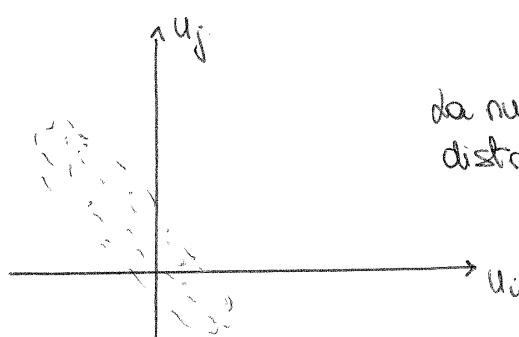
$\cancel{\Rightarrow}$   
non implica

$$\langle U_i U_j \rangle = 0$$

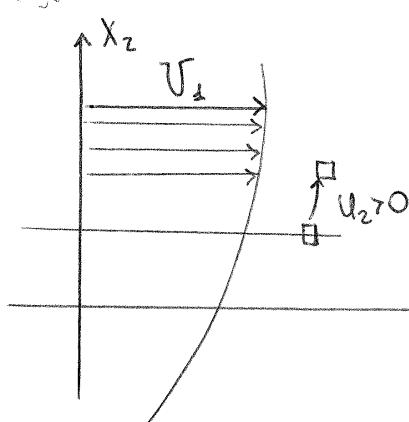
$$\text{and } \langle U_i U_j \rangle < 0$$

perché per  $U_i > 0$  si ha  $U_j < 0$   
 $U_i < 0$  si ha  $U_j > 0$

Graficamente



da cui si distribuiscono le velocità non è rotante

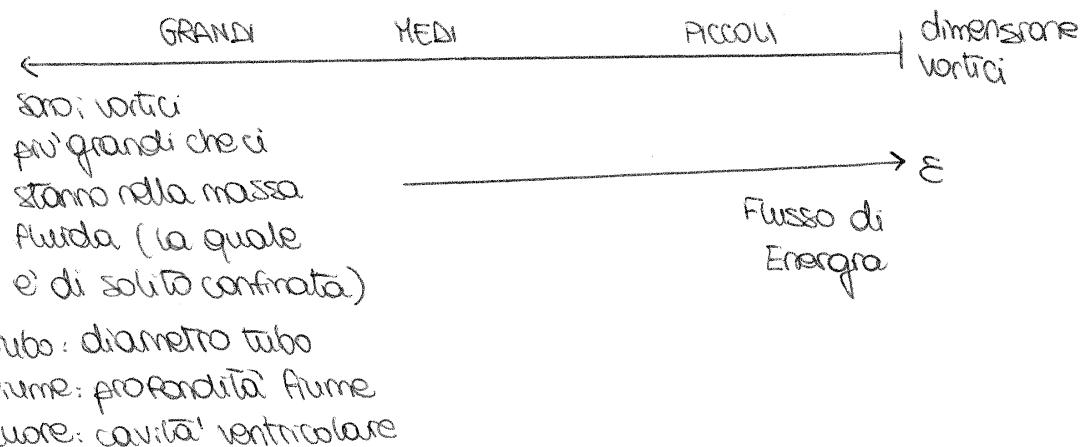


Mediamente il fluido si sta spostando lungo  $x_1$  seguendo quel profilo di velocità

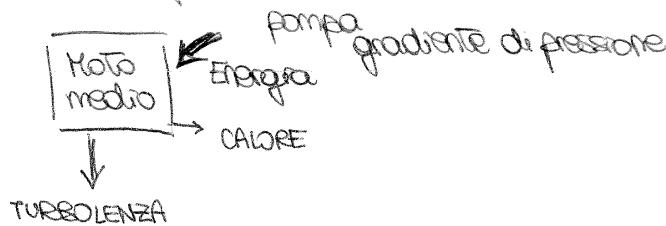
$$U_1 = U_1(x_2)$$

Fluido incompressibile, se la particella sale si ritrova in un mondo cinematico superiore, le altre particelle scenderanno (nasce  $U_2 < 0$ )

## TEORIA della CASCATA dei VORTICI o della FRAMMENTAZIONE TURBOLENTE (Landau)



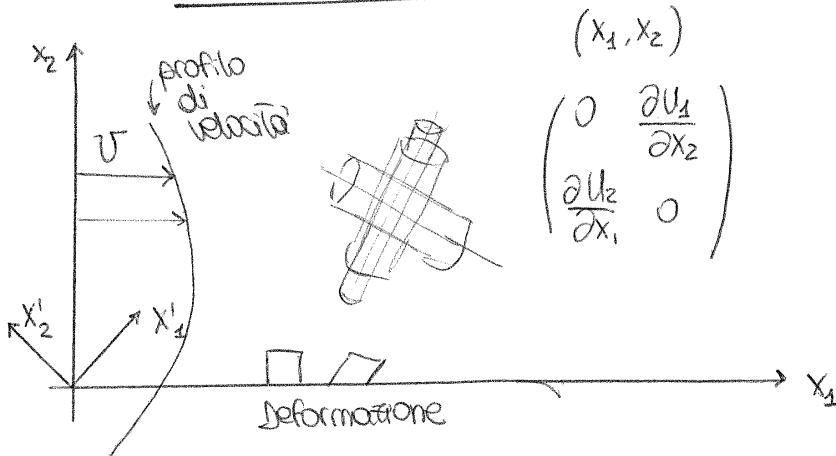
- \* le dimensioni dei vortici grandi sono dettate dalle condizioni al contorno
- \* hanno caratteristi che dipendenti dal problema
- \* prendono energia dal moto medio



Unici vortici che vedono tutto il profilo di velocità, apprezzando il gradiente  $\frac{\partial U}{\partial x_i}$  ed essendo in grado di portare via energia al moto medio

↳ Mecanismo con il quale i vortici rubano energia al moto medio

### VORTEX STRETCHING



Diagonalizzando la matrice si sistema di riferimento rispetto al quale si hanno accorciamenti e allungamenti, non deformazioni

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}^{(x'_1, x'_2)}$$

## PROBLEMA DI CHIUSURA DELLA TURBULENZA

eq ( $U_i, p, \mu, \rho, \langle u_i u_j \rangle$ )

$\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x} ( \quad , \langle u_i u_j, u_u \rangle )$

dal punto di vista fenomenologico si spiega con i vortici: ogni vortice si lega con gli altri

VISCOSITÀ  
CINETICA

$$V = \frac{\mu}{\rho}$$

$H_2O$  ha  $V$  tra le più basse  
tra i fluidi naturali

## EQUAZIONE GLOBALE della DINAMICA

$$\langle \vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I}_l + \vec{R}_e - \vec{R}_u \rangle = 0 \quad \text{equilibrio}$$

forze      forze      irregole  
di      al      locali  
massa      contorno

Moto turbolento:

- $\vec{P}$  non cambia     $\langle \vec{P} \rangle = \vec{P}$
- $\vec{F}_c = \int_A \vec{\Phi}_n dA$      $\vec{\Phi}_n = \underbrace{\vec{\Phi}_n}_{<\vec{\phi}>} + \vec{\Phi}_n$   
 $<\vec{\phi}>$  media d'insieme

$$\vec{F}_c = \int_A (\vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_n) dA$$

$$\langle \vec{F}_c \rangle = \int_A \langle (\vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_n) \rangle dA = \int_A \langle \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_n \rangle dA = \int_A \langle \vec{\Phi}_n \rangle dA + \int_A \langle \vec{\Phi}_n \rangle dA = \int_A \langle \vec{\Phi}_n \rangle dA$$

le forze al contorno hanno sia componente normale che tangenziale

$$\int_A p dA$$

$$\mu \int_A \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dA$$

$$\cdot \vec{I} \cdot \int_V \frac{\partial \tilde{p} \tilde{U}}{\partial t} dV$$

$$\langle \vec{I} \rangle = \int_V \frac{\partial \tilde{p} \tilde{U}}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial \langle \tilde{p} \tilde{U} \rangle}{\partial t} dV = p \int_V \frac{\partial \langle \tilde{U} \rangle}{\partial t} dV = p \int_V \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} dV$$

fluido  
incompressibile     $p = \text{cost}$