NUMERO : 294 DATA : 28/05/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Barberis

MATERIA : Topografia + Esercitazioni

Prof. Cina

APPUNTI ED ESERCITAZIONI TOPOGRAFIA (CINA)

Potenziale della forza centrifuga $\vec{F_c}$

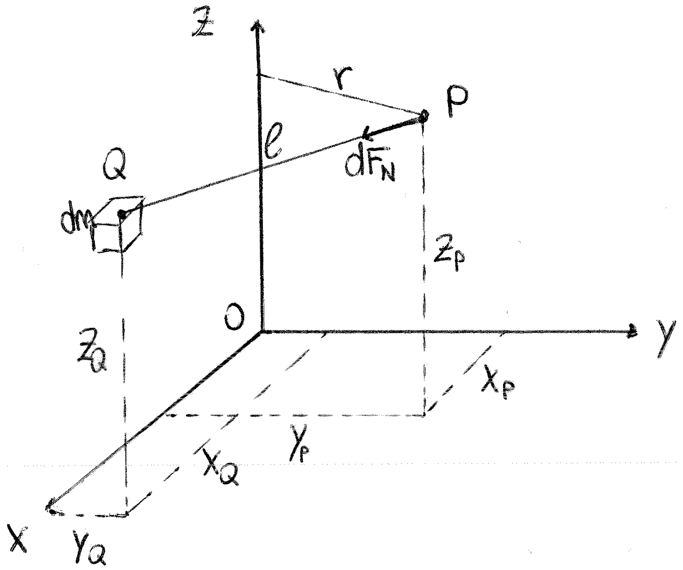
$$\frac{dv}{dr} = \vec{F_c} \qquad \vec{F_c} = m_0 \omega^2 r \quad \text{con } m_0 = 1$$

$$dv = \vec{F_c}\, dr$$

$$V = \int \omega^2 r\, dr = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\omega^2 r^2}$$

Potenziale forza newtoniana $\vec{F_N}$



δ = densità della terra

dm = elemento infinitesimo di massa

$d_m = \delta\, d_{volume}$

$m_0 = 1$

G = costante gravitazionale

$$dF_N = G \cdot \frac{dm \cdot m_0}{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = G \cdot \frac{dm}{\ell^2}$$

$$dF_N = \frac{\partial dV}{\partial \ell}$$ → derivata del potenziale relativo a dF_N rispetto alla direzione ℓ

$$\partial dV = dF_N\, \partial \ell$$

$$dV = \int dF_N\, d\ell = \int G \frac{dm}{\ell^2}\, d\ell = G \cdot \frac{dm}{\ell}$$

Il potenziale dovuto a tutta la massa della terra sarà:

$$\boxed{V = G \iiint \frac{d_m}{\ell}}$$ dove $d_m = \delta\, d_{volume}$

A meno di termini dell'ordine $\frac{1}{\sigma^4}$ il potenziale V' e' espresso da:

$$V' = \frac{G \cdot M}{\sigma}\left[1 + \frac{1}{2\sigma^2 M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3}{4\sigma^2}\,\frac{B-A}{M}\cos^2\varphi\cos 2\lambda\right]$$

M = massa della Terra

A, B, C = momenti di inerzia

Si puo' porre A = B poiche' la Terra ha forma molto prossima a quella di un solido di rotazione

$r^2 = x^2 + y^2 = \sigma^2\cos^2\varphi$

$U = V' + v$

$$\boxed{U = \frac{G \cdot M}{\sigma}\left[1 + \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{C-A}{M}(1 - 3\sin^2\varphi)\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{cost}}$$

Equazione dello SFEROIDE

La superficie così definita e' una superficie di rotazione e rappresenta lo SFEROIDE

Possiamo scrivere l'equazione dello sferoide in coordinate polari

$\boxed{\sigma = a(1 - \alpha\sin^2\varphi)}$

$\boxed{\alpha = \frac{a-c}{a}}$

a = semiasse equatoriale

c = semiasse polare

α = schiacciamento

Definiamo anche:

$\boxed{e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}} \sim \frac{1}{150}$ → eccentricità

$e'^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \sim \frac{1}{150}$ → prima eccentricità

Nel sistema geocentrico

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = a\left(1 - \alpha\frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

Considerando un ELISSOIDE DI ROTAZIONE

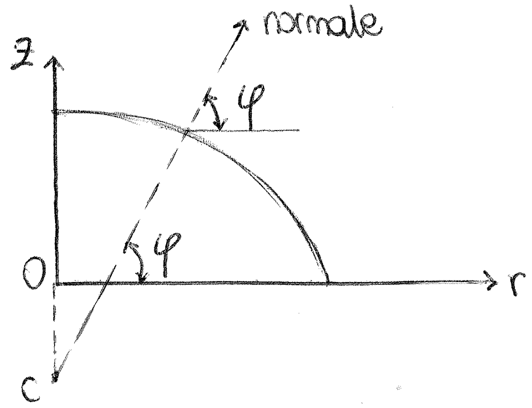
$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Si puo' dimostrare che a meno di termini in α^2 lo SFEROIDE coincide con l'elissoide di rotazione e quindi si puo' adottare quest'ultimo come superficie di riferimento

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 92

PASSAGGIO DA COORDINATE GEOGRAFICHE A GEOCENTRICHE

$$[\lambda, \varphi] \longrightarrow [X, Y, Z]$$



Ellisse meridiana

Equazione ellisse meridiana:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Coseni direttori di una curva $f(r,z) = 0$ sono proporzionali alle derivate parziali

$$\cos\varphi = k \frac{\partial f(r,z)}{\partial r} = k \cdot \frac{2r}{a^2} \qquad \sin\varphi = k \cdot \frac{\partial f(r,z)}{\partial z} = k \frac{2z}{c^2}$$

k ↑ costante di proporzionalità

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi = \frac{z}{r}\frac{a^2}{c^2} \qquad z = r\, tg\varphi \left(\frac{c^2}{a^2}\right) = r\, tg\varphi\,(1-e^2)$$

Sostituendo nell'equazione dell'ellisse meridiana la z otteniamo

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2 tg^2\varphi\,(1-e^2)^2}{c^2} = 1$$

$$r^2 + \frac{a^2}{c^2} r^2 tg^2\varphi\,(1-e^2)^2 = a^2 \qquad \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{(1-e^2)}$$

$$r^2 + \frac{1}{\cancel{(1-e^2)}} r^2 tg^2\varphi\,(1-e^2)^{\cancel{2}} = a^2$$

$$r^2\left(1 + tg^2\varphi\,(1-e^2)\right) = a^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{1+tg^2\varphi\,(1-e^2)} = \frac{a^2}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}(1-e^2)} = \frac{a^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - e^2\sin^2\varphi} = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

$$\boxed{r = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}}$$

PASSAGGIO DA COORDINATE GEOCENTRICHE A GEOGRAFICHE

$$\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{Y}{X} \qquad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}$$

$$\frac{a}{W} = N \qquad r = \sqrt{X^2+Y^2} = (N+h)\cos\varphi$$

$$\frac{Z}{r} = \frac{N(1-e^2)+h}{N+h}\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{N-e^2N+h}{N+h}\operatorname{tg}\varphi = \left(1-\frac{e^2N}{N+h}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

In prima approssimazione non consideriamo il termine $\left(1-\frac{e^2N}{N+h}\right)$ e troviamo:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{Z}{r}$$

troviamo N da $\quad N = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$

ora troviamo h da $\quad X = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda$

$$h = \frac{X}{\cos\varphi\cos\lambda} - N$$

Trovato h lo andiamo a sostituire in

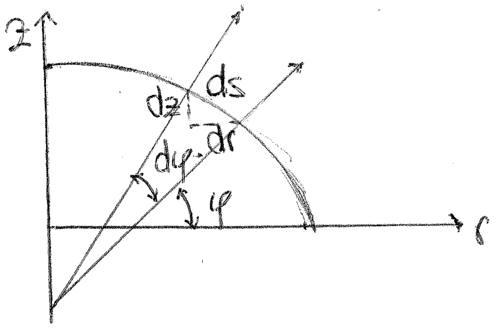
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{Z}{r\left(1-\frac{e^2N}{N+h}\right)}$$

E trovato φ procediamo a calcolare nuovamente N e poi h si continua la procedura iterativa fino a quando, posto un intervallo di convergenza ε

$$|\varphi_n-\varphi_{n-1}| < \varepsilon_\varphi \qquad e \qquad |h_n-h_{n-1}| < \varepsilon_h$$

Calcolo di ρ

Equazione di un meridiano: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ← ellisse



$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{dr^2 + dz^2}}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}$$

Dalle formule

$$r = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\cos\varphi}{W}$$

$$z = \frac{a\sin\varphi(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\sin\varphi(1-e^2)}{W}$$

Deriviamo entrambe le equazioni rispetto a φ

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-a\sin\varphi W + a\cos\varphi \frac{1}{\cancel{2}W}\cancel{2}e^2\sin\varphi\cos\varphi}{W^2} = -\frac{a\sin\varphi W^2 - ae^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{W^3} =$$

$$= -\frac{a\sin\varphi\,(W^2 - \cos^2\varphi e^2)}{W^3} = -\frac{a\sin\varphi(1-e^2\sin^2\varphi - e^2\cos^2\varphi)}{W^3} =$$

$$= -\frac{a\sin\varphi(1-e^2)}{W^3}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a\cos\varphi(1-e^2)W + a\sin\varphi(1-e^2)\frac{1}{\cancel{2}W}\cancel{2}e^2\sin\varphi\cos\varphi}{W^2} =$$

$$= \frac{a\cos\varphi(1-e^2)W^2 + a\cos\varphi\sin^2\varphi(1-e^2)e^2}{W^3} = \frac{a\cos\varphi(1-e^2)\left[W^2 + \sin^2\varphi e^2\right]}{W^3} =$$

$$= \frac{a\cos\varphi(1-e^2)\left[1 - \cancel{e^2\sin^2\varphi} + \cancel{e^2\sin^2\varphi}\right]}{W^3} = \frac{a\cos\varphi(1-e^2)}{W^3}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 92

GEODETICHE

Possiamo adottare la sezione normale come linea congiungente due punti A e B?
NO → tra i punti A e B la sezione normale non e' unica, ne esistono 2: quella ottenuta come intersezione con l'ellissoide del piano contenente la normale nel punto A e passante per B e quella ottenuta come intersezione dell'ellissoide con il piano contenente la normale nel punto B e passante per A.

Tracciamo una linea chiamata GEODETICA: linea appartenente alla superficie di riferimento che gode della proprieta' di avere in ogni suo punto la normale alla linea coincidente con la normale alla superficie.

Si puo' dimostrare che, se due punti non sono molto distanti tra loro la geodetica che li congiunge e' unica ed e' anche la linea di minor percorso

Un meridiano e' sia una sezione normale che una geodetica
L'equatore e' sia una sezione normale che una geodetica

Equazioni delle geodetiche

Data una superficie generica $\phi(x,y,z)=0$

coseni direttori della superficie: $\frac{1}{N}\frac{\partial\phi}{\partial x}$; $\frac{1}{N}\frac{\partial\phi}{\partial y}$; $\frac{1}{N}\frac{\partial\phi}{\partial z}$

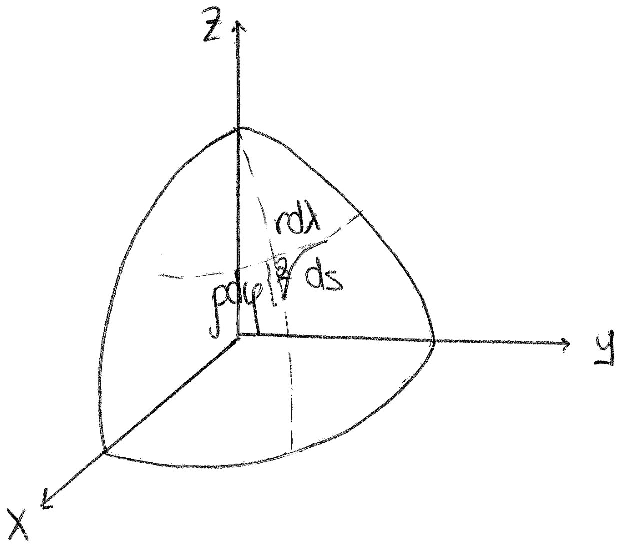
$$\text{con } N=\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}$$

linea appartenente alla superficie:

$$\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \\ z=z(s) \end{cases} \qquad \text{coseni direttori: } \frac{1}{K}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} ; \frac{1}{K}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} ; \frac{1}{K}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

Per imporre che tale linea sia la geodetica le due normali devono coincidere e quindi impongo

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}}=\frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}}{\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}}=\frac{\frac{\partial\phi}{\partial z}}{\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}} \longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0$$



Ellissoide

$r d\lambda = ds \sin\alpha$

$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin\alpha}{r}$

sostituendo

$r^2 \frac{\sin\alpha}{r} = cost$

$\boxed{r \sin\alpha = cost}$

r = raggio parallelo

α = azimut geodetica

↑

Teorema di Clairaut

CAMPO GEODETICO (terna euleriana x, y, z)

Scriviamo gli sviluppi di Puiseux-Weingarten di un punto P_{ell} sull'ellissoide in funzione di s = arco di geodetica e α = azimut

$$\begin{cases} x_{Pell} = s\sin\alpha\left[1-\dfrac{s^2}{6\rho N}\left(1-\dfrac{e^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right)\right] \\ y_{Pell} = s\cos\alpha\left[1-\dfrac{s^2}{6\rho N}\left(1+\dfrac{e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{1-e^2}\right)\right] \\ z_{Pell} = -\dfrac{s^2}{2R_\alpha} \end{cases}$$

Consideriamo ora una sfera locale $(R = \sqrt{\rho N})$ e un nuovo punto P_{sfe} con le stesse coordinate (s, α) di P_{ell}

Nella sfera $e^2 = 0$ quindi avremo

$$\begin{cases} x_{Psfe} = s\sin\alpha\left(1-\dfrac{s^2}{6\rho N}\right) \\ y_{Psfe} = s\cos\alpha\left(1-\dfrac{s^2}{6\rho N}\right) \\ z_{Psfe} = -\dfrac{s^2}{2\sqrt{\rho N}} \end{cases}$$

Errore che commettiamo

$$\begin{cases} x_{Psfe} - x_{Pell} = -s\sin\alpha\,\dfrac{s^2}{6\rho N}\,\dfrac{e^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} \\ y_{Psfe} - y_{Pell} = s\cos\alpha\,\dfrac{s^2}{6\rho N}\,\dfrac{e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{1-e^2} \\ z_{Psfe} - z_{Pell} = \dfrac{s^2}{2}\left(\dfrac{1}{R_\alpha}-\dfrac{1}{\sqrt{\rho N}}\right) \end{cases}$$

Il massimo delle differenze si ha per $\varphi = 0$ $\quad \underset{\Delta y_{max}}{\underset{\uparrow}{\alpha = 0}}$ o $\underset{\Delta x_{max}}{\underset{\uparrow}{\alpha = \frac{\pi}{2}}}$

Il campo geodetico si estende in planimetria per 100 km e in altimetria per 15 km

L'errore è calcolato con $\dfrac{\Delta x}{s}$ o $\dfrac{\Delta y}{s}$

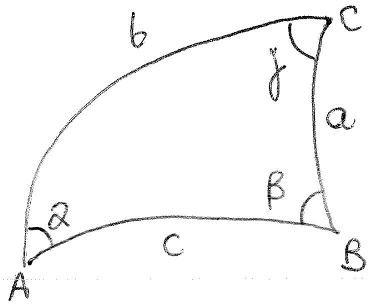
TEOREMA DI LEGENDRE

In un triangolo sferico la somma dei tre angoli interni eccede il valore π di una quantità 3ε detta ECCESSO SFERICO

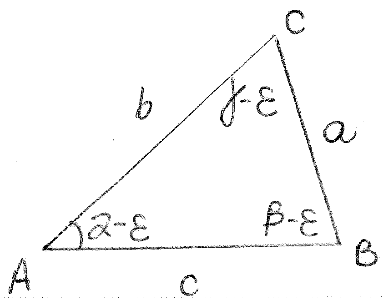
$$\boxed{3\varepsilon = \frac{\text{Area triangolo}}{R}}$$ ← eccesso sferico

Il teorema dice:

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma-\pi = 3\varepsilon}$$



Triangolo sferico



Triangolo piano

Siccome si vuole limitare l'errore massimo ammissibile a 10^{-6} allora i lati del triangolo sferico non devono eccedere i 200 km circa.
Ciò significa che il teorema di Legendre è valido all'interno del campo geodetico

Da $(x,y) \rightarrow (s,\alpha)$

$$\begin{cases} x = s\sin(\alpha-\varepsilon) \\ y = s\cos(\alpha-2\varepsilon) \end{cases}$$

$x = s(\sin\alpha\cos\varepsilon - \cos\alpha\sin\varepsilon)$

$y = s(\cos\alpha\cos2\varepsilon + \sin\alpha\sin2\varepsilon)$

A meno di termini in ε^2: $\cos\varepsilon \cong \cos2\varepsilon \cong 1$ $\quad \sin\varepsilon \cong \varepsilon$ $\quad \sin2\varepsilon \cong 2\varepsilon$

sostituendo si ottiene

$x = s(\sin\alpha - \varepsilon\cos\alpha)$

$y = s(\cos\alpha + 2\varepsilon\sin\alpha)$

$s\sin\alpha = x + s\varepsilon\cos\alpha$

$y = s\cos\alpha + 2\varepsilon(x + s\varepsilon\cos\alpha)$

$y = s\cos\alpha + 2\varepsilon x$

$s\cos\alpha = y - 2\varepsilon x$

$s\sin\alpha = x + \varepsilon(y - 2\varepsilon x)$

$$\begin{cases} s\sin\alpha = x + \varepsilon y \\ s\cos\alpha = y - 2\varepsilon x \end{cases}$$

$tg\alpha = \dfrac{x+\varepsilon y}{y-2\varepsilon x}$ $\qquad \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{x+\varepsilon y}{y-2\varepsilon x}$

$s(\sin\alpha) + s(\cos\alpha) = x + \varepsilon y + y - 2\varepsilon x$

$s^2[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha] = (x+\varepsilon y)^2 + (y-2\varepsilon x)^2$

$s = \sqrt{(x+\varepsilon y)^2 + (y-2\varepsilon x)^2}$

PROIEZIONE CONFORME: gli angoli tra due qualsiasi linee sull'ellissoide sono uguali agli angoli tra le trasformate delle stesse $\delta = 0$

PROIEZIONE EQUIVALENTE: ad un elemento superficiale sull'ellissoide corrisponde sul piano della carta un elemento superficiale di forma diversa ma di stessa area $m_\sigma = 1$

PROIEZIONE AFILATTICA: sono presenti tutti i tipi di deformazione però sono mantenuti nei limiti più piccoli possibili

PROIEZIONE EQUIDISTANTE: $m_\ell = 1$ sarebbe anche conforme e equivalente

↑ NON è possibile ottenerla

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 92

DETERMINAZIONE DEI MODULI DI DEFORMAZIONE

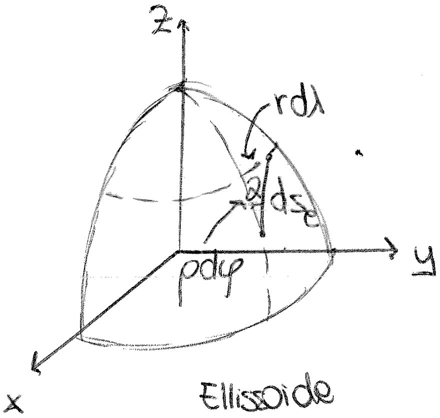
$$\begin{cases} x = f(\varphi, \lambda) \\ y = f(\varphi, \lambda) \end{cases}$$ ← funzioni che definiscono la rappresentazione dell'ellissoide sul piano cartografico

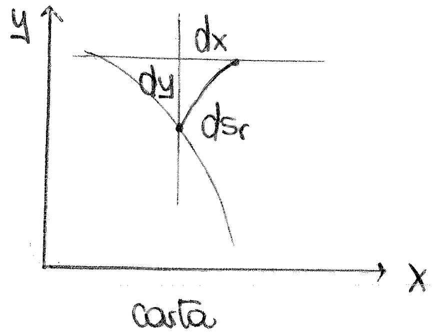
Differenziali

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

Modulo di deformazione lineare





$$ds_r^2 = dx^2 + dy^2$$

$$r\,d\lambda = ds_e \sin\alpha$$

$$\rho\,d\varphi = ds_e \cos\alpha$$

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) d\varphi\, d\lambda$$

$$dy^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + 2\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) d\varphi\, d\lambda$$

$$ds_r^2 = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right]}_{e} d\varphi^2 + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right]}_{g} d\lambda^2 + 2\underbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)\right]}_{f} d\varphi\, d\lambda$$

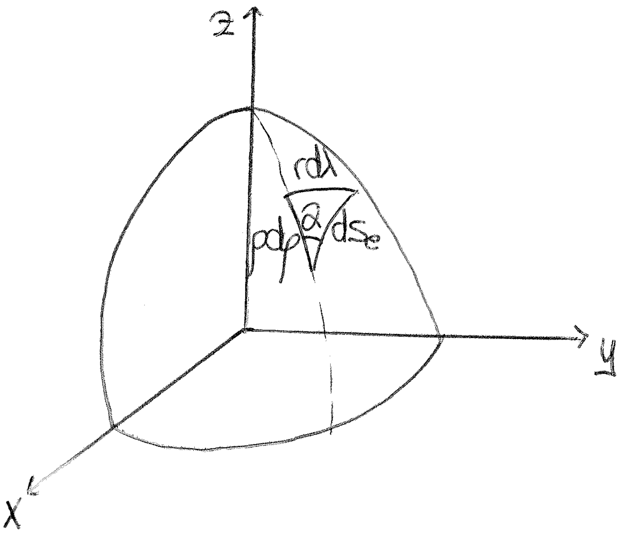
$$ds_r^2 = e\,d\varphi^2 + g\,d\lambda^2 + 2f\,d\varphi\,d\lambda$$

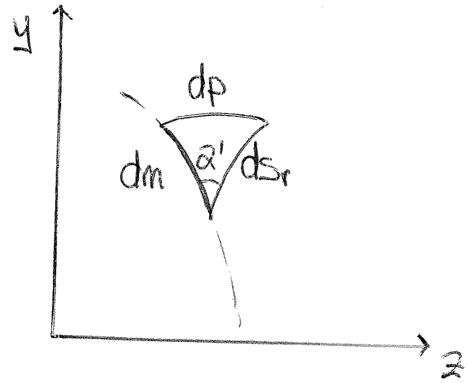
$$d\lambda = \frac{ds_e \sin\alpha}{r} \qquad d\varphi = \frac{ds_e \cos\alpha}{\rho}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 92

Modulo di deformazione angolare

$\delta = \alpha' - \alpha$





$\delta = \alpha' - \alpha$

$dm = \sqrt{e}\,d\varphi \qquad dp = \sqrt{g}\,d\lambda$

$$tg\alpha' = \frac{dp}{dm} = \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{d\lambda}{d\varphi}$$

$r\,d\lambda = ds_e \sin\alpha \qquad d\lambda = \dfrac{ds_e \sin\alpha}{r}$

$\rho\,d\varphi = ds_e \cos\alpha \qquad d\varphi = \dfrac{ds_e \cos\alpha}{\rho}$

$$tg\alpha' = \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\sin\alpha}{r}\cdot\frac{\rho}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\rho}{r}\,tg\alpha$$

$$tg\,\delta = tg(\alpha' - \alpha) = \frac{tg\alpha' - tg\alpha}{1 + tg\alpha'\cdot tg\alpha}$$

$$m_\alpha = tg\delta = \frac{\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\rho}{r}\,tg\alpha - tg\alpha}{1 + \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\rho}{r}\,tg^2\alpha}.$$

$$\boxed{m_\alpha = \frac{\left(\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\rho}{r} - 1\right)tg\alpha}{1 + \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\rho}{r}\,tg^2\alpha}}$$ ← modulo di deformazione angolare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 92

Imponendo che paralleli e meridiani siano ortogonali fra loro otteniamo

$$f = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) = 0$$

Che si può scrivere anche sostituendo la coordinata curvilinea

$$\frac{\rho}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + \frac{\rho}{r}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) = -\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}$$

← questo dimostra che i termini tra parentesi quadre nella precedente equazione sono uguali

Sono uguali anche

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

← prima equazione differenziale carte conformi

Dalla prima equazione differenziale sappiamo che i denominatori dell'equazione precedente sono uguali, lo saranno quindi anche i numeratori:

$$-\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \qquad \boxed{\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial u}}$$

← seconda equazione differenziale carte conformi

Nelle rappresentazioni conformi il modulo di deformazione lineare e' indipendente dall' azimut α

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 92

FORMULE DI HIRVONEN

da $\varphi, \lambda \rightarrow x, y$

$$x = d \operatorname{arcsinh} \frac{\cos\xi \, tg \lambda_{mc}}{V}$$

V = dipende e contiene la prima eccentricità

d = rapporto di forma (raggio di curvatura polare)

$$y = a(A_1\xi - A_2 \sin 2\xi + A_4 \sin 4\xi - A_6 \sin 6\xi)$$

a = semiasse equatoriale

$$Est = m_c x + x_0$$

m_c → modulo di contrazione

$$Nord = m_c y + y_0$$

da $x, y \rightarrow \varphi, \lambda$

$$\lambda_{mc} = \operatorname{arctg} \frac{V \sinh\left(\frac{x}{d}\right)}{\cos\xi}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[tg\xi \cos(V\lambda_{mc})\right]$$

$$\xi = \vartheta + B_2 \sin 2\vartheta + B_4 \sin 4\vartheta + B_6 \sin 6\vartheta + B_8 \sin 8\vartheta$$

$$\vartheta = \frac{y}{aA_1}$$

$$x = \frac{Est - x_0}{m_c} \qquad y = \frac{Nord - y_0}{m_c}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 92

· Quindi

$$\boxed{m_\ell = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi}$$ ← modulo di deformazione lineare carta di Gauss

Ponendo $\lambda = \frac{X}{N\cos\varphi}$ si ottiene

$$m_\ell = 1 + \frac{1}{2}\frac{X^2}{N^2\cancel{\cos^2\varphi}}\cancel{\cos^2\varphi} = 1 + \frac{1}{2}\frac{X^2}{N^2}$$

$$\boxed{m_\ell = 1 + \frac{1}{2}\frac{X^2}{\rho N}}$$ ← modulo di deformazione lineare in funzione di X

X = distanza del punto P dal meridiano centrale

ρ, N raggi principali di curvatura calcolati in P

$P_1 = (X_1, Y_1)$ $P_2 = (X_2, Y_2)$

$$\boxed{m_\ell = 1 + \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6\rho_m N_m}}$$ ← modulo di deformazione lineare di un segmento congiungente P_1 e P_2

ρ_m, N_m raggi di curvatura principali riferiti al punto medio del segmento

valido per segmenti di retta non superiori a <u>20 km</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 92

$$\frac{\lambda^2}{6}\cos^2\varphi(5-t^2)-\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi(1-t^2)=\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left[\frac{5}{3}-\frac{t^2}{3}-1+t^2\right]=\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left[\frac{5-t^2-3+3t^2}{3}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left[\frac{2+2t^2}{3}\right]=\frac{\lambda^2}{3}\cos^2\varphi(1+t^2)$$

$$tg\gamma=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda^2}{3}\cos^2\varphi(1+t^2)\right) \qquad t=tg\varphi$$

$$tg\gamma=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda^2}{3}\cos^2\varphi\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\right)=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda^2}{3}\cos^2\varphi+\frac{\lambda^2}{3}\sin^2\varphi\right)$$

$$tg\gamma=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda^2}{3}\right)$$

Sviluppando in serie $tg\gamma$ abbiamo:

$$\gamma=tg\gamma-\frac{1}{3}tg^3\gamma+\frac{1}{5}tg^5\gamma+\dots$$

trascurando i termini in λ^4 abbiamo

$$\gamma=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda^2}{3}\right)-\frac{1}{3}\lambda^3\sin^3\varphi$$

$$\gamma=\lambda\sin\varphi+\frac{\lambda^3}{3}\sin\varphi-\frac{\lambda^3}{3}\sin^3\varphi$$

$$\boxed{\gamma=\lambda\sin\varphi\left[1+\frac{1}{3}\lambda^2\cos^2\varphi\right]}$$ ← convergenza del meridiano nella carta di Gauss

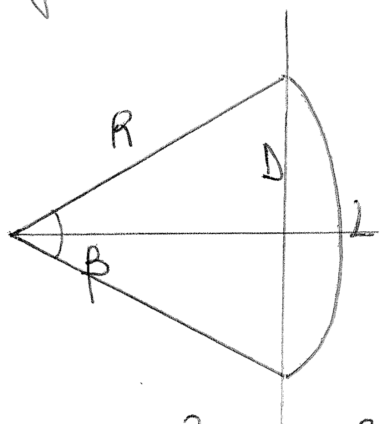
$$\lambda=\frac{X}{N\cos\varphi}$$

$$tg\gamma=\frac{X}{N\cos\varphi}\sin\varphi\left(1+\frac{X^2}{3N^2\cos^2\varphi}\right)$$

$$\boxed{tg\gamma=\frac{X}{N}tg\varphi\left(1+\frac{X^2}{3N^2\cos^2\varphi}\right)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 92

. Lunghezza corda e trasformata curvatura geodetica



$$C_p = \frac{1}{R} = -\frac{E_P}{\rho_P N_P}\cos\alpha$$ ← curvatura

$$C_{MAX} = \frac{X}{\rho N}$$

$$\Delta = L - D \qquad L = R\beta \qquad \beta = \frac{L}{R}$$

$$D = 2R\sin\frac{\beta}{2} = 2R\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{8 \cdot 3!}\right) = 2R\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48}\right) = R\beta - \frac{\beta^3 R}{24} = R\beta - \frac{L^3 \cancel{R}}{R^{\cancel{3}} 24} = R\beta - \frac{L^3}{R^2 24}$$

$$\Delta = L - D = R\beta - R\beta + \frac{L^3}{24R^2} = \frac{L^3}{R^2}\frac{1}{24} = \frac{L^3 C^2}{24}$$

Possiamo confondere la lunghezza della trasformata mentre non lo possiamo fare con l'azimut

La carta di Gauss e' conforme con le geodetiche ma non sulle corde.

PASSAGGIO TRA COORDINATE GEOGRAFICHE E CARTOGRAFICHE

$(\varphi, \lambda) \rightarrow (N, E)$

$$y = c \, \text{arcsinh} \frac{\cos \xi \, tg \lambda'}{\nu}$$

$$x = A_1 \xi - A_2 \sin 2\xi + A_4 \sin 4\xi - A_6 \sin 6\xi$$

$$E = y \begin{array}{l} + 1500 \text{ km} \quad (\text{fuso ovest}) \\ + 2520 \text{ km} \quad (\text{fuso est}) \end{array}$$

$$N = x$$

$\lambda' = \lambda - \lambda_0$ $\qquad$ λ_0 = longitudine meridiano centrale del fuso

OVEST : $-3°27'08.40''$

EST : $+2°32'51.60''$

$$\xi = \text{arctg} \frac{tg \varphi}{\cos(\nu_1 \lambda')}$$

$$\nu = (1 + e'^2 \cos^2 \xi)^{1/2}$$

$$\nu_1 = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

$$c = 6399936{,}608$$

$$e'^2 = 0{,}006768170197$$

$$A_1 = 6376541{,}50006 \ \frac{m}{rad}$$

$$A_2 = 16107{,}03468 \ m$$

$$A_4 = 16{,}97621 \ m$$

$$A_6 = 0{,}02227 \ m$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 92

CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA

Rappresentazione conforme di Gauss-Boaga

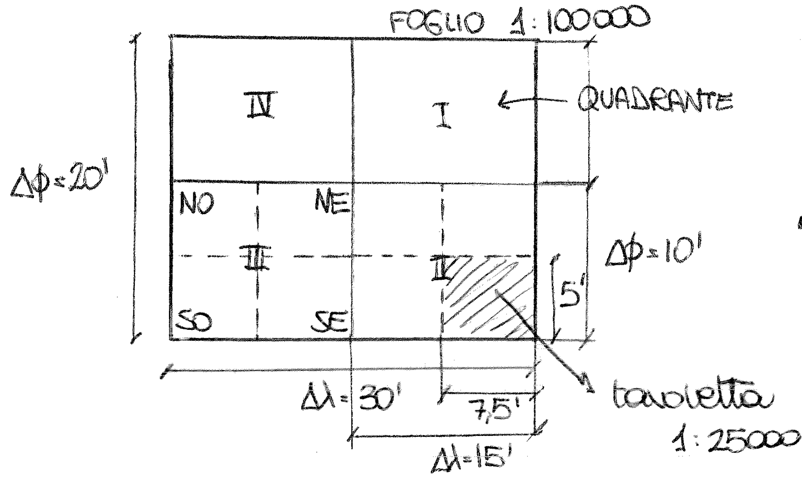
Ellissoide di Hayford: $a = 6378388\ m$

$c = 6356911,946\ m$

$e^2 = 0,0067226700 22$

$\alpha = 1/297.0$

Fusi di ampiezza $\Delta\lambda = 6°$



- legenda
- parametratura e sistema di coordinate piane
- riferimenti per individuare reticolato geografico (λ riferita sia al meridiano Monte Mario che a Greenwich)
- convergenza del meridiano al centro
- data di aggiornamento

UTM (Datum: ED50) Proiezione universale Trasversa di Mercatore utilizza rappresentazione di Gauss

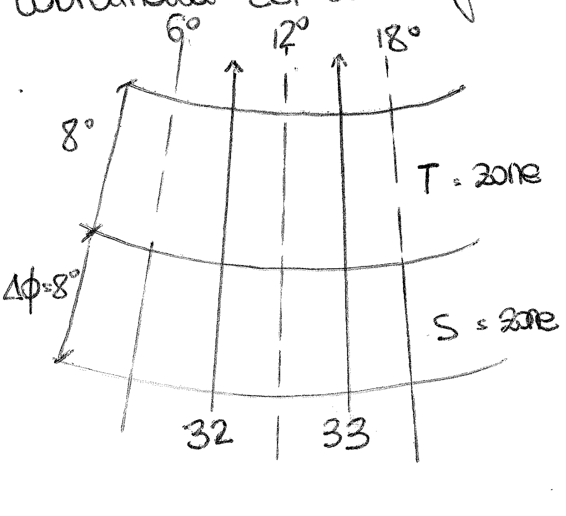
60 fusi $\Delta\lambda = 6°$ estesi tra $80°\ \phi$ NORD e $80°\ \phi$ SUD

Ellissoide ED50 (stessi parametri di quello di Hayford ma orientato su di un vertice posto a Postdam)

Italia fusi 32, 33, 34 — ampiezza $\Delta\phi = 8°$

32 → $\Delta\lambda: 6 \div 12°$; 33 → $12° \div 18°$; 34 → $18 \div 24°$

Coordinata EST dell'origine traslata di 500 km (ascisse sempre positive)



Ogni zona è suddivisa in quadrati di 100km di lato contraddistinti da lettera colonna e lettera riga

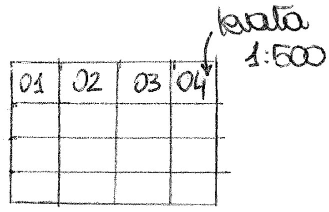
32 T LQ 57641 21255

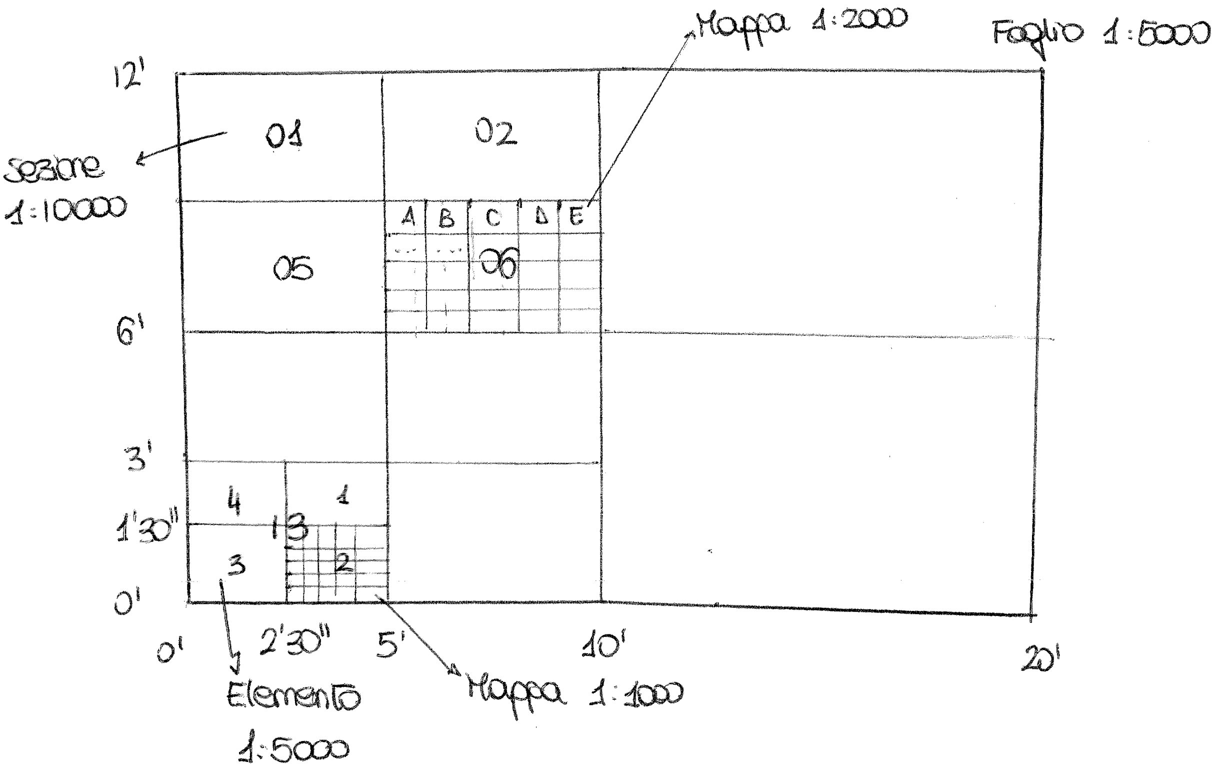
32 = fuso; T = zona; LQ = quadrato; 57641 = EST rispetto al vertice SO de quadrato; 21255 = NORD

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 92

CARTOGRAFIA TECNICA REGIONALE

000	00	0	X	00
↑	↑	↑	↑	↑
Foglio	sezione	Elemento	Mappa	levata
1:50000	1:10000	1:5000	1:2000 o 1:1000	1:500





SISTEMA CARTOGRAFICO UTM-WGS84 (DATUM: WGS84)

Per GPS

Condivide con il sistema UTM tutte le convenzioni ma non utilizza l'ellissoide di Hayford ma quello WGS84

TABELLA RIASSUNTIVA

	NAZIONALE		UTM		UTM WGS84	
Ellissoide	Hayford		Hayford		WGS84	
Origini long. λ	Roma Monte Mario		Greenwich		Greenwich	
DATUM	Roma 1940		ED50		WGS84	
Ampiezza fusi	6°30'		6°		6°	
Nomi fusi	OVEST	EST	32	33	32	33
Merid. centrali	-3°27'08,40"	2°32'51,60"	9°	15°	9°	15°
Falsa origine X_0	1500 km	2520 km	500 km		500 km	
Falsa origine Y_0	0 km		0 km emisfero NORD 10000 km " SUD		IDEM IDEM	
coord. cartograf.	GAUSS-BOAGA		UTM		UTM - WGS84	

VARIABILE STATISTICA E VARIABILE CASUALE

Popolazione: insieme di individui caratterizzati da un attributo X che assume valore diverso per almeno un individuo della popolazione

Individui: soggetti dell'indagine statistica
Attributo: caratteristica degli individui
Valore argomentale: misura dell'attributo

Variabile statistica

valore argomentale

$$X \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{matrix}$$

attributo

numerosità individui con valore argomentale x_2

Variabile casuale

Quantità variabile X che può assumere valori $x_1, x_2, \dots x_n$ estratti a caso dai valori possibili della popolazione

valore argomentale

$$X \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$$

attributo

probabilità

Variabile casuale discreta: per ogni i la probabilità di ottenere $x = x_i$ e' p_i

$$p(x = x_i) = p_i \qquad F(x_i) = \sum_{j=1}^{i} p_j \quad i = 1, 2, \dots n$$

funzione distribuzione

Variabile casuale continua:
la sua funzione di distribuzione $F(x)$ e' continua e
$f(x) = F'(x)$ e' continua nell'intervallo $[A, B]$ di definizione

Probabilità infinitesima: $dp = f(x)dx$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x) \geq 0 \quad \int_A^B f(x)dx = 1$ ← su tutto il campo di distribuzione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 92

DISEGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF

costante positiva L

Si determina il numero minimo di individui di una popolazione contenuti in un intervallo $[m-L\,;\,m+L]$

V = scarti di una generica variabile casuale

$$\sigma^2 = p_1V_1^2 + p_2V_2^2 + \dots + p_nV_n^2$$

costante $L = \sigma\lambda$ → assumiamo tutti gli m scarti minori di L nulli, e tutti gli $[m+1\,;\,n]$ scarti maggiori di L uguali ad L e scriviamo

$$\sigma^2 \geq L^2(p_{m+1} + \dots + p_n) = \sigma^2\lambda^2(p_{m+1} + \dots + p_n) = \sigma^2\lambda^2 \sum_{i=m+1}^{n} p_i$$

siccome $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ avremo $\sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{i=m+1}^{n} p_i = 1$

$$\sum_{i=m+1}^{n} p_i = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i$$

sostituendo abbiamo

$$\cancel{\sigma^2} \geq \cancel{\sigma^2}\lambda^2\left(1 - \sum_{i=1}^{m} p_i\right)$$

$$1 \geq \lambda^2 - \lambda^2 p' \qquad -p'\lambda^2 \leq 1 - \lambda^2 \qquad p'\lambda^2 \geq \lambda^2 - 1$$

$$\boxed{p' \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}}$$

a seconda di $\lambda = 1, 2 \dots$ troviamo un valore p' che ricondotto a percentuale indica quanti individui si trovano nell'intorno della media $\pm\lambda\sigma$

PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA!!!

X = variabile casuale a n dimensioni

C_{XX} = matrice di varianza - covarianza definita come

$$C_{XX} = \underbrace{M}_{\text{operatore che estrae la media}}\left[(X-m_X)(X-m_X)^T\right]$$

$Y = AX$ operatore lineare

$$\boxed{C_{YY} = A C_{XX} A^T}$$

In base al primo corollario del teorema della media possiamo scrivere

$$m_Y = A m_X$$

da cui

$$Y - m_Y = AX - Am_X = A(X - m_X)$$

Dall'algebra lineare $(AB)^T = B^T A^T$

quindi

$$\left[A(X-m_X)\right]^T = (X-m_X)^T A^T$$

per la definizione di matrice varianza covarianza

$$C_{YY} = M\left[(Y-m_Y)(Y-m_Y)^T\right] = M\left[A(X-m_X)(X-m_X)^T A^T\right]$$

Dal primo corollario del teorema della media posso scambiare l'operatore M con l'operatore A

$$C_{YY} = A\underbrace{\left[M(X-m_X)(X-m_X)^T\right]}_{= C_{XX}}A^T = A C_{XX} A^T$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 92

STIMA

Stima = valore numerico che assoceremo alle due statistiche m e σ

$$\hat{m} = h(x_1, x_2, \dots x_n)$$
$$\hat{\sigma}^2 = g(x_1, x_2, \dots x_n)$$

h e g sono detti stimatori

Una stima deve essere:

- consistente
- non affetta da errore sistematico
- efficiente

PRINCIPIO DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA (MINIMI QUADRATI)

Campione $O_1, O_2, \dots O_n$ da una popolazione normale di media m e varianza σ^2

$$f(O_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(O_i - m)^2}$$

la probabilità del campione $O_1, \dots O_n$ sarà

$$dP = P(O_1, O_2, \dots O_n, m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(O_i - m)^2} (dO)^n$$

Funzione di verosimiglianza

$$\boxed{V = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(O_i - m)^2}}$$

se il campione è formato da misure con diversa precisione è necessario usare il PESO

$$\boxed{p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}}$$

σ_0^2 → ipotetica distribuzione di varianza con peso unitario

σ_i^2 → varianza della misura O_i

In più dimensioni

$$\boxed{P = \sigma_0^2 C_{ll}^{-1}}$$

C_{ll} = matrice di varianza-covarianza

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 92

Con i pesi avremo: $\boxed{PAx - Pl_o = Pv}$

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & p_n \end{vmatrix}$$ ← misure fra loro incorrelate

Avremo un sistema di n equazioni con n+r incognite
Occorre un criterio statistico detto principio dei minimi quadrati
Esso cerca fra tutte le stime quella che:

$$\sum_i p_i (l_i - l_{oi})^2 = \sum_i p_i V_i^2 = \text{minimo}$$

Il minimo di una funzione del genere si ottiene derivando parzialmente e ponendo uguale a zero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum_i p_i V_i^2}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \sum_i p_i V_i^2}{\partial x_r} = 0 \end{cases}$$

← sistema normale scritto in forma matriciale è

$$\boxed{N\hat{x} = T_n}$$

N: matrice normale $(r \times r)$

T_n: vettore normalizzato dei termini noti

La soluzione del problema si trova con $\boxed{\hat{x} = N^{-1} T_N}$

Si può scrivere

$$\boxed{\begin{aligned} N &= A^T A \\ T_n &= A^T l_o \end{aligned}}$$

Con pesatura avremo

$PAx = Pl_o$ $\qquad \hat{x} = N^{-1} A^T P l_o$

$A^T P A x = A^T P l_o \quad \longleftrightarrow \quad N x = T_n$

$$\boxed{\begin{aligned} N &= A^T P A \\ T_n &= A^T P l_o \end{aligned}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 92

STIMA DELLA MEDIA CON I PESI

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \qquad \sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

$$V = \frac{(p_1 p_2 \cdots p_n)^{1/2}}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} p_i (O_i - m)^2}$$

$V = \max$

$$-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} p_i (O_i - m)^2 = \min$$

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i (O_i - m)^2 = \min \longrightarrow \frac{-\partial \sum_{i=1}^{n} p_i (O_i - m)^2}{\partial m} = 0$$

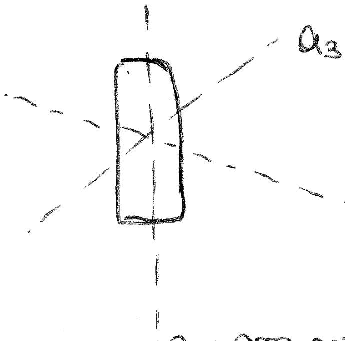
$$-\cancel{2}\sum_{i}^{n} p_i (O_i - m) = 0$$

$$\sum_{i}^{n} p_i O_i - m \sum_{i}^{n} p_i = 0$$

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i}^{n} p_i O_i}{\sum_{i}^{n} p_i} = \frac{p_1 O_1 + p_2 O_2 + \cdots + p_n O_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \longleftarrow \text{MEDIA PONDERATA}$$

TEODOLITE

Condizioni di rettifica teodolite



- I tre assi devono intersecarsi nel centro strumentale
- $a_1 \perp a_2$
- $a_2 \perp a_3$

Condizioni operative → • a_1 verticale
• centro strumento e punto a terra sulla stessa verticale

ERRORI

Misure azimutali

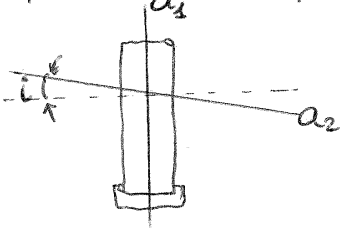
- Errori residui di rettifica

• $a_2 \not\perp a_1$

Errore residuo di inclinazione i porta ad un errore sistematico

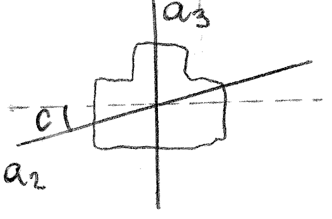
$$\boxed{\varepsilon_i = \pm\, i \cot g\, z}$$

z = misura angolo zenitale sul punto collimato



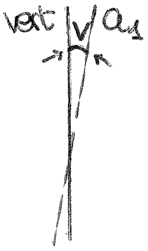
• $a_2 \not\perp a_3$

Errore residuo di collimazione



$$\boxed{\varepsilon_c = \pm \frac{c}{\operatorname{sen} z}}$$

• Errore residuo di verticalità



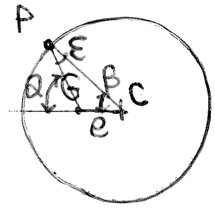
$$\boxed{\varepsilon_v = v \operatorname{sen} \delta \cot g\, z}$$

δ = angolo tra:
- piano verticale punto collimato
- piano verticale e asse a_1

- Errori di costruzione

• Errore di eccentricità

l'asse a_1 non passa nel centro geometrico O del cerchio azimutale ma in un punto Q di eccentricità e



leggiamo β anziché α

$\alpha = \beta + \varepsilon$

se si fa lettura diametralmente opposta la media delle letture elimina l'errore di eccentricità

• Tracciamento dei cerchi graduati

la suddivisione in tacche graduate del cerchio può non essere uniforme

Se in una zona del cerchio la distanza tra due tratti successivi è minore di quanto dovrebbe essere, in un'altra zona sarà maggiore

Con il metodo della reiterazione si elimina questo errore

REGOLA DI BESSEL

La media delle letture al cerchio azimutale eseguite nella posizione normale e coniugata (cerchio a destra, cerchio a sinistra) e' esente dagli errori di:

- inclinazione ε_i
- collimazione ε_c
- eccentricità dei cerchi e

Non si elimina l'errore di verticalità

Azimutali: $\dfrac{S+D \pm 200}{2}$ + se Destro < 200, − se destro > 200

S = misure cerchio sinistro
D = misure cerchio destro

Zenitali: $\dfrac{S-D+400}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 92

LIVELLO SENZA VITE DI ELEVAZIONE

Condizione operativa: verticale asse di rotazione

Condizione di rettifica: asse di collimazione perpendicolare all'asse di rotazione.
Asse di collimazione parallelo alla tangente centrale della livella torica

LIVELLO CON VITE DI ELEVAZIONE

Condizione operativa: asse di collimazione orizzontale

Condizione di rettifica: asse di collimazione parallelo alla tangente centrale della livella torica

AUTOLIVELLO

Condizione operativa: asse di collimazione orizzontale

Condizione di rettifica: dipendente dallo stato del compensatore

ERRORI

Sistematici:

- Errore di rettifica: angolo ε che l'asse di collimazione forma con la tg centrale della livella torica (eliminabile eseguendo la livellazione dal mezzo poiché così facendo quando si fa la differenza tra le due misure i due errori ε da una parte e dall'altra si elidono).
- Rifrazione (ore calde, terreni in pendenza) → avviene se il livello è sensibile
- Inclinazione stadia
- Errore di sfericità (facendo il percorso più sinuoso possibile si riesce a ridurlo)

PRECISIONE LIVELLI

$$\sigma_\Delta = e_{mk}\sqrt{L}$$

precisione (σ_Δ), errore medio kilometrico (e_{mk}), lunghezza linea di livellazione (L)

ERRORI GROSSOLANI

Sbagliare a scrivere le misure.

Accorgimenti:
- chiudere il ciclo
- doppia lettura nella stessa battuta riposizionando il livello

Errori dovuti a rifrazione atmosferica, curvatura terrestre e rettifica si elidono facendo la livellazione geometrica dal mezzo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 92

Misura dell'ambiguità n

Due frequenze λ_1 e λ_2

$$\Delta = L_1 + n\frac{\lambda_1}{2} = L_2 + n\frac{\lambda_2}{2} \qquad \text{dove} \quad L_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi}\frac{\lambda_1}{2} \qquad L_2 = \frac{\varphi_2}{2\pi}\frac{\lambda_2}{2}$$

Ipotizzando λ_1 λ_2 prossime, l'ambiguità n e' uguale per entrambe

Quindi

$$\boxed{n = \frac{L_2 - L_1}{\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}}} \longrightarrow \text{valida fino a una distanza limite } \Delta_{LIM}$$

$$\boxed{\Delta_{LIM} = n^*\frac{\lambda_1}{2} = (n^*+1)\frac{\lambda_2}{2}}$$

$$\boxed{n^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \longrightarrow \boxed{\Delta_{LIM} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}}$$

$$\boxed{\sigma_{(L_1-L_2)} = \sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2} = \sqrt{2}\,\sigma_L}$$

$$\boxed{\sigma_n = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_L}{\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}}}$$

Metodo delle decadi

Si utilizzano più lunghezze d'onda multiple di 10

$\lambda = 20\,m$ $\quad 0 < \Delta < 10\,m$ $\quad \sigma_\Delta = \pm\frac{\lambda}{2}\cdot 10^{-3} = \pm 1\,cm$ (sappiamo m, dm, cm)

$\lambda = 200\,m$ $\quad 0 < \Delta < 100\,m$ $\quad \sigma_\Delta = \pm\frac{\lambda}{2}10^{-3} = \pm 10\,cm$ (sappiamo dam)

$\lambda = 2000\,m$ $\quad 0 < \Delta < 1000\,m$ $\quad \sigma_\Delta = \pm\frac{\lambda}{2}10^{-3} = \pm 1\,m$ (sappiamo hm)

$\lambda = 20000\,m$ $\quad 0 < \Delta < 10000\,m$ $\quad \sigma_\Delta = \pm\frac{\lambda}{2}10^{-3} = \pm 10\,m$ (sappiamo km)

Combinandole insieme otteniamo la distanza

Errori:
- Grossolani: errato conteggio di n
- Sistematici: errore rifrazione atmosferica
  errore su λ : $\lambda = \frac{c}{nf}$ $\quad$ n = indice di rifrazione dipende da (temp, umidità, pressione)

Distanziometri a impulsi

Si misura il tempo Δt impiegato da un impulso luminoso per andare dal distanziometro al riflettore e viceversa

$$\boxed{2D = c\Delta t}$$

Fabiana Barberis
Matricola 162015

ESERCIZIO N. 3 – elementi geodetici nell'intorno di un punto di coordinate assegnate

Dato il punto *P* appartenente all'ellissoide di Hayford, di coordinate geografiche ellissoidiche

$\varphi = 44°\ 43'\ 48''$ $\lambda = 7°\ 20'\ 52''$

determinare:

- i raggi principali di curvatura ρ, N
- la differenza relativa tra i due raggi di curvatura
- il raggio di curvatura della sfera locale R
- il raggio di curvatura del parallelo r
- il raggio di curvatura della sezione normale di azimut $\alpha = 45°$
- la costante di Clairaut C della geodetica passante per P con azimut $\alpha = 45°$

Determinare le medesime quantità nell'ipotesi che il punto P appartenga all'ellissoide di Bessel e all'ellissoide WGS84. Ordinare i risultati in una tabella comparativa.

Per calcolare ρ utilizzo la formula:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Per calcolare N utilizzo la formula:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Per calcolare la differenza relativa tra i due raggi di curvatura utilizzo:

$$\frac{N-\rho}{N} = \frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

Per calcolare il raggio di curvatura della sfera locale R utilizzo la formula:

$$R = \sqrt{\rho N}$$

Per calcolare il raggio di curvatura del parallelo r si utilizza il teorema di Meusnier:

$$r = N\cos\varphi$$

Per calcolare il raggio di curvatura della sezione normale di azimut $\alpha = 45°$ si utilizza il teorema di Eulero:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$

Per calcolare la costante di Clairaut C della geodetica passante per P con azimut $\alpha = 45°$ utilizzo:

$$C = r\sin\alpha$$

Per passare dai gradi ai radianti utilizzo:

$$\pi : x = 180^o : y \quad \text{quindi} \quad x = \frac{\pi \cdot y}{180}$$

Con x angolo in radianti e y angolo in gradi.

ESERCIZIO N. 4 – da coordinate ECEF e geografiche

Determinare le coordinate geografiche ellissoidiche (ellissoide WGS84) φ, λ, h dei seguenti punti in coordinate ECEF:

numero	*X [m]*	*Y [m]*	*Z [m]*
1	4499525,427	585034,129	4467910,359
2	4495694,269	592457,860	4470744,778
3	4503484,717	578160,750	4465024,300
4	4498329,371	562840,765	4472537,612

Ordinare i risultati in un tabella evidenziando, per ogni punto le coordinate finali φ, λ, h.

Le formule da utilizzare sono:

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

Poi si utilizza in prima approssimazione la formula:

$$\varphi = \arctan\frac{Z}{r} \quad \text{dove } r = \sqrt{X^2+Y^2}$$

Troviamo N utilizzando la formula:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

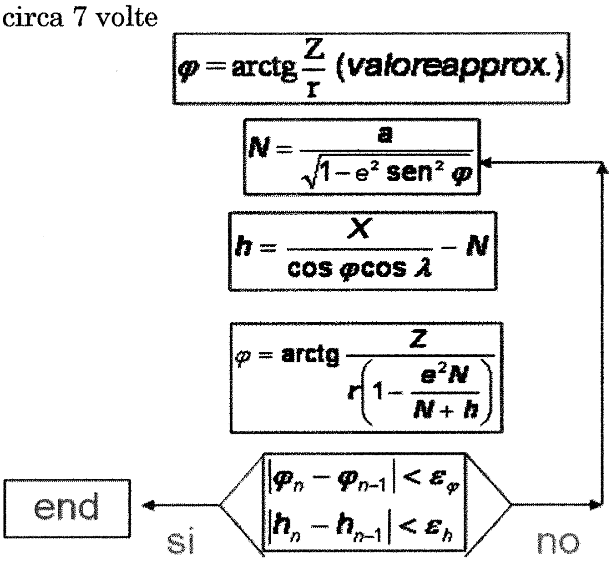
Si trova h con:

$$h = \frac{X}{\cos\varphi\cos\lambda} - N$$

E infine trovato h lo andiamo a sostituire nella formula rigorosa:

$$\varphi = \arctan\frac{Z}{r(1-\frac{e^2N}{N+h})}$$

Per avere valori stabili di φ, r, N e h procedo con un calcolo iterativo di questo genere per circa 7 volte



ESERCIZIO N. 5 – da coordinate geografiche e ECEF

Determinare le coordinate geocentriche (ellissoide WGS84) dei seguenti punti noti in coordinate geografiche ellissoidiche :

numero	*Lat [° ' "] Nord*	*Lon [° ' "] Est*	*h [m]*
5	44 45 1,0393	7 24 29,2033	322,490
6	44 47 10,9050	7 30 26,5393	305,736
7	44 45 1,0393	7 24 29,2033	0
8	44 47 10,9050	7 30 26,5393	0
9	44 42 45,1817	7 18 56,3725	455,195
10	44 48 18,5846	7 07 54,8716	745,962

Ordinare i risultati in una tabella evidenziando i seguenti risultati: N; X, Y, Z

Per passare dai gradi ai radianti utilizzo:

$$\pi : x = 180^o : y \quad \text{quindi} \quad x = \frac{\pi \cdot y}{180}$$

Con x angolo in radianti e y angolo in gradi.

Ricordando che valgono:

$$1' = \frac{1}{60}$$

$$1'' = \frac{1}{3600}$$

Troviamo N utilizzando la formula:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Infine utilizziamo le formule :

$$X = (N + h)\cos\varphi\cos\lambda$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi\sin\lambda$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h]\sin\varphi$$

Punto	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Lat [° ' "] Nord	44 45 1,0393	44 47 10,9050	44 45 1,0393	44 47 10,9050	44 42 45,1817	44 48 18,5846
Lon [° ' "] Est	7 24 29,2033	7 30 26,5393	7 24 29,2033	7 30 26,5393	7 18 56,3725	7 07 54,8716
h [m]	322,49	305,736	0	0	455,195	745,962
φ	44,75028869	44,7863625	44,75028869	44,7863625	44,71255047	44,80516239
λ	7,408112028	7,507372028	7,408112028	7,507372028	7,315659028	7,131908778
φ [rad]	0,781039879	0,781669486	0,781039879	0,781669486	0,780381223	0,781997606
λ [rad]	0,129295946	0,13102836	0,129295946	0,13102836	0,127682337	0,12447529
N	6388744,78	6388758,288	6388744,78	6388758,288	6388730,649	6388765,328
X	4499525,427	4495694,27	4499298,312	4495479,138	4503484,719	4498329,373
Y	585034,1281	592457,8586	585004,5984	592429,5077	578160,7492	562840,7641
Z	4467910,359	4470744,776	4467683,32	4470529,396	4465024,298	4472537,611

Avremo quindi un sistema del tipo :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,552646204 & -0,768826949 & 0,447353796 & 0,768826949 \\ 0,768826949 & 0,552646204 & -0,768826949 & 0,447353796 \\ -0,025671608 & -0,001139067 & 0,025671608 & 0,001139067 \\ -0,001139067 & 0,025671608 & 0,001139067 & -0,025671608 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100.000 \\ 100.000 \\ 138,915 \\ 100.000 \end{pmatrix}$$

Si ottengono i risultati

X_0	117,408773
Y_0	70,08109928
a	0,99901063
b	0,044326809

Troviamo ora α e λ con le formule sopra indicate :

α	λ
0,044341624	0,999993552

Ora che abbiamo tutti i parametri calcoliamo i punti 808 e 809 :

$$\begin{pmatrix} X_{808} \\ Y_{808} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117,408773 \\ 70,08109928 \end{pmatrix} + 0,999993552 \begin{pmatrix} \cos 0,044341624 & sin 0,044341624 \\ -sin 0,044341624 & \cos 0,044341624 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12,254 \\ 27,365 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106,3907404 \\ 97,93480073 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{809} \\ Y_{809} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117,408773 \\ 70,08109928 \end{pmatrix} + 0,999993552 \begin{pmatrix} \cos 0,044341624 & sin 0,044341624 \\ -sin 0,044341624 & \cos 0,044341624 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9,120 \\ 19,700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127,3831743 \\ 89,33840101 \end{pmatrix}$$

X_{808}	106,3907404
Y_{808}	97,93480073

X_{809}	127,3831743
Y_{809}	89,33840101

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ -0,01 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ -0,01 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & -0,01 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & -0,01 & 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,50 \\ 1,50 \\ 2,00 \\ 1,00 \\ 1,70 \\ 3,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 1,5 \\ 0,005 \\ 0,002 \\ -0,005 \\ 0,015 \end{pmatrix}$$

X_0	-0,2
Y_0	1,5
a	0,005
b	0,002
c	-0,005
d	0,015

Ora utilizziamo il sistema per calcolare le coordinate dei punti 4 e 5 :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

Punto 4 :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,002 \\ -0,005 & 0,015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350,00 \\ 125,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,625 \end{pmatrix}$$

Punto 5 :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,002 \\ -0,005 & 0,015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320,00 \\ 145,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,69 \\ 2,075 \end{pmatrix}$$

Punto	*X*	*Y*
4	1,8	1,625
5	1,69	2,075

ESERCIZIO N. 8 – trasformazione piana omografica

Note le coordinate dei punti 1, 2, 3 e 4 nel sistema di riferimento iniziale [Xt,Yt] e nel sistema di riferimento finale [Xr,Yr] determinare i parametri (a, b, c, d, e, f, g, h) della omografia generale tra i due sistemi di riferimento.

numero	*X' [m]*	*Y' [m]*	*X [m]*	*Y [m]*
1	2,00	4,00	1,00	5,00
2	2,50	1,00	1,00	2,00
3	7,00	2,00	4,00	2,00
4	4,00	5,00	4,00	5,00

Applicare i parametri trovati ai punti 5 e 6, espressi nel sistema di riferimento iniziale per trasformarli in quello finale:

numero	*X' [m]*	*Y' [m]*
5	3,50	3,00
6	5,00	3,50

$$X = \frac{aX'+bY'+c}{gX'+hY'+1}$$

$$Y = \frac{dX'+eY'+f}{gX'+hY'+1}$$

Si ottengono i seguenti risultati :

numero	*X' [m]*	*Y' [m]*	*X[m]*	*Y[m]*
5	3,5	3	2,3960047	3,099882491
6	5	3,5	3,714808044	3,069469835

ESERCIZIO N. 9 – coordinate euleriane e geodetiche rettangolari, da geodetiche polari

Determinare le coordinate euleriane di una serie di punti di cui sono note le coordinate geodetiche polari (s, α). Tutte le coordinate fornite sono relative all'ellissoide di Hayford.

PUNTO	*S [m]*	*α*
VIGONE	11943.82	53° 55' 01".95
MORETTA	12526.42	96° 34' 57".26
SAVIGLIANO	27111.72	123° 04' 10".19
SALUZZO	17744.20	149° 07' 02".41
MONTE BRACCO	11396.18	193° 59' 40".79

L'origine della terna euleriana si trova nel vertice trigonometrico del II ordine ROCCA DI CAVOUR:

φ = 44° 46' 48".075   λ= 7° 22' 25".990 Est Greenwich

Calcolare le coordinate geodetiche rettangolari a partire dagli stessi punti riportati in tabella, evidenziando per ognuno anche il valore dell'eccesso sferico. Eseguire le trasformazioni inverse (da geodetiche rettangolari a polari) a verifica dei calcoli eseguiti.

Calcolare le medesime coordinate (euleriane e geodetiche rettangolari) ipotizzando di utilizzare l'ellissoide WGS84, mantenendo inalterate le coordinate geografiche dell'origine.

Utilizziamo gli sviluppi di Puiseux-Weingarten per determinare le coordinate x,y,z nel sistema di riferimento euleriano.

$$x = s \cdot \sin\alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho N}\left(1 - \frac{e^2 \sin^2\alpha \cos^2\varphi}{1 - e^2 sen^2\varphi}\right)\right]$$

$$y = s \cdot \cos\alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho N}\left(1 + \frac{e^2 \cos^2\alpha \cos^2\varphi}{1 - e^2}\right)\right]$$

$$z = -s\left(\frac{s}{2R_\alpha} - \frac{s^2}{6R_\alpha}\frac{3e^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{1 - e^2\sin^2\varphi - e^2 sen^2\alpha}\right)$$

Scriviamo l'origine della terna euleriana in radianti:

$\varphi = 0{,}781559$

λ=0,1286986

Trasformazioni inverse ellissoide di Hayford

PUNTO	X	Y	3ε	ε	s	α [rad]
VIGONE	9652,596927	7034,362	8,35E-07	2,78182E-07	11943,82	0,9410328
MORETTA	12443,84173	-1435,97	-2,2E-07	-7,3208E-08	12526,42	-1,455909
SAVIGLIANO	22719,8539	-14793,7	-4,1E-06	-1,377E-06	27111,72	-0,993625
SALUZZO	9107,762748	-15228,4	-1,7E-06	-5,6823E-07	17744,2	-0,539004
MONTE BRACCO	-2755,95425	-11057,9	3,75E-07	1,24855E-07	11396,18	0,244253

Coordinate rettangolari ellissoide WGS84

PUNTO	VIGONE	MORETTA	SAVIGLIANO	SALUZZO	MONTE BRACCO
S [m]	11943,82	12526,42	27111,72	17744,2	11396,18
α [rad]	0,941033	1,685684	2,147968	2,602588	3,385846
ρ	6367080	6367080	6367080	6367080	6367080
N	6388737	6388737	6388737	6388737	6388737
eccesso sferico	8,35E-07	-2,20E-07	-4,13E-06	-1,70E-06	3,75E-07
ε	2,78E-07	-7,30E-08	-1,40E-06	-5,70E-07	1,25E-07
X	9652,597	12443,84	22719,85	9107,763	-2755,95
Y	7034,362	-1435,97	-14793,7	-15228,4	-11057,9

Trasformazioni inverse Ellissoide WGS84

PUNTO	X	Y	3ε	ε	s	α [rad]
VIGONE	9652,597	7034,362	8,3461E-07	2,782E-07	11943,82	0,941032809
MORETTA	12443,84	-1435,97	-2,19641E-07	-7,3214E-08	12526,42	-1,455908768
SAVIGLIANO	22719,85	-14793,7	-4,13141E-06	-1,3771E-06	27111,72	-0,993624718
SALUZZO	9107,763	-15228,4	-1,70483E-06	-5,6828E-07	17744,2	-0,539004167
MONTE BRACCO	-2755,95	-11057,9	3,74594E-07	1,2486E-07	11396,18	0,244252963

Per le trasformazioni inverse si sono utilizzate le formule:

$$s = \sqrt{(X + \varepsilon Y)^2 + (Y - 2\varepsilon X)^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{X + \varepsilon Y}{Y - 2\varepsilon X}$$

$$3\varepsilon = \frac{X \cdot Y}{2\rho N}$$

Le coordinate sono quindi:

punto:	*1*	*2*	*3*	*4*
x	-2752267,647	-2744298,243	-2759936,409	-2767186,926
y	654767,6536	653003,6486	654145,1908	669651,8081
z	-660169,9642	-658390,5157	-663641,461	-668611,7945

A verifica dei calcoli eseguiti calcolo la trasformazione inversa con il sistema:

$$\begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

L'inversa della matrice:

$$\begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix}$$

È uguale alla sua trasposta, quindi si avrà una matrice:

-0,704018303	-0,499981005	0,504358229
0,710181828	-0,495641771	0,499981005
0	0,710181828	0,704018303

Calcolo ΔX , ΔY , ΔZ risolvendo il sistema:

punto	*1*	*2*	*3*	*4*
ΔX	1277313,254	1273482,096	1281272,544	1276117,198
ΔY	-2609213,111	-2601789,38	-2616086,49	-2631406,475
ΔZ	232,3515817	232,3515817	-2653,707418	4859,604582

Le coordinate geocentriche si ottengono infine con le seguenti formule

$X = X_0 + \Delta X$

$Y = Y_0 + \Delta Y$

$Z = Z_0 + \Delta Z$

punto	*1*	*2*	*3*	*4*
X	4499525,427	4495694,269	4503484,717	4498329,371
Y	585034,129	592457,86	578160,75	562840,765
Z	4467910,359	4467910,359	4465024,3	4472537,612

I risultati in tabella corrispondono esattamente alle coordinate geocentriche dei punti assegnati, quindi i calcoli sono verificati.

ESERCIZIO N. 12

Calcolare il modulo di deformazione lineare per la cartografia Gauss-Boaga nelle posizioni indicate nell'esercizio n. 11. Organizzare i risultati in una tabella a doppia entrata. (NB: considerare correttamente l'origine delle longitudini nel sistema Gauss-Boaga)

L'origine delle longitudini nel sistema Gauss-Boaga coincide con il punto trigonometrico $\lambda = 12°27'08.40"$ EST dal meridiano di Greenwich

Per ottenere le longitudini corrette utilizzo le formule:
Per il fuso OVEST: $\lambda_{mc} = \lambda_{R40} + 12°27'08{,}4" - 9°$
Per il fuso EST: $\lambda_{mc} = \lambda_{R40} + 12°27'08{,}4" - 15°$

Siccome tutte le coordinate geografiche (longitudine) sono positive, significa che si trovano nel fuso EST e quindi utilizzeremo la seconda formula. Dopo aver calcolato tutti i λ_{mc} li trasformiamo in radianti.

	λ_{R10} [°]	0°	30'	1°	1° 30'	2°	2° 30'	3°
φ °	λ_{mc} [rad]	-0,04447	-0,035738525	-0,027011879	-0,018285233	-0,009558587	-0,00083194	0,007894706
37°	0,645771823	1,000631	1,000407324	1,00023269	1,000106627	1,000029138	1,000000221	1,000019876
38°	0,663225116	1,000614	1,000396559	1,000226539	1,000103809	1,000028368	1,000000215	1,000019351
40°	0,698131701	1,00058	1,000374758	1,000214086	1,000098102	1,000026808	1,000000203	1,000018287
41°	0,715584993	1,000563	1,00036375	1,000207797	1,000095221	1,000026021	1,000000197	1,00001775
42°	0,733038286	1,000546	1,000352688	1,000201477	1,000092325	1,000025229	1,000000191	1,00001721
43°	0,750491578	1,000529	1,000341585	1,000195135	1,000089418	1,000024435	1,000000185	1,000016669
44°	0,767944871	1,000512	1,000330454	1,000188776	1,000086505	1,000023639	1,000000179	1,000016125
45°	0,785398163	1,000494	1,000319311	1,00018241	1,000083587	1,000022842	1,000000173	1,000015582
47°	0,820304748	1,00046	1,000297037	1,000169686	1,000077757	1,000021248	1,000000161	1,000014495

ESERCIZIO N. 13

Calcolare le coordinate Gaussa-Boaga dei punti di coordinate geografiche ellissoidiche:

PUNTO	φ	λ (da Roma M. Mario)
A	43° 27' 48".19	-4° 32' 57".07
B	36° 45' 57".63	2° 43' 29".41

Eseguire poi la trasformazione inversa a verifica dei risultati.

Utilizziamo le formule di Hirvonen:

$$X = A_1\xi - A_2 \sin 2\xi + A_4 \sin 4\xi - A_6 \sin 6\xi$$

$$Y = C \cdot \operatorname{arcsin}h\left(\frac{\cos\xi \tan\lambda'}{\nu}\right)$$

Dove:
$\lambda' = \lambda - \lambda_0$ λ_0 = longitudine meridiano centrale del fuso (OVEST: -3°27'08,40"
EST: +2°32'51.60")

$$\xi = \arctan\frac{\tan\varphi}{\cos(\nu_1\lambda')}$$

$$\nu = \sqrt{(1 + e'^2 \cos^2\xi)}$$

$$\nu_1 = \sqrt{(1 + e'^2 \cos^2\varphi)}$$

$N = x = A_1\xi - A_2 sin2\xi + A_4 sin4\xi - A_6 sin6\xi = 4068996{,}179\ m$

Per verificare i risultati eseguiamo la trasformazione inversa, utilizzando le seguenti formule:

$$\varphi = \arctan[\tan\xi \cos(\nu\lambda')]$$

$$\lambda = \lambda' + \lambda_0$$

$$\xi = \frac{N}{A_1} + B_2 \sin 2\frac{N}{A_1} + B_4 \sin 4\frac{N}{A_1} + B_6 \sin 6\frac{N}{A_1}$$

$$Y = E - \begin{cases} 1500km(OVEST) \\ 2520km(EST) \end{cases}$$

Dove:

$B_2 = 0{,}1449300705$

$B_4 = 0{,}0002138508$

$B_6 = 0{,}0000004322$

Punto A:

$N = 4812946{,}745\ m$

$E = 1411531{,}095\ m$

$\lambda_0 = -3{,}4523333333\ (poichè\ siamo\ nel\ fuso\ Ovest)$

$E_0 = 1500000\ m$

$y = -88468{,}9046\ m$

$$\xi_1 = \frac{N}{A_1} = 43{,}32394041$$

$$\xi_2 = B_2 sin2\frac{N}{A_1} = 0{,}1446821$$

$$\xi_4 = B_4 sin4\frac{N}{A_1} = 0{,}000024965$$

$$\xi_6 = B_6 sin6\frac{N}{A_1} = -0{,}000000426$$

$$\xi = \frac{N}{A_1} + B_2 sin2\frac{N}{A_1} + B_4 sin4\frac{N}{A_1} + B_6 sin6\frac{N}{A_1} = 43{,}46864705$$

$$v = (1 + e'^2 cos^2\xi)^{\frac{1}{2}} = 1{,}001780861$$

$$\sin h\,\frac{y}{c} = -0013869659$$

$$\lambda' = arctg\frac{v \sin h\,\frac{y}{c}}{cos\xi} = -1{,}096782368$$

$$\phi = arctg[tan\xi \cdot \cos(v\,\lambda')] = 43^\circ{,}463386111$$

$$\lambda = \lambda' + \lambda_0 = -4^\circ{,}549115701$$

Punto B:

$N = 4068996{,}179\ m$

$E = 2535771{,}127\ m$

$\lambda_0 = 2{,}547666667\ (poichè\ siamo\ nel\ fuso\ Est)$

$E_0 = 2520000\ m$

$$\xi = \frac{N}{A_1} + B_2 \sin 2\frac{N}{A_1} + B_4 \sin 4\frac{N}{A_1} + B_6 \sin 6\frac{N}{A_1}$$
$$\lambda = \lambda' + \lambda_0$$
$$Y = E - 500km$$
$$X = N$$
$$\nu = \sqrt{(1 + e'^2 \cos^2 \xi)}$$

NOVARA:

$N = 5031468{,}37\ m$
$E = 470139{,}66\ m$
$y = E - 500\ km = -29860{,}34\ m$
$\lambda_0 = 9°$

$$\xi_1 = \frac{N}{A_1} = 45{,}29097191$$
$$\xi_2 = B_2 sin2\frac{N}{A_1} = 0{,}144922594$$
$$\xi_4 = B_4 sin4\frac{N}{A_1} = -0{,}000004343$$
$$\xi_6 = B_6 sin6\frac{N}{A_1} = -0{,}000000431$$

$$\xi = \frac{N}{A_1} + B_2 sin2\frac{N}{A_1} + B_4 sin4\frac{N}{A_1} + B_6 sin6\frac{N}{A_1} = 45.43595573$$
$$v = (1 + e'^2 cos^2 \xi)^{\frac{1}{2}} = 1{,}001657861$$

$$\sin h\frac{y}{c} = -0{,}004697437$$

$$\lambda' = arctg\frac{v \sin h\frac{y}{c}}{cos\xi} = -0{,}384185827$$

$$\phi = arctg[tan\xi \cdot cos(v\,\lambda')] = 45°{,}43530964$$
$$\lambda = -0{,}384185827° + 9° = 8°{,}961581$$

BARDONECCHIA:

$N = 4993928{,}40\ m$
$E = 319679{,}92\ m$
$y = E - 500\ km = -180320{,}08\ m$
$\lambda_0 = 9°$

$$\xi_1 = \frac{N}{A_1} = 44{,}95305431$$
$$\xi_2 = B_2 sin2\frac{N}{A_1} = 0{,}144929875$$
$$\xi_4 = B_4 sin4\frac{N}{A_1} = -0{,}0000007$$

$EST_{UTM} = EST_{Gauss-Boaga} + \Delta EST$

Ci troviamo nel fuso 33: $\Delta EST = 938m$

Quindi avremo: $EST_{UTM} = EST_{Gauss-Boaga} + \Delta EST = 2414372$ m+(938m)=2415310 m

$NORD_{UTM} = NORD_{Gauss-Boaga} + \Delta NORD$

Ci troviamo nel fuso 33: $\Delta NORD = 182m$

Quindi avremo: $NORD_{UTM} = NORD_{Gauss-Boaga} + \Delta NORD = 4717651$m+(182m)=4717833m

ESERCIZIO N. 17

Dati i due vertici trigonometrici:

PUNTO	*E [m]*	*N [m]*	*Q [m]*	φ	λ
056903	1.387.724,86	4.991.155,36	301.92	45° 03' 50",828	-04° 52' 42",217
056906	1.394.673,10	4.990.782,02	298.25	45° 03' 42",577	-04° 47' 24",314

calcolare:

- la distanza cartografica tra i due punti e quella sulla superficie dei riferimento
- la distanza sul piano orizzontale passante per il primo punto e per il secondo punto;
- gli angoli di direzione reciproci relativamente alle corde; e gli azimut reciproci.

Distanza cartografica

La distanza cartografica d_c tra i due punti si ottiene applicando la formula:

$$\sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2} = \sqrt{48278039 + 139382,7556} = 48417421,85m$$

Distanza sulla superficie di riferimento

La riduzione della distanza alla superficie di riferimento segue questo processo:

$$d_c = m_l d_g$$

Dove d_g è la distanza sulla superficie di riferimento mentre d_c è la distanza cartografica appena calcolata.

Per trovare d_g:

$$d_g = \frac{d_c}{m_l}$$

Dove m_l è il modulo di deformazione lineare riferito ai due punti considerati.

Il modulo di deformazione lineare per due punti si calcola con la formula

$$m_l = 0,9996\left(1 + \frac{X_A{}^2 + X_B{}^2 + X_A X_B}{6\rho_m N_m (0,9996)^2}\right) = 0,999745474339193$$

Dove ρ_m e N_m sono rispettivamente i raggi di curvatura minimo e massimo del meridiano passante per il punto medio del segmento.

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = 6367657,407196568 \text{ m}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = 6389158,734030806$$

$$X_1 = E_1 - 500km = -112275,1399999999 \text{ m}$$

Poiché:

$\lambda_{mm} = 12°27'08'',40 = 12°,452333333$

Pertanto:

$$\gamma_1 = \lambda_{mc1} sin\varphi_1 \left\{1 + \frac{\lambda_{mc1}^2}{3} cos^2\varphi_1\right\} = -0.007851929191300\ rad$$
$$\gamma_2 = \lambda_{mc2} sin\varphi_2 \left\{1 + \frac{\lambda_{mc2}^2}{3} cos^2\varphi_2\right\} = -0.016528981714680\ rad$$

Con:

$\varphi_1 = \varphi_{056903}\ (vedi\ punto\ 1)$
$\varphi_1 = \varphi_{056906}\ (vedi\ punto\ 1)$

In conclusione quindi gli azimut saranno:

$$\alpha_1 = \theta_{AB} + \varepsilon_A + \gamma_1 = -1.524968788272005\ rad = -87°,374275457165126 = -87°\ 22'\ 27'',39164579445401$$
$$\alpha_2 = \theta_{AB} + \varepsilon_B + \gamma_2 = -1.533644841574213\ rad = -87°,871376694212174 = -87°\ 52'\ 16'',95609916382523$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 92