Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 280 DATA : 16/04/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Rombi

MATERIA : Geometria, Esercizi + temi d'esame

Prof. Cornier

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 162

I Facoltà di Ingegneria A.A. 2006-2007
CORSO DI GEOMETRIA - prof. R. Camerlo

ESERCIZI PROPOSTI - Esercitazione 2

Spazi Vettoriali e Sottospazi, Sistemi di Generatori, Basi, Dimensione

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$ si definiscono le seguenti operazioni:

$$\text{somma: } (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$\text{prodotto: } a(x,y)=(x\,|a|\,,y\,|a|).$$

Si dimostri che, con questa somma e questo prodotto, $\mathbb{R}^2$ non è uno spazio vettoriale. Fare lo stesso con le seguenti operazioni

$$\text{somma: } (x,y)+(x',y')=(x-x',y-y')$$

$$\text{prodotto: } a(x,y)=(ax,ay).$$

Esercizio 2. Verificare se il sottoinsieme $W\subseteq\mathbb{R}^3$ dove $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\,x-y=0,y+z=0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Verificare se il sottoinsieme $W\subseteq\mathbb{R}^3$ dove $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\,x+y+z=2\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Verificare se il sottoinsieme $W\subseteq\mathbb{R}^3$ dove $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\,x\in\mathbb{Z}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}_2[X]$ (si verifichi che si tratta di uno spazio vettoriale) costituito dai polinomi di grado minore o uguale a 2 che si annullano per $x=3$. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti sottoinsiemi:
$V=\{(x,y,z):x+y-z=0\}$
$W=\{(x,y,z):x+y+z=0\}$
$T=\{(x,y,z):x+y=0,x+z=0\}$.

a) Verificare che V,W,T sono sottospazi;

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 162

(i) V_1;

(ii) V_2;

(iii) $V_1 \cap V_2$;

(iv) $V_1 + V_2$.

Esercizio 14. Dire se i polinomi

$$X - X^2, \ -2 + X, \ 1 + X^3, \ 4X$$

formano una base per $\mathbb{R}_3[X]$.

Esercizio 15. Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^4$; dire se ciascuna delle seguenti affermazione è vera o falsa giustificando la risposta:

(i) se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono linearmente indipendenti esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che li contiene;

(ii) esiste sempre una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\mathbf{w}_1$;

(iii) se $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ è un insieme libero allora $\{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è ancora libero per ogni $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^4$;

(iv) la dimensione d di $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ soddisfa $0 \leq d \leq 3$.

Esercizio 16. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $S = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ dove $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 2), \mathbf{v}_3 = (2, 1, 1, 4), \mathbf{v}_4 = (1, 2, -1, 5)$. Si trovi una base di S e si calcolino le componenti di $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ rispetto a tale base.

Esercizio 17. Sono dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \ \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 1), \ \mathbf{v}_3 = (0, 3, k), \ \mathbf{v}_4 = (-1, k, 5), \ \mathbf{v}_5 = (-1, 10, 13).$$

Trovare una base di $L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$ al variare di k.

Esercizio 18.

1) Si trovi la dimensione di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{R}-$spazio e come $\mathbb{C}-$spazio.

2) Nel $\mathbb{C}-$spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ si consideri il sottospazio V generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, i, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (i, i^2, i^3)$. Si calcoli la dimensione di V. Si calcoli la dimensione dell' $\mathbb{R}-$spazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Si risponda alle stesse domande sostituendo $\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{u}_2 = (i, i^2, i)$.

Esercizio 19. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 1, 0, -1), \mathbf{v}_5 = (0, 1, 0, 0)$. Si provi che la somma $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è diretta e se ne trovi una base. Si provi che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5$ sono linearmente indipendenti e si completi il loro insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 20. In $\mathbb{R}^5$ si consideri il sottoinsieme $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : 2x_1 - x_3 = 0, x_2 + 2x_4 + x_5 = 0\}$. Si verifichi che V è un sottospazio e se ne calcoli la dimensione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 162

appartiene ad A perchè non si può scrivere nella forma $(u', (u')^2, u' + v')$ con $u', v' \in \mathbb{R}$; infatti se prendiamo $u' = \lambda \cdot u, v' = \lambda \cdot v$ risulta che la seconda componente è uguale a $\lambda \cdot u^2 \neq (u')^2 = (\lambda \cdot u)^2$ e dunque neanche la terza condizione verificata.

Esercizio 10. Dimostrare che ogni spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ si può pensare come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ restringendo l'operazione di prodotto alle coppie (numero reale, vettore).
ATT: l'affermazione non è vera se si scambiano $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

`Risoluzione.` Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale quindi su V sono definite due operazioni $+$ (somma fra elementi di V) e $\cdot$ (prodotto fra numeri complessi ed elementi di V) per cui valgono le seguenti proprietà:

S.1 per qualsiasi $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$, $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z})$;

S.2 esiste il vettore nullo di V, $\mathbf{0}$, tale che $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$;

S.3 per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un vettore $\mathbf{v}'$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v} = \mathbf{0}$;

S.4 per qualsiasi $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$;

$P.1_{\mathbb{C}}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ risulta $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$;

$P.2_{\mathbb{C}}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $1_{\mathbb{C}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$;

$D.1_{\mathbb{C}}$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ e ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$;

$D.2_{\mathbb{C}}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{C}$ risulta $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.

Consideriamo V con la stessa somma e come prodotto consideriamo lo stesso prodotto ma ristretto ai soli numeri reali. Facciamo vedere che V con queste operazioni è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Dobbiamo dimostrare che valgono le proprietà dalla S.1 alla S.4 e le proprietà $P.1_{\mathbb{R}}, P.2_{\mathbb{R}}, D.1_{\mathbb{R}}, D.2_{\mathbb{R}}$. Per quel che riguarda le proprietà dalla S.1 alla S.4, esse non fanno intervenire gli scalari e quindi non sono toccate dal cambiamento operato e quindi continuano a valere. Per quel che riguarda le proprietà $P.1_{\mathbb{R}}, P.2_{\mathbb{R}}, D.1_{\mathbb{R}}, D.2_{\mathbb{R}}$ esse valgono perchè i numeri reali non sono che particolari numeri complessi e quindi se le proprietà $P.1 - P.2 - D.1 - D.2$ valevano per ogni numero complesso varranno in particolare per ogni numero reale.
ATT. Non è vero invece che se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale allora esso è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale: infatti se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale significa che in V sono state definite un'operazione di somma (che a due vettori di V associa un altro elemento di V) e un'operazione di prodotto (che ad un numero reale e ad un vettore di V associa un altro vettore di V) rispetto alle quali V è uno spazio vettoriale. Ora l'operazione di prodotto è definita solo sui numeri reali e non sappiamo come definirla in generale sui numeri complessi e quindi non possiamo neanche parlare di $\mathbb{C}$-spazio vettoriale perchè non sono neppure definite due operazioni.

Esercizio 12. I vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (2, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (0, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$:

a) generano $\mathbb{R}^3$?

b) sono linearmente indipendenti?

c) formano una base di $\mathbb{R}^3$?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 162

Esercizio 14. Dire se i polinomi

$$X - X^2, \ -2 + X, \ 1 + X^3, \ 4X$$

formano una base per $\mathbb{R}_3[X]$.

`Risoluzione.` L'insieme dei polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 (che indichiamo con $\mathbb{R}_3[X]$) costituiscono un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con la somma e il prodotto per uno scalare usuali. Sappiamo che $\mathbb{R}_3[X] = \{a + bX + cX^2 + dX^3 : a, b, c, d \in \mathbb{B}\}$ e quindi sappiamo che ogni polinomio con coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 si scrive in maniera unica come combinazione lineare dei polinomi $1, X, X^2, X^3$; questo si esprime in altro modo affermando che i polinomi $\{1, X, X^2, X^3\}$ formano una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[X]$. Quindi ogni base di $\mathbb{R}_3[X]$ dovrà essere formata da 4 elementi.
Per controllare che i 4 polinomi che l'esercizio ci indica costituiscono o meno una base per lo spazio è sufficiente controllare se essi sono linearmente indipendenti.
Prendiamo una combinazione lineare dei 4 polinomi e la uguagliamo a 0 (il polinomio nullo) che è il vettore nullo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[X]$. Se l'unico modo per cui l'uguaglianza venga verificata è prendere tutti gli scalari uguali a 0 allora i 4 polinomi saranno l.i. e quindi costituiranno una base per lo spazio. Sia $a(X - X^2) + b(-2 + X) + c(1 + X^3) + d(4X)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ una combinazione lineare dei 4 polinomi. Poniamo

$$a(X - X^2) + b(-2 + X) + c(1 + X^3) + d(4X) = 0;$$

$$cX^3 - aX^2 + (a + b + 4d)X - 2b + c = 0.$$

Il polinomio $cX^3 - aX^2 + (a + b + 4d)X - 2b + c$ è uguale al polinomio nullo solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli quindi solo se sono verificate le

$$\begin{cases} c = 0 \\ -a = 0 \\ a + b + 4d = 0 \\ -2b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b + 4d = 0 \\ -2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ d = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Perciò l'unico modo per cui l'uguaglianza è verificata è prendere tutti gli scalari uguali a 0 e dunque i 4 polinomi sono l.i.

Esercizio 15. Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^4$; dire se ciascuna delle seguenti affermazione è vera o falsa giustificando la risposta:

(i) se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono linearmente indipendenti esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che li contiene; sì

(ii) esiste sempre una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\mathbf{w}_1$; NO

(iii) se $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ è un insieme libero allora $\{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è ancora libero per ogni $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^4$; NO

(iv) la dimensione d di $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ soddisfa $0 \leq d \leq 3$.

`Risoluzione.`

(i) Vero. Completare tramite elementi della base canonica e trovare base con metodo degli scarti successivi.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 162

I Facoltà di Ingegneria A.A. 2006-2007
CORSO DI GEOMETRIA - prof. R. Camerlo

ESERCIZI PROPOSTI - Esercitazione 3

Matrici e loro operazioni

Esercizio 1. Tra le seguenti matrici, eseguire tutti i prodotti possibili:

$A \cdot C$
$A \cdot D$
$E \cdot F$
$B \cdot D$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = A$$

$$D = (0, 1, 1) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{matrix}$$

calcolare $A^2 - {}^tA + I_3$.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti condizioni su

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

determinano un sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$:

(i) $a = 1$

(ii) $a + d = 0$

(iii) $ad - bc = 0$

(iv) $b = c$

(v) $b = -c$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 162

Esercizio 11. Ridurre per righe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcolarne il rango.

Esercizio 12. Stabilire per quali valori di h la seguente matrice ha rango 0, 1, 2, 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix}$$

Esercizio 13. Studiare il rango della matrice seguente al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

Esercizio 14. Dire se è vero o falso: la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & h \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni h complesso.

Esercizio 15. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1,0,0,1) \\ \mathbf{v}_2 &= (2,0,0,1) \\ \mathbf{v}_3 &= (4,0,0,3) \\ \mathbf{w}_1 &= (1,2,0,0) \\ \mathbf{w}_2 &= (1,1,0,0) \end{aligned}$$

e i sottospazi $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $W = \mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$.

(a) Trovare una base B del sottospazio $V + W$

(b) $V + W = \mathbb{R}^4$?

(c) La somma $V + W$ è diretta?

(d) $V \cap W$ contiene qualche vettore non nullo?

Esercizio 16. Si trovi la dimensione del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{v} = (1,0,0,1)$, $\mathbf{w} = (0,1,1,0)$, $\mathbf{z} = (2,2,3,3)$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 162

I Facoltà di Ingegneria A.A. 2006-2007
CORSO DI GEOMETRIA - prof. R. Camerlo

ESERCIZI PROPOSTI - Esercitazione 4

Sistemi lineari

Esercizio 1. Stabilire se il seguente sistema in x, y, z è risolubile. In caso affermativo trovare tutte le soluzioni:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y - 3z = -5 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_3 \to V_3 - V_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \quad rk(A)=2, \; rk(A|B)=3$$

$rk(A) \neq rk(A|B)$ non è risolubile

Esercizio 2. Stabilire se il seguente sistema nelle incognite x, y, z, t è risolubile. In caso affermativo trovare tutte le soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 3x + y + 2z + t = 2 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_2 \leftrightarrow V_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_3 \to V_3 - V_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|B)$ è risolubile

$$\begin{cases} 3x + y + 2z + t = 2 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{-3x-y-t}{1} \\ y = -2x - t + 1 \\ x = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} z = -3x - y - t \\ y = -2x - t + 1 \\ x = 2z \end{cases}$$

Trovare tre soluzioni distinte del sistema. Quante soluzioni ha questo sistema?

$\infty^{4-3} = \infty^1 = 1$ soluzione

Esercizio 3. Stabilire se il seguente sistema in x, y, z è risolubile. In caso affermativo trovare tutte le soluzioni:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 4z = 2. \end{cases}$$

Esercizio 4. Usando il teorema di Rouchè-Capelli, stabilire per quali valori reali di m il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ x + 3y + 6z = m. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & m \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & m \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right) \quad rk(A) = 2 = rk(A|B) \text{ è risolubile}$$

$\infty^{3-2} = \infty^1$ 1 soluzione

Esercizio 5. Costruire un sistema lineare di 5 equazioni in 4 incognite avente:

a) ∞^1 soluzioni; 2 righe di 1 e 2 c.l. delle altre

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & a+c \end{array}\right) \quad n - p = 1$$

b) ∞^2 soluzioni;

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 162

ha come base dello spazio delle soluzioni $((1,1,0),(1,0,1))$.

Esercizio 13. Verificare che per $a = -1$ il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = i \\ -x + z = 1 \\ x + (4-i)y + az = 0 \end{cases}$$

è incompatibile. Trovare la soluzione per $a = 0$.

Esercizio 14. Si discuta al variare del parametro complesso h il sistema lineare $A_h X = B$, dove

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15. Si determini se esistono valori del parametro complesso h tali che la matrice

$\frac{\lambda}{\det A} \cdot A_{5,1}$

$$A_h = \begin{pmatrix} i & h & 0 \\ 2i & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

sia invertibile. Scelto uno di tali valori, se ne calcoli l'inversa.

Esercizio 16. Si determini se esistono valori del parametro complesso h tali che la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} i & h & i \\ 2i & 2 & 2i \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Scelto uno di tali valori, si risolva il sistema omogeneo $A_h X = 0$.

Esercizio 17. Discutere (senza risolvere) il seguente sistema lineare al variare del parametro reale λ

$2x + 3y = 4$ $\qquad \lambda = 0$

$$\begin{cases} 2(\lambda+1)x + 3y + \lambda z = \lambda + 4 \\ (4\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y + (2\lambda - 1)z = 2\lambda + 2 \\ (5\lambda - 4)x + (\lambda + 1)y + (3\lambda - 4)z = \lambda - 1. \end{cases}$$

Esercizio 18. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t+1 & t+2 & t+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1-2t & 2-2t & 3-3t \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 42$ $\qquad |B| = t^2 + t$

Esercizio 19. Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 162

Esercizio 27. Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ h & 1 & 2 \\ h-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Riduco
2) Discuto
3) trovo il numero di righe libere
h vent. = ρ(A)
4) trovo le righe libere $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=(1,1) \\ (h-1)x_1=(1,1) \end{cases}$

discutere e risolvere al variare di h l'equazione matriciale $AX = B$.

Esercizio 28. Verificare che le equazioni matriciali $AX = B, XA = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono risolubili entrambe con soluzioni rispettivamente X_1 ed X_2 uniche e con $X_1 \neq X_2$.

Esercizio 29. Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è un divisore di 0 in $\mathbb{R}^{3,3}$ cioè $\exists X \neq 0$ tale che $AX = 0$.

Esercizio 30. Risolvere le seguenti equazioni matriciali: $AXA^{-1} = I, AXA^{-1} = A$ con

$$A = \begin{pmatrix} \pi^2 & e^\pi & 2 \\ 0 & \pi+1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 31. Discutere il sistema seguente, pensando k prima come parametro reale e poi come parametro complesso

$$\begin{cases} 2x + ky = 0 \\ kx - 2y = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & -2 \end{pmatrix} = -4-k^2 \quad k \in \mathbb{R}$

$|A|=0$ se $k=2$

$k \in \mathbb{C}$

$|A|=0$ se $k=2i$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 162

Più precisamente, un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica, che associa a due vettori v e w di V uno scalare in **K**, generalmente indicato con $\langle v, w \rangle$. Spesso alcuni autori richiedono anche che il campo **K** sia quello dei numeri reali e che la forma sia *definita positiva*, cioè che

$$\langle v, v \rangle > 0$$

per ogni v diverso da zero. Per rimanere nella più ampia generalità, scegliamo di non assumere questa ipotesi nella definizione di prodotto scalare.

Riassumendo, un prodotto scalare è un operatore binario che verifica le seguenti condizioni per v, w, u vettori arbitrari e k elemento del campo **K** arbitrario:

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
2. $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$
3. $\langle kv, w \rangle = k\langle v, w \rangle$

Le precedenti richieste implicano anche le seguenti proprietà:

- $\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$
- $\langle v, kw \rangle = k\langle v, w \rangle$
- $\langle 0, 0 \rangle = 0$

1. $A + 0 = 0 + A = A$ (la matrice nulla è l'elemento neutro della somma)
2. $A + (-A) = 0$ (esistenza di un inverso per la somma)
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (proprietà associativa della somma)
4. $A + B = B + A$ (proprietà commutativa della somma)
5. $(AB)C = A(BC)$ (proprietà associativa del prodotto)
6. $(A + B)C = AC + BC$ (proprietà distributiva)
7. $C(A + B) = CA + CB$ (proprietà distributiva)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 162

Siccome la A è quadrata faccio il det A per conoscere i valori di h affinché det=0
h=0,1,-1

a. si consideri l'endomorfismo f_h di $\mathbb{R}^3$ associato ad A_h rispetto alla base canonica e si trovi una base del nucleo di f_h e una base dell'immagine di f_h, per ogni h reale;

b. si determinino gli eventuali valori del parametro reale h in corrispondenza dei quali il vettore $(2,2,2)$ ha infinite controimmagini. Effettuo per h=0,1,-1 $A \cdot X = w$ e trovo le controimmagini.

Esercizio 8. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita da $f(x,y,z) = (x + hz, y + hz, 2hz)$. Si stabilisca per quali $h \in \mathbb{R}$ tale applicazione è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 9. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le due applicazioni lineari

$$f(x,y,z) = (\overset{s}{x + y}, \overset{t}{x + y} - z)$$

$$g(s,t) = (3s - t, 3t - s, s)$$

(i) Calcolare $h(x,y,z) = g \circ f$

Le trovo dopo aver fatto f∘g

(ii) Calcolando le matrici $M(f), M(g), M(h)$ verificare che $M(h) = M(g)M(f)$.

(iii) Sia $v = (0,1,-1) \in \mathbb{R}^3$. Dire se v appartiene a: $\mathbf{Im}(f)$, $\mathbf{Im}(g)$, $\mathbf{Im}(h)$.

Esercizio 10. Dati $v_1 = (1,-2,0,4)$, $v_2 = (-1,1,1,0)$, $v_3 = (-1,0,2,4)$, dimostrare che $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$. In ciascuno dei seguenti casi, dire se esiste un'a.l. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ con le proprieta enunciate:

(i) $f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = 0$ e f non nulla

(ii) $f(v_1) = f(v_2) = 0$ e $f(v_3) \neq 0$

(iii) $f(v_1) \neq 0$ e $f(v_3) = 0$

Esercizio 11. Provare che, nell'insieme degli endomorfismi di $\mathbb{R}^2$

a. non esiste alcun elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4), f(3,4) = (1,1)$;

b. esiste uno ed un solo elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4)$;

c. esistono infiniti elementi f per cui $f(1,2) = (2,3)$;

d. esiste uno ed un solo elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4), f(3,3) = (3,3)$;

e. esistono infiniti elementi f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,4) = (4,6)$.

Esercizio 12. Sia $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ data da $f(X) = AX - XA$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

a. verificare che f è lineare;

b. trovarne il nucleo;

- Con i risultati con la base canonica = X applicate ad AX-XA ottengo 4 colonne che mi compongono la matrice
- Riduco e trovo le soluzioni e verifico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 162

b. posto $\mathbf{a} = (1,1,1)$ e $\mathbf{b} = (1,0,-1)$ calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. Completare $\mathbf{a}$ ad una base B di V e determinare M_f^B;

c. trovare $\ker f$ e $\mathbf{Im}(f)$.

Esercizio 18. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $(1, x, x^2, x^3)$. Si consideri l'applicazione lineare f da V in V definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - x \frac{dv}{dx}.$$

a. Calcolare $f(v)$ dove $v = 2 - 2x - 4x^2 + x^3$;

b. trovare, nella base indicata, la matrice associata ad f;

c. trovare $\ker f$ e $\mathbf{Im}(f^2)$;

d. trovare $f^{-1}(v)$ dove $v = 2x + 3x^3$;

e. trovare $f^{-1}(v)$ dove $v = 1 + x + x^2$.

Esercizio 19. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $(1, x, x^2, x^3)$. Si consideri l'applicazione lineare f da V in V definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = x \frac{dv}{dx} - \frac{6}{x} \int v\, dx.$$

a. Trovare nucleo e immagine di f;

b. trovare, nella base indicata, la matrice associata ad f;

c. trovare il rango di M_f.

Esercizio 20. Siano E ed F due spazi vettoriali reali di dimensione 4 e 3 rispettivamente, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ una base di E ed $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ una base di F. Sia φ l'applicazione lineare di E in F definito dalle equazioni

$$\varphi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$
$$\varphi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$$
$$\varphi(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_2$$
$$\varphi(\mathbf{v}_4) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3.$$

Determinare $\ker(\varphi)$ ed $\mathbf{Im}(\varphi)$.

Esercizio 21. Verificare che $B = (b_1, b_2, b_3)$ con

$$b_1 = (1,0,0) \qquad b_2 = (1,3,-5) \qquad b_1 = (3,2,0)$$

e $F = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1 = (0,2,1) \qquad f_2 = (1,1,2) \qquad f_3 = (1,3,5)$$

sono due basi di $\mathbb{R}^3$. Trovare la matrice di cambio base da B ad F.

Esercizio 22. Siano E uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base di E e $B' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ un'altra sua base con:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 162

I Facoltà di Ingegneria A.A. 2006-2007
CORSO DI GEOMETRIA - prof. R. Camerlo

ESERCIZI PROPOSTI - Esercitazione 6

Diagonalizzazione, autovalori e autovettori

Diagonalizzabilità:
1) Data la matrice associata trovare gli autovalori, se sono tutti distinti allora la matrice è diagonalizzabile
2) Per ogni autovalore trovo la variabili libere e i loro autospazi i quali formano parte delle colonne della matrice di passaggio.

Esercizio 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori con le rispettive molteplicità e gli autovettori di A; provare se è diagonalizzabile.

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 3-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 3-\lambda\left((1-\lambda)(1-\lambda)+9\right)$

$\lambda=1$ $m=2$
$\lambda=3$ $m=1$

Esercizio 2. Verificare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, scrivere una matrice diagonale D simile ad A e determinare una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$.

Esercizio 3. Determinare il valore del parametro reale a tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(x, y) = (x - y, 2x - y).$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A-\lambda I$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+2$
$-1-\lambda+\lambda+\lambda^2+2=\lambda^2+3$

Stabilire se φ è semplice. In caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori. Ripetere l'esercizio nel caso in cui $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Esercizio 5. Consideriamo, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ riferito ad una base ortonormale $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ un endomorfismo f di matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice A e dimostrare che essa è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia φ l'endomorfismo dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$, è $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori e gli autospazi di φ e verificare che M non è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Provare che le seguenti matrici A e B hanno autovalori reali, mentre non ne ha la loro somma: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 162

Esercizio 15. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice non reale dell'equazione $z^4 = 1$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & \zeta & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^3 \end{pmatrix}$$

Calcolare A^{12}.

Esercizio 16. Scrivere una matrice $A \in R^{3,3}$, non diagonalizzabile, che abbia come polinomio caratteristico $t^3 + 3t^2$.

Esercizio 17. Scrivere due matrici 4×4 a elementi reali con lo stesso polinomio caratteristico, una diagonalizzabile e l'altra no.

Esercizio 18. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3 : V_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}, V_2 = \{(x, y, z) : x = t, y = 2t, z = kt\}$. Per quali valori di k esiste un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente V_1 come autospazio relativo all'autovalore 4 e V_2 come autospazio relativo all'autovalore -1? Fissato uno di tali k, trovare il corrispondente endomorfismo.

Esercizio 19. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (k, 2, 2)$. Studiare, al variare di k, l'esistenza di endomorfismi soddisfacenti queste condizioni:

a) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 e $\mathbf{v}_3$ è autovettore relativo all'autovalore 2;

b) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 ed f non è iniettivo;

c) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 e $\dim \mathbf{Im}(f) = 1$;

d) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori relativi all'autovalore 1.

Esercizio 20. Costruire gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^3$ soddisfacenti queste condizioni:

a) $\ker f = \{(x, y, z) : x = t, y = 2t, z = t\}, \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ è autovettore relativo a $\lambda = -1, \mathbf{v}_2 = (2, 3, 0)$ è autovettore relativo a $\lambda = 3$;

b) $\ker f = \{(x, y, z) : x = t + 1, y = -t, z = t + 2\}, \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ come in a);

c) come in b) con $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 2)$.

Esercizio 21. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita in questo modo: $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 4y + hz, 3x + 6y + 3z)$ dove h è un parametro reale. Scegliere la risposta corretta fra le seguenti:

a. $\ker f$ è un sottospazio di dimensione 1 per ogni scelta di h reale.

b. $\dim \mathbf{Im}(f) = 1$ se $h = 0$

c. 0 è sempre autovalore di f

d. esiste h tale che f è suriettiva.

Esercizio 22.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 162

I Facoltà di Ingegneria A.A. 2006-2007
CORSO DI GEOMETRIA - prof. R. Camerlo

ESERCIZI PROPOSTI - Esercitazione 7

Forme quadratiche, geometria nel piano, coniche

Esercizio 1. E' data la matrice simmetrica reale $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che A ha due autovalori λ, μ reali e distinti

(ii) Provare che ogni autovettore $u \in V_\lambda$ è ortogonale ad ogni autovettore $v \in V_\mu$.

(iii) Trovare una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A

(iv) Determinare una matrice Q invertibile tale che $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

(v) Determinare una matrice P tale che ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Scrivere la forma quadratica $f(x, y)$ associata alla matrice dell'esercizio 1.

(i) Dire se $f(x, y)$ è definita, semidefinita, non definita

(ii) Scrivere una forma canonica $g(X, Y)$ per $f(x, y)$

(iii) Indicare il cambiamento di variabili $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ che trasforma $f(x, y)$ in $g(X, Y)$

(iv) Si consideri l'equazione $f(x, y) = 1$ e sia $\mathcal{C}$ la conica corrispondente. Dire se $\mathcal{C}$ è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o altro

(v) Provare che per ottenere un'equazione canonica per $\mathcal{C}$ è sufficiente una rotazione del sistema di riferimento $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Sia $f(x, y, z)$ la forma quadratica associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se f è definita, semidefinita, non definita

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 162

(iii) trovare l´equazione della retta mediana della striscia da esse determinata.

Esercizio 11. Sono date le rette $r : 2x - y + 2 = 0$ ed $s : x + y - 5 = 0$. Si trovino le rette passanti per il punto comune ad r e ad s, la cui intersezione con l'asse y disti 5 dall'origine.

Esercizio 12. Sono dati il punto $P(1, -2)$ e la retta $r : x + 3y + 1 = 0$. Calcolare le rette uscenti da P che formano un angolo di $\pi/6$ radianti con r, la retta per P parallela ad r, la retta per P perpendicolare ad r.

Esercizio 13. Trovare la famiglia di tutte le circonferenze passanti per i punti $A(1, 1), B(3, -1)$. Scrivere l´equazione del luogo dei loro centri. Determinare l´equazione delle circonferenze della famiglia tangenti alla retta $x + y + 1 = 0$.

Esercizio 14. Determinare le circonferenze passanti per i punti $A(2, -1)$ e $B(2, 4)$ e tangenti all´asse y, trovando le coordinate del loro punto di tangenza.

Esercizio 15. Trovare l´equazione della circonferenza tangente alla retta $x + y - 2 = 0$ in $P(1, 1)$ e passante per $Q(2, 1)$. Scrivere le equazioni delle tangenti ad essa condotte da $A(5, 5)$.

Esercizio 16. Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il tipo delle coniche della famiglia F definita dall´equazione:

$$2x^2 + 2xy + hy^2 - 2x + 2hy = 0$$

Esistono in F delle iperboli equilatere?

Esercizio 17. Studiare la famiglia di coniche $x^2 + 2xy + ty^2 + 4x - 6y + t = 0$ riconoscendo le coniche degeneri, le parabole, le iperboli, le ellissi (reali e immaginarie). Scrivere le equazioni canoniche per le coniche corrispondenti a $t = 1, t = -1, t = 2$ e disegnarle nel piano xy.

Esercizio 18. Verificare che la conica $\mathcal{C} \quad x^2 - 2xy + y^2 + y = 0$ è una parabola. Trovarne: il vertice, l´asse, la tangente nel vertice, una forma canonica, un cambiamento di riferimento che realizzi tale riduzione a forma canonica. Trovare l´equazione di una circonferenza di raggio 1 e tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P(-2, -1)$.

Esercizio 19. Verificare che il grafico $y = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ è un'iperbole e trovare un'equazione canonica.

Esercizio 20. Scrivere l´equazione dell´ellisse di centro $C(1, -1)$, di semiassi $a = 3, b = 2$, avente l´asse maggiore sulla retta $x + 2y + 1 = 0$.

Esercizio 21. Studiare

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$$

e darne un grafico qualitativo.

Esercizio 22. Si tracci un grafico qualitativo della conica $\mathcal{C} \quad y^2 = 2x + y$.

Esercizio 23. Si tracci un grafico qualitativo della conica $\mathcal{C} \quad x^2 - 4y^2 = 2x$.

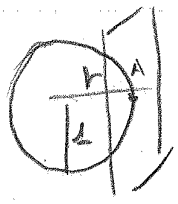
Esercizio 24. E' vero o falso che la retta $r : x = y$ e la circonferenza $C : x^2 + y^2 - 2(x - y) = 0$ sono tangenti?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 162

si trovi S

13) $r=1$ $\alpha: x+y+z+1=0$ $A(-1,0,0)$



$v \perp \alpha$ $(1,1,1)$

$$r \begin{cases} x=-1+t \\ y=0+t \\ z=0+t \end{cases}$$

sostituisco a S

$$(x+1-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=1$$

$d(P,\pi)$ $\frac{-1+t+t+t}{\sqrt{3}} = \frac{3t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ $t = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$

sostituisco t in S.

15) trovare π tg a S $P(0,0,3)$ e la tg e $\perp$ a r

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2-3-1-4-1=0$

$C(1,-2,1)$ $R=\sqrt{9}=3$

il piano si trova

$(x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)+(z_0-\gamma)(z-z_0)=0$

$0-1\cdot x-0+0+2\cdot y-0+(3-1)\cdot(z-3)=0$

$-x+2y+3z-9-z+3=0$

$-x+2y+2z-6=0$

14) trovare π tg S $P(0,1,0)$ r tg ad S in $P(0,1,0)$

$x^2+y^2+z^2+2x-y+3z=0$

$(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z+\frac{3}{2})^2-1-\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=0$ $C(-1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

$r=+1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{4+1+9}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

il piano si trova

$(x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)+(z_0-\gamma)(z-z_0)$

$0+1\cdot x-0+1-\frac{1}{2}\cdot y-1+0+\frac{3}{2}\cdot z-0$

$x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 162

I Facoltà di Ingegneria A.A. 2006-2007
CORSO DI GEOMETRIA - prof. R. Camerlo

ESERCIZI PROPOSTI - Esercitazione 9

Geometria dello spazio: circonferenze, coni, cilindri.

Esercizio 1. Dati la retta $r : x = t, y = t, z = 2t$ ed il punto $C(1, 1, -1)$ trovare:

a) la sfera di centro C e tangente ad r;

b) la circonferenza di centro C e tangente ad r;

c) le sfere tangenti ad r in $A = (1, 1, 2)$ e passanti per C.

Esercizio 2. Verificare che le due superficie sferiche : $S : x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + z = 0$ ed $S' : x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$ si tagliano lungo una circonferenza C. Provare che esistono due rette tangenti a C e passanti per $A(1, 0, -2)$ e trovarne le equazioni.

Esercizio 3. Provare che non è possibile trovare una superficie sferica che passi per i punti $A(2, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 1), D(3, -1, 0)$. Provare che esistono infinite sfere passanti per A, B, C, $E(2, -1, 1)$. Giustificare tali risultati esaminando la la posizione dei punti. Scrivere le equazioni della circonferenza per A, B, C e trovarne centro, raggio e retta tangente in A.

Esercizio 4. Si trovino centro e raggio della circonferenza $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

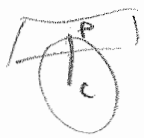
Esercizio 5. Si trovino centro e raggio della circonferenza $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$

Esercizio 6. Trovare l'equazione della sfera contenente la circonferenza γ di equazione $\gamma : \begin{cases} S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 14 = 0 \\ \pi : 2x - y + z + 8 = 0 \end{cases}$ e passante per l'origine.

Esercizio 7. Trovare l'equazione della sfera contenente la circonferenza γ di equazione $\gamma : \begin{cases} S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 14 = 0 \\ \pi : 2x - y + z + 8 = 0 \end{cases}$ e avente il centro sul piano $\alpha : y - z - 1 = 0$.

Esercizio 8. Dati la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ e il piano $\pi : z - y = 0$

8)



$x^2+(y-1)^2+z^2=1$ $C(0,1,0)$ $r=1$

$r \begin{cases} x \\ y = 1-t \\ z = 0+t \end{cases}$ $r \perp \pi$ ne $a,b,c = l,m,n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 162

Esercizio 15.

a. Si trovi la sfera S con centro su $\alpha : x + 2z = 0$ e tangente in $P = (1, 1, -1)$ al piano $\pi : x - z = 2$.

b. Si trovi il raggio della circonferenza C, intersezione di S con il piano $z = -1$.

Esercizio 16. Data la sfera S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$,

(i) Si trovi la sfera S' simmetrica di S rispetto al piano $\pi : z = y$.

(ii) Si proietti perpendicolarmente sul piano xz la circonferenza intersezione di S e di π.

Esercizio 17.

(i) Si trovi l'equazione cartesiana del cilindro che proietta la curva $L : x = y^2 - 4z^2$, $x + y + z = 1$ parallelamente alla retta $x = y = -z$.

(ii) Si trovino sul cilindro due rette distinte.

Esercizio 18.

(i) Si trovi l'equazione cartesiana del cilindro che proietta la curva $L : x - 2y = z^2 - 6x = 0$ parallelamente al vettore $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

(ii) Si trovino due rette sul cilindro.

Esercizio 19.

(i) Si trovi l'equazione cartesiana del cilindro che proietta la curva $L : -2y + z = 0$, $x^2 + 2y - z^2 = 1$ parallelamente al vettore $\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

(ii) Si trovi almeno una retta sul cilindro.

Esercizio 20. Data S la sfera di centro $C(1, -1, -2)$ e passante per $P(1, 0, 2)$ determinare l'equazione del cono di vertice $V(1, 0, 5)$ tangente a S.

Esercizio 21. Data S la sfera di centro $C(-1, 2, 0)$ intersecata dal piano $\pi : 2x - 2y + z - 6 = 0$ secondo una circonferenza di raggio 3, scrivere l'equazione del cono di vertice $V(-1, 2, 1)$ tangente a S.

Esercizio 22. Data la circonferenza $C : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4; x - y - z = 0\}$,

a) scrivere l'equazione cartesiana del cilindro che la proietta parallelamente alla retta $x + y = x - z = 0$ e qualle che la proietta perpendicolarmente al piano xy. Determinare la curva C', proiezione ortogonale di C sul piano xy;

b) scrivere l'equazione cartesiana del cono che la proietta dal punto $P(1, 2, 1)$. Determinare la curva C' proiezione di C da P sul piano xy.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 4**

Usando il teorema di Rouchè-Capelli, stabilire per quali valori reali di m il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ x + 3y + 6z = m. \end{cases}$$

`Risoluzione.` Per il teorema di Rouchè-Capelli sappiamo che il sistema proposto è risolubile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice estesa; cerchiamo quindi di capire per quali valori reali di m si ha $\mathtt{rk}(A) = \mathtt{rk}(A|B)$. Riduciamo $A|B$ per righe:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & m \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & m \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right).$$

Si ha pertanto che il rango della matrice A è pari a due (che è il numero delle righe non nulle della matrice ridotta per righe ottenuta a partire dalla matrice A tramite trasformazioni ammissibili) mentre il rango della matrice $A|B$ è uguale a 2 quando $m = 1$ e a 3 se $m \neq 1$; il sistema è risolubile se e solo se $2 = \mathtt{rk}(A) = \mathtt{rk}(A|B)$ cioè se e solo se $m = 1$.
Osserviamo inoltre che per $m = 1$ il sistema ha $\infty^{3-\mathtt{rk}(A)}$ soluzioni cioè $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 162

c) Per avere ∞^0=1 soluzione è necessario che $n - p = 0$, ovvero che $p = n = 4$. Ciò vuol dire che la matrice del sistema deve avere 4 righe l.i. e una c.l. delle altre. Ad esempio, nel caso di un sistema lineare non omogeneo,

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a+b+c+d \end{array}\right).$$

Oss: perché il sistema non omogeneo considerato sia risolubile l'ultima riga della matrice **completa** $A|B$ devono essere c.l. delle altre quattro, non basta che lo sia la riga della sola matrice A.

d) Notiamo come prima cosa che perché il sistema non abbia nessuna soluzione è necessario che il sistema considerato sia non omogeneo (un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno la soluzione nulla!). Il Teorema di Rouchè-Capelli ci dice che un sistema in cui $\rho(A|B) \neq \rho(A)$ non è risolubile. Dunque, un sistema che soddifa tale condizione sarà, ad esempio,

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

infatti è facile osservare come $\rho(A) = 4$, ma $\rho(A|B) = 5$.

e) Per avere ∞^4 soluzioni è necessario che $n - p = 4$, ovvero che $p = \rho(A) = 0$. Ciò vuol dire che il sistema deve essere necessariamente $AX = 0$ con A la matrice nulla (per quanto senso possa avere un sistema del genere...).

f) Per avere ∞^5 soluzioni è necessario che $n - p = 5$, ovvero che $p = \rho(A) = -1$. Dal momento che il rango di una matrice è un numero positivo, si deduce che non esiste un sistema lineare di 5 equazioni in 4 incognite che soddisfa tale condizione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 7**

E' vero che un sistema lineare omogeneo di 100 equazioni e 50 incognite ha sempre soluzioni non nulle?

`Risoluzione.` Un sistema lineare omogeneo è sempre risolubile dal momento che ammette fra le sue soluzioni almeno quella nulla.
Sia A la matrice dei coefficienti del sistema: la matrice A risulta avere 100 righe e 50 colonne; sappiamo che il numero di soluzioni è pari a ∞^{n-p} dove n =numero di incognite e $p = \mathtt{rk}(A)$. Il rango di A a sua volta è pari al massimo di righe linearmente indipendenti che si possono estrarre dalla matrice (per il teorema del rango sappiamo che questo numero è sempre uguale anche al numero di colonne linearmente indipendenti che si possono estrarre dalla matrice) e dunque il rango della matrice risulterà compreso fra 0 e 50. Allora $0 \leq \mathtt{rk}(A) \leq 50$ e $50 - 50 \leq n - \mathtt{rk}(A) \leq 50 - 0$ e quindi il numero di soluzioni potrà variare fra ∞^0 e ∞^{50}.
Osserviamo che nel caso in cui il rango della matrice dei coefficienti sia massimo cioè nel caso in cui $\mathtt{rk}(A) = 50$ si avranno $\infty^0 (= 1)$ soluzioni cioè solamente la soluzione nulla; perciò si può concludere che in generale non è vero che un sistema lineare omogeneo di 100 equazioni e 50 incognite ha sempre soluzioni non nulle.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 162

Per studiare quante soluzioni ha il sistema è necessario calcolare il rango della matrice A, e dunque ridurla. Una possibile riduzione è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $p = \rho(A) = 2$, $n = 4$ e concludiamo che il sistema ha $\infty^{n-p} = \infty^2$ soluzioni. Per trovare lo spazio delle soluzioni risolviamo il sistema ridotto che ha come matrice associata la matrice che abbiamo ottenuto al termine dell'operazione di riduzione. Otterremo dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + 2z = 0, \end{cases} \tag{2}$$

da cui otteniamo $z = -x$ e $t = y$. Dunque lo spazio delle soluzioni del nostro sistema avrà la seguente espressione

$$S = \{(x, y, -x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

e una sua base sarà

$$B = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)\}.$$

c) La matrice associata al sistema lineare ha la seguente forma:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda & -2 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Per studiare quante soluzioni ha il sistema è necessario calcolare il rango della matrice A al variare del parametro λ. Notiamo innanzitutto che per $\lambda = 0$ la matrice assume la seguente forma

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui la terza riga si annulla completamente e la matrice risulta già ridotta per righe. Dunque in questo caso $p = \rho(A) = 2$, $n = 4$ e il sistema ha $\infty^{n-p} = \infty^2$ soluzioni. Per trovare lo spazio delle soluzioni dovremo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y - 2z + t = 0 \\ x - 2z = 0, \end{cases} \tag{3}$$

da cui otteniamo $x = 2z$ e $y = t$. Dunque lo spazio delle soluzioni del sistema per $\lambda = 0$ avrà la seguente espressione

$$S_0 = \{(2z, y, z, y) | y, z \in \mathbb{R}\}$$

e una sua base sarà data da $B = ((2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 10**

Discutere la risolubilità e, se possibile, risolvere i sistemi non omogenei ottenuti da quelli omogenei dell'esercizio 9 con la seguente scelta di termini noti:

a) $(1, 2)$;

b) $(1, 2, 4)$ oppure $(1, 1, 1)$;

c) (a, b, c) al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

`Risoluzione.`

a) La matrice completa associata al sistema lineare non omogeneo ha la seguente forma:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Per studiare se il sistema è risolubile e quante soluzioni ha è necessario calcolare il rango della matrice A e della matrice $A|B$. Una possibile riduzione è la seguente:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Si vede che $\rho(A|B) = \rho(A) = p = 2$, $n = 3$ e quindi concludiamo che il sistema è risolubile ed ha $\infty^{n-p} = \infty^1$ soluzioni. Per trovare lo spazio delle soluzioni risolviamo il sistema ridotto che ha come matrice associata la matrice che abbiamo ottenuto al termine dell'operazione di riduzione. Otterremo dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -4z = 1, \end{cases} \tag{1}$$

da cui otteniamo $z = -1/4$ e $x = 5/4 - y$. Dunque le soluzioni del nostro sistema saranno tutti i vettori del tipo: $\{(5/4 - y, y, -1/4)\}$.

b) La matrice completa associata al sistema lineare non omogeneo nel primo caso ha la seguente forma:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Per studiare se il sistema è risolubile e quante soluzioni ha è necessario calcolare il rango della matrice $A|B$ e vedere prima di tutto se $\rho(A|B) = \rho(A)$. Una possibile riduzione è la

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 11**

Discutere e risolvere, al variare del parametro, il sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + hz = 0 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

`Risoluzione.` Poichè il sistema è omogeneo esso è risolubile dal momento che ammette almeno la soluzione nulla $(0,0,0)$. Per il teorema di Rouchè-Capelli sappiamo che il sistema avrà $\infty^{3-\mathtt{rk}(A)}$ soluzioni dove A è la matrice dei coefficienti del sistema. Riduciamo la matrice A per righe per calcolarne il rango e per ottenere un sistema equivalente più semplice da risolvere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice ridotta per righe e pertanto si ha che

$$\mathtt{rk}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 1 \\ 2 \text{ se } h = 1 \end{cases}$$

e quindi che il sistema ha

$$\begin{cases} \infty^{3-3} = \infty^0 = 1 \text{ soluzione (quella nulla) se } h \neq 1 \\ \infty^{3-2} = \infty^1 \text{ soluzioni se } h = 1. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema nel caso in cui $h = 1$; possiamo risolvere il sistema che ha come matrice dei coefficienti la matrice ridotta per righe dal momento che esso è equivalente a quello iniziale:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - z \\ z = -4x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 4x = 5x \\ z = -4x \end{cases}$$

e quindi le soluzioni del sistema sono della forma $(x, 5x, -4x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$ e quindi ci sono ∞^1 soluzioni.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 162

e quindi il sistema è risolubile se e solo se $c = 0$ (e avrà ∞^2 soluzioni).

Per $\lambda = -1$ la matrice completa ha la seguente forma

$$A_{-1}|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & a \\ 1 & -1 & -2 & 1 & b \\ -1 & -1 & -2 & 1 & c \end{array}\right).$$

Riduciamola per calcolarne il rango:

$$A_{-1}|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & a \\ 1 & -1 & -2 & 1 & b \\ -1 & -1 & -2 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a \\ -1 & -1 & -2 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & -2 & -4 & 2 & c+a \end{array}\right)$$

e dunque il sistema è risolubile se e solo se $a = b$ (e avrà ∞^2 soluzioni).

Si trovino le soluzioni del sistema nei tre casi analizzati.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 15**

Si determini se esistono valori del parametro complesso h tali che la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} i & h & 0 \\ 2i & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

sia invertibile. Scelto uno di tali valori, se ne calcoli l'inversa.

`Risoluzione.` Sappiamo che una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero e dunque la matrice A_h sarà invertibile per quei valori di $h \in \mathbb{C}$ per cui $|A_h| \neq 0$. Calcoliamo il determinante di A_h attraverso lo sviluppo di Laplace rispetto all'ultima riga che presenta due zeri. Si ha

$$|A_h| = -i(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} i & h \\ 2i & 2 \end{vmatrix} = -i(2i - 2hi) = +2 - 2h$$

e dunque $|A_h| = 0$ se e solo se $h = 1$.
Pertanto la matrice è invertibile per ogni $h \in \mathbb{C}$ con $h \neq 1$.
Scegliamo un valore qualsiasi di h per cui la matrice è invertibile e calcoliamo l'inversa della matrice; per esempio scegliamo $h = 0$ e calcoliamo l'inversa di $A_0 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 2i & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Troviamo

a) $|A_0| = 2$;

b) la matrice trasposta di A_0: ${}^tA_0 = \begin{pmatrix} i & 2i & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix}$;

c) la matrice dei complementi algebrici di ${}^tA_0$:

$$(A_0)_{ji} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -i \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2i & 0 \\ 2 & -i \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} i & 2i \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2i & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} i & 2i \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2i \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix};$$

d) infine A_0^{-1}:

$$A_0^{-1} = \frac{1}{|A_0|}(A_0)_{ji} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2i \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Si controlli come ulteriore verifica che $A_0 \cdot A_0^{-1} = A_0^{-1} \cdot A_0 = I$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 21**

Si risolva con la regola di Cramer il sistema lineare $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

`Risoluzione.` Notiamo innanzitutto che la matrice A dei coefficienti del sistema è una matrice invertibile dal momento che $|A| = -2(-1)^{1+2}(-1) = -2 \neq 0$. Osserviamo che il fatto che il determinante della matrice sia non nullo significa che la matrice ha rango massimo cioè 3 e che il sistema avrà 1 sola soluzione. La regola di Cramer ci dice che le componenti dell'unica soluzione (x_1, x_2, x_3) si trovano in questo modo:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|}$$

dove con Δ_i intendiamo il determinante della matrice ottenuta dalla matrice A sostituendo la colonna i-esima con la colonna dei termini noti del sistema. Quindi si ha

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2(2-6)}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 1(-4) - 1(1-2) + 3(3-2) = -4 + 1 + 3 = 0$$

$$\overset{-4}{1(\cancel{-1})\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} - 1(\cancel{-1})\overset{+1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + 3\overset{3}{(-1)}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

L'unica soluzione del sistema è quindi $(4, 0, -1)$.

Si noti che dal momento che la matrice A è invertibile si ha che $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$ e quindi il vettore colonna $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ delle soluzioni si può trovare anche come prodotto fra A^{-1} e B: si verifichi.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 24**

Stabilire per quali valori di m il seguente sistema in x, y, z, t ha soluzioni non nulle:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + my = 0 \\ y + z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + z + t = 0 \end{cases}$$

`Risoluzione.` Poichè il sistema è omogeneo esso è risolubile dal momento che ammetterà almeno la soluzione nulla $(0,0,0,0)$. Per il teorema di Rouchè-Capelli sappiamo che il sistema avrà $\infty^{4-\mathtt{rk}(A)}$ soluzioni dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema.
Pertanto il sistema ammetterà solamente la soluzione nulla se $4 - \mathtt{rk}(A) = 0$ ed ammetterà anche soluzioni non nulle se $4 - \mathtt{rk}(A) > 0$ cioè se $\mathtt{rk}(A) < 4$; ricordiamo che una matrice quadrata ha rango massimo (pari al numero delle sue righe che è uguale al numero delle sue colonne) se e solo se $|A| \neq 0$. Vogliamo trovare quei valori di m per cui $\mathtt{rk}(A) < 4$ e quindi quei valori di m per cui $|A| = 0$.
Calcoliamo $|A|$ attraverso lo sviluppo di Laplace rispetto alla seconda riga che presenta il maggior numero di zeri:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + m(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + m(-1+6-3) = 2m.$$

Risulta perciò che $|A| = 0$ se e solo se $m = 0$ e quindi il sistema ammetterà anche soluzioni non nulle se e solo se $m = 0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 27**

Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ h & 1 & 2 \\ h-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

discutere e risolvere al variare di h l'equazione matriciale $AX = B$.

`Risoluzione.` Per studiare se, al variare del parametro h, il sistema matriciale ammette soluzione, e in caso positivo quante ne ammette, si procede come usuale per i sistemi lineari non omogenei riducendo la matrice completa associata:

$$A_h|B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ h & 1 & 2 & 2 & 1 \\ h-1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ h-1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ h-1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ h-1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Notiamo che per $h = 1$ il sistema non è risolubile perché $\rho(A_1|B) = 2)$ ma $\rho(A_1) = 1$. Per $h \neq 1$, invece, $\rho(A_h) = \rho(A) = p = 2$ e, dal momento che $n = 3$, si ha $n - p = 1$ riga incognita libera (questa volta la quantità $n - p$ mi da il numero di **righe** incognite libere!).

Risolviamo il sistema ridotto scrivendo la nostra matrice incognita $X = \mathbb{R}^{3,2}$ come

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

avendo messo in evidenza le righe di X. Il sistema ridotto avrà dunque la seguente forma:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = (1,0) \\ (h-1)X_1 = (1,1) \end{cases} \qquad X_2 = -X_1 - 2X_3 + (1,0) \tag{1}$$

da cui otteniamo $X_1 = \left(\frac{1}{h-1}, \frac{1}{h-1}\right)$ e $X_2 = \left(\frac{h-2}{h-1}, -\frac{1}{h-1}\right) - 2X_3$. Se indichiamo $X_3 = (x_5, x_6)$, allora $X_2 = \left(\frac{h-2}{h-1} - 2x_5, -\frac{1}{h-1} - 2x_6\right)$ e, in definitiva, si avrà

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{h-1} & \frac{1}{h-1} \\ \frac{h-2}{h-1} - 2x_5 & -\frac{1}{h-1} - 2x_6 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

$$x_2 = -\left(\frac{1}{h-1}, \frac{1}{h-1}\right) + (1,0) - 2X_3$$

m.c.m

$$\left(\frac{-1+h-1}{h-1}, -\frac{1}{h-1}\right) = \left(\frac{h-2}{h-1}, -\frac{1}{h-1}\right) - 2X_3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 162

Esercitazione 4 - **Esercizio 30**

Risolvere le seguenti equazioni matriciali: $AXA^{-1} = I$, $AXA^{-1} = A$ con

$$A = \begin{pmatrix} \pi^2 & e^\pi & 2 \\ 0 & \pi+1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`Risoluzione.` Osserviamo innanzitutto che la matrice A è invertibile dal momento che $|A| \neq 0$: la matrice è triangolare superiore e quindi possiamo calcolarne il determinante calcolando il prodotto degli elementi sulla diagonale e quindi

$$|A| = \pi^2 \cdot (\pi+1) \cdot 1 = \pi^2(\pi+1) \neq 0.$$

Per risolvere la prima equazione allora possiamo moltiplicare a sinistra entrambi i membri per l'inversa di A che esiste e quindi

$$AXA^{-1} = I \iff A^{-1}AXA^{-1} = A^{-1}I \iff IXA^{-1} = A^{-1} \iff XA^{-1} = A^{-1}.$$

Possiamo ora moltiplicare a destra entrambi i membri per A ottenendo

$$XA^{-1}A = A^{-1}A \iff XI = I \iff X = I$$

e quindi la matrice che risolve la prima equazione matriciale è la matrice identità con 3 righe e 3 colonne.

Per risolvere la seconda equazione possiamo nuovamente moltiplicare a sinistra entrambi i membri per l'inversa di A che esiste e quindi

$$AXA^{-1} = A \iff A^{-1}AXA^{-1} = A^{-1}A \iff IXA^{-1} = I \iff XA^{-1} = I.$$

Adesso possiamo moltiplicare a destra entrambi i membri per A ottenendo

$$XA^{-1}A = IA \iff XI = A \iff X = A$$

e quindi la matrice che risolve la seconda equazione matriciale è la matrice A.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio 1**

Dire se l'applicazione

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

definita da $g(x, y, z) = (2x - y, z)$ è lineare.

`Risoluzione.` L'applicazione g è lineare se e solo se

(i) per ogni $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ si ha $g((x, y, z) + (x', y', z')) = g(x, y, z) + g(x', y', z')$;

(ii) per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $g(\lambda(x, y, z)) = \lambda g(x, y, z)$.

Verifichiamo che le due condizioni sono soddisfatte:

(i) per ogni $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ si ha che $g((x, y, z) + (x', y', z')) = g(x + x', y + y', z + z') = (2(x+x')-(y+y'), z+z') = (2x+2x'-y-y', z+z')$ e $g(x, y, z)+g(x', y', z') = (2x-y, z)+(2x'-y', z') = (2x + 2x' - y - y', z + z')$ e pertanto $g((x, y, z) + (x', y', z')) = g(x, y, z) + g(x', y', z')$;

(ii) per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $g(\lambda(x, y, z)) = g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y, \lambda z)$ e $\lambda g(x, y, z) = \lambda(2x - y, z) = (2\lambda x - \lambda y, \lambda z)$ e quindi $g(\lambda(x, y, z)) = \lambda g(x, y, z)$.

Concludiamo che g è lineare.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio 5**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'a.l. definita da

$$f(x, y, z, t) = (x - 5t, y + z + t, x - y - z - t).$$

Si trovi la matrice A associata ad f, $\ker f$ e $\mathbf{Im} f$. Si calcoli $w = f(3, 2, 1, 0)$ e si trovino tutti i $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = w$.

`Risoluzione.`
Scriviamo la matrice A associata ad f tramite le basi canoniche; si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo trovare il nucleo di f: abbiamo che $\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x - 5t, y + z + t, x - y - z - t) = (0, 0, 0)\}$. Dunque i vettori del nucleo di f sono quei vettori di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano il sistema lineare omogeneo $AX = 0$. Cerchiamo di risolvere il sistema riducendo prima la matrice associata e risolvendo poi il sistema omogeneo ridotto equivalente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo che il sistema omogeneo ridotto equivalente è

$$\begin{cases} x - 5t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 5t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases}$$

da cui $\ker f = \{(0, y, -y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ e quindi $\dim \ker f = 1$.
Dalla relazione $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim \mathbf{Im} f$ e dal fatto che $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ e $\dim \ker f = 1$ otteniamo che $\dim \mathbf{Im} f = 3$; allora $\mathbf{Im} f$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$ e pertando coincide con tutto $\mathbb{R}^3$ e l'applicazione lineare f è suriettiva.
Calcoliamo $w = f(3, 2, 1, 0) = (3 - 5 \cdot 0, 2 + 1 + 0, 3 - 2 - 1 - 0) = (3, 3, 0)$.
Ora dobbiamo calcolare tutti i $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = w$ cioè dobbiamo calcolare $f^{-1}(w) \subseteq \mathbb{R}^4$; possiamo procedere in due modi:

1) ci ricordiamo che conoscendo un vettore $v_0 \in f^{-1}(w)$ risulta che $f^{-1}(w) = v_0 + \ker f$. Nel nostro caso $v_0 = (3, 2, 1, 0)$: infatti abbiamo appena visto che $f(3, 2, 1, 0) = (3, 3, 0) = w$; allora $f^{-1}(w) = v_0 + \ker f = \{v_0 + u : u \in \ker f\} = \{(3, 2, 1, 0) + (0, y, -y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{(3, 2 + y, 1 - y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$. Chiamiamo $2 + y = y'$ (da cui $y = y' - 2$ e quindi $1 - y = 1 - (y' - 2) = 3 - y'$) e otteniamo che $f^{-1}(w) = \{(3, y', 3 - y', 0) : y' \in \mathbb{R}\}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio 6**

Si consideri la funzione $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da: $f_m(x, y, z) = (x + y - mz, x + y + mz)$. Allora

a. esiste qualche m per cui f_m è iniettiva

b. $\ker f_m$ è un sottospazio di dimensione 2 per ogni scelta di m reale

c. $\ker f_m$ ha dimensione 3 se $m = 0$

d. $\dim(\mathbf{Im}(f_m)) = 2$ per ogni $m \neq 0$.

(Si indichi la risposta corretta dandone giustificazione.)

`Risoluzione.` Per prima cosa ci costruiamo la matrice associata all'applicazione f_m rispetto alle basi canoniche:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone il rango. Una possibile riduzione è la seguente:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che per $m = 0$ la seconda riga si annulla completamente e $\rho(A_m) = 1$ mentre per ogni $m \neq 0$ $\rho(A) = 2$; sapendo che $\rho(A_m) = \dim(\mathbf{Im}(f_m))$ concludiamo che

$$\dim(\mathbf{Im}(f_m)) = \begin{cases} 2 & \texttt{se } m \neq 0 \\ 1 & \texttt{se } m = 0 \end{cases}$$

e quindi poichè deve risultare che

$$\dim \ker f_m + \dim(\mathbf{Im}(f_m)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

dipende
dim Im f = r(A)
dim ker f = dipende dalle variabili libere

si ha che

$$\begin{cases} \texttt{per } m \neq 0 & \dim(\mathbf{Im}(f_m)) = 2 \ \texttt{ e } \ \dim \ker f_m = 1 \\ \texttt{per } m = 0 & \dim(\mathbf{Im}(f_m)) = 1 \ \texttt{ e } \ \dim \ker f_m = 2 \end{cases}$$

Siamo ora in grado di scegliere l'affermazione vera fra quelle proposte dall'esercizio:

a. Il nucleo non ha dimensione 0 per nessun valore del parametro m e quindi il nucleo non si riduce mai al vettore nullo di $\mathbb{R}^3$ e quindi non esistono valori di m per cui f_m è iniettiva e la a. è FALSA. Si poteva anche osservare che l'applicazione lineare è definita da uno spazio vettoriale con dimensione maggiore in uno spazio con dimensione minore ed una tale applicazione non può mai essere iniettiva.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio** ~~10~~ 7

E' data la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con h parametro reale

a. si consideri l'endomorfismo f_h di $\mathbb{R}^3$ associato ad A_h rispetto alla base canonica e si trovi una base del nucleo di f_h e una base dell'immagine di f_h, per ogni h reale;

b. si determinino gli eventuali valori del parametro reale h in corrispondenza dei quali il vettore $(2, 2, 2)$ ha infinite controimmagini.

`Risoluzione.`

a. Per trovare il nucleo $ker f_h$ al variare del parametro h risolviamo il sistema lineare $A_h X = 0$. Dal momento che la matrice è quadrata, calcoliamone il determinante per conoscere i valori di h per cui la matrice non ha rango massimo (e dunque ha infinite soluzioni non nulle); per i valori di h trovati ridurremo la matrice, per sapere esattamente quante soluzioni ammette il sistema e qual è la loro espressione.

   Si vede facilmente che $\det A_h = h(1 - h^2)$ e quindi concludiamo che il determinante si annulla per $h = 0, h = 1, h = -1$. Dunque per ogni $h \neq -1, 0, 1$, il sistema ha solo la soluzione nulla, $\ker f = \{(0, 0, 0)\}$, e l'applicazione è iniettiva (in realtà, dal momento che stiamo lavorando con un endomorfismo possiamo direttamente concludere che per questi valori di h l'applicazione è biiettiva).

   Per $h = -1$, la matrice associata all'a.l. è la seguente:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(A) = 2$$

   da cui si vede che $p = \rho(A_{-1}) = 2$, e quindi concludiamo che il sistema $A_{-1}X = 0$ ha $\infty^{3-p} = \infty^1$ soluzioni. Il sistema è equivalente al seguente sistema ridotto:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   da cui otteniamo che $\ker f_{-1} = \{(0, y, y) | y \in \mathbb{R}\}$. Una sua base sarà data da $B_{\ker f_{-1}} = ((0, 1, 1))$.

   Per $h = 0$, la matrice associata all'a.l. è la seguente:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 162

b) Vogliamo trovare i valori di h per cui il vettore $w = (2, 2, 2)$ ha infinite controimmagini: ci riduciamo a cercare questi valori fra i valori di $h = 0, 1, -1$; infatti per tutti gli altri valori del parametro l'applicazione lineare è biettiva e quindi per ogni vettore nello spazio di arrivo $\mathbb{R}^3$ la controimmagine di w è un insieme costituito da un solo elemento.
Vediamo per quali valori fra $h = 0, 1, -1$ il vettore $w = (2, 2, 2)$ ha infinite controimmagini tramite la f_h. Risolviamo i tre sistemi $A_0X = w$, $A_1X = w$ e $A_{-1}X = w$ e vediamo quali fra questi hanno infinite soluzioni.
Risolviamo il sistema $A_0X = w$; se scriviamo dunque la matrice completa del sistema otteniamo:

$$(A_0|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

e vediamo immediatamente che il sistema è incompatibile; questo significa che $f_0^{-1}(w) = \emptyset$ e quindi $w \notin \mathbf{Im} f_0$.
Risolviamo il sistema $A_1X = w$; se scriviamo dunque la matrice completa del sistema e la riduciamo, otterremo:

$$(A_1|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema lineare associato è

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

e quindi $f_1^{-1}(w) = \{(2, y, 2 - y) : y \in \mathbb{R}\}$ e dunque per $h = 1$ il vettore w ha infinite controimmagini.
Risolviamo il sistema $A_{-1}X = w$; se scriviamo dunque la matrice completa del sistema e la riduciamo, otterremo:

$$(A_{-1}|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

e vediamo immediatamente che il sistema è incompatibile; questo significa che $f_{-1}^{-1}(w) = \emptyset$ e quindi $w \notin \mathbf{Im} f_{-1}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 162

Infine ci si chiede se $v \in \mathbf{Im}h$ cioè se esistono $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che $h(x,y,z) = (2x+2y+z, 2x+2y-3z, x+y) = (0,1,-1)$ e quindi se ci sono soluzioni del sistema lineare la cui matrice completa si presenta come

$$M(h)|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{8} \end{array}\right)$$

da cui otteniamo che il sistema è incompatibile e quindi $v \notin \mathbf{Im}h$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio** 11

Provare che, nell'insieme degli endomorfismi di $\mathbb{R}^2$

a. non esiste alcun elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4), f(3,4) = (1,1)$;

b. esiste uno ed un solo elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4)$;

c. esistono infiniti elementi f per cui $f(1,2) = (2,3)$;

d. esiste uno ed un solo elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4), f(3,3) = (3,3)$;

e. esistono infiniti elementi f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,4) = (4,6)$.

`Risoluzione.` Ricordiamo che per determinare univocamente un'applicazione lineare f fissata una base nello spazio di partenza e una nello spazio di arrivo è sufficiente definire l'immagine degli elementi di una base dello spazio di partenza. Proviamo che

a. non esiste alcun elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4), f(3,4) = (1,1)$; osserviamo che, dal momento che $(3,4) = 2(2,3) - (1,2)$ per le proprietà di linearità della f si deve avere che $f(3,4) = f(2(2,3) - (1,2)) = 2f(2,3) - f(1,2) = 2(3,4) - (2,3) = (4,5) \neq (1,1)$ e quindi non esiste un endomorfismo da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ con questa proprietà.

b. esiste uno ed un solo elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4)$: i vettori $(1,2)$ e $(2,3)$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$; avendo fissato le immagini di questi vettori l'endomorfismo è completamente determinato ed esiste un unico endomorfismo con queste caratteristiche.

c. esistono infiniti elementi f per cui $f(1,2) = (2,3)$: fissiamo un altro vettore di $\mathbb{R}^2$ non parallelo a $(1,2)$ per esempio $(1,0)$; i vettori $(1,2)$ e $(1,0)$ essendo linearmente indipendenti sono una base per $\mathbb{R}^2$ e dunque per determinare completamente un endomorfismo f dobbiamo dire quali sono le loro immagini attraverso la f. L'esercizio ci impone di mandare il vettore $(1,2)$ nel vettore $(2,3)$ ma ci lascia liberi nel scegliere dove mandare il vettore $(1,0)$ e possiamo scegliere questa immagine in infiniti modi costruendo infiniti endomorfismi con la proprietà indicata.

d. esiste uno ed un solo elemento f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,3) = (3,4), f(3,3) = (3,3)$: osserviamo che $(3,3) = 3(2,3) - 3(1,2)$; ogni applicazione lineare che soddisfa le prime 2 condizioni è tale che $f(3,3) = f(3(2,3) - 3(1,2)) = 3f(2,3) - 3f(1,2) = 3(3,4) - 3(2,3)) = (9,12) - (6,9) = (3,3)$ e dunque rispetta anche la terza condizione; pertanto la terza condizione è superflua e perciò siamo di nuovo nel caso b.

e. esistono infiniti elementi f per cui $f(1,2) = (2,3), f(2,4) = (4,6)$: osserviamo che $(2,4) = 2(1,2)$; ogni applicazione lineare che soddisfa la prima condizione è tale che $f(2,4) = f(2(1,2)) = 2f(1,2) = 2(2,3) = (4,6)$ e dunque rispetta anche la seconda condizione; pertanto la seconda condizione è superflua e perciò siamo di nuovo nel caso c.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 162

Dunque

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Per calcolare l'espressione del nucleo risolviamo il sistema lineare $M_f X = 0$, dove indichiamo con $X = {}^t(a, b, c, d)$ il vettore delle nostre incognite (che saranno le componenti delle matrici appartenenti al nucleo rispetto alla base E). Riducendo per righe la matrice M_f otteniamo

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema sarà dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} 2a + 4b - 2d = 0 \\ -2b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = d - 2b \\ c = -b \end{cases}$$

da cui si ha che

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = d - 2b \wedge c = -b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d - 2b & b \\ -b & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

c. Verifichiamo che $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \ker f$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \ker f$ se e solo se esistono $b, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} d - 2b & b \\ -b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo allora se esistono $b, d \in \mathbb{R}$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} d - 2b = 1 \\ b = 1 \\ -b = 1 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Il sistema è evidentemente non risolubile; pertanto concludiamo che $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \ker f$.

d. Il vettore $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Im}(f)$ se e solo se esiste $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cioè se e solo $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si tratta di vedere se è risolubile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio 17**

Nello spazio V dei vettori ordinari è data la funzione f definita come

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{v}, \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{b}).$$

a. verificare che f è lineare;

b. posto $\mathbf{a} = (1,1,1)$ e $\mathbf{b} = (1,0,-1)$ calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. Completare $\mathbf{a}$ ad una base B di V e determinare M_f^B;

c. trovare $\ker f$ e $\mathbf{Im}(f)$.

`Risoluzione.`

a. Si vede facilmente che, per le proprietà del prodotto vettoriale,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{a} \wedge (\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{b} \wedge (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{u}) &= \mathbf{a} \wedge (\alpha\mathbf{u}) - \mathbf{b} \wedge (\alpha\mathbf{u}) \\ &= \alpha(\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{u}) \\ &= \alpha f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

e dunque concludiamo che l'applicazione f è lineare.

b. Per calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica dobbiamo calcolare l'immagine dei tre versori che costituiscono la base.

$$f(\mathbf{i}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{i} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$f(\mathbf{j}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{j} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i}$$

$$f(\mathbf{k}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 162

c. Per trovare il nucleo dell'applicazione f lavoriamo, per semplicità, nella base canonica e dunque risolviamo il sistema lineare $M_f^E X = 0$ che è equivalente al sistema lineare di equazioni

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ 2x = 0. \end{cases}$$

Concludiamo quindi che $\ker f = \{(0, y, 2y) | y \in \mathbb{R}\}$.

Oss. Un metodo alternativo nel calcolo del nucleo ci viene dalla definizione della f:

$$\ker f = \{\mathbf{v} | f(\mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} | \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{v} | (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{v} = 0\}.$$

Quindi da questa definizione si conclude che i vettori appartenenti al nucleo sono tutti quelli paralleli al vettore $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (0, 1, 2)$. Per trovare una base dell'immagine è sufficiente ridurre per colonne la matrice M_f^E:

$$M_f^E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + \frac{1}{2} C_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base sarà data da $B_{\mathbf{Im}(f)} = ((0, 2, -1), (-2, 0, 0))$ ovvero dalle colonne non nulle della matrice ridotta per colonne ottenuta a partire dalla matrice M_f^E; pertanto l'immagine di f sarà data dalla combinazione lineare delle colonne linearmente indipendenti della matrice:

$$\mathbf{Im}(f) = \mathcal{L}((0, 2, -1), (-2, 0, 0)).$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 162

c. Per calcolare l'espressione del nucleo risolviamo il sistema lineare $M_f X = 0$, dove indichiamo con $X = (a, b, c, d)^T$ il vettore delle nostre incognite (che saranno le componenti dei polinomi appartenenti al nucleo rispetto alla base E). Il sistema sarà dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} -b = 0 \\ 3d = 0, \end{cases}$$

da cui ricaviamo $b = d = 0$ e a e c incognite libere. Quindi concludiamo che $\ker f = \{v(x) = a + cx^2 : a, c \in \mathbb{R}\}$.

Per quanto riguarda il calcolo dell'immagine di $f^2 = f \circ f$ ci ricordiamo che in generale la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è data dal prodotto delle matrici associate alle due applicazioni ($M_{f \circ g} = M_f M_g$). Quindi

$$M_{f^2} = M_{f \circ f} = M_f M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Essendo l'immagine la combinazione lineare delle colonne linearmente indipendenti (ovviamente le colonne saranno **le componenti dei polinomi rispetto alla base** E!) deduciamo che

$$\mathbf{Im}(f)^2 = \mathcal{L}(x, 9x^3) = \{ax + cx^3 : a, c \in \mathbb{R}\}.$$

d. Dal risultato ottenuto nel punto a. osserviamo che $f(v) = w$ e dunque possiamo facilmente calcolare le controimmagini di w:

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) &= v + \ker f \\ &= \{2 - 2x - 4x^2 + x^3 + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \ker f\} \\ &= \{2 - 2x - 4x^2 + x^3 + a + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2 + a) - 2x - (4 - b)x^2 + x^3 : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\tilde{a} - 2x - \tilde{b}x^2 + x^3 : \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

e. Per trovare $f^{-1}(w)$ in questo caso dobbiamo risolvere il sistema $M_f X = w$. Dalla matrice completa

$$M_f = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

osserviamo che il sistema è incompatibile e dunque non esistono controimmagini di w.

In effetti, dal calcolo dell'immagine di f

$$\mathbf{Im}(f) = \mathcal{L}(-x, 3x^3) = \{ax + cx^3 : a, c \in \mathbb{R}\}$$

si poteva concludere che $w \notin \mathbf{Im}(f)$ perché possiede il termine costante ed il termine in x^2.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 162

da cui ricaviamo $a = b = d = 0$ e c incognita libera. Quindi concludiamo che $\ker f = \{v(x) = cx^2 : c \in \mathbb{R}\}$ ed abbiamo ulteriore conferma che $\dim \ker f = 1$.
Notiamo che la matrice M_f oltre ad essere ridotta per righe è anche ridotta per colonne; per trovare le componenti di una base dell'immagine di f rispetto alla base E fissata è sufficiente considerare le colonne non nulle della matrice M_f. Allora

$$B_{\mathbf{Im}(f)} = (-6, -2x, \frac{3}{2}x^3)$$

e quindi

$$\mathbf{Im}(f) = \mathcal{L}(-6, -2x, \frac{3}{2}x^3) = \{a + bx + dx^3 : a, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Di qui abbiamo ulteriore conferma che $\dim \mathbf{Im}(f) = 3$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 162

Esercitazione 5 - **Esercizio** 22

Siano E uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base di E e $B' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ un'altra sua base con:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

1) Determinare le equazioni del cambiamento dalla base B' alla base B.

2) Se $(3, 2, 1)$ sono le componenti di un vettore $\mathbf{u}$ rispetto alla base B, determinare le sue componenti rispetto alla base B'.

`Risoluzione.`

1) Vogliamo determinare le equazioni del cambiamento dalla base B' alla base B cioè vogliamo scrivere le equazioni che ci permettono di trovare le componenti di un qualsiasi vettore di E nella base B che indichiamo con (x, y, z) conoscendo le componenti del vettore rispetto alla base B' che indichiamo con (x', y', z'); sappiamo che in generale esiste questa relazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{B,B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo calcolare $P_{B,B'}$: sulle colonne della matrice dobbiamo scrivere le componenti dei vettori della base B' ($\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$) rispetto ai vettori della base B ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$) e dunque si ha

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora le equazioni del cambiamento dalla base B' alla base B sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x = x' + y' - z' \\ y = 2x' + 7y' + z' \\ z = x' + 4y' + z' \end{cases}.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 162

Esercitazione 6 - **Esercizio 7**

Provare che le seguenti matrici A e B hanno autovalori reali, mentre non ne ha la loro somma: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

`Risoluzione.` Per prima cosa dobbiamo calcolare gli autovalori delle matrici A e B. Per quanto riguarda la matrice A abbiamo

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

e quindi dobbiamo trovare le radici del polinomio caratteristico, risolvendo

$$p.c.(A) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0.$$

$4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+1$

$\lambda^2-5\lambda+5$

$\Delta = 25-4\cdot 1\cdot 5 = 5$

Si può vedere che le soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Per la matrice B abbiamo invece

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

e quindi dobbiamo trovare le radici del polinomio caratteristico, risolvendo

$$p.c.(B) = \det(B - \lambda I) = (1-\lambda)(-2-\lambda) + 1 = 0.$$

Si può vedere che il polinomio ha due radici distinte $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Infine consideriamo la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e calcoliamone gli autovalori. Dal momento che

$$A + B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

avremo $p.c.(A+B) = \det(A + B - \lambda I) = (2-\lambda)^2 + 4 = 0$, ovvero $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. Quindi il polinomio caratteristico della matrice $A + B$ ammette due radici complesse, e concludiamo che, nonostante A e B siano diagonalizzabili in $\mathbb{R}$ (hanno due autovalori distinti!), la matrice $A + B$ è diagonalizzabile solo in $\mathbb{C}$. Osservate che questo risultato segue dal fatto che, in generale, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 162

ker f = 0
iniettiva
Im f = 3
quindi
a $\mathbb{R}^3$
suriettiva

(iii) Per determinare il nucleo di f risolviamo il sistema $M_f^{B,B}X = 0$. Dal momento che la matrice ha rango massimo concludiamo che $\ker f = \{(0,0,0)\}$, $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, e dunque f è un endomorfismo biiettivo.

(iv) Si può vedere facilmente che

$$M_f^{C,C} = P_{C,B} M_f^{B,B} P_{C,B}^{-1},$$

dove $P_{C,B}$ è la matrice che ha sulle colonne i vettori v_1, v_2 e v_3, ovvero gli autovettori associati agli autovalori 1,3 e 6:

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservate che la matrice $P_{C,B}$ è la matrice di cambio base dalla base canonica C alla base di autovettori B (sulle colonne ha le componenti degli elementi della base nuova B rispetto alla base vecchia C).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 162

Esercitazione 6 - **Esercizio 19**

In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (k,2,2)$. Studiare, al variare di k, l'esistenza di endomorfismi soddisfacenti queste condizioni:

a) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 e $\mathbf{v}_3$ è autovettore relativo all'autovalore 2;

b) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 ed f non è iniettivo;

c) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi all'autovalore 1 e $\dim \mathbf{Im}(f) = 1$;

d) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori relativi all'autovalore 1.

`Risoluzione.`

a) Dal momento che autovettori appartenenti ad autospazi diversi sono tra loro linearmente indipendenti, affinché $\mathbf{v}_3$ sia un autovettore associato ad un autospazio diverso da quello generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, è necessario che $\mathbf{v}_3$ non sia combinazione lineare degli altri due vettori. Verifichiamo dunque se per qualche $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a+b=k \\ a=2 \\ a-b=2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} k=2 \\ a=2 \\ b=0 \end{matrix}$$

$$(k,2,2) = a(1,1,1) + b(1,0,-1).$$

Si vede facilmente che per $k = 2$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1$. Dunque concludiamo che un endomorfismo f avente $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ come autovettori associati all'autovalore 1 e $\mathbf{v}_3$ come autovettore associato all'autovalore 2 esiste se e solo se $k \neq 2$.

b) In questo caso, per quanto abbiamo visto nel punto precedente, dobbiamo distinguere il caso in cui $k = 2$ da quello in cui $k \neq 2$.

Per $k = 2$ abbiamo che $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1$ e dunque l'autopazio V_1 associato all'autovalore 1 avrà dimensione 1. Per poter identificare un endomorfismo abbiamo bisogno, come sappiamo, di conoscere l'immagine dei vettori di una base dello spazio di partenza, ovvero di $\mathbb{R}^3$. Un vettore ce l'abbiamo già, $\mathbf{v}_1$, e ne conosciamo l'immagine, $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$. Quello che ci manca è completare $\mathbf{v}_1$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ e scegliere l'immagine dei vettori aggiunti. Dal momento che siamo interessati ad ottenere un endomorfismo non iniettivo, l'unica richiesta da fare è che il rango della matrice associata ad f non abbia rango massimo. Ad esempio, se con $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ indichiamo i vettori che aggiungiamo a $\mathbf{v}_1$ per completarlo a base, basterà richiedere che $f(\mathbf{w}_1) = (0,0,0)$ per essere sicuri che f non sia iniettivo.

Per $k \neq 2$, abbiamo visto nel punto a) che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, dunque l'autospazio V_1 avrà dimensione 2. Allora per individuare un endomorfismo basterà completare $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ per mezzo di un vettore $\mathbf{w}_1$ e sceglierne l'immagine. Inoltre, per ottenere un endomorfismo non iniettivo, la cosa più semplice è imporre $f(\mathbf{w}_1) = (0,0,0)$ (più in generale, bisognerà chiedere che l'immagine di $\mathbf{w}_1$ sia una combinazione lineare delle immagini di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$, in modo tale che la matrice associata ad f abbia rango minore di 3).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 162

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 162

Esercitazione 6 - **Esercizio 22**

(i) Si dia la definizione di matrice diagonalizzabile.

(ii) Si dia un esempio di matrice M non diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(iii) Si costruisca la matrice (rispetto ad una base scelta a piacere) di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente alle seguenti condizioni: $\ker f = \{(x, y, z)/x + y - z = 0\}$, $f(1, 1, 3) = (2, 2, 6)$. Tale matrice M è diagonalizzabile?

iv) Si dia un esempio di matrice quadrata di ordine 3 di rango uno e diagonalizzabile.

`Risoluzione.`

(i) Una matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, ovvero se esiste una matrice invertibile $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $D = P^{-1}AP$ dove D è una matrice diagonale. Il Teorema sulle matrici diagonalizzabili ci dice che se la matrice A è la matrice associata ad un endomorfismo $\varphi : V \to V$ mediante la base E di V, allora A è diagonalizzabile se e solo se φ è semplice. Inoltre se F è una base di V formata da autovettori di φ e P è la matrice di passaggio da E a F, allora $D = P^{-1}AP$ è una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono gli autovalori di A, ciascuno con la sua molteplicità.

$D = P^{-1} A \cdot P$

(ii) Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale superiore e facciamo vedere che questa matrice non è diagonalizzabile. Per far ciò verifichiamo che l'endomorfismo φ a cui è associata non è semplice. La matrice è triangolare superiore e dunque facilmente si ricavano gli autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità $m_0 = 2$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio V_0 che dovremo confrontare con la molteplicità di 0 come radice del polinomio caratteristico. Dal momento che la matrice M ha rango 2 deduciamo che $\dim V_0 = 1$ (il sistema lineare omogeneo $MX = 0$ avrà $\infty^{n-p} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni e l'autospazio V_0 è precisamente lo spazio delle soluzioni di tale sistema). Dal momento che $\dim V_0 \neq m_0$ concludiamo che φ non è semplice, e dunque M non è diagonalizzabile. Notate che tutto questo nasce dall'aver posizionato un elemento non nullo (in questo caso il 3) in una delle righe con diagonale nulla: proprio questo elemento fa salire a 2 il rango della matrice.

(iii) Per prima cosa ricaviamoci una base del nucleo. La condizione $x+y-z = 0$, ovvero $z = x+y$ ci permette di concludere che

$$\ker f = \{(x, y, x + y)\}$$

ed una base di tale spazio sarà data da $B_{\ker f} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Notiamo inoltre che il fatto che

$$f(1, 1, 3) = (2, 2, 6) = 2 \cdot (1, 1, 3)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 162