NUMERO : 274

DATA : 16/04/2012

# A P P U N T I

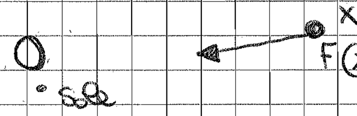
STUDENTE : Rinaldi

MATERIA : Analisi I + Esercitazioni

Prof. Fagnani _ Ravazzi

## 2° LEGGE DINAMICA

$F = ma$ la forza applicata ad un corpo lo mette in moto con un'accelerazione $a$




$F(x) = ma$

eq. differenziali

## CORSO ANALISI

I. Numeri (insiemi, logica)

II. Successioni, limite

III. Funzioni e studio di funzioni, limiti, derivate, disegno funzioni

IV. Integrali Aree di oggetti mai definiti

V. Eq. Differenziali

**I** LA MATEMATICA È COSTITUITA DA PROPOSIZIONI LOGICHE

le PROPOSIZIONI LOGICHE: enunciati che sono o veri (V) o falsi (F) ma mai o veri o falsi

$p$ = PROPOSIZIONE
$q$ = 2° PROPOSIZIONE

esiste un modo concreto x verificare se una p. è vera o falsa.

non ci devono ESSERE AMBIGUITÀ!

p: "$\frac{3}{4}$ è un numero intero" F

p: "$6$ è $\geq 6$" V p: "$6 \leq 5$" F

p: "$6 > 6$" F

$p \rightarrow$ PROPOSIZIONE

$\sim p \rightarrow$ (NON p) è LA NEGAZIONE DELLA PROPOSIZIONE → scambia il VALORE DI VERITÀ

| P | ~P |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

TABELLA DI VERITÀ

$\sim(\sim p) = p$

p e q sono PROPOSIZIONI LOGICHE

$P \vee Q$ (o) almeno uno delle due è vero

$P \wedge Q$ (e) entrambe vere

| P | Q | P∨Q | P∧Q |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |
| F | F | F | F |

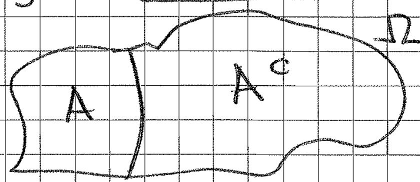
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 273

INSIEME UNIVERSO : cambia in base delle esigenze $\Omega$ (OMEGA)

$A \subseteq \Omega$

$A^c = \{a \in \Omega \mid a \notin A\}$ $\boxed{\Omega = A \cup A^c}$ $\boxed{A \cap A^c = \emptyset}$ insieme vuoto

A complementare




$A^c = \sim A$

A, B insiemi

$B \setminus A = \{b \in B \mid b \notin A\}$

meno

Esercizi

(1) Scrivi la tabella di verità di $[\sim(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)]$

(2) Dimostra che se A, B, C sono insiemi $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup$

(3) " che se A, B sono insiemi $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup ($

(1)

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $\sim(P \vee Q)$ | $\sim(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | F | V | F | F | F |
| F | V | V | F | F | F |
| F | F | F | F | F | V |

(2)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 273

quindi $\exists k_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (numero compreso tra 1 e 9) $: \exists x \in \left[k_0 + \frac{k_1}{10}, k_0 + \frac{k_1+1}{10}\right[$

UNO QUALUNQUE DI QUESTI VALORI!

SI PUÒ CONTINUARE A DIVIDERE GLI INTERVALLI ALL'INFINITO... MI AVVICINO SEMPRE + AL NUMERO E RIDUCO SEMPRE DI PIÙ IL MARGINE DI ERRORE

Ripeto l'operazione su $\left[k_0 + \frac{k_1}{10}, k_0 + \frac{k_1+1}{10}\right[$ dividendolo in 10 sottointervalli

trovo $k_2 \in \{1, 2, \dots, 9\} \mid x \in \left[k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100}, k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2+1}{100}\right[$

ecc... SI COSTRUISCE UNA SEQUENZA DI NUMERI $k_1, k_2, \dots k_n$

dove $k_0 \in \mathbb{Z}^+$, $k_n \in \{0, \dots, 9\}$

$\boxed{k_0 \in \mathbb{N}}$ $\boxed{0 < k_1, k_2, k_3 \dots < 9}$

CHE HANNO LA PROPRIETÀ

$x \in \left[\underbrace{k_0 + \frac{k_1}{10^1} + \frac{k_2}{10^2} + \frac{k_3}{10^3} \dots + \frac{k_n}{10^n}}_{x_n}, \underbrace{k_0 + \frac{k_1}{10^1} \dots \frac{k_n+1}{10^n}}_{y^n}\right[$

IO STO CODIFICANDO LA POSIZIONE DI X

APPROSSIMANTE DECIMALE PER DIFETTO ALL'ORDINE $n$ DI X

APPROSSIMANTE DECIMALE PER ECCESSO DELL'ORDINE $n$ DI X

(SIGMA) $x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{10^i}$ TERMINE GENERICO

$y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$

STO LAVORANDO CON INTERVALLI DI AMPIEZZA $\frac{1}{10^n}$

SI DEVONO SOMMARE GLI INDICI DA 0 a $n$ (AL VARIARE DI $i$ ... CONSIDERO TUTTI I TERMINI E SOMMO TRA DI LORO)

$x_n, y_n \in \mathbb{Q}^+$ (RAZIONALI)

$x \in [x_n, y_n[$

SI OSSERVI CHE CONOSCENDO L'INTERA SEQUENZA DEI $k_n$, SI RIESCE AD "APPROSSIMARE" IL PUNTO X BENE QUANTO VOGLIAMO. (GLI APPROSSIMANTI SONO RAZIONALI come lo sono) SBAGLIANDO AL MAX DI $\frac{1}{10^n}$.

X È LA SEQUENZA DI NUMERI, UN'ALLINEAMENTO DECIMALE GENERALMENTE INFINITO DI NUMERI, CHE A ORDINI DI GRANDEZZA QUANTO VOGLIO PRECISI MI RAPPRESENTA LA POSIZIONE DI X.

DEFINIAMO IL NUMERO REALE ASSOCIATO A X ESATTAMENTE COME LA SEQUENZA $k_n$, CHE CONVENZIONALMENTE VIENE SCRITTA COME $k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n$

DOVE VADA X È COMPRESO TRA $[k_0$ e $k_0+1[$

ALLINEAMENTO DECIMALE ASSOCIATO A X

NUMERO REALE COMPOSTO DA NUMERI NATURALI

SE C'È UNA CODA DI ZERO ESSI NON SI SCRIVONO!!

se x è negativo

x 0 (-x)

PRENDO LA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DI -X CHE È POSITIVO E LA CAMBIO DI SEGNO

PER CONVENZIONE SI ASSOCIA L'ALLINEAMENTO DECIMALE $-k_0, k_1 k_2 \dots k_n$

QUINDI AD OGNI PUNTO DELLA RETTA ABBIAMO ASSOCIATO IN MANIERA UNIVOCA UN BEN PRECISO ALLINEAMENTO DECIMALE.

PROBLEMA. Dato un'allineamento decimale $k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n$ Esiste sempre punto della retta che ha come allineamento decimale quello sopra?

NON SEMPRE!

NON HA RAPPRESENTAZIONE

Es. $0{,}999\dots = 0{,}\bar{9}$

$x \in [0; 1[$

$x \in \left[\frac{9}{10}; 1\right[$

$x \in \left[\frac{99}{100}; 1\right[$

$\nexists\, x \in$ retta

NON VOGLIO ALLINEAMENTI CHE NON HANNO UN PUNTO RINTRACCIABILE SULLA RETTA CORRISPONDENTE AL PUNTO DI ALLINEAMENTO

SI STRINGONO SEMPRE VERSO L'ESTREMO MANCANTE.

↳ SODDISFANO LE STESSE PROPRIETÀ DEI RAZIONALI

# PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEI NUMERI REALI $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

con $x, y$ e $z$ TRE NUMERI QUALUNQUE $\in \mathbb{R}$ (REALI)

**SOMMA**

1. $x + (y+z) = (x+y) + z$ ASSOCIATIVA (P1)
2. $x + 0 = 0 + x = x$ ELEMENTO NEUTRO (P3)
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists (-x) : x - (-x) = 0$ ELEMENTO OPPOSTO (P4) → CAMBIA SEGNO
4. $x + y = y + x$ COMMUTATIVA (GRUPPO COMMUTATIVO O ABELIANO) (P2)

**MOLTIPLICAZIONE**

1. $x(yz) = (xy) \cdot z$ ASSOCIATIVA (P5)
2. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ELEMENTO NEUTRO (P7)
3. $\forall x \neq 0\ \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ELEMENTO RECIPROCO (P8)
4. $xy = yx$ COMMUTATIVA (P6)
5. $x(y+z) = x \cdot y + xz$ (PROP. DISTRIBUTIVA) (P9)

UN QUALUNQUE INSIEME DOTATO DI DUE OPERAZIONI + e · SODDISFACENTI TUTTE LE PROPR. PRECEDENTI È DETTO CAMPO (DEI NUMERI REALI) $x^0 = 1$ se $x \neq 0$

**PROP.** (LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO) (Q1)

$x, y \in \mathbb{R}$

$x \cdot y = 0 \overset{\text{se e solo se}}{\iff} x = 0 \vee y = 0$

**DIMO.** SI SCOMPONE IN DUE TEOREMI (A) e (B)

(A) $xy \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

(B) $y = 0 \vee x = 0 \Rightarrow xy = 0$

(A)

IPOTESI $x \cdot y = 0$. CONSIDERIAMO $x$, se $x = 0$ HO FINITO. Se $x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1}!$ ALLORA

MOLTIPLICO $(xy) \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot (0) = 0$ (RECIPROCO) (2)

$(x^{-1} x) \cdot y = 1 \cdot y = y$ quindi $y = 0$

(B)

IPOTESI $y = 0 \vee x = 0$ se $y = 0$ si HA

$x \cdot 0 = x(0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 = 0$

⇒ implica che $xy = 0$

UGUALMENTE se $x = 0$

Su $\mathbb{R}$ c'è un ordinamento naturale

$x \leq y \Rightarrow (x < y \vee x = y)$

$x = k_0, k_1 k_2 \ldots k_n$

$y = h_0, h_1 h_2 \ldots h_n$

$x < y \iff k_0 = h_0, k_1 = h_1 \ldots k_{n0} = h_{n0}$ e $k_{n0} < h_{n0}$

(Q2) $(-x) \cdot y = x(-y) = -(xy)$ PROP.

## PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DI $\mathbb{R}$

CONSIDERIAMO $A \subseteq \mathbb{R}$ → **DEF.** UN NUMERO $M \in A$ SI DICE IL MASSIMO (+ GRANDE) DI $A$ SE $M \geq x \quad \forall x \in A$

NOT. $M = \max A$

**DEF.** UN NUMERO $m \in A$ SI DICE IL MINIMO DI $A$ SE $m \leq x \quad \forall x \in A$

NOT. $m = \min A$

• QUANDO IL $M$ E/O IL $m$ ESISTONO SONO UNICI

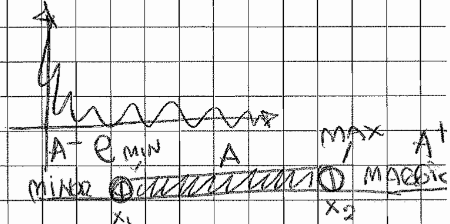
NON TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$ AMMETTONO MAX E/O MIN

ES1 $A = \mathbb{R}$ $\quad \nexists M \quad \nexists m$

ES2 $A = \mathbb{N}$ $\quad \nexists M \quad m = 1$

ES3 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$ $\quad \nexists m \quad M = 5$

ES4 $A = \emptyset$ $\quad \nexists M \quad \nexists m$




**DEF.** $A \subseteq \mathbb{R}$ SI DICE LIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) SE $\exists L \in \mathbb{R} : L \geq x \ \forall x$ (SE $\exists \ell \in \mathbb{R} : \ell \leq \forall x \in A$).

- GLI ELEMENTI DEL TIPO $L$ SI DICONO MAGGIORANTI DI $A$
- " " " " $\ell$ " " MINORANTI DI $A$
- $A^+$ INSIEME DEI MAGGIORANTI
- $A^-$ " " MINORANTI

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ SUPERIORMENTE LIMITATO È VERO CHE $\exists$ MAX DI $A$?

es. $A = [0;1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

$A^+ = [1; +\infty[ \qquad \text{MAX} = 1$

$A^- = ]-\infty; 0] \qquad \text{MIN} = 0$

es. $A = [0,1[ = \{x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x < 1\}$

$A^+ = [1; +\infty[ \qquad \max \nexists$ ⇒

$A^- = ]0; -\infty[ \qquad \min = 0$

se $\exists x < 1$ fosse un maggior.

$x = 0, k_1 k_2 \dots$

$\exists k_i \neq 9$

NE PRENDO UNO E LO AUMENTO. CONSIDERO $y$ OTTENUTO DA $x$ MANTENENDO TUTTE LE CIFRE DECIMALI UGUALI TRANNE LA $k_i$ ENNESIMA DOVE METTO $k_i + 1$

$0 < x < y < 1$

$x \in A^+$, $y \in A$ ⇒ impossibile

QUINDI NESSUN $0 < x < 1$ PUÒ ESSERE UN $A^+$ ⇒ $A^+ = [1; +\infty[$

NESSUN MAGGIORANTE STA IN $A$

NON C'È MAX!!

es. $A = ]0; 1] \qquad \nexists \min A$

es. $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \exists \max A = 1 \quad \min \nexists$

OSS. se $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

$m = 0$

$M = 1$

INUTILE! ~~A FOGLIO SCRITTO~~

~~**PROP.** $A \subseteq \mathbb{R}$ Sia $L \in \mathbb{R}$ sono fatti equivalenti~~

~~(1) $L = \sup A$~~

~~(2) $L$ gode delle seguenti proprietà: (a) $L \geq x \quad \forall x \in A$~~
~~(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : x > L - \varepsilon$~~

~~$(1) \Rightarrow (2)$ $(2) \Rightarrow (1)$~~

~~(A) DICE CHE $L$ È UN MAGGIORANTE DI A: ESSA È VERIFICATA QUANDO L'ESTREMO SUP. È UN MAGGIORANTE COME IN QUESTO CASO!~~

~~si noti che la proprietà (a) dice che $L \in A^+$ cioè che è maggiorante! Se per assurdo $L$ non è il min di $A^+$ quindi esiste un $\varepsilon$ positivo tale che $L - \varepsilon$ è un maggiorante~~

~~(B) Se (B) FOSSE FALSA SIGNIFICHEREBBE PER ASSURDO CHE $\exists \varepsilon > 0 \mid x \leq L - \varepsilon$ $\forall x \in A$. DA CUI SI RICAVEREBBE CHE ANCHE $L - \varepsilon$ È UN MAGGIORANTE DI A E CHE $L - \varepsilon < L$ CIÒ È ASSURDO XCHÉ COME IPOTESI L ERA IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI QUINDI ANCHE (B) VALE!~~

~~$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid L - \varepsilon \in A^+$ ma questo punto contraddice (b) xché $L - \varepsilon \in A^+ \Rightarrow L - \varepsilon \geq x \quad \forall x \in A$ (sono in contraddizione!)~~

~~DIM quindi $L = \min A^+$~~

~~**PROP** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ Sia $L \in \mathbb{R}$ sono fatti equivalenti~~
~~(1) $L = \inf A$~~
~~(2) $L$ gode delle segue. propri.:~~
~~(a) $L \leq x \quad \forall x \in A$~~
~~(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \mid x < L + \dots$~~

(ENUNCIATO SPECULARE)

CI DICE CHE TUTTE LE RADICI DEI NUMERI POSITIVI SI POSSONO TROVARE

**TEO.** Sia $n \in \mathbb{N}$, sia $b \geq 0$, $b \in$ Reali $\mathbb{R}$ Allora

$\exists! \, a \geq 0 \mid a^n = b$ $\quad a \in$ Reali $\mathbb{R}$

$\exists!$ → UN SOLO

$a$ → viene detto radice n-esima positiva di $b$ è indicato

ciò si scrive $a = \sqrt[n]{b}$ ; $a \neq b^n$

con $a = \sqrt[n]{b}$ SI INTENDE SEMPRE QUELLA POSITIVA (PER CONVENZIONE)

→ XCHÉ $a \geq 0$ SE n FOSSE PARI

**DIMO.** Se esiste l'estremo sup di $a = \sqrt[n]{b}$ POSSIAMO CAPIRE ALTRE COSE

$A = \{ x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n \leq b \}$ $\quad A$ è superiormente limitato

→ se $b > 1$ ($b$ non può essere uguale a ✱)

(TROVO UN INSIEME DI CUI $x$ È EST. SUP)

$\Rightarrow$ → $\exists \sup A = a$ → POSITIVO XCHÉ STO IN $\mathbb{R}^+$

PRENDO TUTTI GLI $x$ CHE QUANDO ELEVATO ALLA POTENZA $n$ SI AVVICINANO A $b$, PRENDO QUELLI

✱bisogna vedere che $a^n = b$ ✱ — E QUESTO INSIEME È SUPERIORMENTE LIMITATO

ESISTE IL SUP di A CHE IO CHIAMO "$a$"

se $b > 1$ se $x > b \Rightarrow b^n > b$

**OSS.1** $a \geq 0$ $\quad q = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{N}$

è POSITIVA XCHÉ STO IN $\mathbb{R}^+$

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} \\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \end{cases}$$

infatti $\sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$$\left[\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]^n = \left[\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]^m = a^m$$

$\Rightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ è la radice n-esima positiva di $a^m$

cioè $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$

PAG 20 CAP. 2

CONVENZIONI:

se $q < 0$ $\quad q \in A$ $\quad a^q = \frac{1}{a^{-q}}$ $\quad \Big| \ a^0 = 1$

## SUCCESSIONI NUMERICHE REALI

DEF. UNA SUCCESSIONE (REALE) È UNA QUALUNQUE LEGGE CHE XMETTE DI ASSOCIARE UNA QUALUNQUE LEGGE CHE XMETTE DI ASSOCIARE AD OGNI NATURALE $n \in \mathbb{N}$ UN BEN PRECISO numero reale $a_n$

ES. SE $x \in \mathbb{R}$ GLI APPROSSIMANTI DECIMALI X DIFETTO (ECCESSO) FORMANO UNA SUCCESSIONE

LE SUCCESSIONI SONO UN CASO PARTICOLARE DI FUNZIONI (O APPLICAZIONI)

*IN GENERALE SE ABBIAMO DUE INSIEMI A e B UNA FUNZIONE È UNA QUALUNQUE LEGGE CHE XMETTE DI ASSOCIARE AD OGNI ELEMENTO DI A UN BEN PRECISO ELEMENTO DI B (UNIVOCAMENTE)

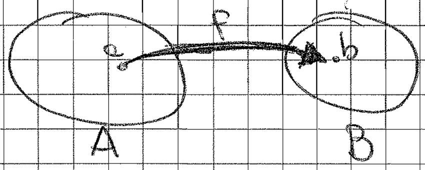
LE SUCCESSIONI SONO FUNZIONI CHE ASSOCIANO UN NUMERO $\mathbb{N}$ e UNO $\mathbb{R}$ (reali)

NOT. $f: A \to B$

(f di A in B)

→ A è detto DOMINIO

→ B è DETTO CODOMINIO




se $a \in A$

se b in B è l'elemento di A associato ad a da f si dice b IMMAGINE $b = f(a)$

f si dice INIETTIVA se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

f si dice SURIETTIVA se $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$

Dim b)

Per ipotesi posso scrivere $n = k \cdot s^2$ (non è quadrato perfetto) $k, s \in \mathbb{N}$

con $k$ che non ha fattori quadrati $> 1$ WET

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{n}$ sia razionale

$\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ $\quad (p, q) = 1$

$\sqrt{n} = s\sqrt{k} = \frac{p}{q}$

ma se $\sqrt{n}$ fosse razionale allora anche $\sqrt{k}$ è razionale

ciò è assurdo xchè $k$ non ha fattori quadrati $> 1$

ESERCIZIO 2 DIMOSTRARE CHE $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ NON È RAZIONALE

Supponiamo per assurdo che

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N}$$

$$2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

$$(5 + 2\sqrt{6})\, q^2 = p^2$$

$$5q^2 + 2\sqrt{6}\, q^2 = p^2$$

$$2\sqrt{6}\, q^2 = p^2 - 5q^2$$

$$\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$$ num e den sono due numeri ra

Assurdo xchè razionale ma $\sqrt{6}$ non è un quadrato perfetto e x il teorema precedente

VALORE ASSOLUTO di $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

esempio numerico:

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $|x + y| \leq |x| + |y|$ per $x, y \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 3 DIMOSTRARE CHE $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$

$$|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$$ voglio dimostrare

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \quad (*)$$

CONSIDERIAMO con $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad (*)$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$$

dis. triangolare

$$|y| - |x| \leq |y - x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|y - x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|x - y| \quad (*)$$

ESERCIZIO 5

Consideriamo l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \qquad \mathbb{N} = \{1, 2 \dots\}$$

trovare estremo sup. e inf. e oltre se sono max e/o minimi.

SVOLGIMENTO

$$A = \{0\} \cup \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[0; 1 - \frac{1}{3}\right] \cup \left[0, 1 - \frac{1}{4}\right]$$

$\forall x \in A \quad x \geq 0$

0 è un minorante di A

inf A = min A = 0 perché $0 \in A$

$\forall x \in A \qquad 0 \leq x < 1$

1 è maggiorante di A

Se $x \in A$ $\quad x \leq 1 - \frac{1}{n}$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0$ deve esistere $x \in A$ $\quad x \geq 1 - \varepsilon$

$$1 - \varepsilon \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

$\bar{n} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ sup A = 1 ma non è max !!

5) DIM $0 < \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10}$

$\Rightarrow$ A è limitato

sup $A = \frac{1}{10} = \max A$ xché basta prendere $n = 1$

inf A = 0

$\frac{1}{10^n} > 0$

(1) quindi 0 è un minorante

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x < 0 + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \exists \bar{n}$ per cui $\frac{1}{10^n} \leq \varepsilon$

$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow \boxed{n \geq \frac{1}{\varepsilon}}$$

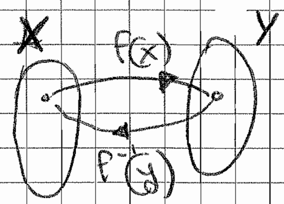
**ES**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 3x - 1$

$f(x) = y$

$x = \frac{1}{3}(y+1)$




$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(x+1)$

**DEF.** $f: A \to B$

Si definisce l'immagine di f come $f(A) := \{ b \in B \mid \exists a \in A \ f(a) = b$

$\mathrm{Im} f := f(A)$ = IMMAGINE DI F

**OSS** f é SURIETTIVA $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$

**OSS.** Se $f: A \to B$ non é SURIETTIVA SI PUÒ CONSIDERARE $f: A \to f(A)$ IN QSTO MODO ARTIFICIALMENTE HO RESO F SURIETTIVA POICHÉ f(A) é SEMPRE SURIETTIVE!!

**ES.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

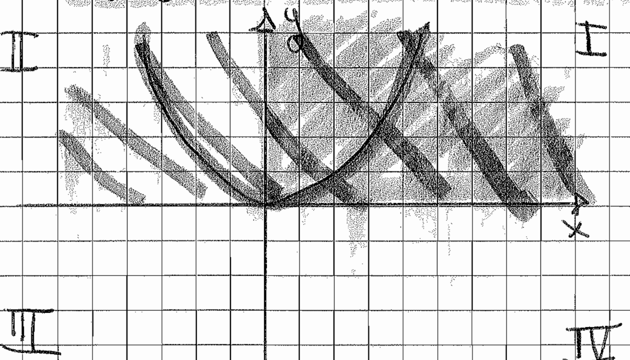
$f(x) = x^2$ → NON É NE SURIETTIVA NE INIETTIVA!

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x^2$ → ORA: é SURIETTIVA MA NON INIETTIVA

Se considero $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ → ORA É SIA SURIETTIVA CHE INIETTIVA!

$y = x^2 \quad x \in \mathbb{R}^+, \ y \in \mathbb{R}^+$




$x = \sqrt{y}$

$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$x \to \boxed{f} \to y$

$(a_n)$ $\quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell.$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \qquad (1)$$

SE INVERTO NON OTTENGO PIÙ LA DEFINIZIONE DI LIMITE!!

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \qquad (2)$$

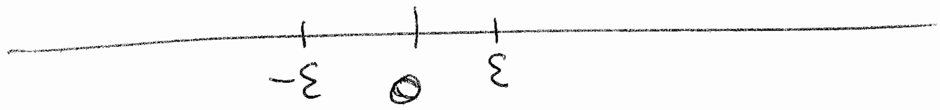
NOTO CHE:
$(2) \Rightarrow (1)$
(MA NON VICEVERSA)
$(1) \not\Rightarrow (2)$

$$|\underbrace{a_{n_0} - \ell}_{\alpha}| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon.$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad |\alpha| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 0.$$




(2) È UN CASO PARTICOLARE DI UN LIMITE CHE TENDE A ZERO!

(p. 21) JOLLY

LEZ. 10

ES. Sia $(a_n)$ data da $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

come si comporta $a_n$?

$a_1 = 1$ ; $a_2 = \frac{1}{2}$ ; $a_3 = \frac{1}{3}$ ...

[INTUITIVAMENTE CAPIAMO CHE $a_n \to 0$ (DOVREBBE TENDERE A 0)]

CIÒ MI DICE CHE $a_n$ DOVREBBE ESSERE

se $a_n$ è ALD. Vi di un certo valore

VERIFICHIAMO CHE CONVERGE A 0.

$\boxed{\ell = 0 \text{ è VARIABILE INDIPENDENTE}}$

FISSIAMO $\varepsilon > 0$ QUALUNQUE e STUDIAMO LA DISUGUAGLIANZA $\left|\frac{a_n - \ell}{a_n - 0}\right| < \varepsilon$ (CANDIDATO $\ell$)

in qsto caso $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ è UN NUMERO NATURALE $n > 0$

SE VOGLIAMO TROVARE IL PRIMO $n_0$

SCEGLIAMO $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1$ ← PARTE INTERA

$\boxed{x \in \mathbb{R} \quad x = k_0, k_1 k_2 \dots \quad [x] \text{ PARTE INTERA} \Rightarrow k_0}$

POICHÉ QSTA DISUGUAGLIANZA CONTIENE $\varepsilon$ IL PUNTO $n_0$ DA CUI LA DISEQ. SARÀ VERIFICATA MOLTO PROBABILMENTE DIPENDE DA $\varepsilon$.

e $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

SIAMO SICURI CHE SE DA $n_0$ $a_n$ dista da 0 meno di $\varepsilon$

HO VERIFICATO LA DEFINIZIONE DI LIMITE!

ES. Sia $(a_n)$ DATA da $a_n = \frac{n}{n+2}$

INIZIAMO SCRIVENDO I PRIMI VALORI CHE ASSUME

$a_1 = \frac{1}{3}$ ; $a_2 = \frac{2}{4}$ ; $a_3 = \frac{3}{5}$ ; $a_4 = \frac{4}{6}$ ...

NOTIAMO CHE NUMERATORE È SEMPRE < DENOMINATORE QUINDI QNDO $n$ è MOLTO GRANDE NUM. e DENOM. SI SOMIGLIERANNO COSÌ TANTO CHE $a_n \to 1$ (0,999...)

A) VERIFICA CHE CONVERGE A 1

STUDIAMO SEMPRE: $|a_n - \ell| < \varepsilon$

{FISSO $\varepsilon > 0$, SI CONSIDERA} $\Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$

$\varepsilon$ qsiasi n positivo

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 2}{n+2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{n+2}\right| < \varepsilon \quad \text{ma} \to |-2| = 2, \ |n+2| \text{ è sempre} > 0$$

POSSO FARE IL RECIPROCO CAMBIANDO IL VERSO

$$\text{quindi} \Rightarrow \frac{2}{n+2} < \varepsilon \iff \frac{n+2}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n + 2 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\otimes \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 2$$

TUTTI I NUMERI > DI RISPETTANO LA DISQ

$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right] + 1$ ← PARTE INTERA $\otimes$

B) VERIFICHIAMO CHE NON CONVERGE A 2 | FISSO $\varepsilon > 0$

STUDIO $|a_n - 2| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n - 2n - 4}{n+2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-n-4}{n+2}\right| < \varepsilon \quad \text{ma} \to |-n-4| = n+4 \text{ (numero > 0)}, \ |n+2| = n+2$$

$$\frac{n+4}{n+2} < \varepsilon$$

$$n + 4 < \varepsilon(n+2)$$

$n(1-\varepsilon) < 2\varepsilon - 4$

PRENDO $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e viene $\frac{n}{2} < -6 \Rightarrow \boxed{n < -6}$

FALSO!

MAI VERIFICATA

$n$ è sempre > 0 xché $n \in \mathbb{N}$

la successione NON TENDE A 2!!

$x \in \mathbb{R}$ è numero reale

**ES** Sia $x \in [0;1[$ e si consideri la successione $a_n$ data da

$\boxed{a_n = x^n}$ la variabile indipendente è "n" ; "x" è un numero qualsiasi

verifichiamo che $x^n \to 0$

• Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $|a_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{|x^n| < \varepsilon}$ (mod)$^n \geq 0$ $\forall n$ $x^n$ è sempre $> 0$

quindi $\Rightarrow \boxed{x^n < \varepsilon} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{\varepsilon}}$ reciproco cambiando il verso

Sappiamo che $\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 + \delta$ con $\delta > 0$

$\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \quad \frac{1}{x} > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \quad \frac{1}{x} > 1 \end{cases}$

Cerco di fare $\boxed{(1+\delta)^n > \frac{1}{\varepsilon}}$ (2)

Avevamo deciso che

$(1+\delta)^n$

$n=1 \Rightarrow (1+\delta)^1 = 1+\delta$ → valori sempre $> 0$ xché $\delta > 0$

$n=2 \Rightarrow (1+\delta)^2 = 1+2\delta + \delta^2$

$n=3 \Rightarrow (1+\delta)^3 = 1+3\delta + 3\delta^2 + \delta^3$

$n=n \Rightarrow 1 + n\delta + \dots \delta^n$

Per ipotesi $x \in [0,1[$ quindi è un numero positivo $> 0$ ma $< 1$ ecco che $\frac{1}{x} > 1$

$\boxed{(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta}$ (3) → disug. fondamentale

(difficile) è sicuro + grande di o al max uguale per ogni $n$!! (facile)

Quindi:
Si noti che $\boxed{1 + n\delta > \frac{1}{\varepsilon}}$ (4)

allora $(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta > \frac{1}{\varepsilon}$

Le progressioni geometriche (sono potenze successive di un numero) $x^n$ in cui se $x < 1$ $x^n \to 0$

Quindi se (4) è vera definitivamente

anche la (2) è vera definitivamente!!

Gli aprox. decimali per difetto o x eccesso $x_n \to x$ quando $n \to +\infty$

(4) → $n\delta > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$n > \dfrac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\delta}$

{ la (2) potrebbe avere più soluzioni della (4) ma ci va bene uguale!

$x_n \quad x \quad x_n + \frac{1}{10^n}$

Abbiamo verificato che $x^n \to 0$ quando $n \to +\infty$!!

**ES.** $x = k_0, k_1 k_2 \dots \in \mathbb{R}$

$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{10^i}$ $(x_n)$

$\boxed{x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x}$ verifichiamo

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ è come dire che $|x_n - x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$0 \leq |x_n - x| \leq \frac{1}{10^n}$ $\quad \frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ tende a zero x esempio precedente

la successione $a_n \to 0$ $\forall n$ tende a 0 $\quad 0 \leq |x_n - x| \leq 0$

quindi $|x_n - x| \to 0 \Rightarrow |x_n| \to x$

Due punti di un intervallo non hanno mai ampiezza superiore a $\frac{1}{10^n}$ né inferiore a zero

ES. Sia $(a_n)$ dato da $a_n = x^n$ dove $x > 1$ NUMERO REALE FISSATO.

posso dire $x = 1 + d \quad d > 0$

$$x^n = (1+d)^n \overset{(BN)}{\geq} (1 + nd)$$

POICHÉ $1 + nd \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (ES. DOPO)

PER CONFRONTO ANCHE $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

---

ES. Sia $(a_n)$ DATO DA $\underbrace{a_n = an + b}_{\text{retta}}$ $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ → SUCCESSIONE LINEARE

VERIFICHIAMO CHE $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

FISSO $M \in \mathbb{R}$ e STUDIO

$$a_n > M \Rightarrow an + b > M \Rightarrow an > M - b \Rightarrow n > \frac{M-b}{a}$$

a è positivo, NON CAMBIO IL SEGNO

quindi VERA DEFINITIVAM.

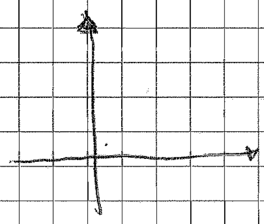
QUINDI $a_n \to +\infty$

**TEOREMA DEL CONFRONTO A $\pm\infty$**

Sia $(a_n)$ e $(b_n)$ successioni t.c. $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

⇒ (allora) (i) se $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

(ii) se $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$



---

$$x^n \begin{cases} (A) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 & \text{se } x \in [0; 1[ \\ (B) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 & \text{se } x = 1 \\ (C) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty & \text{se } x > 1 \\ (D) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ (*) & \text{se } x \in ]-1, 0[ \end{cases}$$

$$x^n \begin{cases} (E) \text{ limite mancante} \to \nexists \text{ limite} & \text{se } x = -1 \\ (F) \nexists \text{ limite e non è limitato} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

(*) È ANALOGA A $|x^n| = |x|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ se $x \in ]-1, 0[$ (PRIMO CASO)

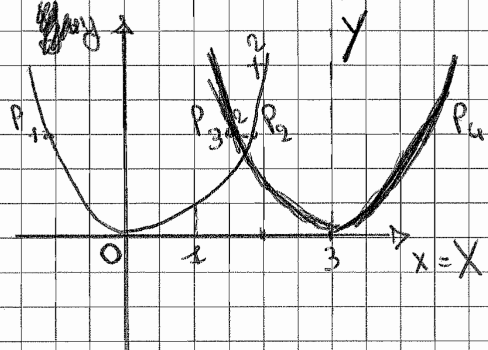
# ESERCIZI SU FUNZIONI ELEMENTARI - TRASFORMAZIONI DEL PIANO

Supponiamo di avere un sistema di riferimento cartesiano Oxy (cioè fissiamo due assi y asse delle ORDINATE e x asse delle ASCISSE ORTOGONALI TRA DI LORO con intersezioni nell'origine O.)

Per TRASLAZIONE intendiamo l'introduzione di un nuovo sistema di riferimento O'XY dove valgono le seguenti relazioni

$X = x + p$
$Y = y + p$ con $p$ e $q \in \mathbb{R}$

ottenuto traslando rigidamente gli assi x, y spostando verso sinistra o destra (se la traslazione è su x) verso l'alto o verso il basso se la traslazione avviene su y




ESEMPIO 1, $\boxed{y = x^2}$ EQ. BASE.

Vogliamo disegnare $y = (x-3)^2$

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ y = y \end{cases}$$

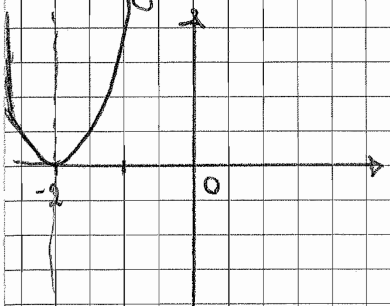
nel nuovo sistema di riferimento

se $x = 3$ $X = 0$
dobbiamo disegnare $Y = X^2$

SI DICE TRASLAZIONE RIGIDA xché $\overline{P_1P_2} = \overline{P_3P_4}$ e poi tutti i punti si spostano!

• Disegnate il grafico di $y = (x+2)^2$

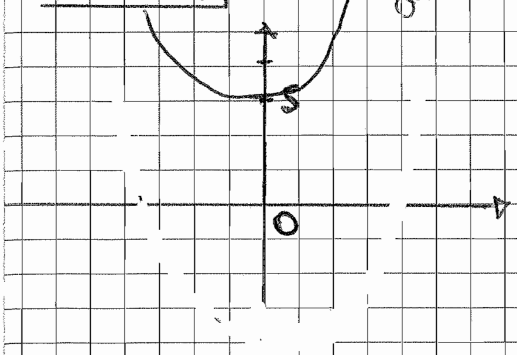
$$\begin{cases} X = (x - (-2)) \\ Y = y \end{cases}$$



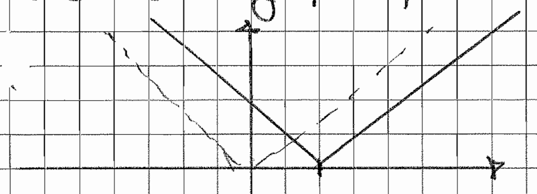

ESEMPIO 2, · Disegnate $y = x^2 + 5$

$y - 5 = x^2$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 5 \end{cases}$$



• DISEGNARE $y=|x-2|$

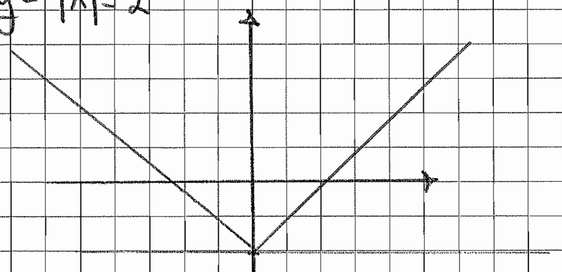


$f(x)=|x|$

$y=f(x-2)$

$\boxed{2 \rightarrow}$

• $y=|x|-2$



$y=|x|=f(x)$

$y=f(x)-2$

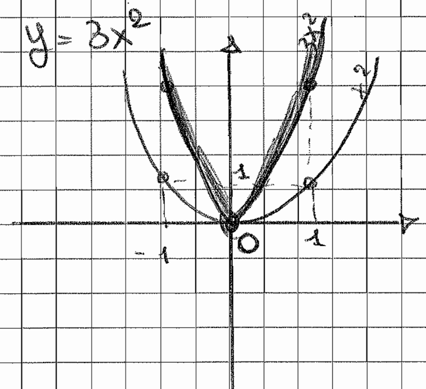
* STUDIAMO ORA L'EFFETTO DELLE AFFINITÁ, CIOÈ TRASFORMAZIONI DEL TIPO

$$\begin{cases} X = mx \\ Y = ny \end{cases} \qquad m, n \in \mathbb{R}$$

LE AFFINITÁ NON SONO MOVIMENTI RIGIDI XCHÉ (CAMBIANO LE DISTANZE RECIPROCHE DEI PUNTI) E IL GRAFICO VIENE COMPRESSO O DILATATO

• DISEGNAMO

$y=3x^2$




È UNA COMPRESSIONE SULL'ASSE X

$$\begin{cases} X = \sqrt{3}\,x \\ Y = y \end{cases}$$

$Y = X^2$

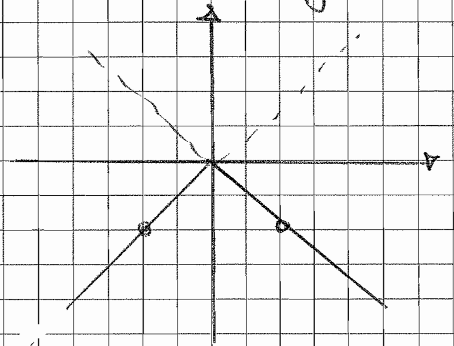
ALTERNATIVAMENTE

$$\begin{cases} Y = \frac{y}{3} \\ X = x \end{cases} \qquad Y = X^2$$

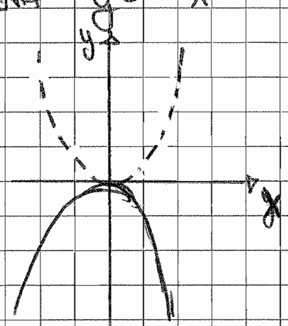
*SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE X

$$\begin{cases} X = x & m = 1 \\ y = -y & m = -1 \end{cases}$$

- DISEGNAMO $y = -|x|$



- DISEGNA $y = -x^2$



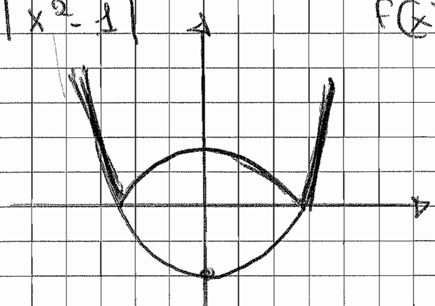
*SUPPONIAMO DI CONOSCERE IL GRAFICO $y = f(x)$ e DI VOLER DISEGNARE $y = |f(x)|$

RISULTA CHE

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & se\ f(x) > 0 \\ -f(x) & se\ f(x) < 0 \end{cases}$$

- DISEGNO

$y = |x^2 - 1|$ $\qquad f(x) = x^2 - 1$



*NOTO IL GRAFICO DI $y = f(x)$ VOGLIO DISEGNARE $y = f(|x|)$

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

RIBALTAMENTO DI ASSE ORDINATE

CASA:

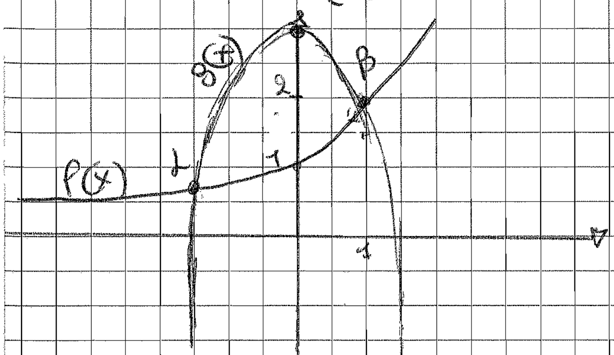
1) GRAFICAMENTE RISOLVI $|x+2| - 2 < |x^2 - 1| + 1$

2) " " $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

3) " " $\frac{3x-1}{x+4} \leq 0$

---

• RISOLVERE $2^x \leq 3 - x^2$




$f(x) = 2^x$ BASE > 1

$g(x) = 3 - x^2 = -x^2 + 3$

$f(x) \leq g(x)$

DISEGNO IN ORDINE

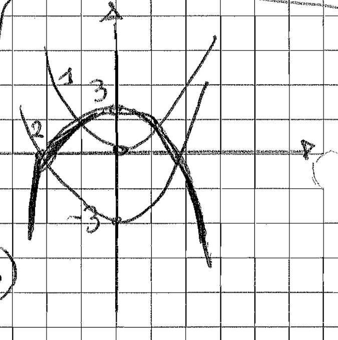
$y = x^2$

↓

$y = x^2 - 3$

↓

$y = 3 - x^2 = -(x^2 - 3)$



$S = \{x \in [\alpha, \beta]\}$

calcolo $\alpha$ e $\beta$

---

CASA:

1) DISEGNA $f(x) = \log(|x+1|)$

2) " $f(x) = \log_{10}(|x| + 1)$

---

• DATA $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ DETERMINARE

a) dominio f

b) Immagine f

d) $f^{-1}([-1, 2])$

c) ~~controimmagine di~~ $f((-2, 0))$

e) controimmagine di $f^{-1}(]-\infty, 0])$

$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-2-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$

DISEGNAMO:

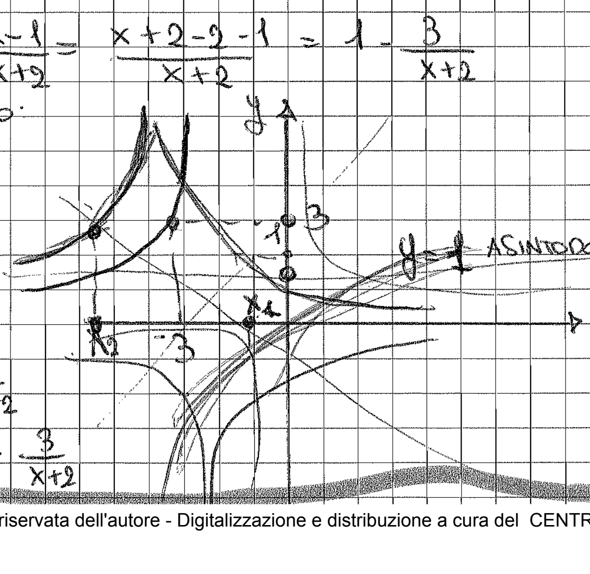
$y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x+2}$

$y = \frac{3}{x+2}$

$y = -\frac{3}{x+2}$

$y = 1 - \frac{3}{x+2}$




1) dominio di f(x)

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) $f(-2, 0) = (-\infty, -\frac{1}{2})$

d) $f^{-1}[-1, 2] = ]-\infty, x_2] \cup [x_1$

e) $f^{-1}]-\infty, 0] = (-2, f(x)=1]$

POICHÉ (6) È VERA E DALLA (5) SEGUE CHE LA (2) E LA (3) SONO VERE! ESSE VALGONO DA UN CERTO $M_0$ IN POI (ABBIAMO VERIFICATO PRIMA)

(2) e (3) ENTRAMBE VERE IMPLICA CHE (1*) È VERA DEFINITIVAMENTE

$n >$ (1*) VERA DEFINITIVAMENTE $\wedge$ (1) IMPLICA CHE $|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE.

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE. ■

CONSIDERIAMO
$(a_n)(b_n)$ SUCCESSIONI
SE $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ e $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ finita (IPOTESI)

MOSTRIAMO CHE $a_n + b_n \to +\infty$ (TESI)

**DIM.** si tratta di far vedere che $\forall M \in \mathbb{R}$ $\quad a_n + b_n > M$ (1) è vera definitivamente.

Poiché $b_n$ TENDE AD UN LIMITE FINITO ESSA È LIMITATA, IN PARTICOLARE $\exists L \in \mathbb{R}$:

$b_n \geq L \quad \forall n \Rightarrow$ È INF. LIMITATA $\to$ (FORSE HA ANCHE MAGGIORANTI ED È SUP. LIMITATA MA NON MI SERVE QUESTA INFORMAZIONE)

QUINDI $a_n + b_n \geq a_n + L$ (2) $\underset{(a_n+b_n \to +\infty)}{(> M)}$

STUDIAMO $a_n + L > M$ (3)

$\Updownarrow$

$a_n > M - L$ (4)

MA POICHÉ $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (4) È VERA DEFINITIVAMENTE (PERCHÉ SE $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow a_n > M$) QUINDI LO È ANCHE (3)

(3) VERA DEFINITIVAMENTE $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ (1) ■

**OSS.** LA DIMOSTRAZIONE APPENA SVOLTA MOSTRA CHE IN REALTÀ SE $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $(b_n)$ È INFERIORMENTE LIMITATA $\Rightarrow a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

**ES.** $(a_n)$ $\quad a_n = n \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad (a_n > M \Leftrightarrow n > M)$ intuitivamente

**ES.** $(a_n)$ $\quad a_n = n^2 - \frac{1}{2n} = +\infty - 0 = +\infty$ ($n^2$ TENDE A $+\infty$, $\frac{1}{2n}$ TENDE A ZERO)

**ES.** $a_n = n^2 + (-1)^n = +\infty \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

($n^2$ TENDE A $+\infty$, $(-1)^n$ limitata x l'OSS. PREC.)

**ES.** $a_n = n^3 - n^2 + n = +\infty - (+\infty) + \infty = \boxed{+\infty - \infty}$ FORME INDETERMINATE

$a_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

RICHIAMI

$f: A \to B$

Se $x \subseteq A$, si dice immagine di $x$ secondo $f$ l'insieme $f(x) = \{b \in B : \exists x \in X \mid b = f(x)\}$

Se $y \subseteq B$ si dice controimmagine di $y$ secondo $f$ l'insieme $f^{-1}(y) = \{a \in A : f(a) \in y\}$

- Si dice che $f$ è suriettiva se $Im(f) = B$
- " " " " iniettiva se $\forall a, a' \in A \quad f(a) \neq f(a')$
- " " " " BIETTIVA se è SIA SURIETTIVA CHE INIETTIVA.

ES. DATA

$f(x) = x^2$ determinare

a) $f((1,2])$

b) $f^{-1}((-1,4))$

c) $f^{-1}((-2,1))$

d) $f((-1,1))$

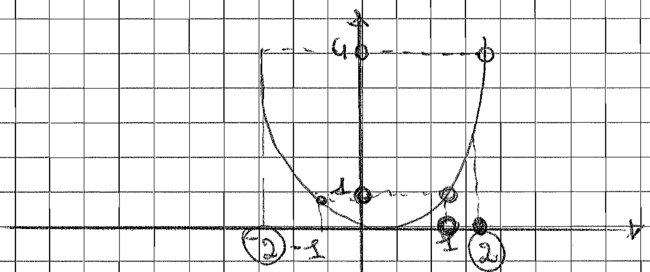
$y = x^2$

$\downarrow$

$x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(x) = y = \pm\sqrt{\cancel{x}\,y}$

Sol.




a) $]1; 4]$

b) $[-2; -1[ \cup ]1; 2]$

$\forall A \subseteq \text{dom } f$

$A \subseteq f^{-1}(f(A))$

c) $]-1; 1[$

d) $[0; 1[$

$\forall B \subseteq$ codominio di $f \quad B \supseteq f(f^{-1}(B))$

$A \subseteq B$

A è incluso in B

B include A

$B \supseteq A$

LEZIONE 13

$(a_n)$ data da $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{tende a } 0} \underbrace{(-1)^n}_{\text{è limitata}}$

Per concludere che tende a zero non si possono applicare le proprietà algebriche dei limiti

D'altra parte $|a_n| = \frac{1}{n}$

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff a_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |a_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

se $\ell = 0$ $\quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

---

$(a_n)$ $\quad a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \operatorname{sen} n$ → non sappiamo a cosa converge ma sappiamo che è limitato

come calcoliamo il limite di $(a_n)$?

**PROP.** se $(a_n)$ successione tale che $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e $(b_n)$ successione limitata

$\Rightarrow a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE

**DIM.** $\exists\, M > 0 \mid |b_n| \leq M$

Quindi guardiamo in modulo $|a_n b_n| = |a_n||b_n|$

prendiamo $|b_n| \leq M$ e moltiplichiamo entrambi i membri per $|a_n|$

$(|b_n| \leq M) \cdot |a_n|$

$m \in \mathbb{N}$

$\underbrace{0}_{\text{tende a zero}} \leq |a_n||b_n| \leq \underbrace{M|a_n|}_{\text{tende a } 0}$

Quindi per il teorema del confronto $|a_n||b_n| \to 0$ e quindi anche $a_n b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$(a_n) \to 0$ si chiama (successione) INFINITESIMA

$(a_n)$ è "SOLTANTO" DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE!

$\boxed{ES}$ $(a_n)$ data da $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 2{,}25 \ldots \quad a_3 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ldots$ $\qquad a_n \uparrow$ CRESCENTE

$\Downarrow$

$\boxed{\min = 2}$, $\max = //$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \to \text{DIMINUISCE quando } n \to +\infty \\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^n \to \text{AUMENTA quando } n \to +\infty \end{cases}$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ → è UNA RAZIONALE.

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n$ → è UNA GEOMETRICA

$\downarrow$

SI COLLEGA CALCOLO DELL'INTERESSE COMPOSTO

$x$ prestito fatto interesse 100% anno

$(1+1)x$ che RESTITUISCE DOPO UN ANNO $\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)x = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 x$

$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)x = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 x$

$n \qquad a_n > 1$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è CRESCENTE e SUPERIORMENTE LIMITATA $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \;\; \forall n$

$\exists \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e$ → numero di Nepero $e = 2{,}71\ldots$

QUESTO DATO PER ORA LO PRENDIAMO PER BUONO!

ES. $a_n = n^3 - 2n^2$ DEFINITIVAMENTE CRESCENTE

CRITERIO DEL RAPPORTO (x vedere se una succ. è cresc. o decresc.)

PROP $(a_n)$ successione: $a_n > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

considerando la successione: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq R < 1$

allora $(a_n)$ è definitivamente e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

R è un numero qualsiasi come se fosse $\ell$

$n! \to +\infty$

$n^k \to +\infty \quad (k \in \mathbb{N})$

GEOMETRICA $x^n \to +\infty \quad (x > 1)$

$n^n \to +\infty$

} PROTOTIPI DI SUCCESSIONI IN CUI QUANDO $n \to +\infty$ ANCHE LA SUCCESSIONE TENDE A $+\infty$

VOGLIAMO ORDINARLE ... X GRADO DI "VELOCITÀ" CON CUI TENDONO A $+\infty$

(1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n^k} = ?$ $\quad a_n = \frac{x^n}{n^k} > 0$

solo con $x > 1$

APPLICO IL TEOREMA PRECEDENTE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{x^n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = x \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

TENDE A X

$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ TENDE A 1

$1^k \to 1$

quindi $x \cdot 1 = x \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

$\Rightarrow (a_n)$ definitivamente crescente

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (PER LA PROP.)

$x^n$ vince su $n^k$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = ?$

$a_n = \frac{x^n}{n!} \quad \frac{a_{(n+1)}}{a_n} = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = x \cdot \frac{1}{n+1}$

$x \cdot 0 \Rightarrow$ quindi $(a_n)$ è DEFINITIV. DECRESCENTE (PER LA PROP.) $\quad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{x^n} = +\infty$$

$n^n \geq n!$

(3) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = ?$ $\quad$ RISOLVERE A CASA!

# LE FUNZIONI DI VARIABILE REALE

↳ SI DISEGNANO MOLTO + FACILMENTE DELLE SUCCESSIONI

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}$

$D \subseteq \mathbb{R}$ TIPICAMENTE D è un intervallo aperto, semiaperto o chiuso o una semiretta o l'unione di intervalli e semirette o di dominio $\mathbb{R}$!!

$$\begin{cases} D = ]a;b[ \quad D = ]a,b] \quad D = [a;b[ \quad D = ]a;+\infty \\ D = [a;+\infty[ \quad D = ]-\infty;a] \quad D = ]-\infty,a] \end{cases}$$

I PRIMI ESEMPI DI FUNZIONE VENGONO DALLA GEOMETRIA ANALITICA

ES 1 $\quad y = ax^2 + bx + c \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ } PARABOLA

$f(x) = ax^2 + bx + c$

ES 2 $\quad$ IPERBOLE EQUILATERA $\quad xy = 1 \qquad f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

ES 3 $\quad$ CERCHIO CENTRATO IN ZERO DI RAGGIO = 1

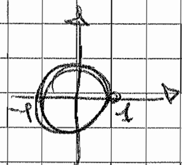
$x^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - x^2$

$y = \pm\sqrt{1+x^2}$

$f[-1,1] \to \mathbb{R}$ (CONSIDERIAMO SOLO QUESTO INTERVALLO)

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$



ES 4 $\quad$ L'EQ. ORARIA DI UN CORPO PUNTIFORME CHE SI MUOVE SU UNA RETTA È UNA FUNZIONE DELLA VARIABILE TEMPO.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(t) \text{ o } x(t)$

ES 5 $\quad$ LEGGE DEI GAS PERFETTI $\quad PV = kt$

**DOMINIO** è l'INTERVALLO + AMPIO IN CUI L'ESPRESSIONE HA SENSO!!

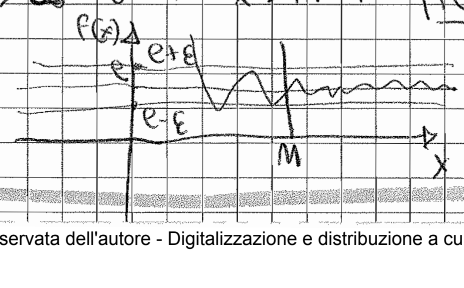
## I LIMITI

→ OCCHIO AL DOMINIO!!

1) SUPPONIAMO di avere $f: \underset{\text{(DOMINIO)}}{[a;+\infty[} \to \mathbb{R}$

Si dice che $f(x) \xrightarrow{\text{TENDE A}} \ell \in \mathbb{R}$ (reale) quando $x \xrightarrow{\text{tende}} +\infty$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \underset{\text{(GRANDE)}}{M} \in \mathbb{R}$ ↳ QUALSIASI

$M \geq a \quad t.c. \quad x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



LA FUNZIONE SI ASINTOTIZZA ALLA RETTA $y = \ell$ DESTRO

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

# ESERCIZI SULLE SUCCESSIONE

**Lemma**

$n \in \mathbb{N}$, se $n > [\alpha] \Rightarrow n > \alpha$ (PARTE INTERA DI $\alpha$)

**Dim**

1) se $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow [\alpha] = \alpha$

l'enunciato è automaticamente verificato xchè ho supposto $n > [\alpha]$:

2) $\alpha \notin \mathbb{Z}$

sappiamo che $[\alpha] \leq \alpha$

il massimo errore che possiamo fare $\quad \alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$

$\alpha < [\alpha] + 1 < \alpha + 1$

avevo chiesto x ipotesi che (A) $n \in \mathbb{N}$ $\quad \Rightarrow n \geq [\alpha] + 1 > \alpha$

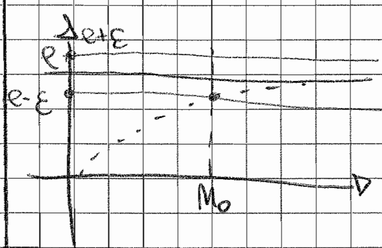
(B) $n > [\alpha]$

**ES 1** (VERIFICA DI LIMITE)

Verificare attraverso la definizione che il limite per $n \to -\infty$

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n^2}{2n+5} = \frac{1}{2}$$

RICHIAMO: Una successione $a_n$ si dice convergente a $\ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$




occorre dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{n^2}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{\cancel{2n^2} - \cancel{2n^2} - 5}{2(2n^2+5)} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n^2+5)} \right| < \varepsilon$$

den. $> 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ quindi $\Downarrow$

$$\frac{5}{2(2n^2+5)} < \varepsilon \Rightarrow 4n^2 + 10 < \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow 4n^2 < \frac{5}{\varepsilon} - 10 \Rightarrow n^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 10\right)$$

$\varepsilon$ arbitrario

$$\Rightarrow \cancel{n < -\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 10\right)}} \quad \vee \quad n > +\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 10\right)}$$

no xchè $n > 0$
in quanto $n \in \mathbb{N}$

PER IL LEMMA PRECEDENTE $\quad n_0 = \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 10} \right]$

(PER LEMMA PRECEDENTE $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 10}$

OSS. $f: D \to \mathbb{R}$ | $f(x) > 0 \; \forall x \in D$

DEVE ESSERE POSITIVA x0

Sia $g: D \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ vale che $f$ crescente su $D \iff g$ dec su $D$

(STRETT.) (STRETT.)

LA MONOTONIA SI SCAMBIA QNDO PRENDIAMO LA FUNZIONE RECIPROCA

DIMO PRENDIAMO $x_1$ e $x_2$ con $x_1 < x_2$ poiche $f(x)$ è crescente

si ha $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$

NUMERI POSITIVI

DA QSTO DEDUCIAMO CHE

$f(x) = a^x$ con $a > 1$ possono essere viste come reciproche di $\frac{1}{f(x)} = a^x$

(quelle con $a > 0$ e $a < 1$) cOSa

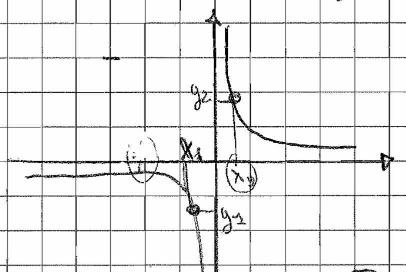
$f(x) = a^x$

$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

Poiche $y = a^x$ con $a > 1$ è STRETT. CRESCEN

$k = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ con $0 < a < 1$ DEVE ESSERE STRETT. DECR

ESEMPIO $f(x) = \frac{1}{x}$ $f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{DOMINIO}} \to \mathbb{R}$




$f(x)$ non è monotona !! (su $\mathbb{R}$ si intende)

(se prendiamo un ramo è MONOTONA)

$f(x)$ è RECIPROCA di $x$ ma non è sempre POSITIVA ECCO CHE L'OSS PRECEDENTE NON VALE

(A) o se RESTRINGO il D $f: ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ è MONOT. DECR STRETT.

(B) o se " " " $f: ]-\infty, 0[ \to \mathbb{R}$ " " " STRETT.

SONO VALORI NEGATIVI

$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

o LA MONOTONIA È UNA PROPRIETÀ GLOBALE DI $f(x)$ NON DELLE "ZONE" o

(QNDI $\frac{1}{x}$ non è monotona in $\mathbb{R}$)

Se LA FUNZIONE DIVENTA TROPPO COMPLESSA NON CONVIENE OPERARE SULLA $f(x)$

PROP (A) $f: ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ (come x le successioni)

(1) se $f$ è monotona crescente $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x > a \}$

COINCIDE CON L'EST SUPERIORE DELL'IMMAGINE DI FUNZIO

(non deve essere STRETTAMENTE x FORZA, può esserlo MA ANCHE se non lo è VALE UGUALMENTE)

(2) se $f$ è monotona DECRESCENTE $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x > a \}$

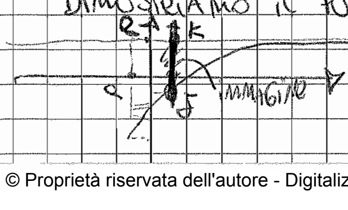
EST INFERIORE

DIMO

se l'immagine è limitata anche il sup è limitato quindi $l$ è finito

DIMOSTRIAMO IL PUNTO (1) È ANALOGA A (2)

se l'immag non è limitato il sup è $+\infty$ e il lim è $+\infty$

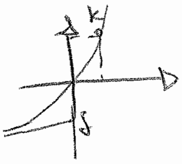



(E) e J SONO ESTREMI SUP e INF. DELL'IMMAGINE

$k = l$

" NON È DETTO CHE SUP O INF SIANO MAX E MIN

DIMO il Punto (2) se $f$ è monotona DECRESC. $\Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf\{f(x) \mid x>a\}$



- $k$ e $J$ sono estremi sup e inf. dell'immagine di $f(x)$
- non sappiamo se il limite esiste quindi analizziamo l'inf

ci sono 2 casi
- quando l'inf è un numero infinito (A) $\inf\{f(x) \mid x>0\} = L > -\infty$ (FINITO)
- quando l'inf è un numero finito (B) $\inf\{f(x) \mid x>0\} = -\infty$ (INFINITO)

(A) dobbiamo far vedere che $\forall \varepsilon>0\ \exists M$ (GRANDE) t.c. se $x \geq M$ ALLORA
$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

SI OSSERVI CHE $f(x) \geq l > l-\varepsilon \quad \forall x \in D$ — $D = ]a, +\infty[$ $a$ = DOMINIO di $f(x)$ ??

PER LA PROP. CARATTERIZZANTE DELL'INF $\exists \bar{x} > a$ tc

$\boxed{l+\varepsilon > f(\bar{x}) (\geq l)}$ $(\alpha)$

POICHE $f$ è DECRESCENTE $\boxed{f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \geq \bar{x}}$ $(\beta)$
$\bar{x} < x \Rightarrow f(\bar{x}) \geq f(x)$ (DECRESCENZA)

$(\alpha)$ e $(\beta)$ $\Rightarrow l+\varepsilon > f(x) \quad \forall x \geq \bar{x}$ $(\gamma)$

$(\alpha)$ e $(\gamma)$ $\Rightarrow l+\varepsilon > f(x) > l-\varepsilon \quad \forall x \geq \bar{x}$ $\Rightarrow$ il limite esiste ed è finito e coincide con $\{\inf\{f(x) \mid x>a\}$

(B) DOBBIAMO FAR VEDERE CHE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ cioè che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \bar{x} < a$

$\forall x > \bar{x} \Rightarrow f(x) < M$

poiche $f$ è ~~inf~~ non limitato $M$ non è sicuramente un MINORANTE e quindi $\exists \bar{x} < a \mid f(\bar{x}) < M$

Poiché $f$ è decrescente $f(x) \leq f(\bar{x}) \leq M$ $\forall x > \bar{x}$ — $\{x > \bar{x} \Rightarrow f(x) \leq f(\bar{x})$ (PER LA DECRESCENZA)

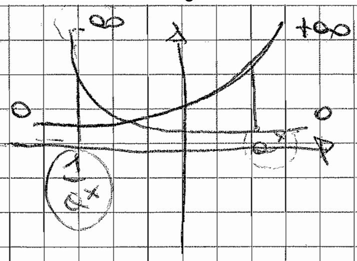
quindi il limite $f$ esiste ed è INFINITO e coincide con $\{\inf\{f(x) \mid x>a\}$

p. 54 Jolly



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 273

ES. • se $\boxed{a>1}$ $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ sup $+\infty$




• se $\boxed{a<1}$ $\lim_{x\to-\infty} a^x = -\infty$

$$\{a^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{\left(\frac{1}{a}\right)^x \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$

se prendo $x=-1$ $f(x)=a^x$

sono due $f(x)$ reciproche quindi hanno stessi sup e inf.

## (A) IL CONCETTO DI CONTINUITÀ

qualcosa che trasforma qualcosa in ingresso e la fa uscire modificata

BLACK BOX

$x \to \boxed{f} \to f(x)$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$x_0 \longrightarrow f(x_0)$

Vogliamo far sì che in uscita otteniamo $f(x_0)$ se riesco a dare in pasto esattamente $x_0$ sono sicuro che otterrò $f(x_0)$, ma se non riesco a dare un valore simile a $x_0$ voglio ottenere un valore simile a $f(x_0)$ (J)

in generale dobbiamo

$f: I \to \mathbb{R}$ $I$ = intervallo qualsiasi (aperto, chiuso ecc...)

$x_0 \in I$

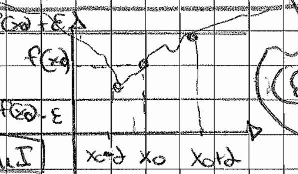
$\varepsilon$ è la nostra tolleranza più di $\varepsilon$ ...

si dice che $f$ è continua in $x_0$ se $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0 \mid \forall x \in I \Rightarrow |f(x_0)-f(x)|$

(per ogni $\varepsilon$ positivo $\exists$ $\delta>0$ tale che per ogni $x$ nell'intervallo che dista meno di $x_0$ da $\delta$ - $x_0$ la $f(x)$ in uscita disto meno di $\varepsilon$ da $x_0$)

$|x-x_0|<\delta$

se $f(x)$ è continua in ogni punto di $I$ si dice continua in $I$




$\delta$ lo scelgo in funzione di $\varepsilon$

Avere una B. Box continua vuol dire che fissata una soglia ($\varepsilon$) di valori in ingresso se io la rispetto $f(x_0)$ continua rispetta un'altra soglia!

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=mx+q$ RETTA

Verifichiamo la continuità in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x_0)=mx_0+q$

(J) deve essere risolta quando $x$ è molto vicina a $x_0$

Fisso $\varepsilon>0$ e studiamo $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

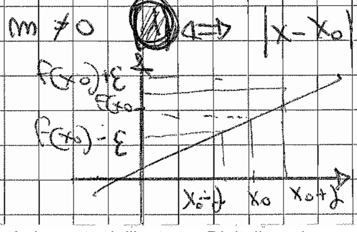
$|mx+\cancel{q}-mx_0-\cancel{q}|<\varepsilon$

$|m||x-x_0|<\varepsilon$ (A)

se $m=0$ è sempre verificata quindi $f(x)$ continua

$m\neq 0$ (A) $\Leftrightarrow |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|m|}$

• più $m$ è grande più $\delta$ diventa piccolo!




$\delta$ abbiamo trovato l'intorno di $x_0$ che dipende da $\varepsilon$ e dal coef. ang. $m$ della retta

$\delta \propto \frac{1}{m}$

56

## (B) CONTINUITÀ DI $f(x)$ (A)⇔(B) LEZ. 16

$f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$
↳ intervallo

Si dice che $f$ è continua in $x_0$ se $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \; |x - x_0| < \delta$ si ha che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

RIFORMULIAMO IL CONCETTO DI CONTINUITÀ:

SUPPONIAMO $I = ]a; b[$ (INTER. APERTO) $x_0 \in I$ → è un punto interno a $I$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$

Si dice che $f$ tende ad $\ell$ per $x$ che tende a $x_0$ se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ con $|x - x_0| < \delta$

vale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ A LIVELLO NOTAZIONALE SI SCRIVE:

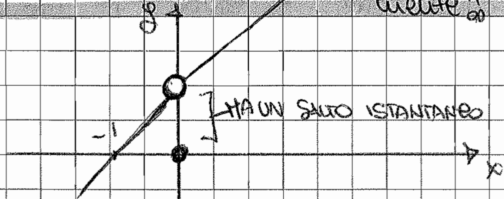
NOT. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ → dal punto di vista geometrico è molto simile al concetto di continuità!! però non mi interessa il valore $f(x_0)$
(xchè non ci serve sapere $f(x_0)$ visto che x il concetto di continuità è escluso ...)

OSS Si noti che con il concetto appena introdotto si può riformulare la continuità come segue:

$f$ è continua in $x_0 \overset{\text{se e solo se}}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ } Togliendo $x_0$ nella continuità non mi cambia niente!!

ES. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$




$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$

↳ il limite continua ad esistere e vale 1 ma non coincide con il valore di $f(x)$ in 0 ⇒ $f(x)$ non è CONTINUA!!

⊛ il valore che avrebbe avuto $f(x)$ nel punto 0

↳ il limite esiste ed è ⊛

se modifichiamo $f(x)$ in $x_0$ la possiamo rendere continua!!

Si osservi che in generale se

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$ $f \; ]a; b[ \to \mathbb{R}$ ($x_0$)

$f$ può essere ~~vera~~ CONTINUA in $x_0$ semplicemente modificandola nel punto $x_0$ considerando cioè

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \neq x_0 \\ \ell & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

⇒ è continua in $x_0$

Si osservi che poiché il valore $f$ in $x_0$ non si utilizza nella definizione di limite, essa si può definire anche se la funzione non è definita in $x_0$ $f: ]a; b[ \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ [Se io estendo la funzione e in $x_0 = \ell$ il limite la posso rendere continua

59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 273

Es 1 (f lineari) LE RETTE SONO CONTINUE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = mx + q$ continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

ES. I polinomi sono continui su tutto $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots a_n x^n$ } SOMMA E PRODOTTO DI n° FUNZIONI CONTINUE!!

In quanto ogni potenza $x^k$ è continua su $\mathbb{R}$

in quanto prodotto di $k$ fattori $x$ tutti continui

Poiché le costanti sono continue ($m = 0$)

$a_k x^k$ sono tutti funzioni costanti.

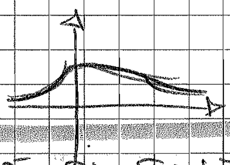
Infine $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ essendo somma degli $n$ monomi che sappiamo essere continui su $\mathbb{R}$.

Es se consideriamo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ → polinomio

$f: \mathbb{R} \setminus Z \to \mathbb{R}$ $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid b^{(m)} = 0\}$

$f$ è continua su ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus Z$ in quanto quoziente di due polinomi!

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



LA DISCONTINUITÀ DI FUNZIONE (quando $f(x)$ non è continua)

$f: ]a;b[ \to \mathbb{R}$ $x_0 \in ]a;b[$

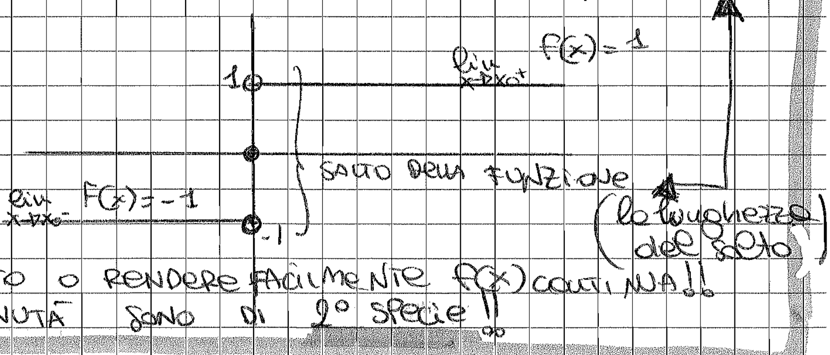
Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

Se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ } FINITI ENTRAMBI DISC. 1° SPECIE

IL SALTO di $f(x) = |f_+(x_0) - f_-(x_0)|$

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$




NON POSSO ELIMINARE IL SALTO O RENDERE FACILMENTE $f(x)$ CONTINUA!!

* TUTTE LE ALTRE DISCONTINUITÀ SONO DI 2° SPECIE!!

**TEO.** (COMPOSIZIONE DEI LIMITI)
SUPPONIAMO DI AVERE:

$\rightarrow f: ]a,b[ \rightarrow ]c,d[$
$\rightarrow g: ]c,d[ \rightarrow \mathbb{R}$ — la voglio comporre e calcolare il lim della F composta
$x_0 \in ]a,b[$

$\rightarrow$ SUPPONIAMO CHE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in ]c,d[$

$\rightarrow$ SUPPONIAMO CHE $g$ SIA CONTINUA in $\ell$

$\Rightarrow$ ALLORA $\exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$

**COR.**
$f: ]a,b[ \rightarrow ]c,d[$
$g: ]c,d[ \rightarrow \mathbb{R}$
$x_0 \in ]a,b[$
$\Rightarrow$ $f$ è continua in $x_0$, $x_0 \in ]a,b[$

**DIM.** $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Quindi per il TEO PRECEDENTE $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$

**ES.** $h(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{x^2+1}$

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e $g(x) = \operatorname{sen} y$

so che $f$ è continua in $\mathbb{R}$ ; so che $g$ è continua in $0$

$\Rightarrow h = g \circ f$ è continua in $0$

**OSS. ①** IL TEO DI CARATTERIZZAZIONE DEI LIMITI ATTRAVERSO LA SUCCESSIONE SI PUÒ ESTENDERE AL CASO $x_0 = +\infty$ o $-\infty$ OPPURE $x_0^+$ $x_0^-$ e $\ell$ POSSIBILMENTE $\pm\infty$

**OSS ②** IL TEO DI COMPOSIZIONE DEI LIMITI FUNZIONA ANCHE IN ALTRI CA[SI]

- $x_0 = \pm\infty$ , $\ell$ è FINITO
- $x_0$ QUALUNQUE
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
  $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$
  $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L$

Sto sognando occhi aperti! Troppe cose... fantas... che vol...

$\tan x$ È CONTINUA?

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ CONTINUA SUL SUO DOMINIO DI DEFINIZIONE

$\underset{\text{dominio}}{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

ES $f(x) = \sin(x^2)$ → è continua xchè composizione di funzioni conti[nue]

↓ ovunque (su tutto $\mathbb{R}$)

ES $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ → È CONTINUA NEL SUO DOMINIO XCHÈ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE

↓

$D = R - \{0\}$

DIMOSTRIAMO CHE SE $a > 0$ E $f(x) = a^x$ CON $x \in \mathbb{R}$ È CONTINUA IN OGNI $x_0 \in \mathbb{R}$

1) $\boxed{a = 1}$ È UNA COSTANTE QUINDI È SICURO CONTINUA!

2) $\boxed{a > 1}$ $x_0 = 0$ SI TRATTA DI FAR NOTARE CHE

$\boxed{\text{STUDIAMO LA CONTINUITÀ IN ZERO}}$ $\boxed{1^\circ \text{ FASE}}$

$\lim_{x \to 0} a^x = 1$ → SUPPONGO CHE QUESTO LIMITE DEVE TENDERE

UN NUMERO ELEVATO A ZERO = 1

SAPPIAMO CHE L'ESPONENZIALE È MONOTONA CRESCENTE QUINDI SICURAMENTE ESISTONO I 2 LIMITI DESTRO E SINISTRO

↓

$\exists \lim_{x \to 0^-} a^x = l_- \in \mathbb{R}$

(CI PUÒ ESSERE UN SALTO MA DX E SN DEVONO ESISTERE (O POSSONO ESSERE INFINITI))

$\exists \lim_{x \to 0^+} a^x = l_+ \in \mathbb{R}$

PER DIMOSTRARE LA CONTINUITÀ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE I DUE LIMITI DX E SN SONO FINITI E COINCIDONO $l_- = l_+ = 1$

→ PER RISOLVERE IL PUNTO PRECEDENTE CONSIDERO LA SUCCESSIONE

$a_n = a^{\frac{1}{n}}$ CALCOLO CHE $\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = l_+$ (USO IL TEOREMA E PONGO)

(6

b) $\boxed{0 < a < 1}$ $f(x) = a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$

$\frac{1}{a} > 1$

$\left(\frac{1}{a}\right)^x$ è CONTINUA su $\mathbb{R}$ xché $\frac{1}{a} > 0$
e QNDI $f$ CONTINUA su $\mathbb{R}$.

IN QNTO RAPPORTO TRA 1 e UNA FUNZIONE CONTINUA.

ES 1 $\dfrac{3^{\operatorname{sen}(x) - \frac{x^2}{2}}}{x^2+1}$ è CONTINUA OVUNQUE

LIMITI UTILIZZANDO LE TECNICHE DI COMPOSIZIONE

ES 1 $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{+\infty} = \operatorname{sen} 0 = 0$

è DISPARI = SIMMETRICA RISPETTO ALL'ORIGINE

ES 2 $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \nexists$ xché? IDEA x DIMOSTRARE CHE $\nexists$

COSTRUIAMO 2 SUCCESSIONI $a_n$ e $b_n$ tc $\begin{cases} a_n > 0 \\ b_n > 0 \end{cases}$

(Teo p.61)

e che $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ e $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a_n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{b_n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_2$

ci serve tutto ciò x dimostrare che $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \nexists$

con $l_1 \neq l_2$

• qndo $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$? qndo $\frac{1}{x} = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x = \frac{1}{n\pi}$ con $n \neq 0$

$a_n = \frac{1}{n\pi}$ con $n \in \mathbb{N}$ } QSTA SUCCESSIONE TENDE A 0

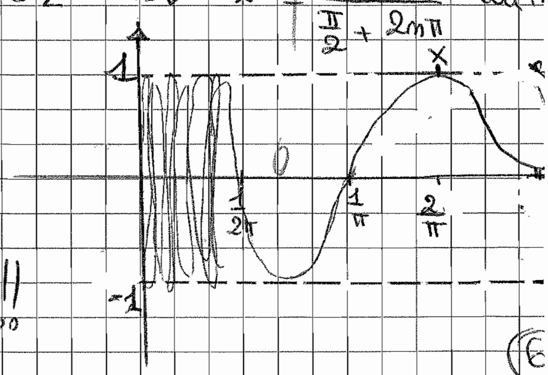
$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{a_n} = 0 \ \forall n$ (COME VOLEVAMO NOI!!) $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• qndo $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$ $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ con n

$b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ $n \in \mathbb{N}$ SONO CORRETTI!

$b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

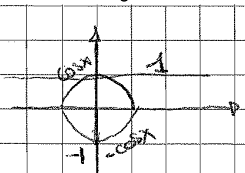
$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{b_n} = 1 \ \forall n}$

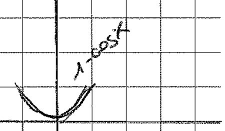



QSTO DIMOSTRA CHE IL LIMITE NON ESISTE !!
in qnto $l_1 \neq l_2$

LIMITE NOTEVOLE! LEZ 19

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$




$$\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

limite notevole!

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

LE DUE FUNZIONI NON SONO = SI TOCCANO SOLO NEL PUNTO ZERO, MA IL LORO RAPPORTO TENDE A $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

SE $1-\cos x$ È "SIMILE" VICINO A ZERO A $\frac{1}{2}x^2$

SE $\cos x - 1$ È "SIMILE" " A ZERO A $-\frac{1}{2}x^2$

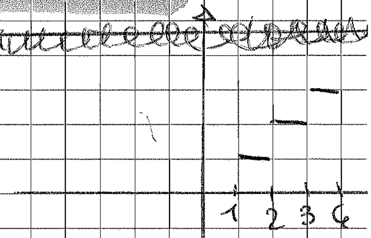
ALLORA $\cos x$ È "SIMILE" A $1-\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\,x}{x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

TENDE A $\frac{1}{2}$ — TENDE A ZERO

**PROP.**

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$




DIMOSTRIAMO CHE È COSÌ!

$[x]$ È PARTE INTERA DI $x \Rightarrow [x] \le x \le [x]+1$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}_{(*)} \cdot \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}$$

TENDE A 1 quando $x\to+\infty$

È LA COMPOSIZIONE DI $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$x \longmapsto [x]+1 \longrightarrow a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (*)$$

QUINDI $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} = e$

CON RAGIONAMENTO ANALOGO $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e$

SI CONCLUDE PER CONFRONTO

6

ES dx $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\log_e(x+1)}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$ FORMA INDETERMINATA A CHE TENDE?

$\frac{\log_e(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\log_e(x+1) = \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ con $t \to +\infty$

$x \longmapsto \frac{1}{x} = t \longrightarrow \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ } CAMBIO DI VARIABILE!

$x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$
$\left(\frac{1}{0^+} = +\infty\right)$

Quindi $\lim_{x \to 0^+} \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_e e$

sx $\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{\log_e(x+1)}{x}} =$

SAPENDO CHE (PAG SUCCESSIVA) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ B

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e}$

$\boxed{\text{se } \boxed{a=e}}$ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$ } CASO PARTICOLARE!!

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} \left(= \frac{1}{\log_a e}\right.$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\log_e(x+1)}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)\log_e(x+1) = \log_e(x+1)^{\frac{1}{x}}$

$\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x} = -t$

$x = \frac{1}{-t}$

$x \to 0 \Rightarrow t \to -\infty$

$= \log_e(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t} = e$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_e x = \ell$$

se $\ell < +\infty$.

$$x = a^{\log_e x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^{\log_e x} = a^{\ell}$$

assurdo

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

pag 70 Jouy

$$x^{\alpha} = \cancel{\frac{1}{x^{\alpha}}}\ x^{-(-\alpha)} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$$

$$x^{3} = \frac{1}{x^{-3}}$$

$$x^{-3} = \frac{1}{x^{3}}$$

$$\boxed{x^{\alpha} = \frac{1}{x^{-\alpha}} \quad \alpha < 0 \Rightarrow -\alpha > 0.}$$

pag 73 Jouy

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 273

ES. DETERMINA I PARAMETRI $\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ \arccos x + \alpha & -1 < x < 1 \\ (x-\beta)^2 & x \leq -1 \end{cases}$

RISULTI CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE

se $x > 1$ la funzione $y(x)$ è continua xchè restrizione di una funzione continua ($y = x^2$ se $x > 1$ funzione polinomiale che sappiamo essere continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare su $x > 1$)

se $x < -1$ (analogo al ragionamento precedente) è continuo

se $-1 < x < 1$ $y(x) = \arccos(x) + \alpha$ quindi $y(x)$ è continua xchè $y = \arccos x$ è continua xchè inversa di una funzione continua (dim a lezione che $y = \cos x$ è continua) e quindi anche $y = \arccos x + \alpha$ continua xchè traslato di una funzione continua.

IMPONIAMO LA CONTINUITÀ nei PUNTI di RACCORDO $x = \pm 1$

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^+} y(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \arccos(1) + \alpha = \lim_{x \to 1^+} x^2$$

$$\Downarrow$$

$$0 + \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = \lim_{x \to -1^+} y(x)$$

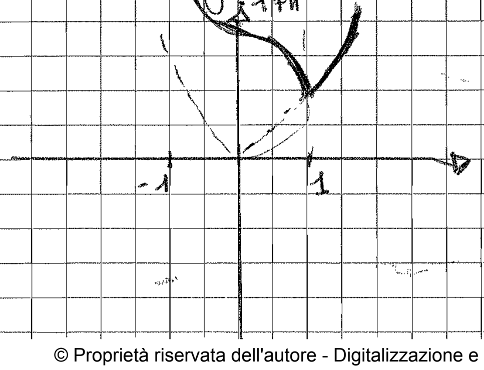
$$(-1-\beta)^2 = \pi + 1$$

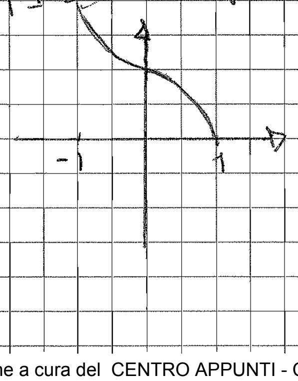
$$\beta + 1 = \pm\sqrt{1+\pi}$$

$$\beta = -1 \pm \sqrt{1+\pi}$$

$$\beta_1 = -1 + \sqrt{1+\pi} \qquad \beta_2 = -1 - \sqrt{1+\pi}$$

DISEGNAMO $y(x)$ con $\alpha = 1$ $\quad \beta_1 = -1 + \sqrt{1+\pi} > 0$




© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 273

SI DICE CHE $f$ È UN o PICCOLO DI $g$ (TRASCURABILE RISPETTO A $g$) PER $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

E SI SCRIVE $f = o(g)$ $(x \to x_0)$

OSS NELLE DEFINIZIONI PRECEDENTI È NECESSARIO IPOTIZZARE CHE $g$ NON SI ANNULLI VICINO $x_0$
IN REALTÀ VARIANDO LEGGERMENTE LE DEFINIZIONI QUESTA IPOTESI PUÒ ESSERE ANCHE TOLTA
~~INVECE~~ di ~~ordine~~ a guardare $\frac{f(x)}{g(x)}$ si dice che: $\exists$

OSS
ES $f \sim g$ SI DICONO EQUIVALENTI PER $x \to x_0$ se $\exists h: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ t.c.

$f = h \cdot g$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = 1$

POTREBBE ACCADERE CHE DOVE $g(x) = 0$ (SI ANNULLA) anche $f(x) = 0$ $g(x) = f(x)$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\to h$

OSS. DALLE PROPRIETÀ di $\sim$ e $\overset{\smile}{\frown}$ sono vere e prop. relazioni di equivalenza

- $f \sim f$ $(x \to x_0)$ (1) PROP. RIFLESSIVA $\left\{ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \right.$
- $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ $(x \to x_0)$ (2) PROP. SIMMETRICA
- $f \sim g,\ g \sim h \Rightarrow f \sim h$ $(x \to x_0)$ $\left[ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \right]$

(3) PROP. TRANSITIVA

- $f \overset{\smile}{\frown} f$ $(x \to x_0)$ P. RIFLESSIVA
- $f \overset{\smile}{\frown} g \Rightarrow g \overset{\smile}{\frown} f$ $(x \to x_0)$ P. SIMMETRICA
- $f \overset{\smile}{\frown} g,\ g \overset{\smile}{\frown} h \Rightarrow f \overset{\smile}{\frown} h$ $(x \to x_0)$ P. TRANSITIVA

QUANDO ABBIAMO UNA RELAZIONE BINARIA TRA 2 oggetti di una categoria distinguiamo:
- UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA dice che: (*) ha 1, 2 e 3 PROPRIETÀ !! non dà un ordine ma crea delle isole di elementi che sono tra loro inequivalenti
- UNA RELAZIONE di ORDINE dice che: ha 1, 3 e la 2 è RIMPIAZZATA DALL'ANTISIMMETRICA che dice che se $f \leq g$ e $g \leq f$ $g = f$ ma se $f \leq g$ non significa che $g \leq f$; la rel. di ordine dà una GERARCHIA

(*) si spezza l'insieme in tante classi tra loro in equivalenza

OSS. PROPRIETÀ di o

$f = o(g)$, $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$ $(x \to x_0)$

PROP. TRANSITIVA

DIMOSTRIAMO

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = 0 \cdot 0$

ES
- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ $\left\{ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right.$
- $1 - \cos x \overset{\smile}{\frown} x^2$ per $x \to 0$ $\left\{ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \right.$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$ $\left\{ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot 2 = 1 \right.$

ES $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$

$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ per $x \to 0$ → le costanti non cambiano niente nell'o piccolo (nelle equivalenze servono!)

$= o(x^2) \overset{\text{sono uguali}}{=} -o(x^2)$

$\boxed{o(f) \cdot k = o(f)}$ ($k$ costante)

$\boxed{\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0}$

$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0}$

**PROP** se $h = o(g) \Rightarrow \boxed{f \cdot h = o(fg)}$ $\boxed{f \cdot o(g) = o(f \cdot g) \quad (x \to x_0)}$

DIMO
$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot h(x)$

ES $\boxed{1-\cos x = o(x)}$ $x \to 0$

$(1-\cos x)\, x = o(x \cdot x) = o(x^2)$ $x \to 0$

**PROP.** se $f = o(g)$ e $h = o(g)$ per $x \to x_0$
ALLORA $h + f = o(g)$ per $x \to x_0$

$\left.\begin{array}{l} f = o(g) \\ h = o(f) \end{array}\right\} \Rightarrow h = o(g)$

**PROP.** se $f = o(g)$ $(x \to x_0) \Rightarrow \underbrace{o(f) + o(g)}_{\text{(A)}} = \underbrace{o(g)}_{\text{(B)}}$ $(x \to x_0)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\quad \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \frac{h(x)}{g(x)}$

sono due oggetti che divisi per $g \to$ a zero quindi sono TRASCURABILI RISPETTO A $g$ !!

$o(f) + o(g)$ non significa che $o(f) + o(g) = o(g)$ ma che devono essere entrambe quantità che divise per $g$ tendono a zero

DIMO
CHIAMO $o(f) = h$ e $o(g) = k$ (PER IPOTESI) $f = o(g) \Rightarrow \underline{h = o(g)}$

IN EFFETTI se $\left.\begin{array}{l} h = o(g) \text{ (PER LA } \underline{\text{PROP. TRANSITIVA}}) \\ k = o(g) \end{array}\right\} \Rightarrow h + k = o(g)$ $(x \to x_0)$

---

CONFRONTO CON FUNZIONI CAMPIONE (dei Polinomi) (ci interesso confrontare delle $f(x)$ comprese con $x, x^2, x^3 \ldots$) (OMEGA)

Si fissa una funzione $W: ]a;b[ \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in ]a;b[$ e si cerca di confrontare tutte le funzioni per $x \to x_0$ rispetto a $W$.

(ie $\lim_{x \to x_0} W \nexists$ ed è o zero o infinito ($\infty$))

→ SI DICE CHE $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ ha ordine $k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) RISPETTO A $W$ PER $x \to x_0$ se $\exists\, c \neq 0$ t.c.

$$f(x) = \underbrace{c\, W(x)^k}_{} + o\left(W(x)^k\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

$W$ deve tendere o a zero o a $\infty$

PARTE PRINCIPALE di $f$ RISPETTO ALLA FUNZIONE CAMPIONE di $W(x)$ $(x \to x_0)$ $\Big\} =$ P.P.

ES

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{2x^2+5x} \cdot \frac{(x^2+3x)}{(x^2+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{x^2+3x} \cdot \frac{x^2+3x}{2x^2+5x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{x^2+3x} \cdot \frac{x(x+3)}{x(2x+5)} = \frac{3}{5}$$

ES $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{2x^2+5x+1} = 0$ OK

ES $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+\lambda}+x\right) = 2$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} \frac{(\sqrt{x^2+\lambda}+x)}{\sqrt{x^2+\lambda}-x}(\sqrt{x^2+\lambda}-x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}\,(x^2+\lambda-x^2)}{\sqrt{x^2+\lambda}-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+\lambda}-x} = \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x^2(1+\frac{\lambda}{x^2})}-x} = \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{\lambda}{x^2}}-x} =$$

$$= \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{\lambda}{x^2}}-x} = \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-x\left(\sqrt{1+\frac{\lambda}{x^2}}+1\right)} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = 2 \Rightarrow \lambda = 4$$

**OBIETTIVO**

CONFRONTARE LOCALMENTE FUNZIONI NELL'INTORNO DI UN PUNTO $x_0$

$f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) \sim g(x) \quad x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

PER ESEMPIO $f \sim g \quad x \to x_0 \Leftrightarrow f - g = o(g)$

INFINITI O INFINITESIMI CAMPIONE

| | $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ | $x \to \pm\infty$ |
|---|---|---|
| INFINITESIMO | $\lvert x - x_0\rvert$ | $\frac{1}{\lvert x\rvert}$ |
| INFINITO | $\frac{1}{\lvert x - x_0\rvert}$ | $\lvert x\rvert$ |

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 273

## INFINITA O INFINITESIMA:

SUPPONIAMO CHE $f(x)$ SIA INFINITA (O INFINITESIMA) PER $x \to x_0$. SI DICE CHE $f(x)$ È INFINITA (O INFINITESIMA) DI ORDINE $\alpha$ RISPETTO ALL'INFINITO (O INFINITESI CAMPIONE $w(x)$ SE $\exists$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{w(x)^\alpha} = c$$

$$c \neq 0 \qquad c < +\infty$$

ALLORA

$$f(x) \sim \overbrace{c\, w(x)^\alpha}^{\text{P.P. di } f(x)} \qquad x \to x_0$$

$$f(x) = c\, w(x)^\alpha + o\left(w(x)^\alpha\right) \qquad x \to x_0$$

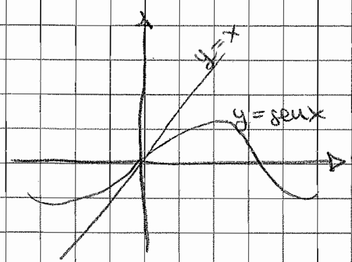
ES Sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\sin(x) \sim x \qquad x \to 0$$

$$\sin x = x + o(x) \qquad x \to 0$$

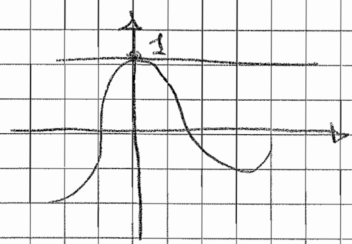
$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$




$y = \cos x$

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} 1 - \cos(x) = 0$$




$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2} x^2 \qquad x \to 0$$

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{1}{2} x^2 \qquad x \to 0$$

1) $\sin x \sim x \qquad x \to 0$

$$\sin(x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

2) $\operatorname{tg} x \sim x \qquad x \to 0$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

3) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \qquad x \to 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 273

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}+\sqrt{x}}{x^{\alpha}} \underset{\alpha=\frac{1}{2}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}+x)}+1 = 1$$

$f(x)$ è un infinito di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \underbrace{\sqrt{x}}_{P.P.} \qquad x\to+\infty$$

**X CASA** traccia di prima per $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + \sqrt{x}$ $\quad x\to+\infty$

P.P. di $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$ } soluz.

**X CASA** det. la parte P. per $x\to+\infty$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+x^4}$$

ES. calcola la P.P. per $x\to+\infty$ di $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

vediamo e calcoliamo se è un infinito un infinitesimo

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt[3]{x+1}}_{A} - \underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{B} \overset{*}{=} +\infty - \infty$$

sfruttiamo la diff. di cubi!! $(A^3-B^3) = (A-B)(A^2+B^2+AB)$

$$A - B = \frac{A^3-B^3}{A^2+B^2+AB}$$

$$* = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)}} = \lim_{x\to+\infty} = \frac{2}{+\infty+\infty+\infty} = 0$$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

voglio calcolare la P.P. di $f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x)$$

voglio det. $\alpha$ in modo che $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = c < +\infty$, $c \neq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{x^2(1-\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{x^2(1 \ldots}}$$

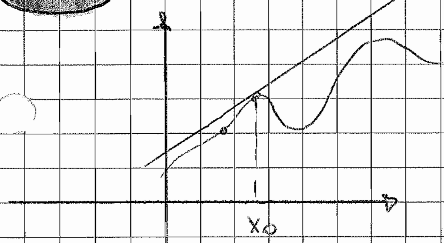
$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}\right)} \underset{\alpha=\frac{2}{3}}{=} \lim_{x\to+\infty} \cancel{x^{2/3}} \frac{2}{\cancel{x^{2/3}} \ldots} = \ldots$$

$$f(x) \sim \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} \qquad x\to+\infty$$

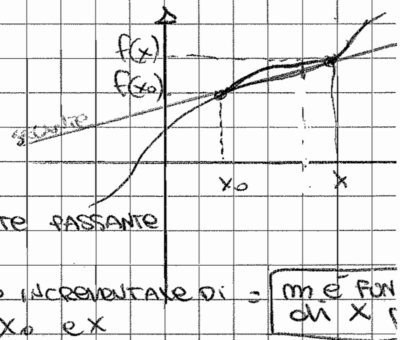
LEZ. 21

# LE DERIVATE

TEORIA di LEIBNITZ e LAGRANGE




$f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$




COEFF. ANGOLARE DELLA SECANTE PASSANTE PER I PUNTI $x$ e $x_0$

(*) $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = RAPPORTO INCREMENTALE DI $f$ TRA $x_0$ e $x$ = $\boxed{m \text{ è FUN di } x}$

Non so definire la retta tg alla funzione ma conosco il modo per calcolare l'eq. retta secante $y - f(x_0) = m(t - x_0)$. La tg è la retta secante tra due punti la cui loro distanza sull'asse x tende a zero!! m posso calcolarlo (*) ($t$ è VAR. INDIP. DELLA RETTA)

DEF. $f$ si dice derivabile in $x_0$ se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (*) ed è finito

TALE LIMITE È DETTO LA DERIVATA di $f$ in $x_0$ ed è INDICATO IN VARI MODI PER ESEMPIO:

$f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $y'(x_0)$, $\boxed{\dfrac{df}{dx}(x_0)}$ – SIMBOLO DI LEIBNITZ

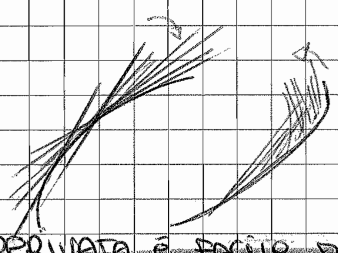
(VARIAZIONE DELLA $f$ SU UNA VARIAZIONE DELLA $x$. LIMITE DI UN QUOZIENTE DI VARIAZIONE.) → È IL MODO + COLLEGATO ALLA DEFINIZIONE di DERIVATA

OSS. GEOMETRICAMENTE POSSIAMO INTERPRETARE LA DERIVATA come IL COEFF. ANG. DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO in $(x_0, f(x_0))$

ANZI POSSIAMO DEFINIRE LA RETTA TG. AL GRAFICO di $f$ in $(x_0; f(x_0))$ come LA RETTA

$y - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0)$ ← (ALLA RETTA SECANTE SOSTITUISCO IL COEFF. ANGOLARE DELLA T...

POSSO RITORNARE A CHIAMARLA $x$ ⇒ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$



CI ASPETTIAMO DALLA DERIVATA MOLTE INFORMAZIONI
- se $m > 0$ CRESCENTE
- se $m < 0$ DECRESCENTE
- se $m = 0$ SUCCEDE QUALCOSA...

anche dal modo in cui varia possiamo avere molte informazioni + raffinate su $f(x)$

LA DERIVATA È FACILE DA CALCOLARE: DA CIÒ DERIVA IL SUO SUCCESSO!!

Se $f$ è DERIVABILE IN OGNI PUNTO di $x_0 \in ]a,b[$ si dice DERIVABILE su $]a,b[$ e IN TAL CASO SI PUÒ PARLARE DI FUNZIONE DERIVATA

$f': ]a,b[ \to \mathbb{R}$

$f'(x)$ è DERIVATA NEL PUNTO $x_0$ {CALCOLO $f'(x_0)$}

FISSIAMO UNA RETTA

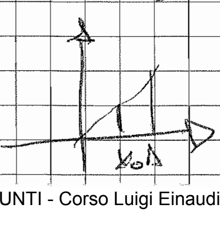
ES. $f(x) = mx + q$ $x \in \mathbb{R}$

PRESO UN $x_0 \in \mathbb{R}$ e voglio vedere se $f(x)$ derivabile in $x_0$

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(mx + \cancel{q}) - (mx_0 + \cancel{q})}{x - x_0} = \dfrac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m$

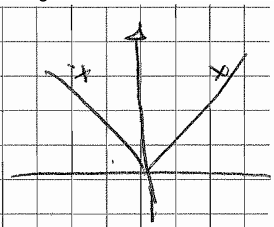
$m \dfrac{(x - x_0)}{(x - x_0)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$




D'ALTRA PARTE è $f'(x_0) = m \ \forall x \in \mathbb{R}$

ES $f(x) = |x|$



CONTINUITÀ SU TUTTO $\mathbb{R}$ MA IN ZERO $(x_0=0)$ NON È DERIVABILE!!

$x_0 = 0$ $\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limite dx e sin sono $\neq$ quindi non esiste il limite del RAPP. INCREMENTALE

QND $|x|$ non è DERIVABILE in 0 ma è DERIVABILE in ogni altro punto solo in zero ABBIAMO D... TO $\neq$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{DERIVABILITÀ} \Rightarrow \text{CONTINUITÀ} \\ \text{DERIVABILITÀ} \not\Leftarrow \text{CONTINUITÀ} \end{array}}$$

PROP. $f, g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$

$x_0 \in ]a,b[$ e supponiamo $f$ e $g$ derivabili in $x_0$.

$\Rightarrow$ Allora (1) $f+g$ è derivabile in $x_0$ e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

{FORMULA DI LEIBNITZ} (2) $f \cdot g$ è derivabile in $x_0$ e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(3) $\frac{f}{g}$ è derivabile in $x_0$ e $g(x) \neq 0 \ \forall x$ $\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x)^2}$

ES $f(x) = c \quad \forall x \qquad f'(x_0) = 0 \quad \forall x$

SIA $f: ]a;b[ \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0$

$(cf)'(x_0) = 0 + c f'(x_0) = c f'(x_0)$

DERIVATA di UNA COSTANTE DI FUNZIONE è = alla COST. PER LA DERIV. di FUNZIONE

ES $f(x) = x^3 = x \cdot x^2 \qquad x \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) = 1 \cdot x_0^2 + x_0(2x_0) = 3x_0^2$

ES $f(x) = x^4 = x \cdot x^3 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 x_0^3 + x_0 3x_0^2 = 4x_0^3$

$\boxed{f(x) = x^n \quad x_0 \in \mathbb{R} \qquad f'(x_0) = n x_0^{n-1}}$ in GENERALE

DIMO $f(x) = x^n = x \, x^{n-1}$ $\quad x^{n-1} \to (n-1)x_0^{n-2}$

$f'(x) = 1 x_0^{n-1} + x_0 (n-1) x^{n-2} = n x_0^{n-1}$

se DIMOSTRIAMO che $W(x) = o(x-x_0)$ quando $x \to x_0$ abbiamo concluso, il CRITERIO di "DERIVABILITÀ".

$W(x)$ = somma di due termini

$g'(f(x_0))\, o(x-x_0) = o(x-x_0) \quad x \to x_0$

PER QUANTO RIGUARDA il secondo ADDENDO dividiamo i due casi:

se $f'(x_0) \neq 0$

$f(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \sim f'(x_0) \cdot \quad (x \to x_0)$

$\Downarrow$

$o\big(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\big) = o \quad$ per $x \to x_0$

[Poiché se $h = o(f)$ e $f \sim g \Rightarrow h = o(g)$ $\boxed{\frac{h}{g} = \frac{h}{f}\frac{f}{g}}$

se $f'(x_0) = 0$

$o(\underbrace{o(x-x_0)}_{h}) = o(x-x_0)$ PER LA PROP. TRANSITIVA

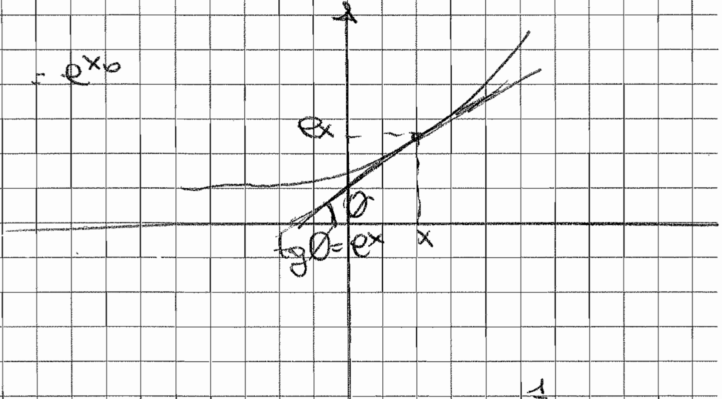
In ogni caso i due ADDENDI che costituiscono $W(x)$ sono ENTRAMBI $o(x \to x_0)$ QUINDI $W(x) = o(x-x_0)$

$(x \to x_0)$

**ES** $\boxed{f(x) = e^x}$ preso $x \in \mathbb{R}$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\frac{(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$

$\boxed{f'(x) = e^x \quad \forall x}$




**ES** $\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ PROSTAFERESI

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \frac{2 \operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\frac{x+x_0}{2}$

$= 1 \cdot \cos \frac{2x_0}{2} = \cos x_0$

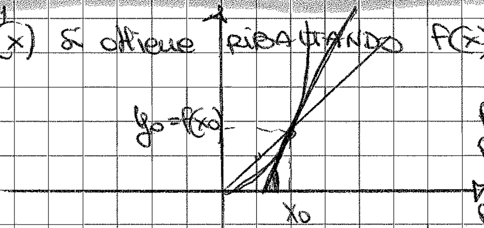
QUINDI $\operatorname{sen} x$ è derivabile in $x_0$ e:

$\boxed{f'(x) = \cos x}$

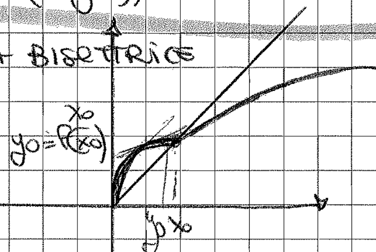
PROP.
- $f: ]a,b[ \to ]c,d[$
- $f$ strettamente monotona e biettiva
- $x_0 \in ]a,b[$
- $f$ derivabile in $x_0$ con $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale che $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

la $f^{-1}(x)$ si ottiene ribaltando $f(x)$ rispetto alla bisettrice

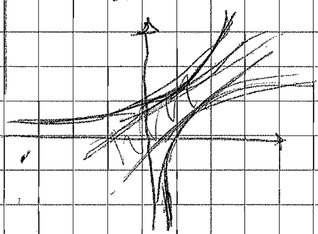



ribalto risp. alla bisettrice




le due rette TG sono ~~bisettrici~~ perpendicolari $\quad m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

($f(x)$ e $f^{-1}(x)$ sono simmetriche alla bisettrice)



ES $f(x) = e^x \quad f: ]-\infty; +\infty[ \to ]0, +\infty[$

$f^{-1}(y) = \ln y \quad f^{-1}: ]0, +\infty[ \to ]-\infty, +\infty[$

$y \in ]0; +\infty[ \qquad x_0 : e^{x_0} = y_0$

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{e^{x_0}} = \dfrac{1}{y_0}$

ES $f: ]0; +\infty[ \to ]0; +\infty[$

$\boxed{f(x) = x^{\alpha}}$ $\qquad \alpha$ (qualsiasi valore)

è derivabile ovunque e $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

$f(x) = x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x}$

$x \longmapsto \alpha \ln x$

$\alpha \longmapsto e^{\alpha \ln x}$

$f'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha \dfrac{1}{x} \cdot x^{\alpha} = \dfrac{\alpha x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

ES $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

ESERCIZIO: CALCOLARE

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x+3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0} f(x)$$

1° METODO (LIMITI NOTEVOLI)

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x} + \frac{3x}{\operatorname{sen}x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}x} + \frac{3x}{\operatorname{sen}x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}_{1} \underbrace{x}_{0} + \frac{3\cancel{x}}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{1}} = 3$$

2° METODO

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 0 \qquad \frac{1}{2}x^2 = o(x)$$

$$o(x^2) = o(o(x)) = o(x)$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + 3x}{x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{3x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x\to0} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3$$

OSSERV.

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \quad \text{lo stesso procedimento non funziona}$$

$f(x)$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\cancel{\frac{1}{2}x^2} + o(x^2) - \cancel{\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$$

non conosco la P.P. quindi non posso calcolare direttamente con il princ. di elim. dei TERM. TRASC.

VEDREMO POI CON GLI SVILUPPI DI TAYLOR CHE

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \frac{1}{24}$$

ES. CALCOLARE LA P.P. di $f(x) = \operatorname{sen}x$ per $x \to \pi$

A) $f(x) \to 0$ quando $x \to \pi$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è UN INFINITESIMO PER $x \to \pi$

B) CONFRONTO $f(x)$ con $(x-\pi)$ in un intorno di $\pi$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)}{(x-\pi)^\alpha} = c$$

Voglio det. $\alpha$ in modo che $c$ sia finito e $c \neq 0$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}x}{(x-\pi)^\alpha} = \lim_{t\to0} \frac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{t^\alpha} = \lim_{t\to0} -\frac{\operatorname{sen}t}{t^\alpha} = -1$$

$t = x-\pi$

$x = t+\pi$

$\alpha = 1$ è l'unico $\alpha$ che rende FINITO IL LIMITE

$\operatorname{sen}(t+\pi) \sim -t \quad t\to0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x) \sim -(x-\pi) \quad x\to\pi$

$\operatorname{sen} x \sim \pi - x$

ALTERNATIVA

$f(x) = \operatorname{sen}x \quad x\to\pi$

$t = x-\pi \quad t\to0$

$f(t) = \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen}t \sim -t$

$$e^{\frac{2x^2}{3x^3+5}} - 1 = \frac{2}{5} x^2 + o(x^2)$$

Voglio calcolare la P.P. di $g(x) = \frac{2x^2}{3x^3+5}$ per $x \to 0$

$g(x) \to 0$ quando $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3x^3+5} \cdot \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3x^3+5} \frac{1}{x^2} = \frac{2}{5}$$

$\alpha = 2$

$$\boxed{e^{f(x)} = 1 + f(x) + o(f(x)) \quad \text{se } f(x) \to 0 \quad x \to x_0}$$

ES calcola la P.P. di

$$e^{\sqrt[3]{1+2x^2}} - e = g(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+2x^2} = 1$ ⚠ $1 \neq 0$ } $\Rightarrow$ non posso applicare diretta. il teorema di prima

$$e \cdot e^{\sqrt[3]{1+2x^2}-1} - e = e\left(e^{\sqrt[3]{1+2x^2}-1} - 1\right) = e\left(\cancel{1} + \sqrt[3]{1+2x^2} - \cancel{1} - 1 + o\left(\sqrt[3]{1+2x^2} - 1\right)\right)$$

$$\sim e\left(\sqrt[3]{1+2x^2} - 1\right)$$

$$\sim e\left((1+2x^2)^{\frac{1}{3}} - 1\right) \quad x \to 0$$

$$\sim e\left(\cancel{1} + \frac{1}{3} 2x^2 - \cancel{1}\right)$$

$$\sim \left(\frac{2}{3} e x^2\right)$$

$$g(x) \sim \frac{2}{3} e x^2 \quad x \to 0$$

$$g(x) = \frac{2}{3} e x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$$

ES calcolare la P.P.

$$h(x) = \log\left(\sqrt{x^2+9}\right) - \log 3 \quad (x \to 0)$$

Ricordiamo che: $\boxed{\log(1+f(x)) = f(x) + o(f(x)) \text{ se } f(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0}$

$$h(x) = \log (x^2+9)^{\frac{1}{2}} - \log 3 = \frac{1}{2}\log(x^2+9) - \log 3 = \frac{1}{2}\left[\log\left[9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\right]\right] - \log 3$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\log 9} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{9}\right) - \cancel{\log 3} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{9}\right)$$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{9} = 0 \qquad \log\left(1+\frac{x^2}{9}\right) \sim \frac{x^2}{9} \quad x \to 0 \qquad h(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{9} = \frac{1}{18}x^2 \quad x \to 0$

$$h(x) = \underbrace{\frac{1}{18}x^2}_{P.P.} + o(x^2) \quad x \to 0$$