NUMERO : 272

DATA : 16/04/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Avitabile

MATERIA : Controllo Sistemi Energetici e Meccanici

Prof. Misul

CONTROLLO dei SISTEMI MECCANICI MERCOLEDÌ 25/02/2009

TESTO:
- MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE, 3° Volume (JACAZIO-PIOMBO) Ed. Levrotto & Bella
- MODERN CONTROL ENGINEERING, PRENTICE HALL

ESAME Orale, data flessibile

DOCENTE daniela.misul@polito.it
antonio.mittica@polito.it n° ufficio 011-090/4442

SISTEMA insieme di oggetti fisici che sono materialmente o idealmente separabili dall'ambiente circostante.

prendo oggetti fisici e li separo o fisicamente o idealmente
Attraverso un'ipotetica LINEA di CONFINE ➡ superficie fisica o ideale
↓ che

può consentire al sistema di scambiare informazioni o energia con l'ambiente ⇒ è l'INTERFACCIA di COMUNICAZIONE tra sistema e amb.
(se SIST ISOLATO non c'è scambio con l'ambiente)

x studiarlo devo costruire un MODELLO (un'astrazione del sistema, una fotografia delle caratteristiche utili al mio studio)

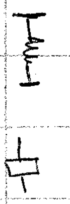
STUDIO SISTEMA ⇒ MODELLO MATEMATICO
set d'equazioni che descrivono comportamento sist

1) Scelgo sistema
2) separo il sist dall'ambiente
3) costruisco un modello x rappresentarlo
4) uso un modello ~~[illegible]~~ matematico x studiarlo

ed matematiche cioè dotate di coefficienti che descrivono i vari eventi che entrano in gioco.

Bisogna stare attenti a non prendere modelli matematici troppo complessi, altrimenti non si è + in grado di calcolare tutti i parametri. Bisogna capire, in base a cosa vogliamo stimare, quali sono i parametri principali

Ho già fatto una semplificazione, ex sospensioni sono state individuate da 2 caratteristiche principali



molla

smorzatore

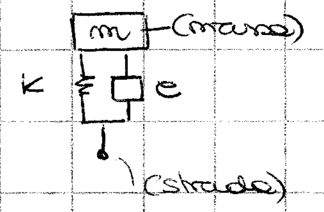
che rappresentano le 2 caratteristiche principali: rigidità, smorzamento viscoso e elasticità

(traslazione orizzontale)

Noto percorso è (∿) così oltre a muoversi verso destra la vettura ruoterà attorno al proprio baricentro (moto rototraslatorio)

x studiare il moto rototraslatorio posso fare un ulteriore semplificazione

(è sufficiente studiare 1 solo ammortizzatore)



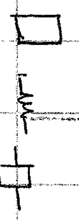
massa è la rappresentazione del baricentro della vettura

(k) = rigidità

(c) = smorzamento viscoso

Tutte le proprietà:

- di massa concentrate in
- di elasticità =
- di viscosità ~~liquidi~~ =



Voglio arrivare ad una rappresentazione a blocchi.

Ingresso: strada (x)

Uscita: come sobbalza la massa, cioè come ruota rispetto al baricentro (y)

(devo capire come massa si comporta se sottoposta all'effetto della strada)

$$\boxed{m\ddot{y} + c(\dot{y}-\dot{x}) + k(y-x) = 0}$$

sistema di equilibrio dinamico

(termine d'inerzia)

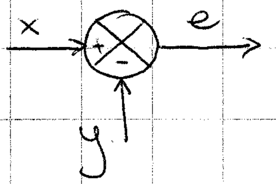
Facciamo rappresentazione a blocchi di questa equazione

SISTEMA AD ANELLO CHIUSO

La variabile controllata (in uscita) viene valutata e confrontata con l'ingresso che così diventa il modello di riferimento

ex. Finché in stanza ho T < 20°C il regolatore funziona.

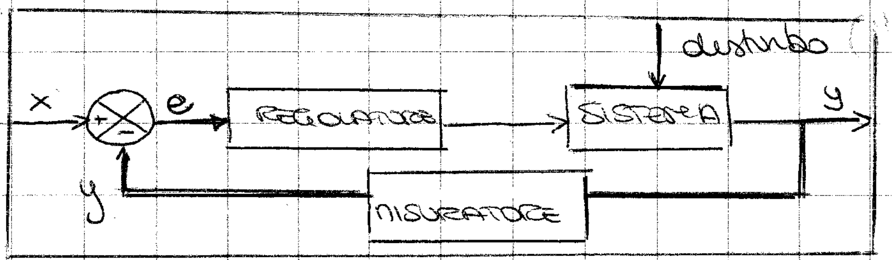
Quando T = 20°C il regolatore si blocca



e = errore tra quello che ho impostato e quello che ho ottenuto

↓

l'errore è la variabile in ingresso del regolatore



Il sistema di regolazione è attivo fintanto che esiste un errore

NOTA! x e y devono essere omogenei x essere confrontate

→ ANELLO DI RETROAZIONE O CONTROREAZIONE

NOTA! in alcuni sistemi anche x può variare nel tempo: in quel caso parlo

SISTEMA APERTO

- Lo si usa quando il fenomeno è fisico affidabile, prevedibile.
- sistema + semplice (lineare) ⇒ + economico
- non può essere usato quando ci sono degli avvenimenti non prevedibili
- non può essere usato quando non ho la certezza che un componente non deriverà nel tempo, cioè manterrà sempre costante la performance

SISTEMI NON LINEARI • Nelle eq. matematiche compaiono con ordini di ~~stato~~ maggiori di 1.

• non vale principio di sovrapp. degli effetti

Venerdì 27/02/2009

PROB. Fenomeno fisico reale non sempre è lineare.

se linearità non è eccessiva è meglio conservare la non linearità

per fare uno studio di prima approssimazione

(poi con elementi finiti, programmi di calcolo faccio studio di 2a

approssimazione). Fin dall'inizio scrivo un set d'equazioni ~~non~~ lineari.

ma alcuni casi reali hanno forti non linearità, non posso linearizzare

↓

si studia il comportamento intorno ad una posizione d'equilibrio

(posso avere n posizioni d'equilibrio) ↓ xké

le grandezze che compongono il sistema variano molto poco in questo intorno di conseguenza

anche le grandezze in uscita variano poco. È come se

facessi una linearizzazione

Questa linearizzazione d'equilibrio deriva da uno sviluppo in

serie (è diversa dal caso prima)

$$\boxed{\begin{array}{l} y = f(x_1, x_2, \dots x_n) \\ x_{10}, x_{20}, x_{n0}, y_0 \end{array}}$$

y, x_i grandezze non lineari

= valore assunto dalle grandezze in condizioni d'equilibrio

Sviluppo l'equazione in equazioni di Taylor (sviluppo in serie)

grandezze centrate

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=x_0} \cdot (x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)_{x_i=x_0} (x_i - x_{i0})^2\right] +$$

(calcolato in cond. d'equilibrio) gradiente della i-esima componente

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{i}\sum_{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{\substack{x_i = x_{i0} \\ x_k = x_{k0}}} (x_i - x_{i0})(x_k - x_{k0})\right]_{i \neq k}$$

4

Dopo la valvola ho caduta di pressione (depressione) xké fluido accelera.

Matematicamente voglio capire da cosa dipende la caduta dip della valvola (Δp)

I PRINCIPIO

l'approccio Lagrangiano: seguo evoluzione masse nello spazio o nel tempo ⇒ sist CHIUSO

" Euleriano: chiudo sistema in V.C. e vedo cosa succede nel VC nel tempo ⇒ sistema aperto - ho scambio di massa)

(ciò che uso)

$$\boxed{\cancel{L_i} = \int_0^1 v\,dp + \Delta E_c + \cancel{\Delta E_w} + \cancel{\Delta E_{g}} + \cancel{L_{wm}}}$$

$L_i = 0$ lavoro che fluido scambia con organi mobili e non ci sono organi mobili

$\Delta E_c \neq 0$ fluido accelera

$\Delta E_{g} = g(z_1 - z_0) = 0$ condotta in piano $z_1 = z_0$

$\Delta E_w = 0$ sistema inerziale

$L_{wm} \neq 0$ fluido viscoso.

ma
Inizio a studiare un caso Ideale ($L_{wm} = 0$)

$$\int_0^1 v\,dp + \Delta E_c = 0$$

FLUIDO INCOMPRIMIBILE ($v = cost = \frac{1}{\rho}$) $\rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$

$$\begin{cases} \int_0^1 v\,dp = v(p_1 - p_0) = \frac{(p_1 - p_0)}{\rho} \\ \Delta E_c = \frac{c_{1id}^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(p_1 - p_0)}{\rho} + \left(\frac{c_{1id}^2 - c_0^2}{2}\right) = 0$$

S

cd = coefficiente del flusso della valvola

$$\dot{m} = \rho \, cd \, A \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

viene caratterizzato a livello sperimentale x ogni valvola (è dato con la valvola)

$$\boxed{\Delta p = \frac{\dot{m}^2}{\rho^2 cd^2 A^2} \frac{\rho}{2} = \frac{\dot{m}^2}{2 \rho cd^2 A^2}}$$

sistema fortemente non lineare (non linearità non trascurabile)

$$\boxed{\Delta p = f(\dot{m}, A(x))}$$

(ρ = cost, cd = cost)

sezione della valvola, che dipende dalla posizione assunta dalla valvola

Devo fare ~~studio in condizioni d'equilibrio~~ x fare la linearizzazione dell'equazione matematica

$$\delta(\Delta p) = \left(\frac{\partial f(\dot{m}, x)}{\partial \dot{m}}\right)_{\dot{m}_0} \delta \dot{m} + \left(\frac{\partial f(\dot{m}, x)}{\partial x}\right)_{x_0} \delta x$$

$$\delta(\Delta p) = \frac{\dot{m}_0}{\rho cd^2 A^2(x_0)} \delta \dot{m} - \frac{\dot{m}_0^2}{\rho cd^2 A^3(x_0)} \cdot \left.\frac{dA(x)}{dx}\right|_{x_0} \delta x$$

ragiono sempre in condizioni d'equilibrio

scrivo questo xkè A dipende da x (sempre in equilibrio), è una cost

a_2 e a_1 sono 2 coefficienti

EQUAZIONE LINEARE (forma lineare)

$$\boxed{\Delta p = a_1 \dot{m} - a_2 x}$$

x = posizione della valvola

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 212

SOLLECITAZIONI TIPICHE DEI TEST (leggi temporali)

- Impulso
- Gradino
- Rampa
- sollecitazione armonica semplice (sen, cos)
- " " periodiche generali
- " " aperiodica

COMPORTAMENTO DEI SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

(risposta nel tempo)

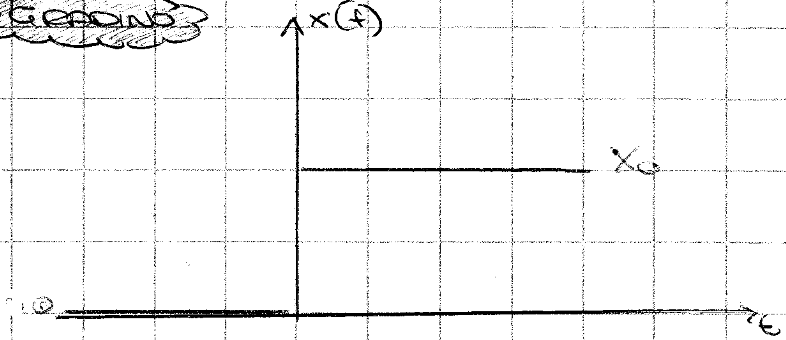
sistema del 1° ordine è riconducibile a

$$\boxed{\tau \dot{y} + y = x}$$

x = ingresso y - uscita

τ = costante

GRADINO



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ x_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = y_T(t) + y_R(t)}$$

$y(t)$ la risposta che mi aspetto

$y_T(t)$ risposta di transitorio

$y_R(t)$ risposta di regime

lo ottengo risolvendo $\tau \dot{y} + y = 0$

(omogenea associata)

Risolvo omogenea associata ($y_T(t)$)

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = 0$$

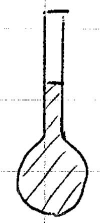
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{\tau} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln y = -\frac{t}{\tau} + \underset{\varepsilon}{\underline{\text{cost}}}$$

(cost d'integrazione)

7

dinamicamente posto.

ESEMPIO: Termometro a bulbo di mercurio



Hp (semplificazioni)

① trascuriamo dilatazioni termiche dell'involucro

② Approccio ~~euleriano~~ lagrangiano (seguo evoluzione mercurio nello spazio e nel tempo)

I PRINCIPIO

$$\boxed{dQ_e + d\cancel{L}_s = dU + d\cancel{E_c} + dE_{gr} + d\cancel{E_w}}$$

lavoro che sistema scambia con le forze di superficie sul suo contorno

$dE_w = 0$ sistema ~~fisso~~ inerziale

$dE_{gr} \simeq 0$ $z_1 \simeq z_2$

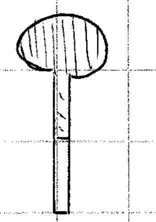
$dE_c \simeq 0$ considero condizioni di quiete in partenza e alla fine

$dL = 0$ capillare è sottovuoto, ho spostamento ma non pressione

$$\boxed{dQ_e = dU}$$

MERCOLEDÌ 04/03/2009

ESEMPIO: TERMOMETRO A BULBO



- grande bulbo
- piccolo capillare

$$\boxed{dQ_e = dU = dU_r + \cancel{dU_{ch}}}$$

convezione dalla parte < aria / liquido + conduzione della parete

Hp: parete è così sottile che posso trascurare l'effetto conduttivo e considero solo la convezione tra mercurio nel bulbo e aria esterna (ad x ragioni di scala)

(1) $\boxed{h\, S\, (Ta - Tb)\, dt} = dQe$

- h: coefficiente di scambio termico
- S: superficie di scambio termico
- $(Ta - Tb)$: variazione di temperatura tra aria (a) e mercurio (b)

(2) $\boxed{dU_{(\text{liquido})} = m_b\, c_b\, dT_b}$

- m_b: massa mercurio
- c_b: ~~capacità~~ capacità termica massica del mercurio
- dT_b: variazione temperatura del mercurio

Ingresso
(x) = Testerna ⇒ $\boxed{x(t) = Ta}$

Uscita
(y) = livello del mercurio ⇒ $\boxed{y(t) = Tb}$

$$\boxed{h\, S\, (Ta - Tb)\, dt = mb\, c_b\, dTb}$$

$\boxed{\tau \dot{y} + y = x}$ Ingresso {τ = costante di tempo}

$mb\, cb\, \dfrac{dTb}{dt} + hSTb = hSTa$ divido tutto per hS

$$\boxed{\frac{m_b cb}{hS}\,\frac{dTb}{dt} + Tb = Ta}$$

SISTEMA è nella FORMA CANONICA ASSUNTA dai sistemi del primo ordine

$$\tau = \frac{m_b \cdot cb}{hs}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = j\omega\, y_0 e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\tau\left(j\omega y_0 e^{j\omega t}\right) + y e^{j\omega t} = x_0 e^{j\omega t}}$$

$\boxed{x_0 ; \omega, \tau \text{ noti}}$

↳ dipendono da come è sollecitato il termometro

$$y_0 (1 + j\omega\tau)\cancel{e^{j\omega t}} = x_0 \cancel{e^{j\omega t}}$$

AMPIEZZA

$$\boxed{y_0 = \frac{x_0}{(1 + j\omega\tau)}}$$

Ampiezza della risposta in termini complessi

Visto che non è agevole lavorare con i numeri complessi, x ciò ~~ragionamento~~ così da ragionare in termini di modulo e fase:

$$y_0 = \frac{x_0 (1 - j\omega\tau)}{(1 + j\omega\tau)(1 - j\omega t)} = \frac{x_0(1 - j\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} = \underbrace{\frac{x_0}{1 + (\omega t)^2}}_{Re} - j \underbrace{\frac{x_0 \omega\tau}{1 + (\omega t)^2}}_{Im}$$

$1 - \cancel{j\omega\tau} + \cancel{j\omega\tau} - j^2\omega^2\tau^2 = 1 + \omega^2 t^2$

modulo $|y_0| = \sqrt{Re(y_0)^2 + Im(y_0)^2}$

Fase $\phi_{y_0} = \operatorname{arctg}\left[\frac{Im(y_0)}{Re(y_0)}\right]$

$$|y_0| = \sqrt{\frac{x_0^2 (1 + (\omega\tau)^2)}{(1 + (\omega\tau)^2)^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \qquad f(x_0)$$

$$\phi_{y_0} = \operatorname{arctg}(-\omega\tau) \quad \left(\frac{-x_0 \omega\tau}{x_0}\right) \qquad f(x_0)$$

la fase e la frequenza con cui balla il mercurio dipendono da come com'è la sollecitazione impressa.

2

Se il termometro non fosse misurare ~~per~~ un ingresso ma un $\boxed{\text{disturbo}}$ e io voglio cercare di avere il $\boxed{\text{minor disturbo}}$ possibile devo considerare la parte del grafico che va a ω_0

⇒ voglio τ > maggiore così da avere un termometro grande e poco sensibile ad disturbo. Ora definisco un τ_{min} tale x cui il mio termometro non misuri il disturbo. *

⇒ sistemi lineari vengono usati :

- x misurare le variazioni delle basse frequenze
- filtro x tagliare le ~~basse~~ frequenze i disturbi ⇒ a basse frequenze

lavora solo con alte o basse frequenze

▪ mentre quando voglio misurare l'ingresso devo avere un termometro il + sensibile possibile alle ΔT ⇒

vorrei che x_0 e y_0 fossero confrontabili e sovrapponibili

$$\left(\frac{y_0}{x_0} = 1\right)$$

stabilisco poi un margine d'errore cioè quanto posso discostarmi

↳ quindi una banda ammissibile di frequenze (τ_{max})

da $\frac{y_0}{x_0} = 1$ e in base a quello posso stabilire una τ_{max}

↑ più preciso è il margine d'errore

⇒ minore è il margine d'errore più alti sono i costi x ché più mi avvicino a termometro ideale. ($y_0/x_0 = 1$)

rilievo = basse frequenze
filtro = alte frequenze

ma questo ragionamento lo faccio considerando solo il modulo e non la fase

Ricostruiamo un grafico x la fase

invece con τ grandi

{ tagliano basse frequenze
quindi termometro non sensibile al disturbo

funzione oggetto indagine → calcolo classico → soluzione
(nel dominio del tempo)

questo procedimento può essere complesso x funzioni di ordine superiore a 1
portano funzione oggetto dal dominio del tempo al dominio complesso e
tutto nel dominio immagine

funzione oggetto → trasformo → funzione immagine → calcolo semplice nel dominio dell'immagine
↓
Soluzione Immagine

SCHEMA COMPLETO:

$$\begin{tikzcd}
\text{funz. oggetto} \arrow[r] \arrow[d] & \text{calcolo classico} \arrow[r] & \text{soluzione} \\
\text{trasformazione (trasformata di Laplace)} \arrow[d] & & \text{antitrasformazione} \arrow[u] \\
\text{funz. immagine} \arrow[r] & \text{calcolo semplice} \arrow[r] & \text{soluzione immagine} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

dominio t

dominio IM

TRASFORMAZIONE $\xrightarrow{\text{con}}$ TRASFORMATE DI LAPLACE

(trasformano eq. differenziali in eq algebriche)

— — → tratteggio xkè non so se ho interesse a fare l'antiT

xkè non è detto che mi interessi la legge temporale

passo dal dominio tempo → dominio immagine

TRASFORMAZIONI DI LAPLACE

operatore matematico che mi fanno trasformare un' eq.
differenziale di ordine n in eq. algebriche

$f(t)$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(t) \neq 0 \quad T \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad T < 0 \end{array}\right\}$ funzione definita in un intervallo temporale

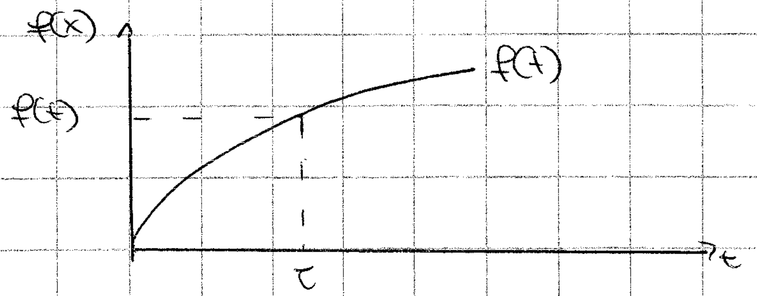
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 212

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)}}$$

Noi usiamo sempre posizioni iniziali nulle x il nostro sist. $\begin{cases} \sum \dots = 0 \\ f(0^+) = 0 \end{cases}$

③ $$\boxed{\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}}$$

④



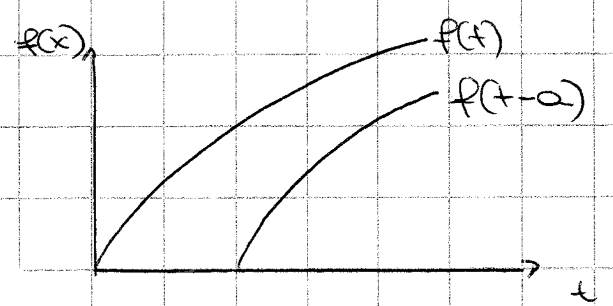
$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

cambio la scala e ho $f(t/a)$

se $\frac{t}{a} = \tau \Rightarrow \underbrace{t = a\tau}_{\text{SCALO LA MIA FUNZIONE}}$ allora $f(t) = f(t/a)$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t/a)] = a\,F(a \cdot s)}$$

⑤



$f(t-a)$ è spostato verso destra di una quantità a

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}\,F(s)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 212

VENERDÌ 06/03/09

(23)

Abbiamo studiato un sistema del I ordine $\boxed{\tau \dot{y} + y = x}$. Studiare il sistema in forma di derivata può non essere semplice.

⇒ utilizziamo la TRASFORMATA DI LAPLACE

Dobbiamo avere un ingresso:

Ingresso a gradino $\quad x(t) = 0 \quad t < 0$

$\quad x(t) = x_0 \quad t \geq 0$

Trasformo l'equazione nel dominio immagine:

$$\mathcal{L}\left[\tau \frac{dy}{dt} + y\right] = \mathcal{L}(x)$$

$\mathcal{L}$ = trasformata di laplace

$$\tau \, \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[x(t)]$$

Linearità delle trasformat

\ regola derivata

$$\tau s \, y(s) + y(s) = \frac{x_0}{s}$$

dalle tavole $\left\{ \mathcal{L}[x(t)] = \frac{x_0}{s} \right\}$

dove $y(s)$ = trasformata di laplace di quello che sto cercando = risposta nel dominio ~~del tempo~~ immagine del nostro problema

$$\boxed{y(s) = \frac{x_0}{s} / (1 + \tau s)}$$

Non applichiamo l'antitrasformata, perché la definizione è troppo pesante. Cerco sulle tavole:

poo $x_0 \cdot$ per $\frac{1}{\tau}$

$$y(s) = x_0 \frac{1/\tau}{s\,(s + 1/\tau)} = x_0 \frac{a}{s(s+a)} \quad (2.12) \quad a = \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = x_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI 06/03/09

(24)

No dobbiamo imporre nessuna condizione al contorno. Come vediamo il comportamento a REGIME?

DOMINIO IMMAGINE
$$y(s) = \frac{\frac{x_0}{s}}{1+\tau s}$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,y(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{x_0}{(1+\tau s)s} = x_0$$

valore di regime

mi individua il valore finale della funzione, che, quando l'ingresso è a gradino, è il valore di regime!

A regime la funzione si porta a x_0

Quindi i SISTEMI del I ORDINE li consideriamo come

$$\boxed{\tau s\,y(s) + y(s) = x(s)}$$ ← SISTEMA DEL PRIMO ORDINE

$$\boxed{y(s) = \frac{x(s)}{1+\tau s}}$$ ← RISPOSTA DEL SISTEMA nel dominio Immagine A UN GENERICO INGRESSO

Si definisce
$$\boxed{\frac{y(s)}{x(s)} = G(s) = \frac{1}{1+\tau s}}$$

G(s) = FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
= rapporto tra la trasformate di laplace in uscita e quella in ingresso
= come risponde il sistema nel dominio immagini

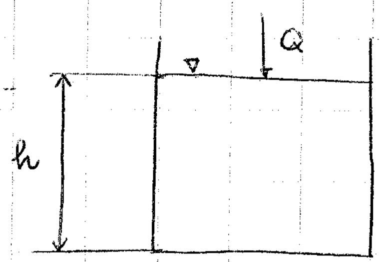
GUADAGNO STATICO = funzione di trasferimento calcolata in $s=0$

in un sistema del I ordine
$$\boxed{G(s_0) = \left.\frac{1}{1+\tau s}\right|_{s=0} = 1}$$
SIST 1° ORD.

= rapporto tra l'ampiezza dell'uscita e l'ampiezza dell'ingresso per una sollecitazione a gradino → in condizioni statiche, dopo il transitorio, un sistema del I ordine si porta a regime !!

ESERCIZIO 1

serbatoio con un pelo libero, ad altezza : h . Q è la portata in volume immessa nel serbatoio



Q fa cambiare l'altezza del pelo libero ⇒ ho un sistema che ha in ingresso Q e in uscita h

$Q\,dt$ = volume nell'unità di tempo che introduco

$A\,dh$ = variazione della sezione nel serbatoio

$Q\,dt = A\,dh$;

$A \frac{dh}{dt} = Q$;

USCITA INGRESSO

$\rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} Q}$

$h(s) = y(s)$
$Q(s) = x(s)$

Applico la trasformata di Laplace

$$s\,h(s) = \frac{1}{A} Q(s)$$

$$\frac{h(s)}{Q(s)} = G(s) = \frac{1}{As}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$\frac{1}{s}$ = integrale ; BLOCCO INTEGRALE : la funzione integra la portata in ingresso in livello

$$Q(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{As}} \rightarrow h(s)$$

ALGEBRA A BLOCCHI :

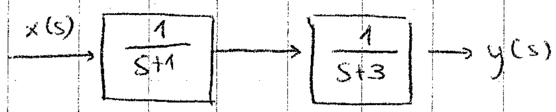
(26)

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI 06/03/09

ALGEBRA A BLOCCHI

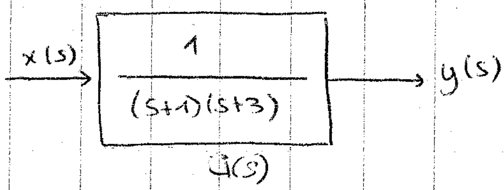
All'interno di ogni blocco ho una funzione di trasferimento (= equazione in s)

esempio algebra a blocchi

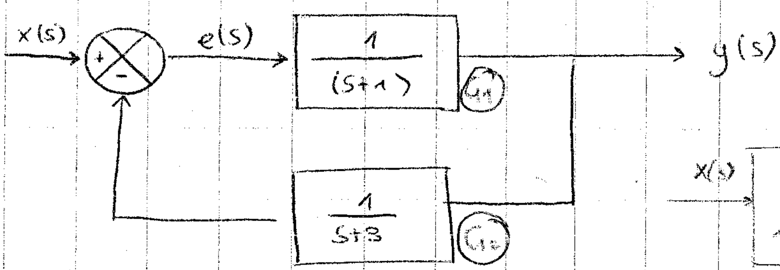


Voglio ricavare la funzione di trasferimento $\frac{y(s)}{x(s)} = G(s)$

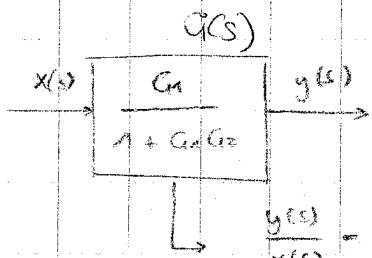
$X(s) \cdot \frac{1}{(s+1)(s+3)} = y(s)$



esempio



(SCHEMA 1) forse



~~volendo~~ le tavole

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3}}$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = G(s)$$

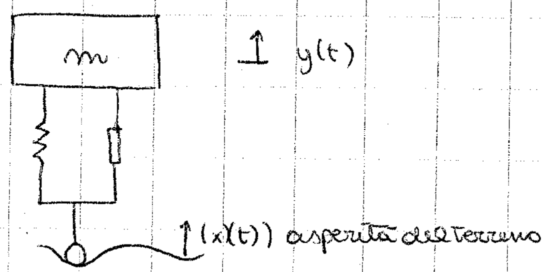
se non ho le tavole:

$$\begin{cases} x(s) - y(s)\frac{1}{s+3} = e(s) \\ e(s)\frac{1}{s+1} = y(s) \end{cases} \rightarrow \left[x(s) - y(s)\left(\frac{1}{s+3}\right)\right]\frac{1}{s+1} = y(s) ;$$

$$y(s)\left[1 + \frac{1}{s+3} \cdot \frac{1}{s+1}\right] = x(s)\frac{1}{s+1} ;$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+3}}$$

Torniamo all'esempio degli ammortizzatori



m = massa concentrata

$$m\ddot{y} + c(\dot{y}-\dot{x}) + k(y-x) = 0$$

$$\underbrace{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky}_{\text{USCITE}} = \underbrace{c\dot{x} + kx}_{\text{INGRESSI}}$$

Usiamo le trasformate:

$$m s^2 y(s) + c s y(s) + k y(s) = c s x(s) + k x(s)$$

$$(m s^2 + cs + k)\, y(s) = (cs + k)\, x(s)$$

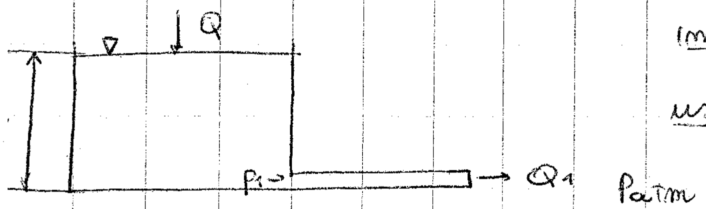
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $\dfrac{y(s)}{x(s)} = \dfrac{(cs+k)}{ms^2+cs+k} = G(s)$

Posso scrivere un unico blocco in cui metto la f. di trasferimento

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI 06/03/09

(28)

ESERCIZIO 2



Ingresso : portata in ingresso

uscita : pelo libero

↓

c'è inoltre della portata Q_1 che esce

Q_1 dipende { dalla sezione / dalla pressione p_1 }

R = RESISTENZA IDRAULICA { tipo di fluido / sezione del condotto / numero di Reynolds }

$$\boxed{Q_1 = \frac{(P_1 - P_a)}{R}} \quad (1)$$

$$\boxed{(Q - Q_1)\,dt = A\,dh} \quad (2)$$

↓ ho un ≠ ingresso

manca un'equazione per definire P_1

Volume in uscita nell'unità di tempo

$$\boxed{(P_1 - P_a) = \rho g h} \quad (3)$$

(1) 2) 3) $\left(Q - \frac{\rho g h}{R}\right) dt = A\,dh$; $Q - \frac{\rho g h}{R} = A \frac{dh}{dt}$;

$$\boxed{Q = A \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g}{R} h}$$

SISTEMA DEL I ORDINE $(\tau \dot{y} + y = x)$

↓ $\times R/\rho g$

$$\underbrace{\frac{AR}{\rho g} \frac{dh}{dt} + h}_{\text{USCITE}} = \underbrace{\frac{R}{\rho g} Q}_{\text{INGRESSI}}$$

(moltiplichi per $\frac{R}{\rho g}$)

$$\frac{RA}{\rho g} s h(s) + h(s) = \frac{R}{\rho g} Q(s) \Rightarrow h(s)\left(1 + \frac{RA}{\rho g} s\right) = Q(s) \frac{R}{\rho g}$$

$h(s) \to Y(s)$; $Q(s) \to X(s)$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{h(s)}{Q(s)} = \frac{R/\rho g}{\left(\frac{AR}{\rho g} s + 1\right)} = G(s) \qquad \tau = \frac{AR}{\rho g}$$

* Riscopre

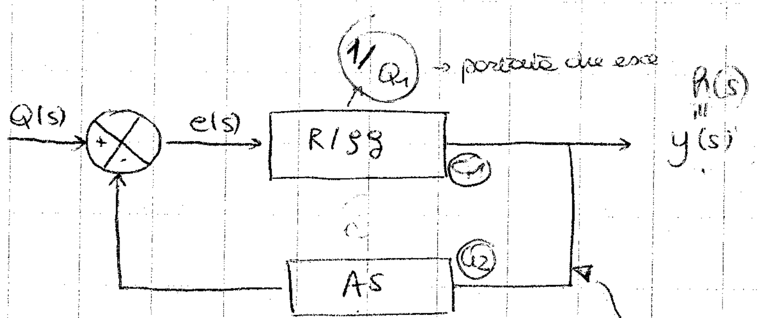
(τ) la costante di tempo del sistema è legata alla capacità di filtrare o meno un disturbo oppure alla velocità di risposta. In questo caso τ è legata alla SEZIONE: serbatoio molto stretto amplifica l'effetto e risponde molto velocemente. $\Rightarrow$ A piccola

?

$$Q(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow h(s)$$

SCHEMA 11

$$G(s) = \frac{G_1}{G_1 G_2 + 1} \qquad G_1 = R/\rho g \qquad G_2 = A s$$



la portata che entra modifica quella che esce in dipendenza del livello e della pressione (sistema a retroazione)

(As) $\left(\frac{R}{\rho g}\right)$

una struttura a blocchi più complicata mette in luce la dipendenza delle variabili, ovvero come l'una influenza l'altra

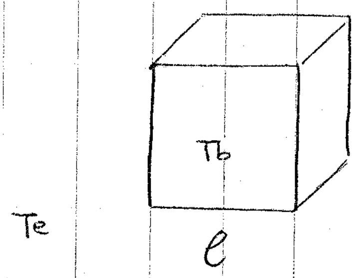
aumentando la pressione (p_1) aumenta la portata in uscita (Q_1) si abbassa il pelo libero $\Rightarrow$ p_1 si abbassa (RETROAZIONE)

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI

8 (30)

ESERCIZIO 3

ho un blocco di acciaio



$\ell = 10$ cm

$\rho = 7.87$ kg / dm^3

coefficiente di scambio termico convettivo

$h = 15$ W/m^2 K

$c = 0.12$ kcal / Kg K (capacità termica massica)

τ ? FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ?

riceve calore dall' esterno per effetto convettivo. Trascuriamo le gradienti di temperatura del blocchetto

come termometro

INGRESSO T_e

USCITA T_b

$dQ = dU$

$$\begin{cases} \underbrace{hS(T_e - T_b)\,dt}_{dQ} = \overbrace{mc\,dT_b}^{dU} \qquad \overset{S}{6h\ell^2}(T_e - T_b)\,dt = \overset{m}{\rho\ell^3}c\,dT_b \\ 6h(T_e - T_b)\,dt = \rho\ell c\,dT_b \end{cases}$$

$(\tau \dot{y} + y = x)$ TEORI.

T_a = ambiente

T_c = cubetto

(Vedi termometro)

$hS(T_a - T_c)\,dt = m_c c\,dT_c$

$hS\,(T_a - T_c) = m_c c \dfrac{dT_c}{dt}$

(superficie) $S = \ell^2\, 6$

$m_c = \rho\,\ell^3$

$$\frac{m_c \cdot c}{hS} \cdot \frac{dT_c}{dt} + T_c = T_a \qquad (\tau \dot{y} + y = x)$$

$\parallel$

$\tau = 4392{,}51\ s \rightarrow > 1\ h$ me lo aspetto perché ho messo un cubetto di acciaio all' aria per riscaldarlo $\rightarrow$ impiega molto tempo

TRASF LAPLACE $\dfrac{m_c\, c}{hS}\, sT_c(s) + T(s) = T_a(s)$

$$\left(\frac{m_c\, c}{hS} \cdot s + 1\right) \underset{Y(S)}{T_c(s)} = \underset{X(S)}{T_a(s)}\ ; \qquad \frac{T_c(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{1 + \frac{m_c}{hS} \cdot s} = G(s)$$

$\tau s\, T_c(s) + T_c(s) = T_a(s)$

SEMPRE PER UN SISTEMA DEL I ORDINE !

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}}$$

$$\tau = \frac{m \cdot c}{h\, S} = \frac{\rho\, l^3 c}{h\, S} = \frac{7.87 \times 10^{-3} \cdot (10^{-2})^3 \cdot 502.416}{15 \cdot (10^{-2})^2} =$$

$$\rho = 7.87 \frac{kg}{dm^3} \times \frac{1\, dm^3}{10^3\, m^3} = 7{,}87 \times 10^{-3} \frac{kg}{m}$$

$$l = 10\ cm = 10^{-2}\ m$$

$$h = 15 \frac{W}{m^2}\ K$$

$$c = 0.12 \frac{kcal}{kg\ K} = 0.12 \cdot \underbrace{4{,}1868}\ \frac{kJ}{kg\,K} = 502{,}416 \frac{J}{kg\,K}$$

$$\tau\ [sec] = \frac{\left[\frac{kg}{m}\right] \cdot [m]^3 \cdot \left[\frac{J}{kg\, K}\right]}{\left[\frac{W}{m^2}\right] K\ [m]^2} = [sec]$$

$$\left[\frac{W}{m^2}\right] \rightarrow \left[\frac{J}{s\, m^2}\right]$$

MERCOLEDÌ 11/03/09

32 Piva

Possiamo sottoporre il nostro sistema del I ordine a un ingresso di tipo ARMONICO e applichiamo la trasformata

$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$

$\tau \dot{y} + y = x$

$y(s)(1+\tau s) = x(s)$ FUNZ. TRASFERIMENTO

$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ FUNZ. ~~GUADAGNO~~

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \sin(\omega t) \\ y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Se individuiamo y_0 e Φ, troviamo univocamente la risposta. se al posto di s:

$\boxed{s = J\omega}$

Riscrivo $G(J\omega)$ È possibile dimostrare:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= x_0 \, |G(J\omega)| \\ \varphi &= \arg[G(J\omega)] \end{aligned}}$$ (argomento)

y_0 e φ li trovo scrivendo la FUNZIONE di TRASFERIMENTO COMPLESSA

perché $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overbrace{Im[G(J\omega)]}^{\text{immaginaria}}}{\underbrace{Re[G(J\omega)]}_{\text{reale}}}$

$|G(J\omega)| = \frac{y_0}{x_0}$ GUADAGNO TOTALE / DEL SISTEMA = quanto guadagna il sistema in termini di ampiezza

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \longrightarrow G(\omega J) = \frac{1}{1+J\omega\tau} \cdot \frac{1-J\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} = \underbrace{\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}}_{Re} - J\underbrace{\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}}_{Im}$$

$$y_0 = x_0 \, |G(\omega J)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} x_0 = x_0 \sqrt{\frac{1}{(1+(\omega\tau)^2)^2} + \frac{(\omega\tau)^2}{(1+(\omega\tau)^2)^2}} \quad x_0 \sqrt{\frac{\cancel{1+(\omega\tau)^2}}{[1+(\omega\tau)^2]^2}}$$

$$\varphi = \arg[G(J\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{Im[G(J\omega)]}{Re[G(J\omega)]} = \operatorname{arctg}(-\omega\tau)$$

$$= \operatorname{arctg}\left[-\frac{\omega\tau}{\cancel{(1+(\omega\tau)^2)}} \cdot \cancel{(1+(\omega\tau)^2)} \right]$$

DIAGRAMMA DI BODE si rappresentano le risposte

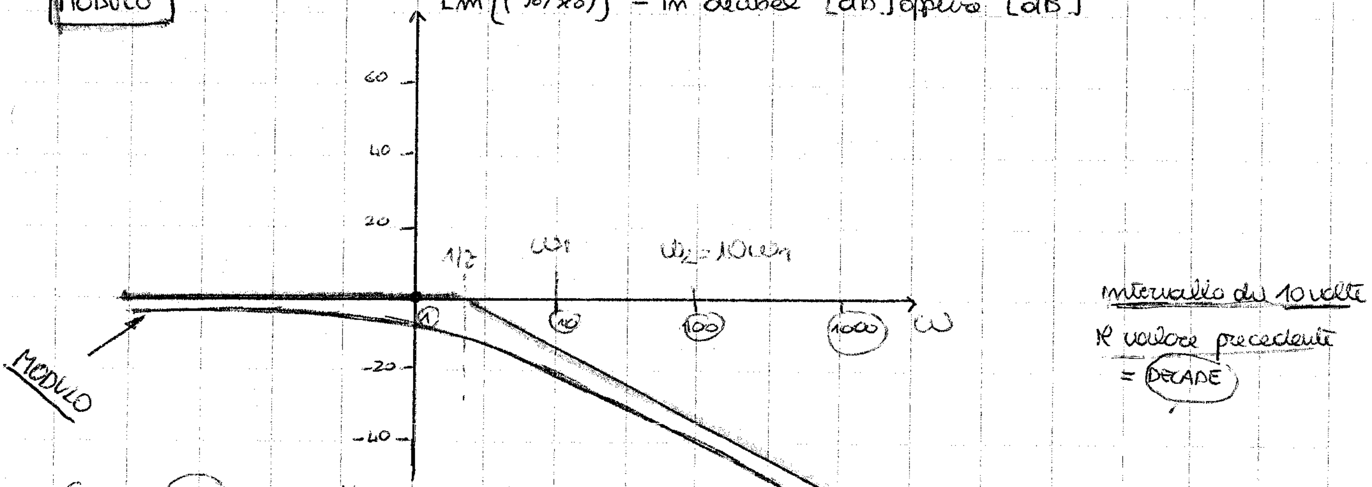
- diagramma per modulo
- diagramma per fase

} sono in scala logaritmica in ascissa

Il modulo è espresso in decibel $\boxed{m = 20 \log_{10} [db]}$

Per la fase si adotta una scala lineare

MODULO



-20 db/dec

Scrivo Lm per adimensionalizzare

MODULO:

$$\boxed{y_0/x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}} \quad (1)$$

si fa lo studio asintotico:

- $\boxed{\omega\tau \ll 1}$ = frequenze molto basse : $\omega\tau$ è trascurabile rispetto a 1

$\frac{y_0}{x_0} \sim 1$ → in scala logaritmica $\boxed{20 \log_{10} 1 = 0}$

ho individuato l'asintoto di bassa frequenza ——

- $\boxed{\omega\tau \gg 1}$ = frequenze molto alte : 1 è trascurabile rispetto a $\omega\tau$

$\frac{y_0}{x_0} \sim \frac{1}{\omega\tau}$ → in decibel $\boxed{Lm\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = 20 \log \frac{1}{\omega\tau} = -20 \log_{10} (\omega\tau)}$

ho individuato l'asintoto di alta frequenza ——

- è una retta con $\boxed{\text{pendenza negativa}}$ perché:

prendo due valori estremi di una decade

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI

3 11/03/09 34

$\omega = \omega_1 \qquad -20 \log_{10}(\omega_1 \tau) = Lm(y_0/x_0)_{\omega_1}$

$\omega = \omega_2 = 10\omega_1 \qquad -20 \log_{10}(10\omega_1 \tau) = Lm(y_0/x_0)_{\omega_2}$

ω_1 e ω_2 sono gli estremi di una decade

↓

ordinate degli estremi di una decade

Se faccio la differenza tra le due ordinate, vedo quanto ha "perso" (pendenza) la retta nella decade (sto controllando che la pendenza sia negativa):

$Lm(y_0/x_0)|_{\omega_2} - Lm(y_0/x_0)|_{\omega_1} = -20 \log_{10}(\underbrace{10\omega_1}_{\omega_2}\tau) - (-20 \log_{10}(\omega_1\tau)) =$

$= -20 \log_{10}\left(\frac{10\omega_1\tau}{\omega_1\tau}\right) = -20 \log_{10} 10 = -20 \text{ db}$

↳ ho preso gli estremi di una decade

la retta decresce con una pendenza di -20 db per decade

↓

ciò vale x sistemi del 1° ordine

la frequenza, alta o bassa, dipende da τ

BASSA FREQUENZA: $\omega\tau \ll 1 \rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau}$; ALTA FREQUENZA: $\omega\tau \gg 1 \rightarrow \omega \gg \frac{1}{\tau}$ [valore discriminante $\frac{1}{\tau}$]

se $\omega\tau = 1 \rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\tau}} \rightarrow y_0/x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1) - taglio [illegible] -

↓

FREQUENZA DI TAGLIO = caratterizza il sistema perché dipende da τ. Si chiama di taglio perché "taglia" due campi di esistenza:

- basse frequenze
- alte frequenze

convenzionalmente i due asintoti si incontrano nella frequenza di taglio

Altro problema per disegnare la funzione reale: è sopra o sotto gli asintoti?

Prendo un punto che ho calcolato e controllo $(1/\sqrt{2})$ $\left| Lm(y_0/x_0) = 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \text{ db} \right.$ ← è sotto

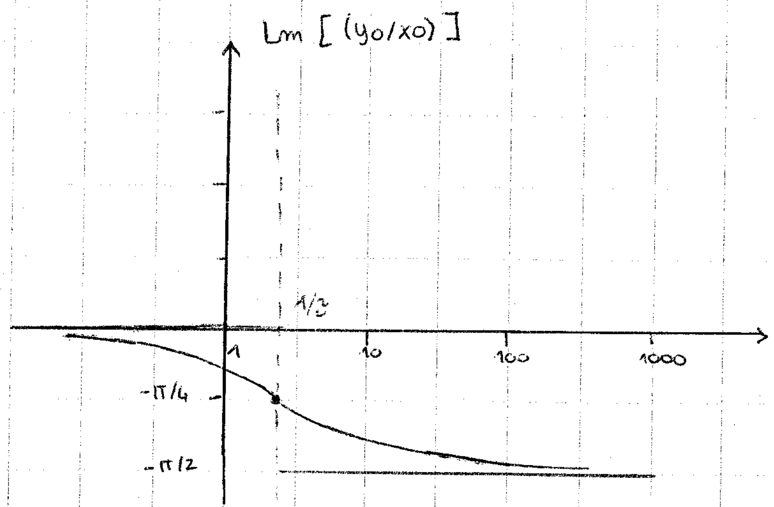
Se torniamo all'esempio del termometro:

- a basse frequenze segue bene gli ingressi armonici $Y_0/X_0 = 1$
- ad alte frequenze: il termometro taglia l'uscita, cioè la risposta è sempre più piccola, l'ampiezza dell'uscita è più piccola (infatti $Lm \to -\infty$ e quindi in scala lineare $\to 0$)

Questo tipo di comportamento è detto FILTRO PASSA BASSO

FASE

conviene mettere il diagramma sotto quello del modulo, perché bisogna ragionare contemporaneamente su modulo e fase



$\varphi = \arctg(-\omega\tau)$

- $\boxed{\omega\tau \ll 1}$ $\varphi \to 0$ ASINTOTO DI BASSA FREQUENZA
- $\boxed{\omega\tau \gg 1}$ $\varphi \to -\pi/2$ ASINTOTO DI ALTA FREQUENZA
- $\boxed{\omega\tau = 1}$ $\varphi = -\pi/4$ FREQUENZA DI TAGLIO

la risposta in fase non ha sfasamento per frequenze molto basse ($\varphi = 0$)

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI

5 11/03/09 36

GENERALIZZAZIONE

$$G(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$n \neq m$; mi posso sempre ricondurre a una scrittura di questo tipo.

K = termine di guadagno

z_i = ZERO = valore che azzera la funzione

p_i = POLO = valore che annulla il denominatore → punto critico (singolarità)

Passando alle variabili complesse:

$$G(\omega j) = K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\cdots(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - z_n)}$$

Consideriamo ciascuna parentesi: è un numero complesso con un modulo e una fase

$$(j\omega - z_1) = |(j\omega - z_1)| e^{j a_1}$$
$$(j\omega - p_1) = |j\omega - p_1| e^{j \beta_1}$$

a_i = fase al numeratore

β_i = fase al denominatore

$$G(\omega j) = K \frac{|(j\omega - z_1)| e^{j a_1} \cdot |(j\omega - z_2)| e^{j a_2} \cdot \ldots \cdot |(j\omega - z_m)| e^{j a_m}}{|(j\omega - p_1)| e^{j\beta_1} \cdot |(j\omega - p_2)| e^{j\beta_2} \cdot \ldots \cdot |(j\omega - p_n)| e^{j\beta_n}}$$

Raccolgo i moduli

$$\boxed{G(\omega j) = K \frac{|(j\omega - z_1)||(j\omega - z_2)|\cdots|(j\omega - z_m)|}{|(j\omega - p_1)||(j\omega - p_2)|\cdots|(j\omega - p_n)|} \cdot \frac{e^{j(a_1 + a_2 + \cdots a_m)}}{e^{j(\beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n)}}}$$

$$|G(\omega j)| = K \frac{|j\omega - z_1|\,|j\omega - z_2| \cdots |j\omega - z_m|}{|j\omega - p_1|\,|j\omega - p_2| \cdots |j\omega - p_n|}$$ MODULO

$$\arg\left[G(\omega j)\right] = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n)$$ FASE

Il modulo deve essere rappresentato in scala decibel:

$$\boxed{20\log_{10}\left[|G(\omega j)|\right] = 20\log_{10}|j\omega - z_1| + \dots + 20\log_{10}|j\omega - z_m| + -\left(20\log_{10}|j\omega - p_1| + \dots + 20\log_{10}|j\omega - p_n|\right) + K}$$

sfrutto le proprietà dei logaritmi

la risposta sul diagramma di Bode è la somma dei singoli componenti

Studio i singoli componenti e poi li sommo

ESEMPIO

$$\boxed{G(s) = \overset{4)}{K} \frac{\overset{1)}{(1 + \tau_a s)}}{\underset{3)}{s}\,\underset{2)}{(1 + \tau_b s)}}}$$

$\tau_a > \tau_b$

- ZERI : $1 + \tau_a s$
- POLI : s ; $(1 + \tau_b s)$

Dobbiamo considerare le singole funzioni

1) $1 + \tau_a s \rightarrow 1 + j\omega\tau_a$

$|(1 + j\omega\tau_a)| = \sqrt{1 + (\omega\tau_a)^2}$ MODULO

$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega\tau_a)$ FASE

MODULO

$\boxed{\omega\tau_a << 1}$ $|(1 + j\omega\tau_a)| \sim 1 \rightarrow Lm[|1 + j\omega\tau_a|] \sim 0$ ASINTOTO BASSA FREQUENZA

$\boxed{\omega\tau_a >> 1}$ $|(1 + \omega j\tau_a)| \sim \omega\tau_a \rightarrow 20\log_{10}(\omega\tau_a)$ ASINTOTO ALTA FREQUENZA

↳ retta, pendenza positiva = +20 dB/decade

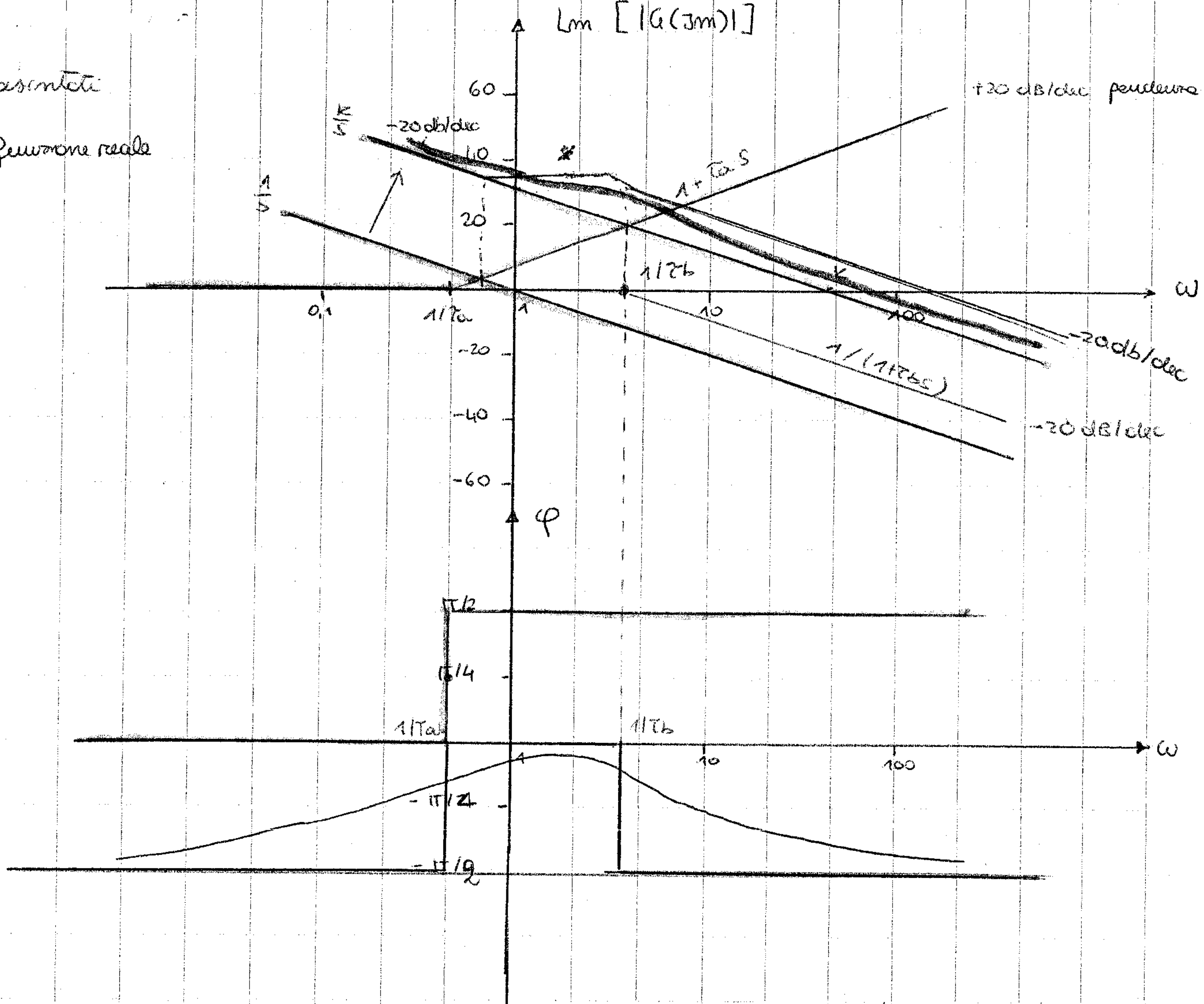
$\boxed{\omega\tau_a = 1}$ $|(1 + \omega j\tau_a)| = \frac{1}{\tau_a}$

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI

7 11/03/09 38

— asintoti

— funzione reale



$\tau_b > \frac{1}{k}$ $\tau_a < k$

$\frac{1}{\tau_b} < k$

$$\boxed{\tau_a > \tau_b \leftrightarrow \frac{1}{\tau_a} < \frac{1}{\tau_b} < k}$$ Hp

rimango costante perché metto insieme una retta che decresce e una retta che cresce con pendenza opposta

Il guadagno del sistema non ha influenza sul diagramma della fase (se vario il primo diagramma il secondo non cambia)

FASE

- $\boxed{\omega \tau_a \ll 1}$ $\quad \varphi \to 0$ ASINTOTO BASSE FREQUENZE
- $\boxed{\omega \tau_a \gg 1}$ $\quad \varphi \to \pi/2$ ASINTOTO ALTE FREQUENZE
- $\boxed{\omega \tau_a = 1}$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ FREQUENZA DI TAGLIO

Non traccio gli andamenti reali di modulo e fase perché al momento non mi interessano, dato che sto studiando le singole funzioni per poi sommarle

2) $\dfrac{1}{1 + j\omega\tau_b}$ dovrei fare di nuovo lo studio asintotico. Provo invece a ragionare

$$\left|\frac{1}{1+j\omega\tau_b}\right| = \frac{1}{|1+j\omega\tau_b|}$$

MODULO $\left\{ 20 \log_{10} \left|\frac{1}{1+j\omega\tau_b}\right| = -20 \log_{10} |1+j\omega\tau_b| \right.$

FASE $\left\{ \arctg \left(\frac{1}{1+j\omega\tau_b}\right) = -\arctg (1+j\omega\tau_b) \right.$

è l'opposto del comportamento che avrebbe se fosse uno zero

Posso ricavare il diagramma di un polo dal diagramma di uno zero

3) $\dfrac{1}{s} \to \dfrac{1}{j\omega}$ POLO CHE ATTRAVERSA L'ORIGINE (in scala log 1)

$$\left|\frac{1}{j\omega}\right| = \frac{1}{\omega} - \sqrt{\frac{1}{\omega^2}} \quad \text{MODULO}$$

$$\boxed{\arg\left[\frac{1}{j\omega}\right] = -\arg\left[(j\omega)\right] = -\frac{\pi}{2}}$$ FASE la parte immaginaria = 0

è un polo (se fosse uno zero sarebbe $\frac{\pi}{2}$)

Per rappresentare il modulo:

$$20 \log_{10}\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20 \log_{10} \omega$$ → retta che decresce con 20 db/dec su tutto lo spettro delle ω e che attraversa x in 0 (in scala logaritmica) ⇒ 1

$\omega = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{j\omega}\right| = 1$

CONTROLLO DEI SISTEMI ENERGETICI

9 11/03/09 40

4) $K \rightarrow 20\log_{10}(K) \rightarrow$ retta orizzontale

posso ricomporre tutti i diagrammi traslando la retta in scala decibel

OPPURE

posso considerare K inglobato in 3) : (metodo preferibile)

$$\frac{K}{S} \rightarrow \left|\frac{K}{J\omega}\right| = \frac{K}{\omega}$$

$20\log_{10}\left(\frac{K}{\omega}\right) \rightarrow$ retta che taglia le ascisse in $\boxed{\omega = K}$

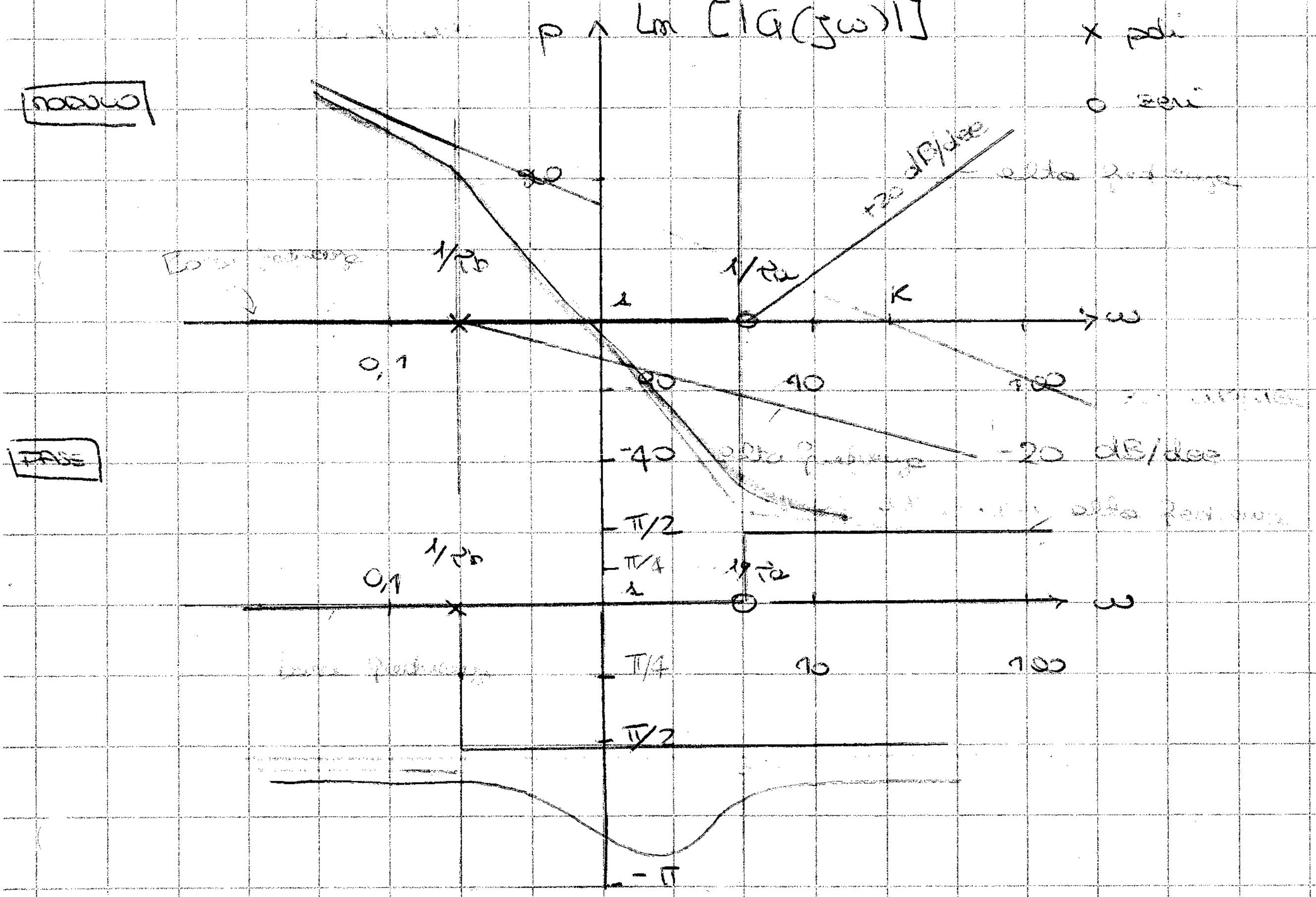
Esercizi rete prima — Venerdì 13/03/2009

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_a s)}{(1+\tau_b s)s}$$

Hp | $\tau_a < \tau_b$

K = guadagno

$\frac{1}{\tau_b} < \frac{1}{\tau_a}$ | Hp $\left[\frac{1}{\tau_a}, \frac{1}{\tau_b}\right.$ = frequenze di taglio$\left.\right]$ è il valore



$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}\,\frac{(1+j\omega\tau_a)}{(1+j\omega\tau_b)}$$

Ampiezza e fase di una risposta armonica

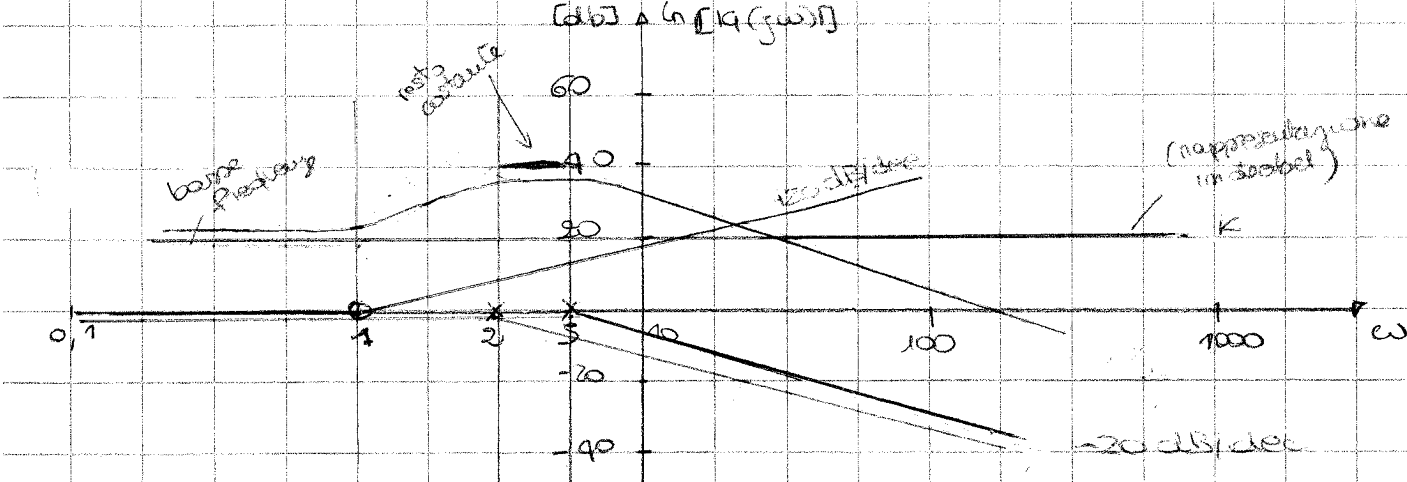
— andamento $\frac{(1+j\omega\tau_a)}{(1+j\omega\tau_b)}$

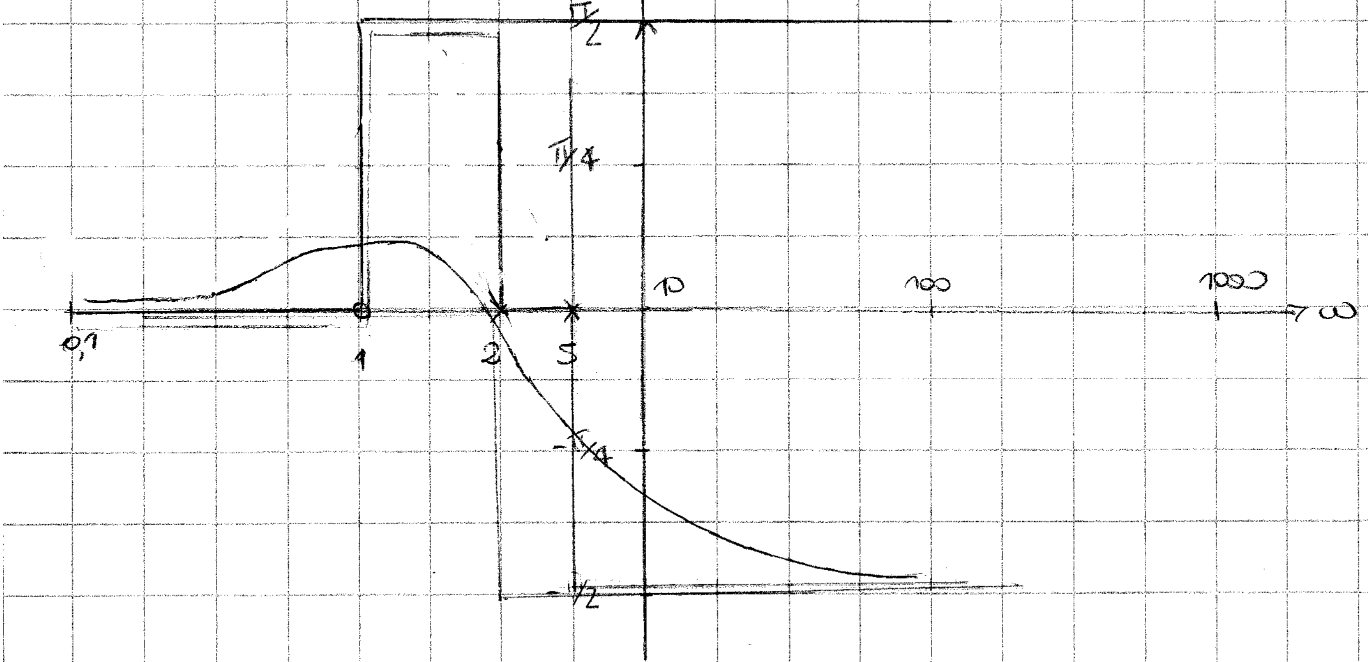
— andamento $\frac{K}{j\omega}$

— andamento della mia funzione

— andamento generale

1





esercizio 3

$$G(s) = \frac{15(s+3)}{s^2(s+5)} = \frac{\overset{9}{\cancel{45}}\left(\frac{s\omega}{3}+1\right)}{5\omega^2\left(\frac{s\omega}{5}+1\right)} \qquad K = 9$$

3 : zero

5 : polo

0 : 2 poli

$\omega = \omega_1$

$\log_{10} \frac{9}{\omega_1^2}$

$\omega = \omega_1 = 10\,\omega_2$

$20 \log_{10} \left[\frac{9}{(10\omega_2)^2} \right]$

rapporto argomenti

$20 \log_{10} \left[\frac{9}{10^2 \omega_2^2} \right] - 20 \log_{10} \frac{9}{\omega_2^2} = 20 \log_{10} \left[\frac{\cancel{\omega_2^2}}{10^2 \cancel{\omega_2^2}} \right] =$

$= -20 \log_{10} (10^2) = -40\ dB$

Devo trovare un punto caratteristico x trovare arbitrato k.

Prendo il punto in cui ho attraversamento dell'ascisse

$\boxed{\frac{9}{\omega^2} = 1} \Rightarrow \omega^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\omega = 3}$

punto di attraversamento è 3.

Per la fase

$\boxed{-\frac{9}{\omega^2}}$ $\phi = \text{arct} \frac{Im}{Re}$

$\boxed{Im = 0} \Rightarrow \phi = \text{arctg}\, \phi = 0$

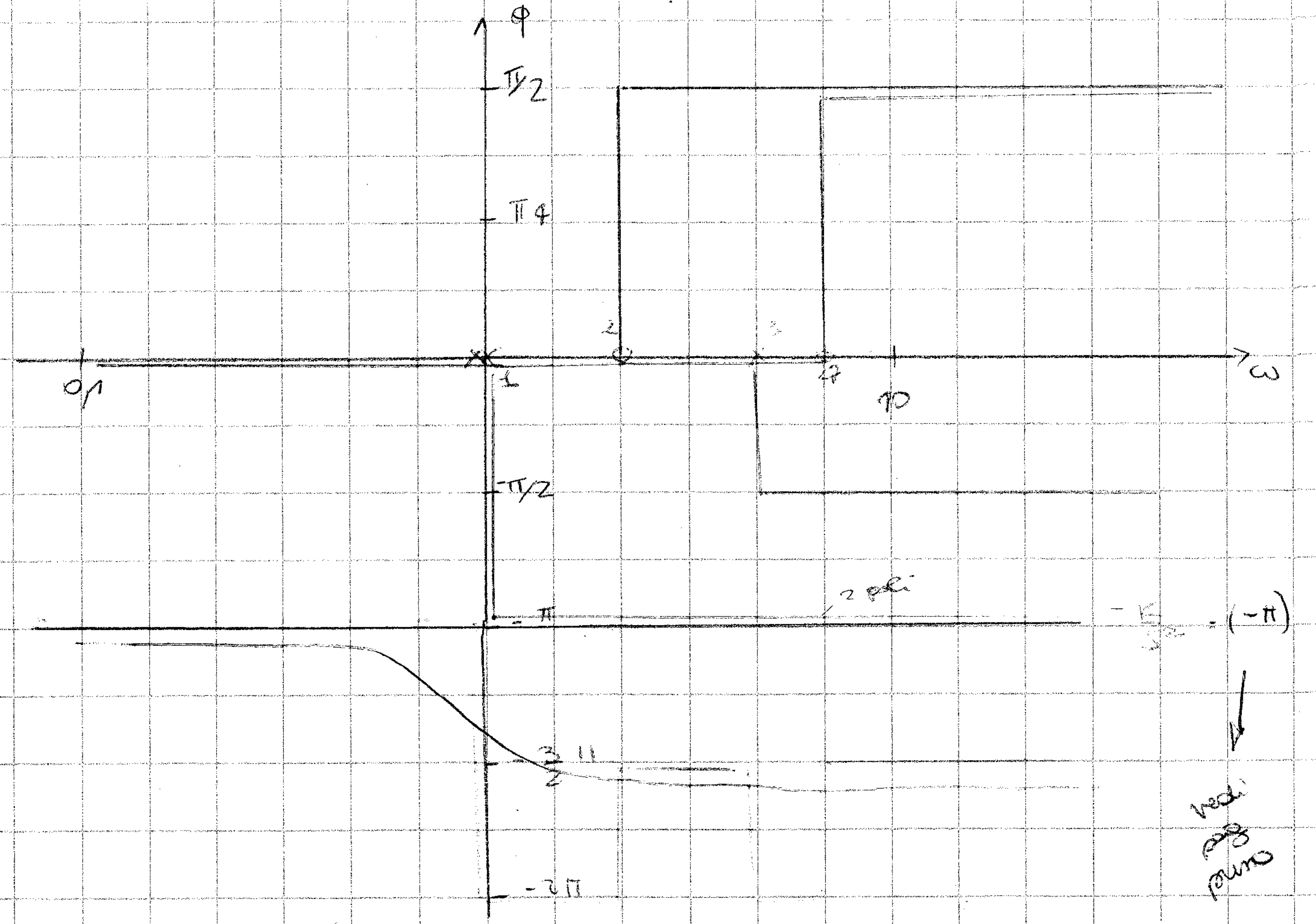
Un polo doppio può avere fase a ϕ ?

$\frac{K}{s^2} = \frac{\sqrt{K}}{s} \cdot \frac{\sqrt{K}}{s}$

devo considerare la fase come somma di 2 funzioni semplici (ogni funzione vale $-\pi/2$ sommando ho fase $-\pi$)

fase $= -\pi$ su tutto lo spettro delle frequenze

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 212



4

18/03/05

SISTEMI II ORDINE

- Retto da un'espressione del tipo:

USCITE INGRESSI

$$\boxed{a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x} \cancel{+ c_2 \frac{dx^2}{dt^2}}$$ NO

e se gli applichiamo la trasformata di Laplace:

$$a_2 s^2 y(s) + a_1 s\, y(s) + a_0 y(s) = c_1 s\, x(s) + c_0 x(s)$$

- Ciò che ci interessa è il GUADAGNO DEL SISTEMA:

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{c_1 s + c_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$y(s)$, $x(s)$ TRASFORMATE DI LAPLACE

s OPERATORE DI LAPLACE

che dobbiamo però ricondurre alla formulazione canonica...

$$\boxed{G(s) = K_0 \frac{1 + \tau s}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}}$$

ω_n → PULSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA

ξ → FATTORE DI SMORZAMENTO DEL SISTEMA "Zita"

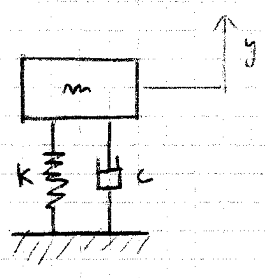
$(1+\tau s)$

Al numeratore influenza il sistema ma senza alterarne il comportamento.
Dunque posso immetterlo nelle costante:

$$\boxed{G(s) = \frac{K_0}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}} \quad (1)$$

ESEMPIO

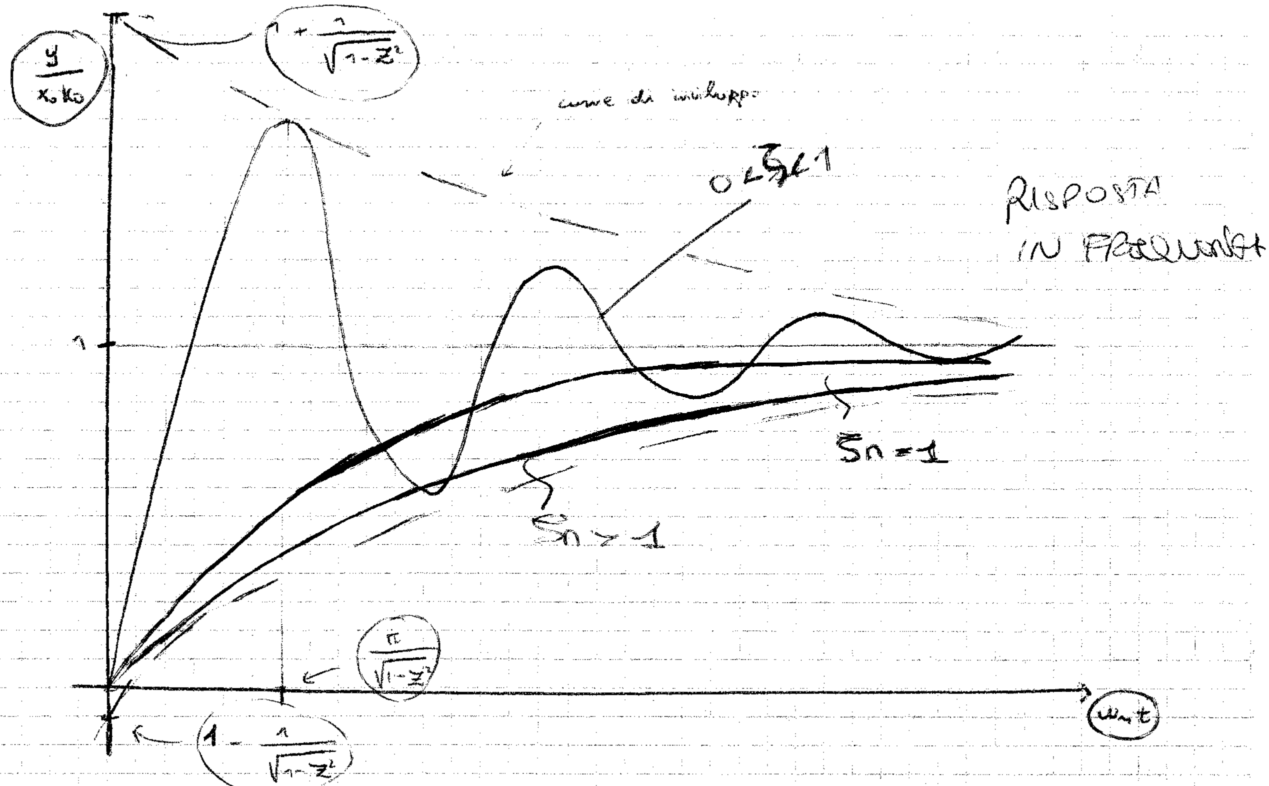
- Il solito sistema:



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = F$$

$$m s^2 y(s) + c s\, y(s) + K\, y(s) = F(s)$$

$$\frac{Y(S)}{F(S)} = 1 / (ms^2 + cS + K)$$



$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x_0 K_0} = 1} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x_0 K_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Mentre il sistema di I ordine si comportava come la curva di inviluppo inferiore...

- $\boxed{\text{SISTEMA SMORZATO}}$ $\rightsquigarrow$ $Z = 1$

$$\boxed{\frac{y(t)}{x_0 K_0} = 1 - (1 + \omega_n)\, e^{-\omega_n t}}$$

→ non ho più oscillazioni → si comporta come un sistema del 1° ordine

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x_0 K_0} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x_0 K_0} = \omega_n$$

- $\boxed{\text{SISTEMA SOVRASMORZATO}}$ $\rightsquigarrow$ $Z > 1$

$$\boxed{\frac{y(t)}{x_0 K_0} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{Z^2-1}} \cdot \left[\left(Z + \sqrt{Z^2-1} \right) e^{-(Z - \sqrt{Z^2-1})\omega_n t} + - \left(Z - \sqrt{Z^2-1} \right) \cdot e^{-(Z + \sqrt{Z^2-1})\omega_n t} \right]}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x_0 K_0} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x_0 K_0} = 0$$

Analizziamo pendenza curva in una decade

ω_1

$\omega_2 = 10\omega_1$

$$Lm\left(\frac{1}{(\omega_2/\omega_n)^2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{(\omega_2/\omega_n)^2}\right) =$$

$$= -20\log_{10}(\omega_2/\omega_n)^2$$

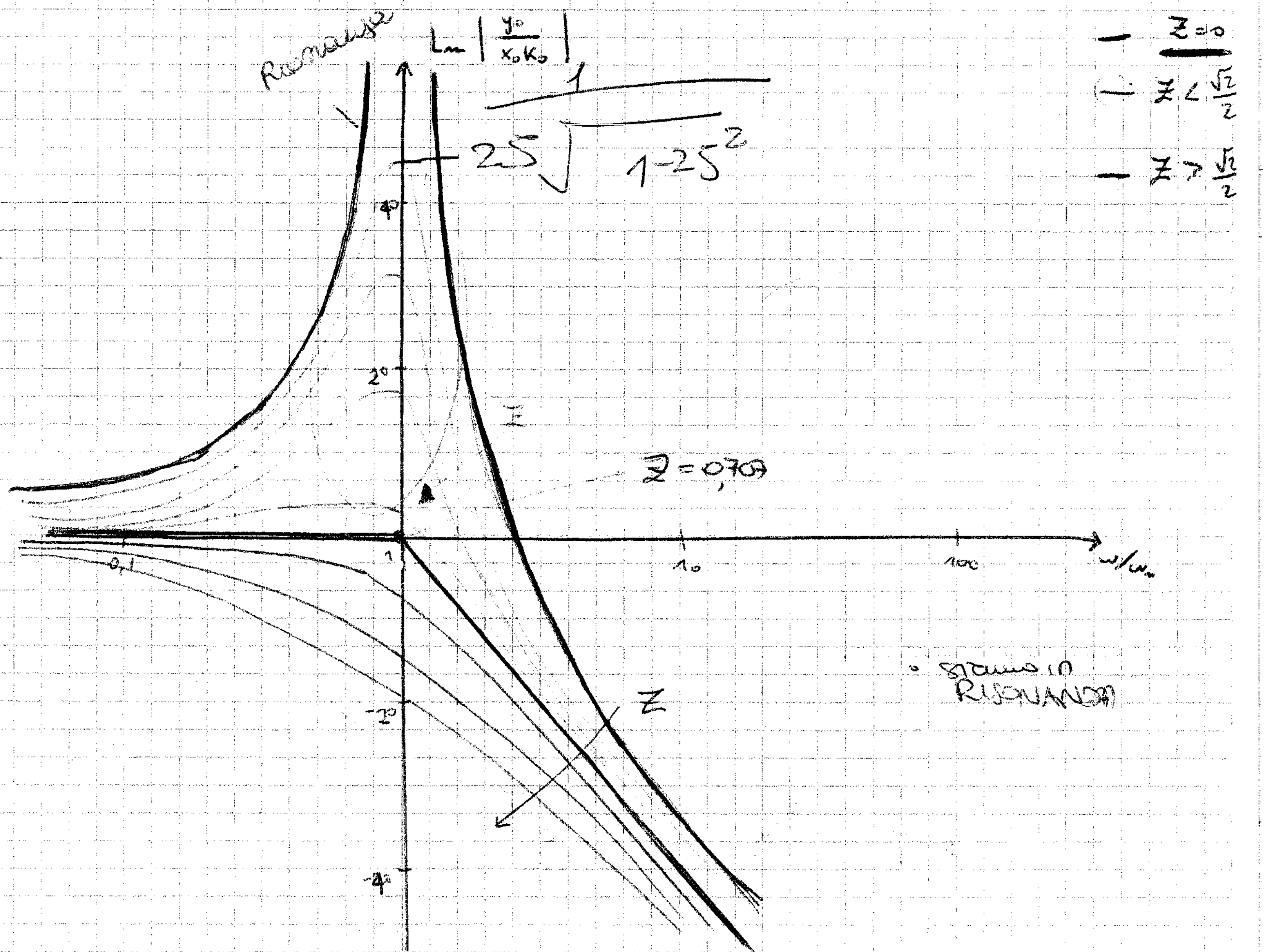
$$Lm\left(\frac{1}{(10\omega_1/\omega_n)^2}\right) = -20\log_{10}(10\omega_1/\omega_n)^2 =$$

$$= -40 - 20\log_{10}(\omega_1/\omega_n)^2$$

Dunque: $Lm\left(\frac{1}{(\omega_2/\omega_n)^2}\right) - Lm\left(\frac{1}{(\omega_1/\omega_n)^2}\right) = -40\ dB/dec$

$$= -20\log\left(\left(\frac{10\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2\right) = -40\ dB/dec$$

graficamente ...



con i veri così $\left|\frac{y_0}{x_0 K_0}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$

I. $\zeta = 0$ ⇒ in corrispondenza di $\omega = \omega_n$ (pulsazione) l'ampiezza → ∞

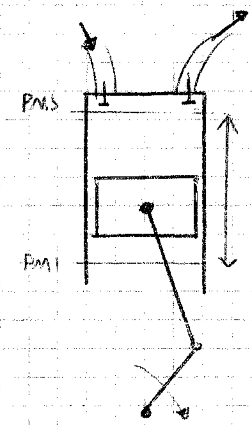
II. $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}707$ ho massimo relativo in $\boxed{\omega_{R} = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}$ di ampiezza via via decrescente

APPLICAZIONE SUI MOTORI ALTERNATIVI

- DOSATURA : $\boxed{\alpha = \frac{m_a}{m_b}}$
  - per i motori Otto α è per lo più una quantità stechiometrica
  - per i motori Diesel si lavora in eccesso d'aria

- POTENZA UTILE : $\boxed{P_u = \eta_u \cdot m_b \cdot H_i}$ ← POTERE CALORIFICO INFERIORE CARBURANTE

- Come mi controllo m_a?
  Come posso ottimizzarlo?



C → V (cilindrata)

$m_{a\,id} = \rho_a V$

→ densità dell'ambiente di aspirazione

$m_a = \lambda_v \cdot \rho_a \cdot V$

→ COEFFICIENTE DI RIEMPIMENTO (< 1 o maggiore di 1 in ambito corse)

1. perché in fase di aspirazione l'aria entra a contatto con pareti calde cilindro e si dilata
2. strozzamenti e cadute di pressione
3. "effetti dinamici" → trasporto non stazionario della massa → EFFETTO INERZIALE
   → propagazione di onde di pressione all'interno dei condotti (ad esempio l'apertura di una valvola) → EFFETTO D'ONDA

"sarò in un luogo"

La costante elastica del modello:

$$K_{modello} = \frac{dF}{dx} = K \frac{p}{V_m} S^2$$

La pulsazione propria è, come già visto:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{modello}}{m}} = \sqrt{K \frac{p}{V_m} \frac{S^2}{\rho L S}} =$$

$$= \sqrt{K \frac{p}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{S}{L \cdot V_m}}$$

$\sqrt{K \frac{p}{\rho}} \rightarrow C_s$ (VELOCITÀ DEL SUONO)

Allora:

$$\boxed{\omega_n = C_s \sqrt{\frac{S}{L \cdot V_m}}}$$

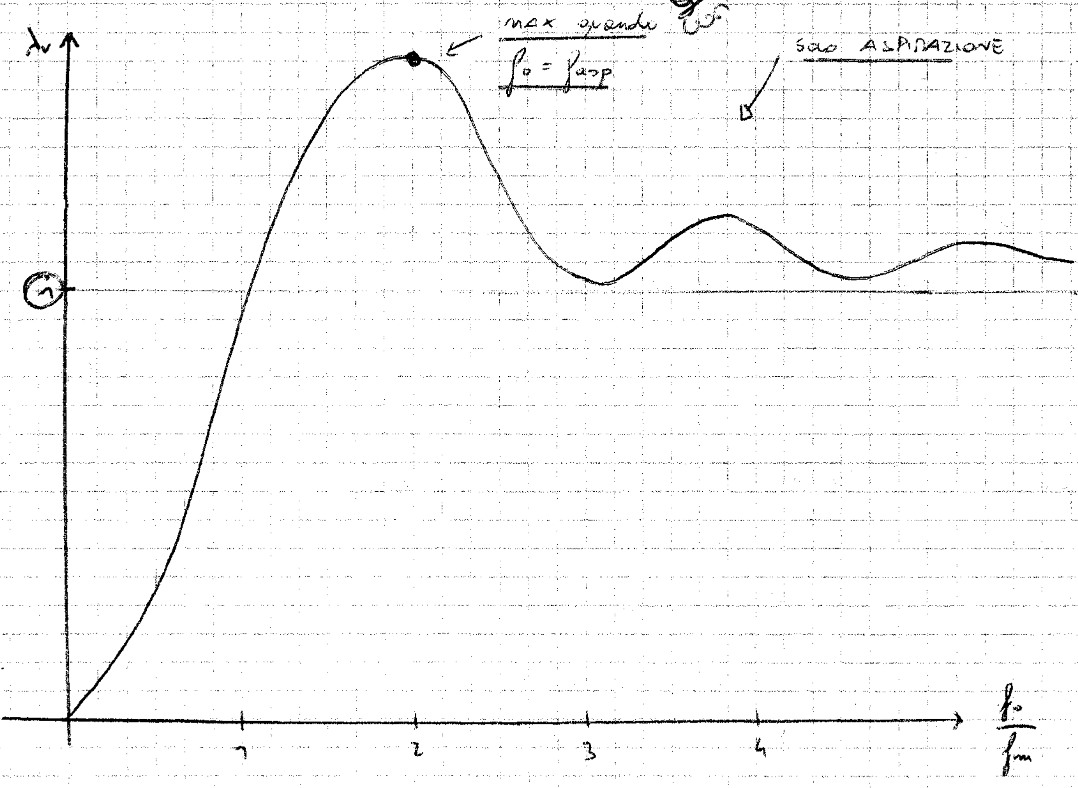
Devo ora confrontare ω_n con la frequenza del fenomeno...

$f_m \rightarrow$ frequenza del motore $\rightarrow \boxed{f_m = 2 f_{asp}}$ (ASPIRAZIONE) $\boxed{= n}$

$\omega = 2\pi f$

$\omega = 2\pi n \rightarrow$ pulsazione del motore

Dal modello del second'ordine ho:



$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_n}{2\pi}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 212

Allora:

$$Q = Q_1 + A_1 s h_1 = Q_1 + A_1 s \left(Q_1 \frac{R_1}{\rho g} + h_2 \right) =$$

$$= Q_1 \left(1 + \frac{A_1 s R_1}{\rho g} \right) + A_1 s h_2 =$$

$$= \left(Q_2 + A_2 s h_2 \right) \left(1 + \frac{A_1 s R_1}{\rho g} \right) + A_1 s h_2$$

$$= Q_2 \left(1 + \frac{A_1 s R_2}{\rho g} \right) + \frac{Q_2 R_2}{\rho g} \left[A_2 s \cdot \left(1 + \frac{A_1 s R_1}{\rho g} \right) + A_1 s \right]$$

Riconduciamoci alla forma canonica:

$$Q = Q_2 + Q_2 \frac{A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2}{\rho g} s + Q_2 \frac{A_2 A_1 R_1 R_2}{(\rho g)^2} s^2$$

La FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} \quad \frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\frac{A_1 A_2 R_1 R_2}{(\rho g)^2} s^2 + \frac{A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2}{\rho g} s + 1}$$

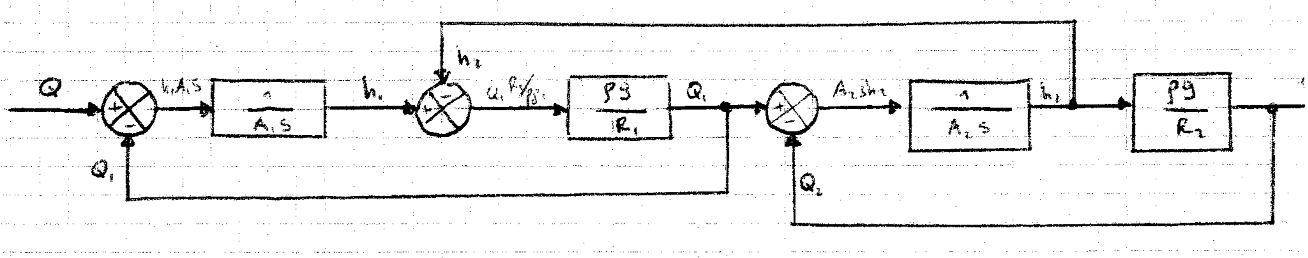
Lo SCHEMA A BLOCCHI: (riprendiamo le equazioni I, II, III, IV)

$$h_1 = (Q - Q_1) \cdot \frac{1}{A_1 s} \qquad h_2 = (Q_1 - Q_2) \frac{1}{A_2 s}$$

$$Q_1 = (h_1 - h_2) \frac{\rho g}{R_1}$$

$$\rightarrow \quad Q_1 - Q_2 = A_2 s h_2$$

$$Q_2 = h_2 \frac{\rho g}{R_2}$$



SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE

- Denominatore della G(S) di grado superiore al secondo. In generale:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$m < n$

$n > 2$

Possiamo scomporre in FATTORI PRIMI:

$$(*) \quad G(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_i)\cdots(s-p_n)}$$

$z \to$ zeri
$p \to$ poli

$$\boxed{G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(s-p_i)}}$$ → gli zeri sono solo più impliciti

per trovare gli a_i:

$$\boxed{G(s)\,(s-p_i)\Big|_{s=p_i} = a_i} \quad (*)$$

- **SOLLECITAZIONE A GRADINO**

$x(s) \to \frac{x_0}{s}$

$$y(s) = x(s)\cdot G(s) = K\,\frac{x_0\,(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{s\,(s-p_1)\cdots(s-p_i)\cdots(s-p_n)}$$

($X(s)$, $G(s)$)

$$y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(s-p_i)}$$

con $\boxed{a_i = \left[(s-p_i)\,y(s)\right]_{s=p_i}}$

In particolare: $a = K x_0 \dfrac{(-z_1)(-z_2)\cdots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\cdots(-p_n)}$

$$a = K x_0 \frac{(-1)^m \prod_{i=1}^{m} z_i}{(-1)^n \prod_{i=1}^{n} p_i}$$

$a_1 = \dots$ (simile)

$a_2 = \dots$

MERCOLEDÌ 25/03/2009

Per studiare sistemi di ordine n qualsiasi, così da trarne le info necessarie, ad ex: STABILITÀ

SISTEMA DI ORDINE n => FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad n > m$$

$$G(s) = k \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_m)}$$

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{s-p_i}\right) = \frac{y(s)}{x(s)}$$ Rapporto tra ingressi e uscite

studio sollecitazione a gradino

$$x(t) \begin{cases} x(t) = 0 & t < 0 \\ x(t) = x_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

$$x(s) = x_0/s$$

$$y(s) = G(s) \frac{x_0}{s} = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{s-p_i}\right)$$

ANTITRASFORMATA

(1) $$\boxed{y(t) = a + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{p_i t}}$$

(2a) $$\frac{1}{s+2} = e^{(-2t)}$$

$$\frac{a}{s-p_i} = a \cdot \frac{1}{s-p_i} = e^{p_i t}$$

la risposta nel tempo è una risposta costante (a) + alcune funzioni esponenziali in cui sono fermati i poli ($p_n \to p_i$) e gli zeri ($z_n \to a_i$)

=> la natura della risposta è determinata dai poli $e^{p_i t}$, gli zeri sono solo un fattore moltiplicativo

1

$$\Rightarrow \qquad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

ξ = smorzamento

$\boxed{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_s}$ pulsazione smorzata del sistema

Posso sempre ricondurmi a situazioni del 1° o del 2° ordine

Riprendo il mio sistema

$$y(s) = G(s)\frac{X_0}{s} = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s-p_i}\right) \qquad \text{gradino}$$

Individuo ~~parte del~~ sis del 1° e 2° ordine e le separo:

non importante, sono solo coeff.

$$y(s) = \frac{a}{s} + \underbrace{\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{a_i}{s-p_i}\right)}_{} + \sum_{i=1}^{r}\frac{b_i(s+\xi_i\omega_{ni}) + e_i\omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

a e $b \in \mathbb{R}$, e — SIST. 1° ORDINE (q) — SIST. DEL 2° ORDINE (con poli complesso coniugato) 2r

Risolvo sistemi del 1° e 2° ordine e sfruttando il ~~fase~~ metodo della sovrapposizione degli effetti, trovo la soluzione del sistema generale.

n = n° poli funzione di trasferimento

$$\boxed{n = q + 2r}$$

sono poli compl. con perciò sono 2 coppie ai poli

RISPOSTA DEFINITIVA

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = a + \underbrace{\sum_{i=1}^{q} a_i e^{p_i t}}_{A} &+ \sum_{i=1}^{r} b_i e^{-\xi_i\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi_i^2}\,t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{r} e_i e^{-\xi_i\omega_{ni} t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_i^2}\,t) \end{aligned}}$$

B

RISPOSTA DI UNA QUALUNQUE FUNZIONE

a = risposta al gradino

A = " " esponenziale

ciò me lo dice la funzione di trasferimento.

Sono i poli a determinare la natura della risposta

(ho già capito ciò che ho detto prima)

Ex. poli reali ⇒ esponenziali decrescenti

poli ¢ coniugati ⇒ " " che inviluppano curve armoniche (sen, cos)

Se si parla di stabilità bisogna vedere il denominatore della funzione di stabilità, indipendentemente dal grado del sistema

il grado di stabilità del sistema dipende da quanto rapidamente decadono gli esponenziali

I termini della S a cui corrispondono pi o Si uni

$|\,|$ (>>) decadono rapidamente nel tempo (influiscono sulla 1° parte della risposta)

$|\,|$ (<<) influiscono sulla parte finale, a regime

Consideriamo la risposta di un sistema lineare del 3° ordine individuato dalla funzione di trasferimento sottoposto ad un comando a gradino

Figura 31

$$\boxed{\frac{y(S)}{x(S)} = G(S) = \frac{a\,\omega_n^2}{(S+a)\,(S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2)}}$$

(adimensionale) $\alpha = \dfrac{a}{\zeta\omega_n}$ (vedi grafico) $\zeta = 0{,}1$

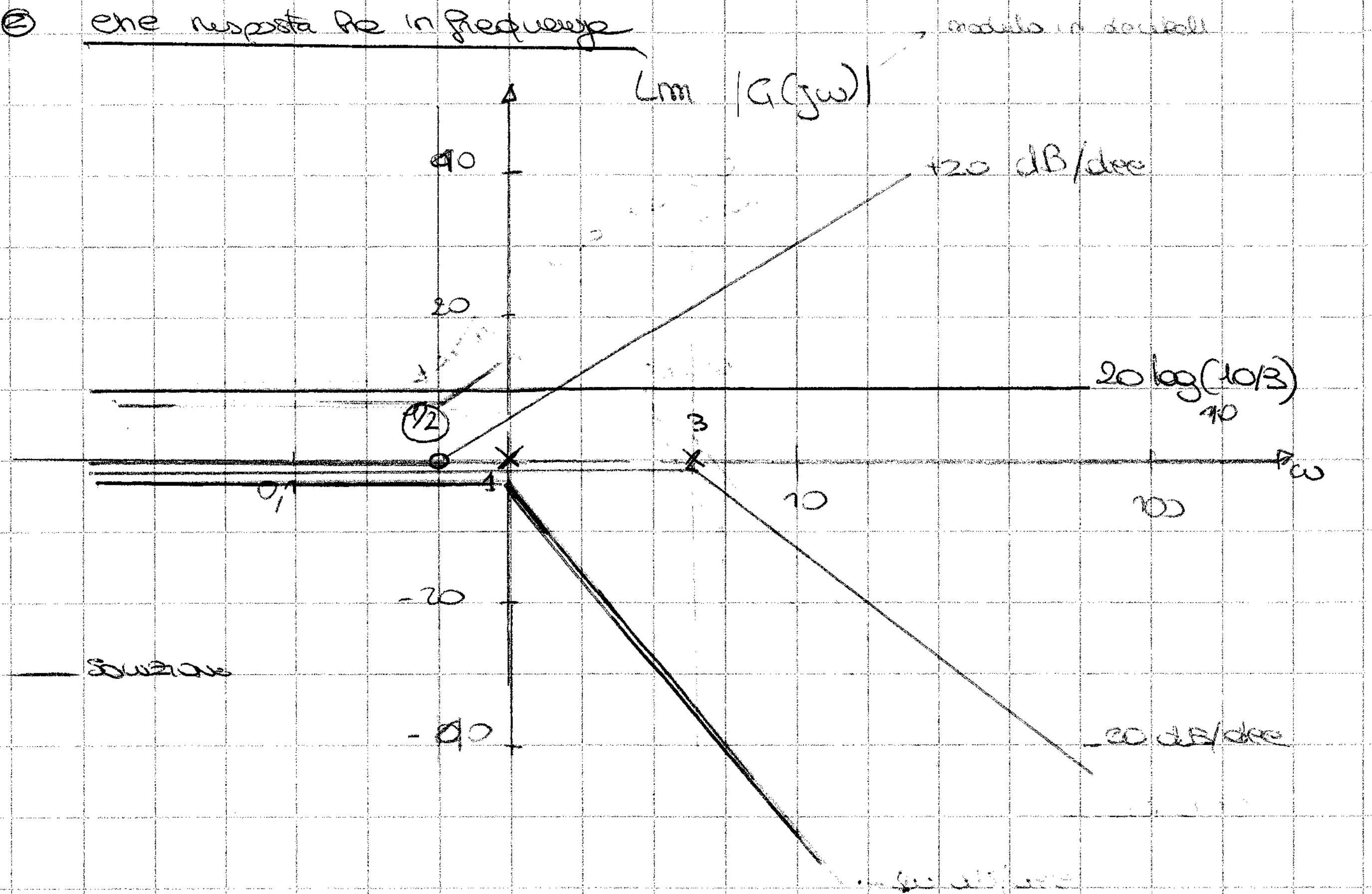
il sist. ha parte del 1° e del 2° ordine

- $\alpha <<$ ⇒ $\zeta\omega_n >>$ ⇒ esponenziale decresce rapidamente
  ($\alpha = 0{,}2$) per quanto riguarda la risp. del 2° ordine (vedi figura ③)
- $\alpha >>$ ⇒ $\zeta\omega_n <<$ ⇒ le oscillazioni si esauriscono molto
  ($\alpha = 6$) lentamente, anche quando il sist è a regime la risposta oscilla attorno al

3

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 212

(e) che risposta ha in frequenza



○ frequenze di taglio di $(1+2S)$ $\quad 1/\tau = 1/2$

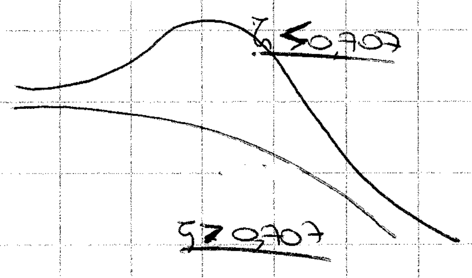
× " $\quad (S+3)$ $\quad 1/\tau = 3$ $\quad 3\left(\frac{S}{3}+1\right)$

X = sistema del 2° ordine (S^2+S+1) $\quad \omega_n = 1$

$K_0 = \frac{10}{3}$ (devo ricondurmi alla forma canonica

Tracciamento andamento reale

X ed. 2° ordine ho 2 risp. reali.



a seconda dello smorzamento

$$\boxed{1 = \frac{2\zeta}{\omega_n}}$$

$$\zeta = \frac{\omega_n}{2} = 0{,}5$$

↓

sistema sottosmorzato

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 212

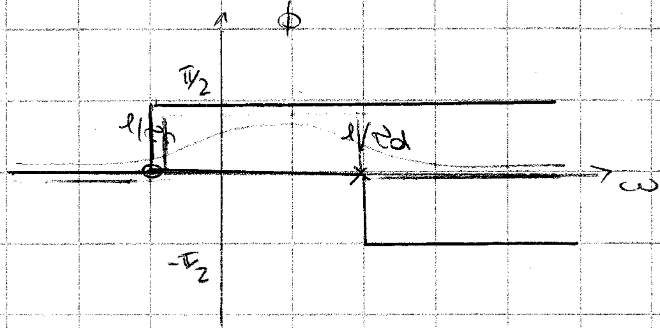
SISTEMI ANTICIPATORI O RITARDATORI

(in riferimento alla fase)

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\boxed{G(s) = \frac{\tau_n s + 1}{\tau_d s + 1}}$$

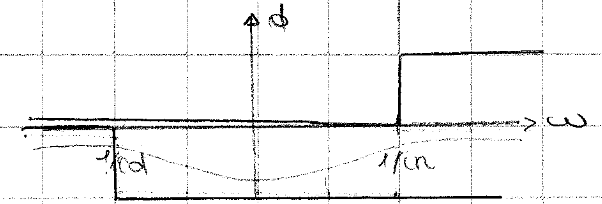
- $\tau_n > \tau_d$ — SISTEMA ANTICIPATORE



$$\frac{1}{\tau_n} < \frac{1}{\tau_d}$$

- $\tau_d > \tau_n$ — SISTEMA RITARDATORE

$$\frac{1}{\tau_n} > \frac{1}{\tau_d}$$



la fase è sempre in anticipo sull'ingresso

sollecitazione a gradino (RISPOSTA)

$$y(t) = x_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_n}{\tau_d} \right) e^{-t/\tau_d} \right]$$

τ_d = polo = influenza la risposta

$$\phi = \operatorname{arctg}\left[-\frac{\operatorname{sen}(\omega t_R)}{\cos(\omega t_R)}\right] = -\omega t_R$$

$\phi = f$ (pulsazione dell'ingresso) a fronte di un guadagno unitario sullo spettro delle sequenze

---

STABILITÀ

Ne parliamo quando vediamo come si comporta il sistema quando ci sono piccole variazioni all'ingresso.

Se muovo il mondo:

- il sistema torna alle cond. d'equilibrio iniziali ⇒ [illegible]

(il sist era in cond. d'EQUILIBRIO STABILE)

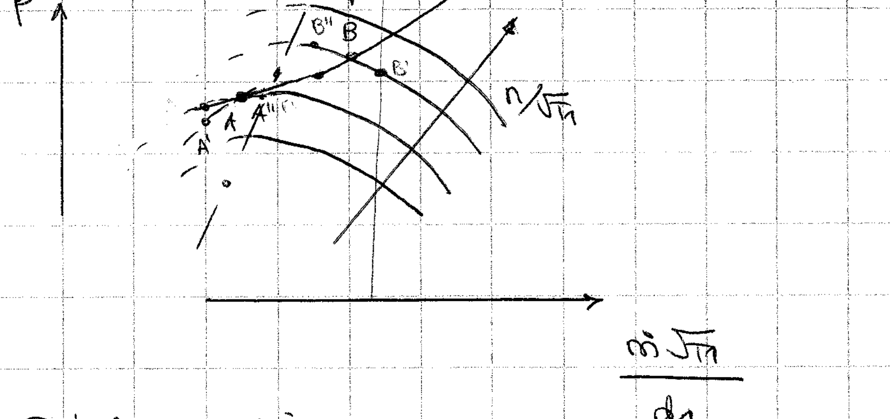
- sist si allontana indipendentemente dal punt iniziale ⇒ [illegible]

il sist allora troverà una nuova posizione d'equilibrio

∃ situazioni in cui definire {STABILITÀ / INSTABILITÀ} è $\boxed{\text{intuitivo}}$

TURBOCOMPRESSORI

caratteristica compressore



STABILITÀ INTUITIVA

Ⓑ Portata cambia:

- e mi muovo a destra del fluido (aumento $\dot{m}$). fluido accelera il fluido fornisce una portata B' ~~[illegible]~~ con una prevalenza ~~[illegible]~~ minore ~~maggiore~~ del fluido.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 212