NUMERO : 271

DATA : 16/04/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Guarracino

MATERIA : Fisica I

Prof. Penna

Moto rettilineo

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)\,ds = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)\,ds$$

Moto rettilineo uniforme ($\vec{v}(t) = \text{cost}$)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,(t - t_0)$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(s)\,ds = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(s)\,ds$$

Moto uniformemente accelerato ($\vec{a}(t) = \text{cost}$)

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,(t - t_0)$$

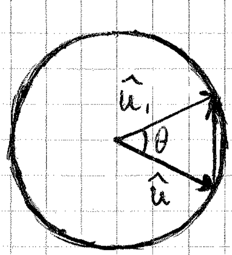
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)\,ds = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

Relazione tra spazio e velocità:

$$\begin{cases} v_1 = v_0 + a t_1 \\ v_2 = v_0 + a t_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = \dfrac{v_1 - v_0}{a} \\ t_2 = \dfrac{v_2 - v_0}{a} \end{cases} \qquad t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \\ x_2 = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \end{cases} \qquad x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2^2 - t_1^2)$$

Derivata di un versore (velocità e accelerazione)



$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}}{|\hat{u}_1 - \hat{u}|} \frac{|\hat{u}_1 - \hat{u}|}{t_1 - t}$$

$$\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}}{|\hat{u}_1 - \hat{u}|} = \hat{u}_\perp$$

$$|\hat{u}_1 - \hat{u}| \simeq r\theta = \theta \quad (r = 1)$$

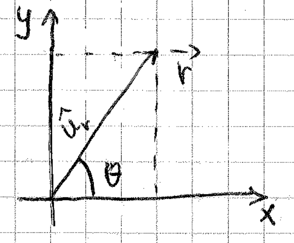
$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\theta}{t_1 - t} \hat{u}_\perp = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\perp$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{r}\hat{u}_N$$

Coordinate polari



$$\vec{r} = r\,\hat{u}_r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{r}|$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r'\hat{u}_r + r\theta'\hat{u}_\theta)$$

I tre principi della dinamica

1. Legge di Inerzia: un corpo libero si muove con velocità costante, cioè con accelerazione nulla;
2. Legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$, l'interazione di un corpo con l'ambiente, espressa tramite il vettore $\vec{F}$ determina la sua accelerazione, cioè la variazione nel tempo della sua velocità
3. Principio di azione e reazione: se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su un corpo B, allora il corpo B reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Quantità di moto e teorema dell'impulso

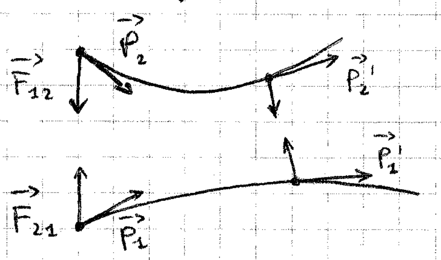
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$J = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{p}}{ds}\,ds = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$$

Conservazione della quantità di moto (III principio)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_2}{dt}\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_1}{dt}\,dt \qquad \vec{p}_2(t_1) - \vec{p}_2(t_0) = -(\vec{p}_1(t_1) - \vec{p}_1(t_0))$$

$$\vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = \vec{p}_1(t_0) + \vec{p}_2(t_0) = \text{cost}$$

Forza elastica

$$\vec{F} = m\vec{a} = -K(x-L)\,\hat{u}_x$$

$$m x'' = -K(x-L)$$

$$x'' + \frac{K}{m}x = \frac{KL}{m} \qquad \frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow x'' + \omega^2 x = \omega^2 L$$

Origine del sistema nel punto di equilibrio $\Rightarrow L = 0$

$$x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x'' + \omega^2 x = \omega^2 L \Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + L$$

Lavoro e conservazione dell'energia

$$W_{AB} = \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{r} = \sum_j \vec{F}(\vec{r}_j)\cdot\Delta\vec{r}_j = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = -(U_B - U_A)$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\,d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} m\frac{d\vec{v}}{dt}v\,dt = \int_{t_A}^{t_B} m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)dt$$

$$= \left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)\right]_{t_A}^{t_B} = \frac{m}{2}\left(\vec{v}^2(t_B) - \vec{v}^2(t_A)\right) = E_K^B - E_K^A$$

$$E_K^B - E_K^A = -(U_B - U_A) \qquad E_K^B + U_B = E_K^A + U_A \Rightarrow E_B = E_A$$

Potenza istantanea

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\,d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} = m\vec{a}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{dE_K}{dt}$$

$$E_K^B - E_K^A = \int_A^B \vec{F}_a \, d\vec{r} - (U_B - U_A)$$

$$E_K^B - E_K^A = W_a - (U_B - U_A)$$

Gradiente dell'energia potenziale

$$\nabla E_P(\vec{r}) = \frac{\partial E_P}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial E_P}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial E_P}{\partial z}\hat{u}_z$$

$$dW = \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = -\left(E_P(\vec{r}+d\vec{r}) - E_P(\vec{r})\right)$$

$$= -\left(\cancel{E_P(\vec{r})} + \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz - \cancel{E_P(\vec{r})}\right)$$

$$dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z = d\vec{r}$$

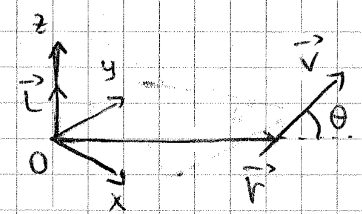
$$\nabla E_P(\vec{r})\, d\vec{r} = \frac{\partial E_P}{\partial x}\hat{u}_x\hat{u}_x\, dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}\hat{u}_y\hat{u}_y\, dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}\hat{u}_z\hat{u}_z\, dz$$

$$= \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -\vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla E_P(\vec{r})$$

Momento angolare

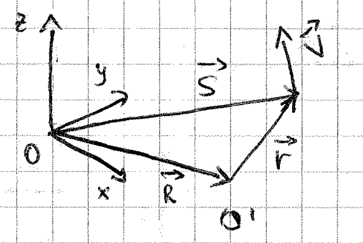
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m r v \sin\theta\, \hat{u}_z$$



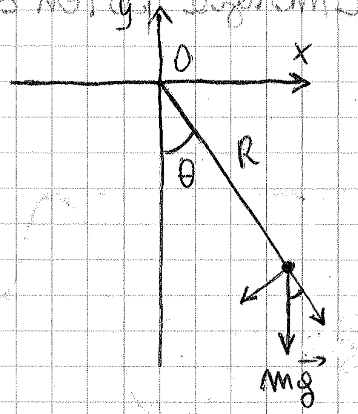
Polo generico $(O' \neq O)$

$$\vec{L} = m\vec{s} \wedge \vec{v} = m(\vec{R} + \vec{r}) \wedge \vec{v}$$

$$= m\vec{R} \wedge \vec{v} + m\vec{r} \wedge \vec{v} = m\vec{R} \wedge \vec{v} + \vec{L}'$$



Pendolo matematico



$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mR^2\theta'\hat{u}_z$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge (m\vec{g} + \vec{T}) = Rmg\sin\theta\,(-\hat{u}_z)$$

$$\frac{d}{dt}\left(mR^2\theta'\hat{u}_z\right) = -Rmg\sin\theta\,\hat{u}_z$$

$$\cancel{m}R^{\cancel{2}}\theta''\hat{u}_z = -\cancel{R}\cancel{m}g\sin\theta\,\hat{u}_z$$

$$\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{R}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

$$ma_N = T - mg\cos\theta = 0$$

$$ma_T = -mg\sin\theta$$

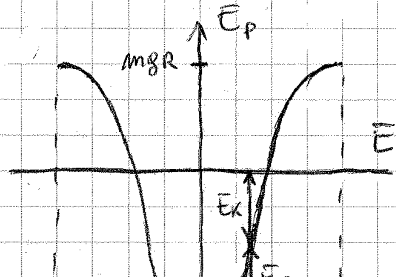
$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\theta'' \Rightarrow \cancel{m}R\theta'' + \cancel{m}g\theta = 0$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$\theta'' + \frac{g}{R}\theta = 0 \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$E_p(y) = mgy + C$$

$$y = -R\cos\theta \Rightarrow E_p(\theta) = C - mgR\cos\theta$$

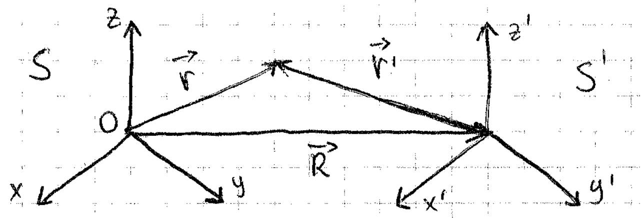


$$E_p(0) = 0 \Rightarrow C = mgR$$

$$E_p(\theta) = mgR(1 - \cos\theta)$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mR^2\theta'^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

Moto di trascinamento traslatorio rettilineo



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$ $\vec{v}_{O'}$ = velocità di trascinamento

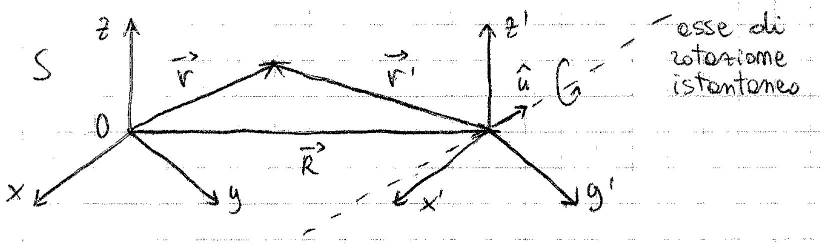
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$$ $\vec{a}_{O'}$ = accelerazione relativa o di trascinamento

Si definiscono trasformazioni Galileiane quelle che collegano sistemi S e S' soggetti ad un moto relativo uniforme

$\vec{v}_{O'} = \text{cost} \Rightarrow \vec{a}_{O'} = 0$, $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_{O'} t$

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

Moto di trascinamento rotatorio uniforme



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}'_x + y'\hat{u}'_y + z'\hat{u}'_z\right)$$

$$= \vec{v}_{O'} + \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + x'\frac{d\hat{u}'_x}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + y'\frac{d\hat{u}'_y}{dt} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}'_z + z'\frac{d\hat{u}'_z}{dt}$$

$-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,') =$ forza centrifuga

$-2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,' =$ forza di Coriolis

Principio di relatività classico: le leggi fisiche sono le stesse per tutti gli osservatori che descrivono i fenomeni da sistemi di riferimento inerziali ($\vec{a}_{o'}=0$)

1. Legge di Inerzia

$S \Rightarrow \vec{v} = cost$

$S' \Rightarrow \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{o'} = cost \quad (\vec{v}_{o'} = cost)$

2. Legge di Newton

$$S \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$S' \Rightarrow \vec{F}\,' = m\vec{a}\,' = m\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \cancel{\frac{d\vec{v}_{o'}}{dt}}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

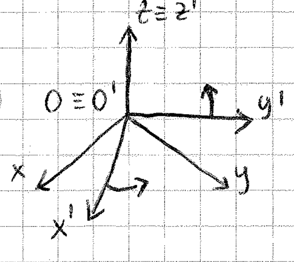
3. Conservazione della quantità di moto

$$S \Rightarrow \vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = cost$$

$$S' \Rightarrow \vec{P}\,' = \vec{p}\,'_A + \vec{p}\,'_B = m_A\vec{v}\,'_A + m_B\vec{v}\,'_B = m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_{o'}) + m_B(\vec{v}_B - \vec{v}_{o'})$$

$$= m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B - \vec{v}_{o'}(m_A + m_B) = cost \quad (\vec{v}_{o'} = cost)$$

Accelerazione relativa nel caso 2D



$$\vec{\omega} = cost \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \qquad \vec{a}_{o'} = 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,')$$

Centro di massa

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_J m_J \vec{r}_J}{M}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_J m_J \frac{d\vec{r}_J}{dt} = \frac{\sum_J m_J \vec{v}_J}{M}$$

$$\vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_J m_J \frac{d\vec{v}_J}{dt}$$

Teorema del centro di massa ($M\vec{A}_{CM} = \vec{R}^E$)

$$\vec{A}_{CM} = \frac{\sum_J m_J \vec{a}_J}{M} = \frac{1}{M} \sum_J \vec{R}_J$$

$$= \frac{1}{M} \sum_J \left(\vec{F}_J^E + \sum_{i \neq J} \vec{F}_{iJ} \right) = \frac{1}{M} \left(\sum_J \vec{F}_J^E + \cancel{\sum_J \sum_{i \neq J} \vec{F}_{iJ}} \right)$$

$$\Rightarrow M\vec{A}_{CM} = \sum_J \vec{F}_J^E = \vec{R}^E$$

corollario (sistema di masse isolate, $\vec{R}^E = 0$)

$$M\vec{A}_{CM} = \vec{R}^E = 0$$

$$\Rightarrow M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = 0 \qquad M\vec{V}_{CM} = \text{cost}$$

$$M\vec{V}_{CM} = \cancel{M} \frac{\sum_J m_J \vec{V}_J}{\cancel{M}} = \sum_J \vec{p}_J = \vec{P}_{TOT} = \text{cost}$$

Sistema del centro di massa ($\vec{r}_J = \vec{R}_{CM} + \vec{r}\,'_J$)

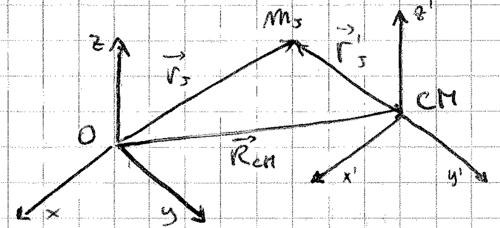
$$\vec{R}'_{CM} = \frac{1}{M} \sum_J m_J \vec{r}\,'_J = \frac{1}{M} \sum_J m_J \left(\vec{r}_J - \vec{R}_{CM} \right)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_J m_J \vec{r}_J - \frac{1}{M} \left(\sum_J m_J \right) \vec{R}_{CM} = \vec{R}_{CM} - \frac{1}{\cancel{M}} \cancel{M} \vec{R}_{CM} = 0$$

Corollario (conservazione del momento angolare)

$$\vec{M}^E = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = cost$$

Primo teorema di König



$$\vec{L} = \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j = \sum_j m_j \left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}'_{j}\right) \wedge \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}'_{j}\right)$$

$$= \sum_j m_j \left(\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{r}'_j \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \wedge \vec{v}'_j + \vec{r}'_j \wedge \vec{v}'_j\right)$$

$$= M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \wedge \cancel{M\vec{V}'_{CM}} + \cancel{M\vec{R}'_{CM}} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum_j m_j \vec{r}'_j \wedge \vec{v}'_j$$

$$= \vec{R}_{CM} \wedge M\vec{V}_{CM} + \vec{L}'$$

Secondo teorema di König

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}'_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\vec{V}_{CM}^{\,2} + 2\vec{V}_{CM}\vec{v}'_j + \vec{v}'^{\,2}_j\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{V}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}'^{\,2}_j + \sum_j m_j \vec{v}'_j \cdot \vec{V}_{CM}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{V}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}'^{\,2}_j + \cancel{M\vec{V}'_{CM}} \cdot \vec{V}_{CM} = E_K^{CM} + E_K'$$

Principio di Hamilton

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m 2v \frac{dv}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} = v(t)\left(ma(t) + \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0$$

$$ma(t) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad ma(t) = F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U$$

Conservazione dell'energia negli urti

Urto elastico

$$\begin{cases} E = cost & E_K^A + E_P^A = E_K^B + E_P^B \\ \vec{P} = cost & \vec{p}_{1A} + \vec{p}_{2A} = \vec{p}_{1B} + \vec{p}_{2B} \end{cases}$$

$$E_K^B - E_K^A = -\left(U_B^E - U_A^E + \cancel{\frac{1}{2}\sum_{(i,j)} U(\vec{r}_{iB} - \vec{r}_{jB}) - \frac{1}{2}\sum_{(i,j)} U(\vec{r}_{iA} - \vec{r}_{jA})}\right)$$

$$U_B^E = U_A^E \Rightarrow E_K^B = E_K^A$$

$$\frac{m_1}{2}\vec{v}_{1A}^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_{2A}^2 = \frac{m_1}{2}\vec{v}_{1B}^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_{2B}^2$$

Urto anelastico (forze non conservative)

$$\begin{cases} E^B - E^A = E_K^B - E_K^A = \sum_j \int_A^B \vec{F}_{ej}\, d\vec{r}_j \neq 0 \\ \vec{p}_{1A} + \vec{p}_{2A} = \vec{p}_{1B} + \vec{p}_{2B} \end{cases}$$

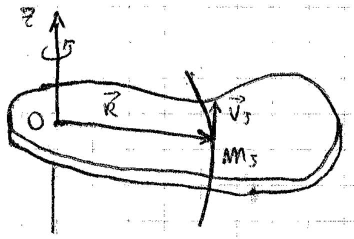
$$m_1\vec{v}_{1A} + m_2\vec{v}_{2A} = m_1\vec{v}_{1B} + m_2\vec{v}_{2B}$$

$$\vec{v}_{1B} = \vec{v}_{2B} \Rightarrow m_1\vec{v}_{1A} + m_2\vec{v}_{2A} = (m_1 + m_2)\vec{v}_B$$

$$\vec{v}_B = \frac{m_1\vec{v}_{1A} + m_2\vec{v}_{2A}}{m_1 + m_2}$$

Momento angolare di un corpo rigido

1) corpo piatto



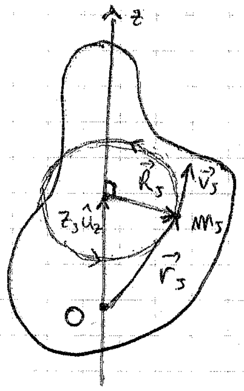
$$\vec{L} = \sum_J m_J \vec{R}_J \wedge \vec{v}_J = \sum_J m_J \vec{R}_J \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_J)$$

$$= \sum_J m_J \left[\vec{\omega} \cdot R_J^2 - \vec{R}_J \cdot \cancel{(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_J)}\right]$$

$$= \sum_J m_J \vec{\omega} R_J^2$$

$$= \vec{\omega} \sum_J m_J R^2_J = I_z \vec{\omega}$$

2) caso generale



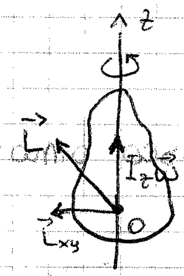
$$\vec{L} = \sum_J m_J \vec{r}_J \wedge \vec{v}_J = \sum_J m_J (\vec{R}_J + z_J \hat{u}_z) \wedge \vec{v}_J$$

$$= \sum_J m_J \left(\vec{R}_J \wedge \vec{v}_J + z_J \hat{u}_z \wedge \vec{v}_J\right)$$

$$= I_z \vec{\omega} + \sum_J m_J z_J \left[\hat{u}_z \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_J)\right]$$

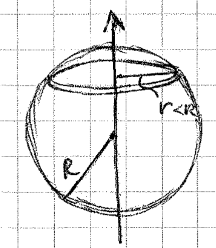
$$= I_z \vec{\omega} + \sum_J m_J z_J \left[\vec{\omega} \cancel{(\hat{u}_z \cdot \vec{R}_J)} - \vec{R}_J (\hat{u}_z \cdot \vec{\omega})\right]$$

$$= I_z \vec{\omega} - \sum_J m_J z_J \omega \vec{R}_J = I_z \vec{\omega} + \vec{L}_{xy}$$



Teorema di Poinsot: fissato un punto O di un corpo rigido è sempre possibile trovare tre assi ortogonali e con centro in O tali che, se si sceglie uno di questi assi come asse di rotazione, $\vec{L}$ risulta parallelo a $\vec{\omega}$.
Tali assi si chiamano assi principali d'inerzia; se O coincide con il centro di massa, si parla allora di assi centrali d'inerzia.
È dunque sempre possibile realizzare la condizione $\vec{L} = I_z \vec{\omega}$ per un corpo rigido qualsiasi

5) Sfera piena omogenea



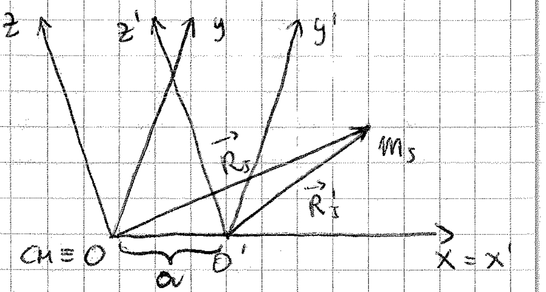
$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad r^2 = R^2 - z^2$$

$$dI = \frac{1}{2} dM r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz$$

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz = \rho \pi \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz$$

$$= \rho \pi \left[R^4 z + \frac{1}{5} z^5 - \frac{2}{3} R^2 z^3 \right]_0^R = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

Teorema di Huygens-Steiner



$$\begin{cases} x'_J = x_J - a \\ y'_J = y_J \end{cases}$$

$$I = I_{z'} = \sum_J m_J R'^2_J = \sum_J m_J (x'^2_J + y'^2_J)$$

$$= \sum_J m_J [(x_J - a)^2 + y_J^2] = \sum_J m_J (x_J^2 + a^2 - 2x_J a + y_J^2)$$

$$= \sum_J m_J (x_J^2 + y_J^2) + a^2 \sum_J m_J - 2a \sum_J m_J x_J$$

$$= \sum_J m_J R_J^2 + a^2 \sum_J m_J - \cancel{2aMx_{CM}} = I_z + a^2 M$$

Energia cinetica del corpo rigido

$$E_K = \sum_J \frac{1}{2} m_J v_J^2 = \sum_J \frac{m_J}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_J)^2 = \sum_J \frac{m_J}{2} \omega^2 (\hat{u}_z \wedge \vec{R}_J)^2$$

$$= \sum_J \frac{m_J}{2} \omega^2 R_J^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_J m_J R_J^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

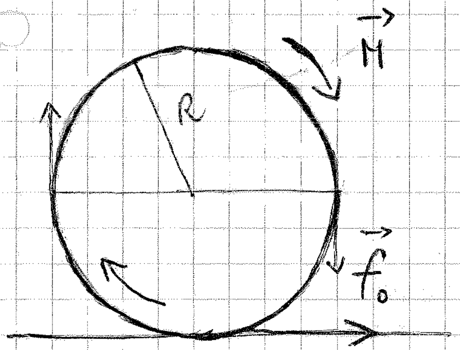
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge Mg = (z\hat{u}_z + R\hat{u}_R) \wedge (-Mg\,\hat{u}_z)$$

$$= RMg\,(\hat{u}_R \wedge -\hat{u}_z)$$

$$I_o\,\omega \sin\theta\, \Omega\, (\cancel{\hat{u}_z \wedge \hat{u}_R}) = RMg\,(\cancel{\hat{u}_R \wedge -\hat{u}_z})$$

$$\Omega = \frac{MgR}{I_o\,\omega\sin\theta} = \frac{Mgr}{I_o\,\omega}$$

Automobile



$$\begin{cases} I\alpha = -M + 2Rf_0 \\ (2m_R + m_A)\,a = 2f_0 \end{cases}$$

$$2f_0 = f \qquad \alpha = -\frac{a}{R}$$

$$\begin{cases} I\frac{a}{R} = M - Rf \\ (2m_R + m_A)\,a = f \end{cases} \qquad I\frac{a}{R} = M - (2m_R + m_A)\,a\,R$$

$$a = \frac{MR}{I + (2m_R + m_A)R^2}$$

$$I = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}} m_R R^2 \qquad a = \frac{M}{(3m_R + m_A)R}$$

$$f = \frac{(2m_R + m_A)M}{3m_R + m_A R}$$

$$m_R << m_A \implies f \simeq \frac{M}{R} \qquad a \simeq \frac{M}{m_A R}$$

Leggi di Keplero

1) le orbite dei pianeti sono ellissi in cui il sole occupa uno dei due fuochi
2) il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al sole spazia aree uguali in tempi uguali (velocità areolare costante)
3) $T^2 = K R^3$

Campo di forze e campo gravitazionale

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\gamma m m_0}{|r_0 - r|^3}(r_0 - r) \qquad \left[\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{Nm^2}{kg^2}\right]$$

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\frac{\gamma m}{|r_0 - r|^3}(r_0 - r) \qquad \vec{F}(\vec{r}) = m_0 \vec{G}(\vec{r})$$

N sorgenti:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_J \frac{-\gamma m m_J}{|r - r_J|^3}(r - r_J)$$

$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_J \frac{-\gamma m_J}{|r - r_J|^3}(r - r_J)$$

Potenziale ed energia potenziale

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{\gamma m m_0}{|r_0 - r|} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m}{|r_0 - r_0|} \qquad \vec{G}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \qquad E_p(\vec{r}) = m_0 V(\vec{r})$$

N sorgenti:

$$E_p(\vec{r}) = \sum_J \frac{-\gamma m m_J}{|r - r_J|} \qquad V(\vec{r}) = \sum_J \frac{-\gamma m_J}{|r - r_J|}$$

Legge di Coulomb: la forza tra due cariche q_1 e q_2 è direttamente proporzionale al prodotto $q_1 q_2$ ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} \qquad \left[\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\right]$$

Campo elettrostatico, $\vec{E}(\vec{r})$: forza risultante da una distribuzione di cariche $q_1, q_2 \dots q_n$, su una carica di prova q_0

$$\vec{F} = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_0 - r_i)}{|r_0 - r_i|^3} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r - r_i)}{|r - r_i|^3}$$

Linee di campo: assegnato un campo $\vec{E}(\vec{r})$, si definiscono linee di forza le curve caratterizzate dal fatto che in ogni punto $\vec{r}$, il campo $\vec{E}(\vec{r})$ risulta tangente

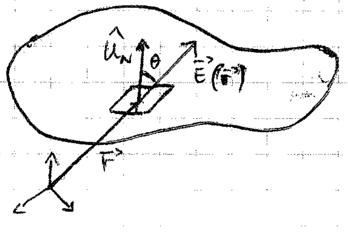
Potenziale ed energia potenziale

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_J \vec{F}_{J0}(\vec{r}) = -\sum_J \nabla E_p^J(\vec{r}) = -\nabla E_p^{TOT}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_J \frac{q_J}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r - r_J)}{|r - r_J|^3} = -\nabla V(\vec{r})$$

$$E_p(\vec{r}) = \sum_J \frac{q_J q_0}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_J|} \qquad V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{q_0} = \sum_J \frac{q_J}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_J|}$$

Legge di Gauss e flusso di $\vec{E}$



$$d\phi(\vec{E}) = \vec{E}\,\hat{u}_N\,dS$$

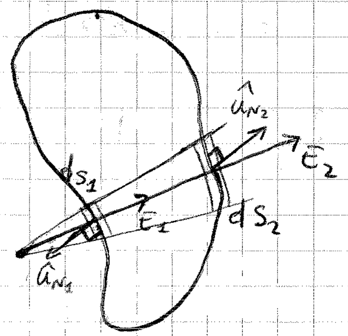
$$\Rightarrow \phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}\cdot\hat{u}_N\,dS$$

$$d\phi_1 = \vec{E}(\vec{r_1}) \cdot \hat{u}_{N_1} \, dS_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_{N_1} \, dS_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r_1^2}} \cancel{r_1^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$d\phi_1 = d\phi_2$$

$$\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_N \, dS = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{u}_r \, dS_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Flusso generato da una carica esterna



$$d\phi_1 = \vec{E}_1(\vec{r_1}) \, \hat{u}_{N_1} \, dS_1$$

$$d\phi_2 = \vec{E}_2(\vec{r_2}) \, \hat{u}_{N_2} \, dS_2$$

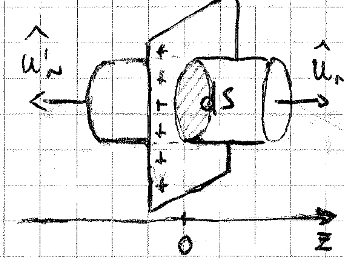
$$\left(\text{angolo solido} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{dS_\perp}{R^2} = d\Omega \right)$$

$$\cos\theta_1 \, dS_1 = -r_1^2 \, d\Omega \quad \left(\theta_1 > \frac{\pi}{2}\right) \qquad d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(-d\Omega)$$

$$\cos\theta_2 \, dS_2 = r_2^2 \, d\Omega \quad \left(\theta_2 < \frac{\pi}{2}\right) \qquad d\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \, d\Omega$$

$$d\phi_1 + d\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_N \, dS = 0$$

Campo elettrico generato da una distribuzione planare uniforme di carica



$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$\phi_{dS}(\vec{E}) = \cancel{\phi_{laterale}(\vec{E})} + \vec{E} \cdot \hat{u}_N \, dS + \vec{E}' \hat{u}'_N \, dS$$

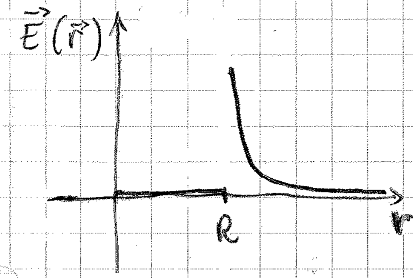
$$= 2E \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \, dS}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

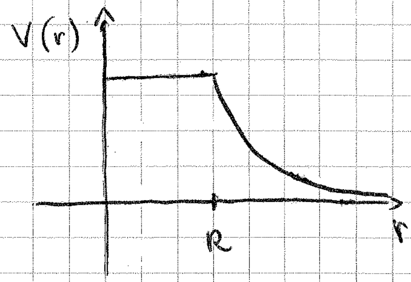
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_N & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_N & z < 0 \end{cases} \qquad V(z): \vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 78

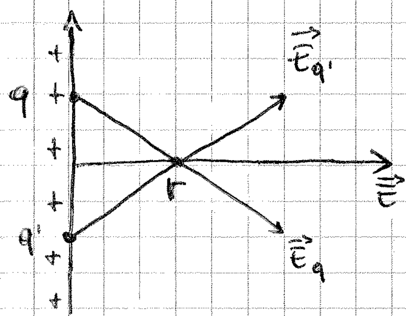
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r & r \geq R \end{cases} \qquad V(r) = \begin{cases} C \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_0 \end{cases}$$

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C_0 = 0 \ , \ C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



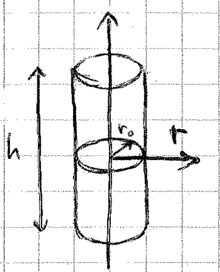


Campo generato da un filo con densità di carica costante



$$\lambda = \frac{Q}{h}$$

$$\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{u}_n \, ds = \iint_{SL} E(r) \, ds$$



$$\phi(\vec{E}) = E(r) 2\pi r h = \sum_j \frac{q_j}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{u}_r \quad (r \geq r_0)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{u}_r & r \geq r_0 \end{cases} \qquad V(r) = \begin{cases} C \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) + C_0 \end{cases}$$

$$V(r_0) = 0 \Rightarrow C = C_0 = 0$$

$$v_A = \frac{2\pi a b}{r_A T} \qquad v_B = \frac{2\pi a b}{r_B T}$$

$$E = \frac{\mu}{2} v_A^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_A} = \frac{\mu}{2} v_B^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_B}$$

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{2\pi a b}{r_A T}\right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_A} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{2\pi a b}{r_B T}\right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_B}$$

$$\frac{2\pi^2 \mu a^2 b^2}{r_A^2 T^2} - \frac{2\pi^2 \mu a^2 b^2}{r_B^2 T^2} = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$\frac{2\pi^2 \mu a^2 b^2}{T^2} \cancel{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right) = \gamma m_1 m_2 \cancel{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

$$\begin{cases} r_A + r_B = 2a \\ r_A \cdot r_B = b^2 \end{cases}$$

$$\frac{2\pi^2 \mu \frac{1}{4}(r_A + r_B)^2 \cancel{r_A r_B}}{T^2} \frac{r_A + r_B}{\cancel{r_A r_B}} = \gamma m_1 m_2$$

$$\frac{4\pi^2 \mu \left(\frac{r_A + r_B}{2}\right)^3}{T^2} = \gamma m_1 m_2 \qquad R = \frac{r_A + r_B}{2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu R^3}{\gamma m_1 m_2} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)} R^3$$

Energia potenziale efficace

$$E = \frac{\mu}{2} \vec{v}^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{\mu}{2}\left(r' \hat{u}_r + r\theta' \hat{u}_\theta\right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

$$= \frac{\mu}{2}\left(r'^2 \hat{u}_r^2 + r^2 \theta'^2 \hat{u}_\theta^2 + \cancel{2 r r' \theta' \hat{u}_r \hat{u}_\theta}\right) - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

$$= \frac{\mu}{2} r'^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \theta'^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

Velocità di fuga: velocità che un corpo m_2 deve acquisire per fuggire dalla sua orbita iniziale e possedere velocità costante v_∞ a grandi distanze

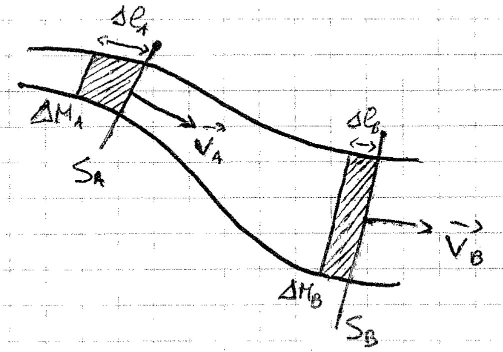
$$E = \frac{m_2}{2} v_f^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{R} = \frac{m_2}{2} v_\infty^2 - \cancel{\frac{\gamma m_1 m_2}{r}} \qquad (r \gg R)$$

$$v_f = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\gamma m_1}{R}}$$

Linea di corrente: curva di forma stabile lungo cui si muovono le particelle di fluido

Campo delle velocità $\vec{v}(\vec{r})$: insieme dei vettori velocità definiti in ogni punto del fluido e tangenti alle linee di correnti

Equazione di continuità



$$\Delta M_A = \Delta M_B$$

$$\rho_A S_A \Delta l_A = \rho_B S_B \Delta l_B$$

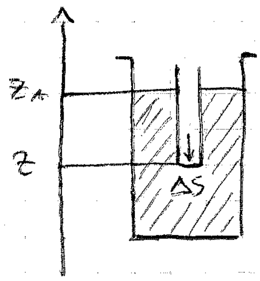
$\rho_A = \rho_B \Rightarrow$ volume costante

$$S_A \Delta l_A = S_B \Delta l_B$$

$$S_A \Delta l_A = S_B \Delta l_B \Rightarrow S_A v_A \cancel{\Delta t} = S_B v_B \cancel{\Delta t}$$

la portata è costante attraverso qualunque sezione di un tubo di flusso dato.

Legge di Stevino: in un fluido con $\rho = cost$, la pressione cresce linearmente con la profondità



$$P(z) = P_A + \frac{F}{\Delta S} = P_A + \frac{\Delta M(z) g}{\Delta S}$$

($\Delta M(z)$ = massa della colonna di fluido di profondità z)

$$= P_A + \frac{\rho \cdot V(z) \cdot g}{\Delta S} = P_A + \rho g (z_A - z)$$

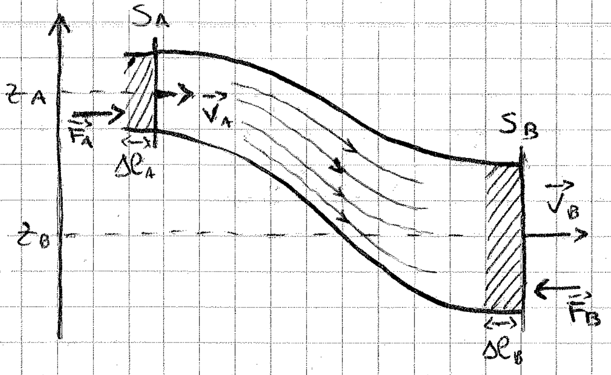
$$F_6 - F_5 = P_6 \Delta S - P_5 \Delta S$$
$$= [P_A + \rho g (z_A - z_6)] \Delta S - [P_A + \rho g (z_A - z_5)] \Delta S$$
$$= \rho g (z_5 - z_6) \Delta S$$

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido occupato dal corpo

$$F_{TOT} = \rho g (z_5 - z_6) \Delta S - Mg = \rho g \Delta V - \rho_c g \Delta V = g \Delta V (\rho - \rho_c)$$

$$\begin{cases} \rho < \rho_c \Rightarrow \text{il corpo affonda} \\ \rho > \rho_c \Rightarrow \text{il corpo galleggia} \end{cases}$$

Teorema di Bernoulli



$$\Delta E_K = -\Delta E_P + \Delta W_a$$

$$\Delta W_a = F_A \Delta \ell_A - F_B \Delta \ell_B$$
$$= P_A S_A \Delta \ell_A - P_B S_B \Delta \ell_B$$
$$= \Delta V (P_A - P_B)$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \left(\frac{1}{2} \Delta M_B V_B^2 + \cancel{\Delta E_{K\,TUBO}} \right) - \left(\frac{1}{2} \Delta M_A V_A^2 + \cancel{\Delta E_{K\,TUBO}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \Delta M (V_B^2 - V_A^2)$$

$$E_{P_2} - E_{P_1} = \left(\Delta M_B g z_B + \cancel{E_{P\,TUBO}} \right) - \left(\Delta M_A g z_A + \cancel{E_{P\,TUBO}} \right)$$
$$= \Delta M g (z_B - z_A)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) = P_1 - P_2 \\ v_1 = v_2 \dfrac{S_2}{S_1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) = P_1 - P_2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)S_1^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

Pressione e potenziale

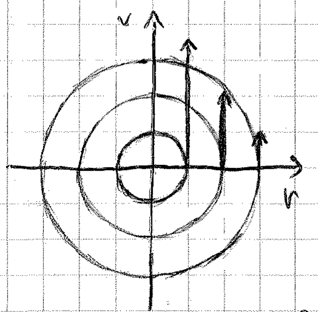
$$\nabla P = -\rho g \hat{u}_z = -\rho\nabla(gz) = -\rho\nabla V = \rho f \quad \Rightarrow f = -\nabla V$$

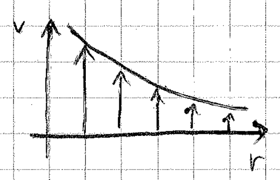
$$\nabla P = -\rho\nabla V \Rightarrow \nabla(P + \rho V) = 0 \qquad P + \rho V = cost$$

$$P(x,y,z) = -\rho V(x,y,z) + cost$$

$\Rightarrow$ superfici equipotenziali ($V = cost$) coincidono con superfici con stessa pressione ($P = cost$)

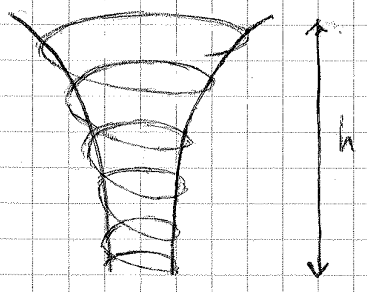
Vortici e regime laminare





$$v(r) = \frac{K}{r}$$

$$L = mrv = mK$$



$$g\rho z + P_0 + \frac{\rho}{2}v^2 = cost$$

$$z + \frac{v^2}{2g} = \frac{C - P_0}{\rho g} = h$$

$$z(r) = h - \frac{v^2}{2g} = h - \frac{K^2}{2gr^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 78

Gas ideali

- Legge isoterma (Boyle - Mariotte) => $T = cost$

$$PV = cost$$

- Legge isobara (Volta - Gay Lussac) => $P = cost$

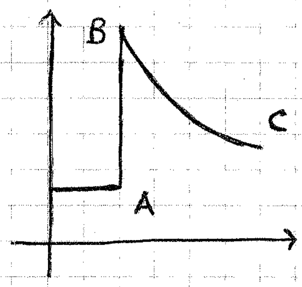
$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

- Legge isocora (Volta - Gay Lussac) => $V = cost$

$$P = P_0 (1 + \alpha t)$$

Equazione di stato dei gas perfetti

$$PV = cost$$
$$V = V_0 \alpha T \qquad \left(T = \frac{1}{\alpha} + t\right)$$
$$P = P_0 \alpha T$$



$$\begin{cases} P_A = P_0 \alpha T_A \\ P_B = P_0 \alpha T_B \\ P_B V_B = P_C V_C \end{cases} \qquad \frac{P_A}{T_A} = P_0 \alpha = \frac{P_B}{T_B} \quad P_B = \frac{T_B}{T_A} P_A$$

$$P_B = \frac{V_C}{V_B} P_C$$

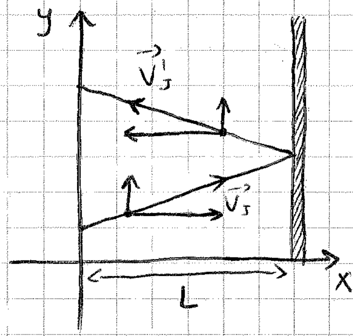
$$\frac{V_C}{V_B} P_C = \frac{T_B}{T_A} P_A \Rightarrow \frac{V_C}{V_A} P_C = \frac{T_C}{T_A} P_A \Rightarrow \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_A V_A}{T_A} = cost$$

$$PV = nRT$$

$n = 1$ mole $\qquad P = P_0 = 1\,atm = 1{,}01325 \cdot 10^5\,Pa$

$T = T_0 = 273{,}16\,K \qquad V = V_0 = 22{,}414\,l$

Relazione tra temperatura ed energia cinetica



$$\Delta p_{jx} = |J_j| = 2 m v_{jx}$$

$$\Delta t = \frac{2L}{v_{jx}}$$

$$f_{jx} = \frac{\Delta p_{jx}}{\Delta t} = \frac{\cancel{2} m v_{jx}^2}{\cancel{2} L}$$

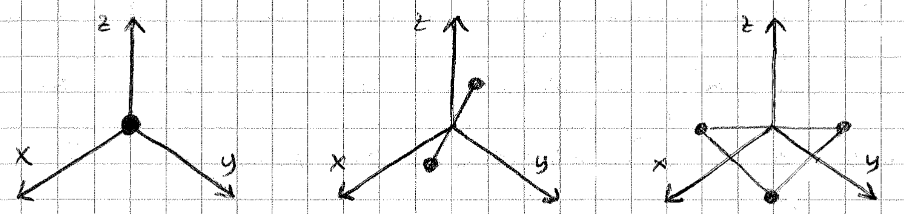
$$\langle f_{jx} \rangle = \frac{1}{N} \sum_j \frac{m}{L} v_{jx}^2 = \frac{m}{L} \left(\frac{1}{N} \sum_j v_{jx}^2 \right) = \frac{m}{L} \langle v_x^2 \rangle$$

$$P = \frac{N \langle f_{jx} \rangle}{S} = \frac{Nm}{SL} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm}{V} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm}{V} \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

$$PV = \frac{N}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} E_K = \frac{2}{3} N \epsilon_K$$

$$PV = N K_B T \Rightarrow \epsilon_K = \frac{3}{2} K_B T$$

Teorema di equipartizione dell'energia



GDL = 3 GDL = 3 + 2 = 5 GDL = 3 + 2 + 1 = 6

$$\epsilon_K = \begin{cases} \frac{3}{2} K_B T & \text{gas monoatomico} \\ \frac{5}{2} K_B T & \text{gas biatomico} \\ \frac{6}{2} K_B T & \text{gas poliatomico} \end{cases}$$

variazione di temperatura, tramite lo scambio di calore o di lavoro meccanico, allora
$\Delta Q = \Delta W$

"Il lavoro meccanico è sempre proporzionale alla variazione di temperatura e alla massa m, su cui agisce in senso meccanico"

Calore specifico

$\mathbf{c}$: calore necessario per innalzare di 1K l'unità di massa

se c dipende da $T \Rightarrow \Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} m\, c(T)\, dT$

$\tilde{c}_v$: calore specifico a volume costante
$\tilde{c}_p$: calore specifico a pressione costante

$$\Delta Q = \begin{cases} m\tilde{c}_v (T_f - T_i) = n N_A A m_u \tilde{c}_v (T_f - T_i) \\ m\tilde{c}_p (T_f - T_i) = n N_A A m_u \tilde{c}_p (T_f - T_i) \end{cases}$$

$N_A A m_u \tilde{c}_v = c_v$ = calore specifico molare a volume costante

$N_A A m_u \tilde{c}_p = c_p$ = calore specifico molare a pressione costante

$$mc = nc_v = \frac{3+f}{2} nR \Rightarrow c_v = \frac{3+f}{2} R$$

$$c_p = c_v + R$$ (relazione di Mayer)

Equazione di Van der Waals dei gas reali

$$P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2 = \frac{K_B N T}{V - Nb} \qquad b = \text{covolume}$$

$$U(T,V) = \frac{3+f}{2} N K_B T - \frac{aN}{V}$$

I principio della termodinamica

"In una trasformazione termodinamica, il calore scambiato dal sistema si ripartisce in variazione di energia interna e in lavoro effettuato dal sistema secondo l'equazione: $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$"

$$đQ = dU + đW$$

$$\int_A^B đQ = \int_A^B dU + \int_A^B đW \Rightarrow \Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Trasformazione isoterma ($T = cost$)

$$\Delta U_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} dU = \int_{T_A}^{T_B} n c_v dT = n c_v [T]_{T_A}^{T_B} = n c_v (T_B - T_A) = 0$$

$$\Delta W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \left[\ln \frac{V}{V_0}\right]_{V_A}^{V_B}$$

$$= nRT\left(\ln \frac{V_B}{V_0} - \ln \frac{V_A}{V_0}\right) = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$đQ = \cancel{dU} + đW \qquad \int_A^B đQ = \int_A^B đW \Rightarrow \Delta Q_{AB} = \Delta W_{AB}$$

$$\Delta Q_{AB} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{R}{C_v}\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \frac{K}{C_v} = K'$$

$$\ln = \left(\frac{T}{T_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{R}{C_v}}\right) = K'$$

$$\frac{T}{T_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{R}{C_v}} = e^{K'} \qquad T V^{\frac{R}{C_v}} = e^{K'} T_0 V_0^{\frac{R}{C_v}} = C$$

$$T V^{\frac{R}{C_v}} = \frac{PV}{mR} V^{\frac{R}{C_v}} = \frac{P V^{\frac{R}{C_v}+1}}{mR} = C \qquad P V^{\frac{R}{C_v}+1} = C'$$

$$\gamma = 1 + \frac{R}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow PV^{\gamma} = cost \qquad TV^{\gamma-1} = cost$$

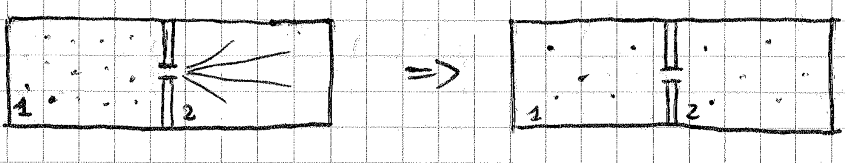
$$\Delta U = \int_{T_A}^{T_B} dU = \int_{T_A}^{T_B} m C_v \, dT = m c_v (T_B - T_A)$$

$$\Delta W = -\Delta U = -m C_v (T_B - T_A)$$

Trasformazioni irreversibili

In un ciclo di trasformazioni reversibili il sistema torna nello stato iniziale e l'ambiente circostante non manifesta alcuna modificazione permanente, mentre, se anche una sola trasformazione è irreversibile, il sistema torna ugualmente nello stato iniziale, ma l'ambiente circostante manifesta modificazioni permanenti.

1) Esponsione libera di Joule



$$\eta = 1 + \frac{T_1 \ln(V_A/V_B)}{T_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

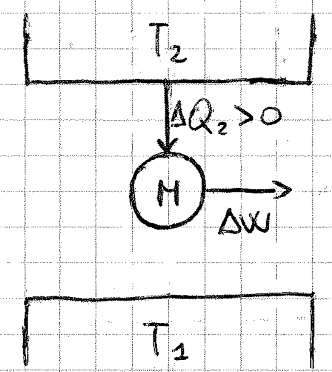
Teorema di Carnot:

$$\eta = 1 + \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

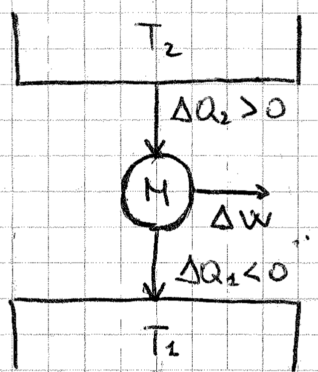
Il rendimento di una macchina che operi secondo un ciclo reversibile di Carnot è indipendente dalla sostanza che compie il lavoro e dipende solo dalle due temperature T_1 e $T_2 > T_1$ alle quali il ciclo si svolge.

II principio della termodinamica (Kelvin-Plank)

"È impossibile realizzare un processo termodinamico ciclico il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente"



impossibile

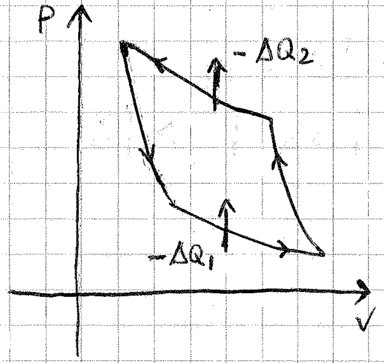


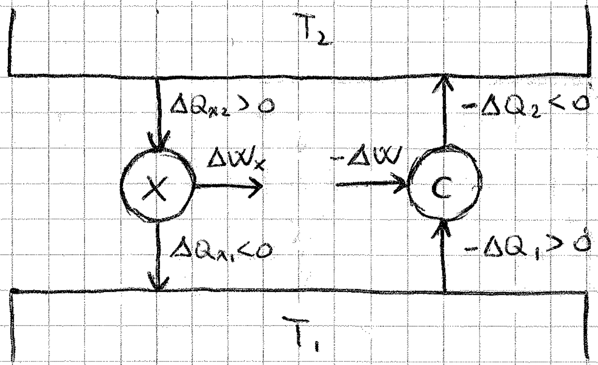
possibile

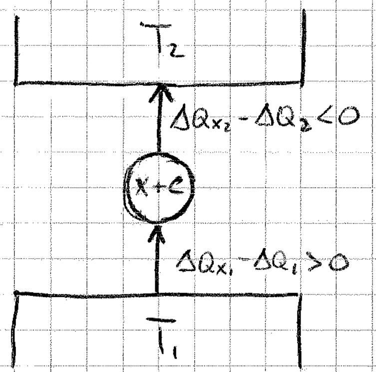
Principio di Clausius

"È impossibile realizzare un processo termodinamico il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da una sorgente a temperatura T_1 a una sorgente

- faccio lavorare la macchina di Carnot come in un ciclo frigorifero







$\Delta Q_2 > \Delta Q_{x2} \Rightarrow \Delta Q_2 - \Delta Q_{x2} > 0$

$\Delta W_x = \Delta W \Rightarrow \Delta Q_{x2} + \Delta Q_{x1} = \Delta Q_2 + \Delta Q_1$

$\Delta Q_{x1} - \Delta Q_1 = \Delta Q_2 - \Delta Q_{x2} > 0$

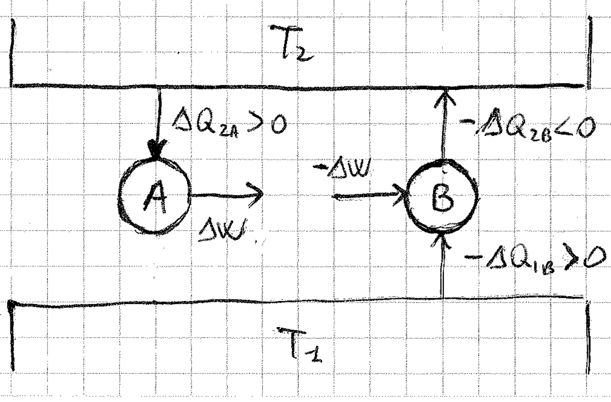
<u>contraddizione</u> con l'enunciato di Clausius

$\Rightarrow \eta_x \leq \eta$

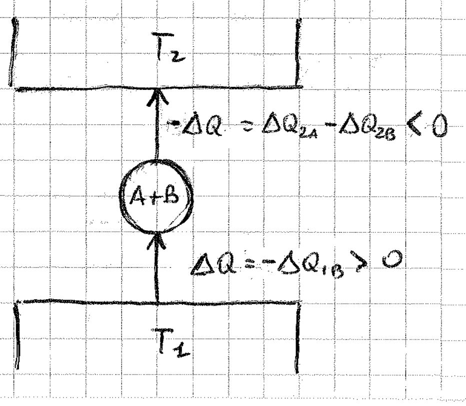
Se X fosse reversibile posso provare anche che $\eta_x \geq \eta$, dunque $\eta_x = \eta$

Relazione tra gli enunciati di Kelvin-Plank e Clausius

Violando il principio di Kelvin-Plank, viene violato anche quello di Clausius:



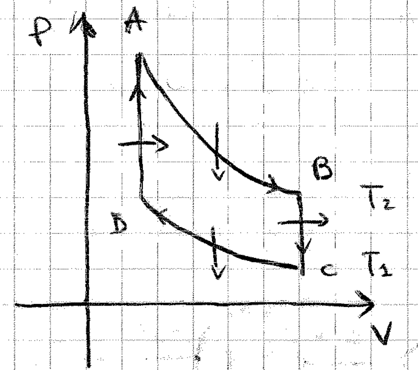
$\Rightarrow$



$$\begin{cases} T_D V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1} & T_D = T_C\,\sigma \\ T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_1^{\gamma-1} & T_B = \dfrac{T_A}{\sigma} \end{cases} \qquad \left(\sigma = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$$

$$\eta = 1 - \frac{T_C\,\sigma - T_A}{T_C - T_A/\sigma} = 1 - \sigma = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Ciclo di Stirling



$$\left.\begin{matrix} AB \\ CD \end{matrix}\right\}: \text{isoterme}$$

$$\left.\begin{matrix} BC \\ DA \end{matrix}\right\}: \text{isocore}$$

$$\Delta Q_{AB} = \Delta W_{AB} = mRT_2 \ln\frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$\Delta Q_{CD} = \Delta W_{CD} = mRT_1 \ln\frac{V_D}{V_C} = mRT_1 \ln\frac{V_A}{V_B} < 0$$

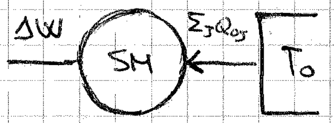
$$\Delta Q_{BC} = mc_v\left(T_1 - T_2\right) < 0$$

$$\Delta Q_{DA} = mc_v\left(T_2 - T_1\right) > 0$$

$$\eta = \frac{\Delta Q_{AB} + \cancel{\Delta Q_{BC}} + \Delta Q_{CD} + \cancel{\Delta Q_{DA}}}{\Delta Q_{AB} + \Delta Q_{DA}} = \frac{\cancel{m}R(T_2 - T_1)\ln(V_B/V_A)}{\cancel{m}RT_2\ln(V_B/V_A) + \cancel{m}c_v(T_2 - T_1)}$$

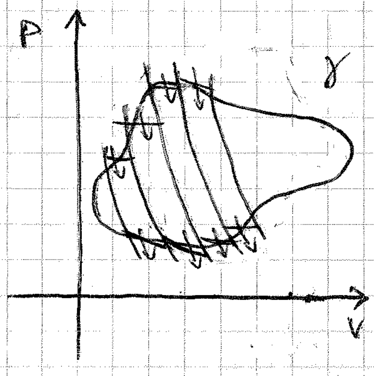
$$= \frac{R(T_2 - T_1)\ln\dfrac{V_B}{V_A}}{RT_2\ln\dfrac{V_B}{V_A} + c_v(T_2 - T_1)}$$

$$\frac{1}{T_0}\sum_J Q_{0J} = \sum_J \frac{Q_J}{T_J} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum Q_{0J} > 0$$



contraddizione con l'enunciato di Kelvin-Plank

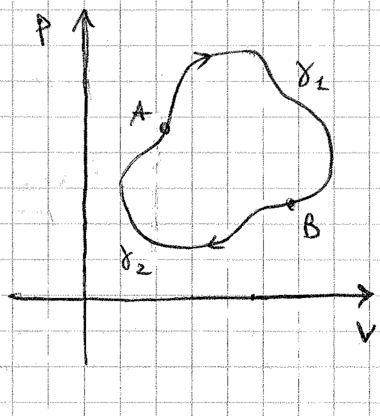
$$\Rightarrow \sum_J \frac{Q_J}{T_J} \le 0$$



$$\sum_J \frac{Q_J}{T_J} = \oint_\gamma \frac{đQ}{T} \le 0$$

L'Entropia

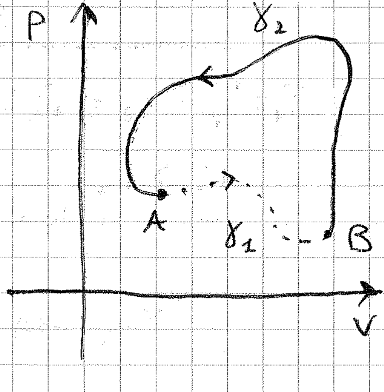
$$\frac{đQ}{T} = dS$$



1) Caso reversibile

$$\oint_\gamma \frac{đQ}{T} = \int_{A\gamma_1}^{B} \frac{đQ}{T} + \int_{B\gamma_2}^{A} \frac{đQ}{T} = 0$$

$$\int_{A\gamma_1}^{B} \frac{đQ}{T} = \int_{A\gamma_2}^{B} \frac{đQ}{T} = \int_A^B dS = S_B - S_A$$



2) Caso irreversibile

$$\oint_\gamma \frac{đQ}{T} = \int_{A\gamma_1}^{B} \frac{đQ}{T} + \int_{B\gamma_2}^{A} \frac{đQ}{T} < 0$$

$$\int_{A\gamma_1}^{B} \frac{đQ}{T} < \int_{A\gamma_2}^{B} \frac{đQ}{T} = S_B - S_A$$

$$= \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = \frac{\cancel{\Delta U_1} + P_1 \Delta V_1}{T_1} + \frac{\cancel{\Delta U_2} + P_2 \Delta V_2}{T_2} = \frac{\Delta V}{T}(P_1 - P_2) > 0$$

Entropia di un gas ideale

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dU + PdV}{T} = \int_A^B \frac{mc_v\, dT}{T} + \int_A^B \frac{mR\cancel{T}\, dV}{V\cancel{T}}$$

$$= mc_v \left[\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right]_{T_A}^{T_B} + mR \left[\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \right]_{V_A}^{V_B}$$

$$= mc_v \ln \frac{T_B}{T_A} + mR \ln \frac{V_B}{V_A} = mc_v \ln \left[\frac{T_B}{T_A} \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{R}{c_v}} \right]$$

$$= mc_v \ln \left[\frac{T_B V_B^{\frac{R}{c_v}}}{\Lambda} \right] - mc_v \ln \left[\frac{T_A V_A^{\frac{R}{c_v}}}{\Lambda} \right]$$

$$\Rightarrow S(V,T) = mc_v \ln \left[\frac{T V^{\frac{R}{c_v}}}{\Lambda} \right] = mc_v \ln \left[\frac{T V^{\gamma-1}}{\Lambda} \right]$$

- trasformazione isocora ($V = \text{cost}$)

$$\Delta S = S_B - S_A = mc_v \ln \frac{T_B \cancel{V_B^{\gamma-1}}}{T_A \cancel{V_A^{\gamma-1}}} = mc_v \ln \frac{T_B}{T_A}$$

- trasformazione isoterma ($T = \text{cost}$)

$$\Delta S = S_B - S_A = mc_v \ln \frac{\cancel{T_B} V_B^{\gamma-1}}{\cancel{T_A} V_A^{\gamma-1}} = mc_v (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$= m\cancel{c_v} \frac{R}{\cancel{c_v}} \ln \frac{V_B}{V_A} = mR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

- trasformazione isobara ($P = \text{cost}$)

$$\Delta S = S_B - S_A = mc_v \ln \frac{\cancel{P_B} V_B^{\gamma}}{\cancel{P_A} V_A^{\gamma}} = mc_v \gamma \ln \frac{V_B}{V_A}$$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO DA UNA FORZA DI ATTRITO COSTANTE

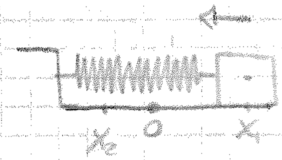
(MOTO PSEUDOARMONICO)

$$\underbrace{E_k^f}_{0} - \underbrace{E_k^i}_{0} = -(E_p^f - E_p^i) + \int_{x_i}^{x_f} F_a \, dx$$

DA x_1 A x_2

$$-\left(\frac{k}{2}A'^2 - \frac{k}{2}A^2\right) + F_a(x_2 - x_1) = 0 \qquad x_2 = -A' \quad x_1 = A$$

$$-\frac{k}{2}(A'^2 - A^2) + F_a(x_2 - x_1) = 0$$



$$-\frac{k}{2}(A' - A)(A' + A) + F_a(-A' - A) = 0$$

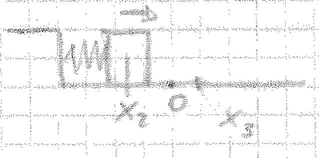
$$+\frac{k}{2}(A' - A)\cancel{(A' + A)} = -F_a\cancel{(A' + A)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A' = A - \frac{2F_a}{k}}$$

DA x_2 A x_3

$$\left(\frac{k}{2}A''^2 - \frac{k}{2}A'^2\right) - F_a(x_3 - x_2) = 0 \qquad x_3 = A'' \quad x_2 = -A'$$

$$\frac{k}{2}(A'' - A)\cancel{(A'' + A)} = F_a\cancel{(A'' + A')}$$



$$\Longrightarrow \boxed{A'' = A' - \frac{2F_a}{k}}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{tR} + Be^{-tR}\right)} \qquad \boxed{R = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

TRE CASI POSSIBILI:

I SMORZAMENTO FORTE

$\gamma^2 > \omega_0^2$ poiché $\lambda^2 > K(4 \cdot m)$

$\Longrightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$

II SMORZAMENTO CRITICO

$\gamma = \omega_0$ poiché $\lambda^2 = 4mK$

$\Longrightarrow R = 0$

$$\Longrightarrow \text{per } R \to 0 \quad x(t) \simeq e^{-\gamma \cdot t}\overbrace{\left(A + A \cdot t \cdot R + B - B \cdot t \cdot R\right)}^{\text{Sviluppo di McLaurin al I ord. di } e^x = 1 + x + o(x)}$$

$$x(t) \simeq e^{-\gamma t}\left(\underbrace{A+B}_{b} + \underbrace{(A-B)R}_{a} \cdot t\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(at + b)}$$

OSCILLATORE ARMONICO FORZATO (MOTORE)

Si rende un'oscillazione smorzata persistente per mezzo di un motore.
Il motore applica all'oscillatore una forza sinusoidale.

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 (\operatorname{sen}(\omega t))$$

$F_0 (\operatorname{sen}(\omega t)) \longrightarrow$ ha una pulsazione propria ω

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x + \frac{\lambda}{m} \dot{x} = \frac{F_0}{m} (\operatorname{sen}(\omega t))$$

Vogliamo che la nostra soluzione particolare sia $X_{sp}(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ dove ω è la pulsazione impressa dal motore. Infatti, una volta annullata la componente di smorzamento, rimane solo l'oscillazione armonica data dal motore.

Sostituisco $X_{sp}(t)$ nell'equazione:

$$-A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + 2\gamma A \omega \cos(\omega t + \phi) +$$
$$\omega_0^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) - \frac{F_0}{m} \operatorname{sen}(\omega t) = 0$$

$$(\omega_0^2 - \omega) \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + 2\gamma\omega \cos(\omega t + \phi) - \frac{F_0}{Am} \operatorname{sen}(\omega t) = 0$$

SVILUPPO SENO E COSENO:

$$(\omega_0^2 - \omega)\left(\operatorname{sen}\omega t \cos\phi + \cos\omega t \operatorname{sen}\phi\right) + 2\gamma\omega \left(\cos\omega t \cos\phi - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\phi\right) -$$
$$- \frac{F_0}{Am} \operatorname{sen}(\omega t) = 0$$

VI SONO TRE POSSIBILI REGIMI:

I)

$\omega << \omega_0$ (K PARAMETRO DOMINANTE)

$$tg\phi \cong -2\gamma \frac{\omega}{\omega_0} \cong 0 \implies \phi = 0$$

- $A \cong \frac{F_0}{m \cdot \omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$

- $x_{sp}(t) \cong A \operatorname{sen}(\omega t)$ in fase con la forza

II)

$\omega >> \omega_0$ (MASSA DELL'OSCILLATORE DOMINANTE)

$$tg\phi \cong \frac{2\gamma}{\omega} \cong 0 \implies \phi \cong \pi \quad (\cos\phi \cong -1)$$

- $A \cong \frac{F_0}{m \cdot \omega^2}$

- $x_{sp}(t) \cong A \operatorname{sen}(\omega t + \pi)$ in opposizione di fase con la forza.

III)

$\omega = \omega_0$ (RISONANZA = γ (COEFF. SMORZ.) DOMINANTE)

$$tg\phi = \pm\infty \implies \phi = \frac{\pi}{2}$$

- $A \cong \frac{F_0}{2\gamma m \cdot \omega}$

- $x_{sp}(t) \cong A \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ in quadratura di fase

$$\operatorname{sen}\Phi = \frac{tg\Phi}{\sqrt{1+tg\phi}} = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle P(t)\rangle = \frac{-A\cdot F_0\cdot\omega}{2}\cdot\frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Sapendo che $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{\gamma F_0^2}{m}\cdot\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega)^2+4\gamma^2+\omega^2}}$$

LA POTENZA MEDIA HA UN MASSIMO IN RISONANZA $(\omega=\omega_0)$