



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 268

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Raguseo

MATERIA : Strutture III

Prof. Pistone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

5/11/10

Argomenti: 1) Sicurezza

2) CONTROVENTATURA

3) METODO degli SPOSTAMENTI per le strutture iperstatiche

4) CEMENTO ARMATO

Libri: accedere al portale dell'anno scorso \rightarrow Sono dispense. I libri possono essere consultati.

2008: testo unico delle norme sulle costruzioni \rightarrow viene trattato anche il problema sismico.

\rightarrow è applicato già da 1 anno. Prevede che tutto il territorio nazionale sia sismico.

Bassa sismicità prevede che non si verificano terremoti troppo forti. (Piemonte ad esempio) \Rightarrow e.a. ogni 1000 anni. Non è quindi logico progettare in base alla sismicità in Piemonte. Zone al centro della placca \rightarrow no sismicità. Zone a contatto con essa \rightarrow bassa sismicità. Esistono degli appositi PROGRAMMI di calcolo \times la sismicità.

Controventi \rightarrow risposta data al terremoto.

ESAME. Prova scritta (facoltativa) con il calcolo con metodo degli spostamenti. Se superata permette di non portare quest'argomento all'esame. \rightarrow che è in forma orale + esercizi vari. NORMATIVA \rightarrow parte introduttiva sulla sicurezza, problemi dei carichi, acciaio e c.a. La prova facoltativa (3h) vale poi \times tutto l'anno.

METODI della SICUREZZA. (di stima della sicurezza strutturale). Esistono azioni esterne e la costruzione che vi deve resistere. INPUT: azioni esterne \rightarrow peso proprio

! ACCIAIO \rightarrow trascurabile risp. ai carichi \rightarrow carichi

! C.M. ARMATO \rightarrow la struttura porta se stessa
(per parti verticali)

L'edificio è caratterizzato dalla sua geometria \rightarrow quella della struttura. L'involucro è qll che conferisce i carichi \rightarrow es. pavimenti, muri di contenimento. La geometria strutturale è invece delegata a portare i carichi.

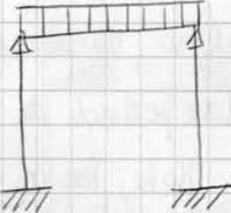
TEORIA dell'ELASTICITÀ \rightarrow deformazione \propto sollecitazione. limiti \rightarrow ACCIAIO (es).

800 \rightarrow sviluppo della costruzione metallica \rightarrow nasce la teoria. Costr. muratura \rightarrow la proporzionalità sussiste per valori bassi di deformazione \rightarrow a $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ della

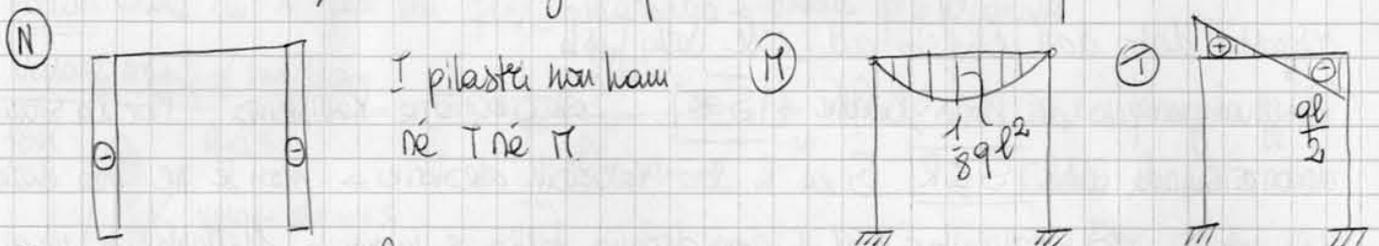
METODO TENS. AMMISSIBILI. L'approccio è di tipo deterministico \Rightarrow si basa sui valori di azioni e sollecitazioni. Per restare sicuri si considerano valori molto elevati.

PARAMETRI \Rightarrow unità spc. la tensione. Es. ho la tens. ammissibile del materiale. Acciaio \rightarrow divido per 3 la tensione di snervamento. Se ho la tens. di snervamento come riferimento, ciò come risultato un CALCOLO ELASTICO \rightarrow valido per le strutture in acciaio, da adattare \times quelle in cemento armato.

Bisogna determinare la tensione in ogni punto e confrontare i valori massimi con la tensione ammissibile. \Rightarrow il max dei max $<$ di quella ammissibile.

Es.  \Rightarrow 2 pilastri con trave semplicemente appoggiata. È sottoposta a 2 carichi: neve e peso proprio.
 $\sigma_{adm} = 160 \text{ N/mm}^2$

Devo tracciare diagrammi di taglio, sforzo rotazionale e momento flettente.



Sul pilastro N è uniforme $\rightarrow \sigma$ è costante su tutta la sezione.

$$\sigma_{pil} = \frac{q l}{2 A_{pil}} \rightarrow \text{sezione del pilastro}$$

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$$

$$\sigma_{max} = \frac{1}{8} q l^2 \cdot \frac{1}{J} \cdot y = \frac{1}{8} q l^2 \cdot W \rightarrow \text{modulo di resistenza}$$

$$\sigma_{pil}, \sigma_{max} < \sigma_{adm}$$

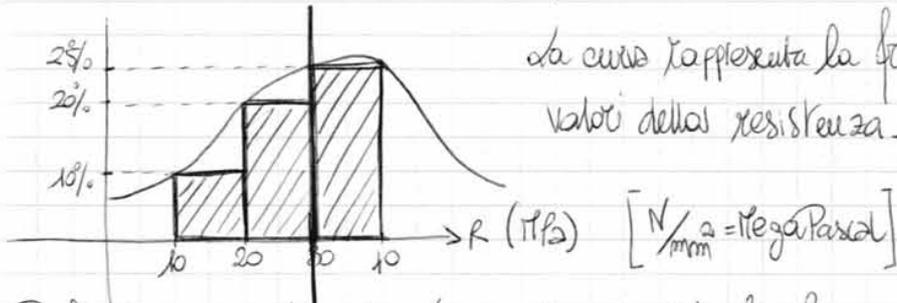
! Se quella del pilastro è più piccola di quella max, la posso scartare ed effettuare una sola verifica.

APPROCCIO PROBABILISTICO le variabili sono prese in modo probabilistico.

Resistenza \rightarrow non prendo più valore deterministico, ma STATI LIMITE:

- ① SLO \rightarrow quando la struttura crolla;
- ② SLS \rightarrow stati limite di esercizio \rightarrow la struttura non è più utilizzabile.

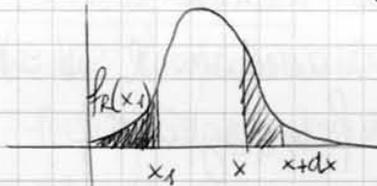
Si accetta un livello di sicurezza tale \times cui il crollo sia allontanato.



La curva rappresenta la frequenza con cui si presentano i valori della resistenza.

Prefissato un valore di x (in questo caso R) la frequenza cumulata racchiude tutti i valori inferiori alla x prefissata. Tutto quello che non la supera è accettabile!

DENSITÀ di PROBABILITÀ \Rightarrow probabilità che R sia compresa tra x e dx .



$\text{diagonal lines} \rightarrow$ fz. cumulata

$\text{diagonal lines} \rightarrow$ fz. densità di probabilità

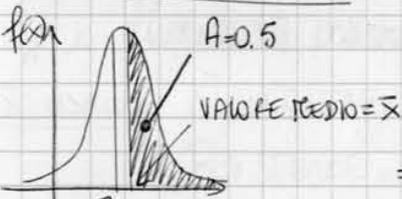
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

PARAMETRI delle FUNZIONI DENSITÀ di PROBABILITÀ

Moda: valore di x per cui $f(x)$ è massimo \rightarrow valore più frequente

Valore medio/media:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \Rightarrow \text{è la formula che calcola la posiz. del baricentro di un'area}$$



\Rightarrow Area tot. sottesa alla curva $f(x)$

è unitaria $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) = 1$

$F(+\infty) = 1$ certezza di avere un valore $+\infty$

$F(-\infty) = 0$ probabilità nulla di avere un valore $+\infty$ (perché sono prima della curva).

VARIANZA $\Rightarrow S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \rightarrow$ momento d'inerzia (integrale dell'area per la distanza bar-sistema riferimento).

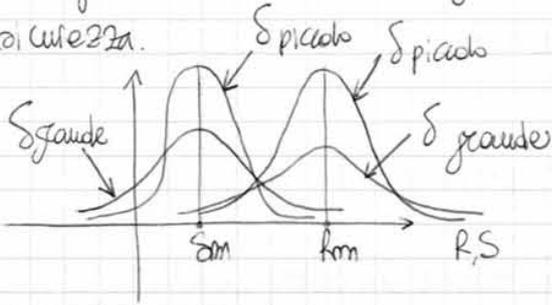
Se la varianza è piccola, tutta la curva è compattata vicino al Valore medio, se è grande ho una curva scompareggiata. Quindi la varianza caratterizza la nostra curva. Noi abbiamo bisogno di varianze piccole \Rightarrow è come ragionare con il valore medio. (es. l'acciaio ha varianze piccole).

SCARTO TIPO $\Rightarrow S = \sqrt{S^2}$

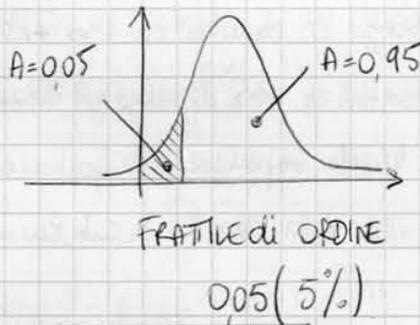
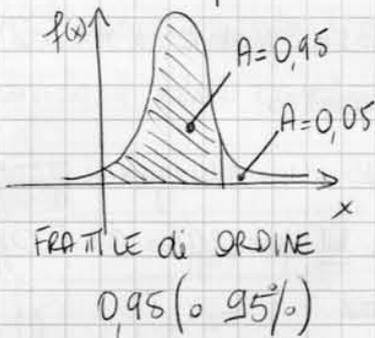
COEFFICIENTE di VARIANZA $\Rightarrow \delta = S/\bar{x}$

γ è il coefficiente di sicurezza \Rightarrow distanza fra le 2 curve di R ed S.

Come scegliere R^* ed S^* ? Bisognerebbe porre $S^* = S_{med}$, $R^* = R_{med}$, $\gamma = \gamma_0$ coeff. centrale di sicurezza.



CONCETTO di FRATILE \rightarrow è il valore di resistenza/sollecitazione (è momento flettente/taglio...) che ha la probabilità "p" di essere minorato.



x_k è frattile di ordine p se: $\text{Prob}\{x < x_k\} = p$

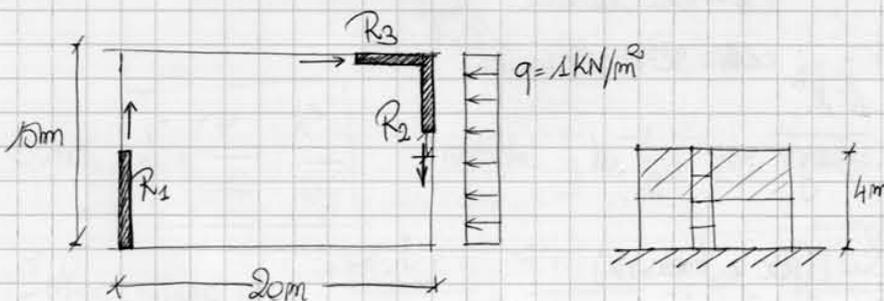
Si usano: SOLLECITAZIONI \Rightarrow frattile 95% (solo il 5% di probabilità che S sia $>$).

RESISTENZE \Rightarrow frattile 5% (solo il 5% che R sia $<$).

Una resistenza caratteristica ha la possibilità del 5% di essere minorata ("caratteristica" perché si parla di frattili). La sollec. caratteristica ha il 95% di possibilità di essere minorata \Rightarrow sono più sicuro! (solo il 5% può essere maggiore).

Quindi: $S_k = \text{frattile } 95\%$
 $R_k = \text{frattile } 5\%$

15/11/10



$\phi = 1 \cdot \frac{4}{2} = 2 \text{ kN/m}$ (sforzo che giunge al suolo \rightarrow metà è scaricato sul fondo).

$$\begin{aligned} \sum H = 0 &\rightarrow R_3 - p \cdot 2 = 0 \\ \sum V = 0 &\rightarrow R_1 - R_2 = 0 \\ \sum M_0 = 0 &\rightarrow -20R_2 - 15R_3 + p \cdot 2 = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} R_3 &= p \cdot 2 \\ R_1 &= \frac{4}{5} p \cdot 2 = R_2 \end{aligned} \right.$$

$$\Delta p = \overline{BB'} + \overline{BB''} \Rightarrow \alpha l_p \cdot \Delta T = \frac{H \cdot l_t}{EA_t} + k \cdot \frac{H h^3}{EJ}$$

$$\alpha (\text{acciaio}) = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad E_a = 2100000 \text{ daN/cm}^2$$

$$H \left(\frac{l_t}{EA_t} + k \cdot \frac{h^3}{EJ} \right) = \alpha \cdot l_p \cdot \Delta T$$

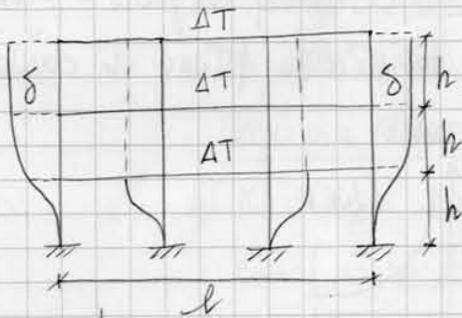
$$H \approx \frac{\alpha \cdot l_p \cdot \Delta T}{\frac{l_t}{EA_t} + k \cdot \frac{h^3}{EJ}} \Rightarrow \text{"governano"} \Delta T \text{ ed } EJ$$

$$H \approx \frac{\alpha \cdot l_p \cdot \Delta T \cdot EJ}{k h^3}$$

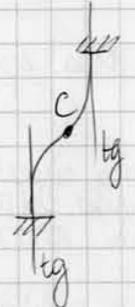
perché $\overline{BB''}$ è molto più piccolo

! Per trovare k calcolo il momento d'incastro in sommità e la deformazione alla base \Rightarrow divido il valore trovato per $\frac{1}{3}$ e ottengo k . Effetto il calcolo con il PLV.

ES. 2



$$2\delta = \alpha \cdot l \cdot \Delta T \rightarrow \delta = \frac{\alpha l \Delta T}{2}$$



Edomua che ha ty verticale ($\times 2$)

C è il flesso \Rightarrow in C il momento è nullo. I punti con M nullo sono cerniere.
(cambia concavità).



da forza è uno sforzo \rightarrow come se si trasmettesse in C.

$$f(\text{freccia}) = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{EJ} = \frac{\delta}{2}$$

$$\text{! Nel nostro caso } \frac{\delta}{2} = \frac{P \cdot (\frac{h}{2})^3}{EJ}$$

Pseudo primo tratto \Rightarrow

$$\text{Quindi } \Rightarrow \delta = \frac{P}{12} \cdot \frac{h^3}{EJ}$$

(anziché $\frac{1}{3}$ ho $\frac{1}{12}$ \rightarrow per mezzide doppiamente in castrato).

$$\text{Infine assieme che } \frac{\alpha \cdot l \cdot \Delta T}{2} = \frac{P h^3}{12 EJ} \Rightarrow P = \frac{6 EJ \alpha l \Delta T}{h^3}$$

È lo sforzo.



Il momento flettente è massimo all'incastro. $M = P \cdot \frac{h}{2} = \frac{3 EJ \alpha l \Delta T}{h^2} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow$ mom. d'incastro a causa di ΔT .

Carico d'incendio ha il tempo di svilupparsi. RESISTENZA AL FUOCO. Resistenza: capacità di mantenere le proprie doti a fronte di un incendio (pil. acciaio coperto da schiume o vernici per proteggerlo → resistere x 60 min prima di perdere le capacità strutturali). Da 15 min a 6 ore. Per ambienti vasti ci sono zone soggette a incendio più numerose. Bisogna differenziarle. (es. in un ufficio → zona archivio) → più a rischio → va trattata diversamente. PROGETTAZ ANINCENDIO → per una scuola è più importante piuttosto che per un archivio (anche se qst è più a rischio).

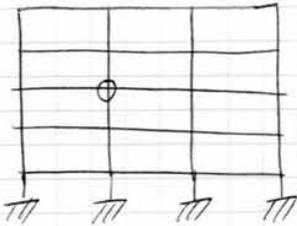
- 5 livelli:
- 1) nessun requisito di resist. al fuoco ⇒ se crollano le strutture non è così importante (es. magazzino in cui non ci sono persone ma solo attrezzi).
 - 2) mantenim. Requisiti per periodo suff a garantire l'evacuazione in luogo esterno.
 - 3) mantenim. requisiti per periodo congruo con la gestione dell'emergenza ⇒ strutt. devono mantenersi costanti x la durata dell'incendio ⇒
- Caso più frequente.
- 4) Resistenza x garantire limitati danni dopo l'incendio → es. gratta cielo (ha v. economico maggiore).
 - 5) Resistenza x garantire totale funzionalità dopo incendio (vedi centrali nucleari).

Quanto occorre x garantire il tutto? Es 2 ⇒ strutt. resistono almeno per 30 min o un'ora. Liv 4 ⇒ 3 o 4 ore. Liv. 5 ⇒ tempo infinito. Quindi la resistenza è fondamentale x garantire il minimo (sicurezza). Classi di resistenza: fino alle 6h.

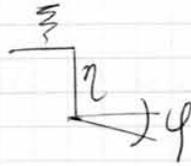
Progetto: la struttura deve risp. il suo livello per un tempo prescelto. da classe di resistenza va correlata al livello. Es. Liv 2 → classe di R: 1h (ma può apparire pure anche a un altro livello → es 4 → ma in qst caso le strutture richiedono più limitate riparazioni rispetto al liv. 2).

- Procedura da seguire:
- 1) individuare incendio appropriato alla costruzione (disegno e valutare la curva nominale)
 - 2) analisi evoluz. temperature in elem. strutturali ⇒

29/11/10



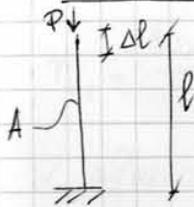
Prendo il modo evidenziato.



! ottengo una rototraslazione.

Sollecitazioni: N, T ed M. Se la struttura è concepita nello spazio abbiamo 3 traslazioni e 3 rotazioni possibili \Rightarrow ottengo 6 spostamenti.

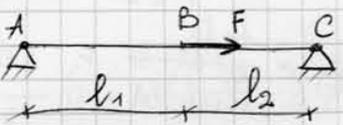
Es. (con metodo delle forze)



$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EA}$$

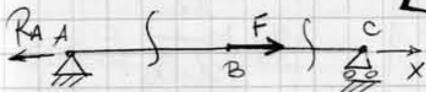
! $\frac{l}{EA}$ è la cedevolezza, Δl è lo spostamento subito a causa di P (deformazione)

Es



Struttura è iperstatica \rightarrow A e C non possono muoversi.

Bisogna renderla isostatica.



Dal punto di vista del sist. forze, le soluzioni sono infinite \Rightarrow qualunque x metta ci sarà sempre una forza in grado di controbilanciarla.

d'unica forza che soddisfa la congruenza (spost. in C = 0) è la P_A . $\sum z_C = 0$.

Non posso avere né η né φ . Resta quindi solo lo sforzo normale.

\overline{AB} si allunga di Δl_1 (causato da F ed x).

$$\Delta l_1 = \frac{(F+x) \cdot l_1}{E \cdot A}$$

\overline{BC} si allunga di Δl_2 (causato da x).

$$\Delta l_2 = \frac{x \cdot l_2}{E \cdot A}$$

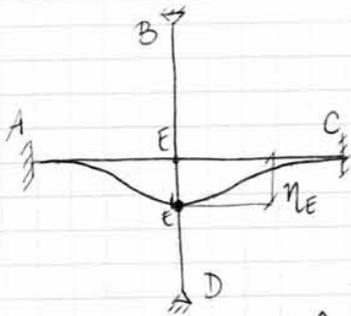
La somma di Δl_1 e Δl_2 deve essere 0 ($\sum z_C = 0$), altrimenti C si sposterebbe.

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \Rightarrow \frac{(F+x)l_1}{EA} + \frac{x l_2}{EA} = 0$$

$$\frac{F l_1}{EA} + \frac{x l_1}{EA} + \frac{x l_2}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow x = - \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot F$$

Il segno meno ci dice di invertire il senso di x.



È l'unico spostamento perché la struttura è simmetrica rispetto all'asta verticale. Unica incognita è l'abbassamento di E in E'. Si genera taglio, che a sua volta crea il suff. scrivere un'eq. alla traslazione verticale.

Con il d.S.: $T_{EA} \uparrow$ $N_{EB} \uparrow$ $T_{EC} \uparrow$ $N_{ED} \uparrow$ $F - N_{EB} - N_{ED} - T_{EA} - T_{EC} = 0$

$$\eta_E = \frac{N_{EB} \cdot \bar{EB}}{E \cdot A}$$

$$\eta_E = \frac{N_{ED} \cdot \bar{ED}}{E \cdot A}$$

d'inflessione parte e arriva con l_p orizzontale in E' (perché è una cerniera).



$$\frac{2EA}{l} \cdot \delta + \frac{2 \cdot 2EJ}{l^3} \cdot \delta = P \Rightarrow \delta = \frac{P}{\frac{2EA}{l} + \frac{4EJ}{l^3}}$$

03/12/10

TEOREMA DI MOHR

$$\left[\frac{dM}{dz} = T \right] \quad \left[\frac{dM}{dz} = T^* \right]$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -\frac{q}{ES} = -q^*$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q$$

È un'UGUALIANZA FORMALE TRA LE DUE FUNZIONI



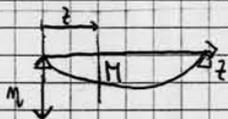
EQ. DELLA LINEA ELASTICA

Lo la derivata seconda di come risultato il corso invertito di segno

DIMOSTRAZIONE

$$M = -ES \cdot v''$$

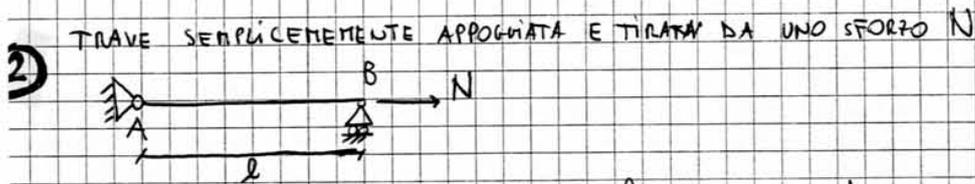
$$v'' = -\frac{M}{ES}$$



$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -\frac{q}{ES}$$

$$\frac{dM}{dz} = q = a$$

abbassamento in funzione dello spostamento



li interessa solo la rigidità axiale, perché non c'è rotazione φ

$$\delta_B = \frac{Nl}{EA}$$

Se pongo $N=1$ ottengo:

$$C = \frac{l}{EA}$$

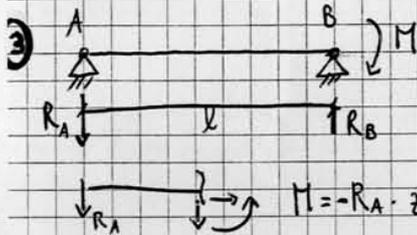
CEDEVOLEZZA

$$R = \frac{EA}{l}$$

RIGIDEZZA

$$M_B = 0$$

$$\varphi_B = 0$$



TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA E SOGGETTA A MOMENTO M
 Il ragionamento varrebbe anche se ci fosse una cerniera e un carrello (i sostituti)

$$M = -R_A \cdot z$$

TRAVE AUSILIARIA (non cambia rispetto alla prima)

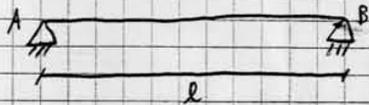
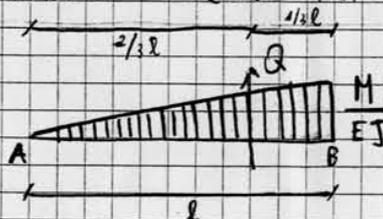


DIAGRAMMA DI MOMENTO 1° TRAVE



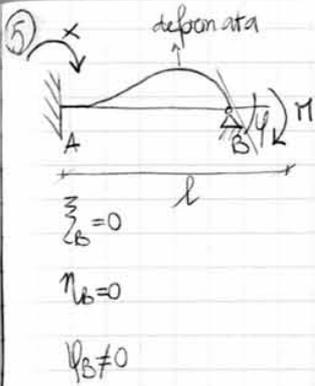
DIAGRAMMA MOMENTO TRAVE AUSILIARIA



$$\sum \delta_B = 0$$

$$M_B = 0$$

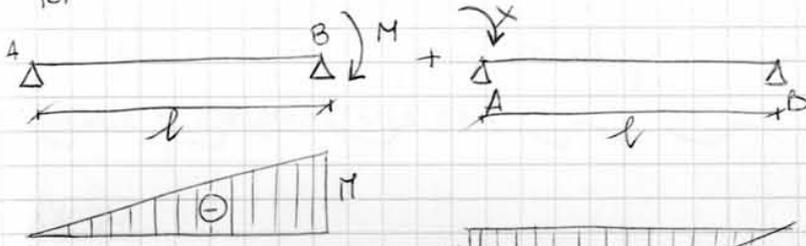
6/11/10



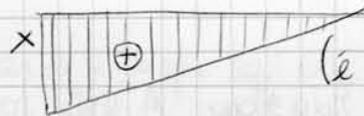
Il mom. d'incastro, dal momento che la trave tende ad alzarsi, deve avere il verso indicato.

La trave è INCASTRATA APPOGGIATA. Può essere trasformata in una trave semplicemente appoggiata. (dove incastro prima π , poi x).

Si segue il principio della sovrapposizione degli effetti.

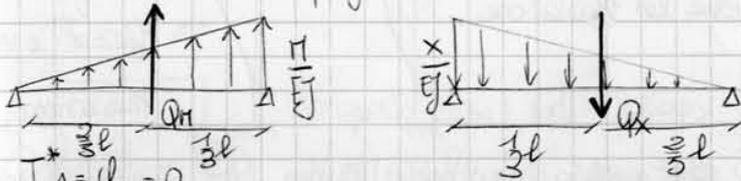


(è \ominus perché le fibre inferiori sono compresse)



(è \oplus perché le fibre inferiori sono tese)

Per trovare x impongo che la rotazione in A sia ϕ . (perché ho l'incastro).



$$\varphi_A = -\frac{M}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{x}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

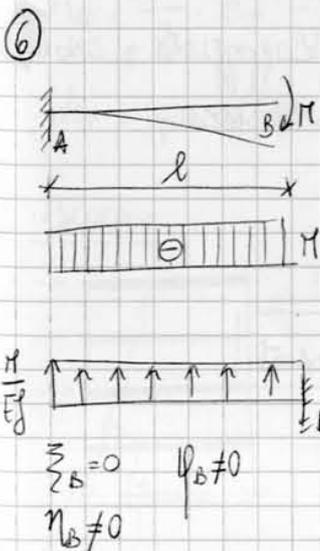
$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi_B = \varphi_B^* = -\frac{\pi}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\pi}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\pi l}{3EJ} + \frac{\pi l}{6EJ} = \frac{-2\pi l + \pi l}{6EJ} = -\frac{\pi l}{6EJ}$$

$$\boxed{R = \frac{4EJ}{l}}$$

$$\boxed{C = \frac{l}{4EJ}}$$

! R e C si prendono sempre in modulo.
 ↓
 rigidità cedevolezza

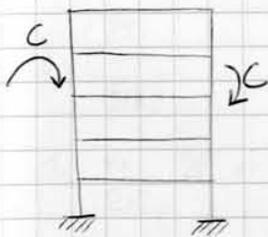


Il momento è costante per tutta la trave.

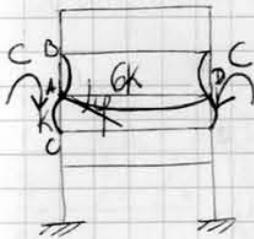
Prendo un estremo libero ed essendo una mensola, scambio l'incastro (lo metto in B).

Il momento quindi si ripartisce in funzione delle varie aste. Quindi data una coppia in un nodo la ripartizione delle rigidità è quella delle singole aste. La somma dei momenti calcolati per le singole aste deve essere uguale alla coppia applicata. φ aumenta al diminuire della rigidità delle aste (e viceversa). Le deformazioni avvengono grazie alla presenza delle rigidità. Più grande è π più grande è φ (rotazione), altrimenti, tenendo fisso φ , aumento le rigidità \Rightarrow nei 2 casi ottergo il medesimo risultato. Se tengo fisso π , se aumenta φ diminuisce k (e viceversa).

Esempio:



La presenza di 2 coppie equivoche può essere determinata dal vento (se fisso opposte, sarebbe il caso della presenza di carico).



In questo caso i nodi possono RUOTARE per simmetria.

N, π e deformata sono tutti simmetrici. Trascuriamo eventuale sforzo normale sull'asta. Il solco è $6W(es)$ più rigido dei pilastri. Metto 2 k perché considero 2 pilastri (sopra e sotto).

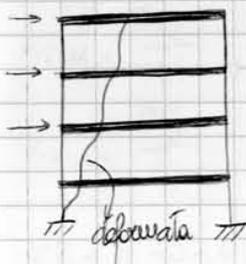
$$\varphi = \frac{C}{\sum k_i} = \frac{C}{k+k+6k} = \frac{C}{8k}$$

$$M_{Ab} = M_{Ac} = k \cdot \varphi = \frac{k}{8k} \cdot C = \frac{1}{8} C$$

$$M_{D0} = \frac{3 \cdot 6k}{4 \cdot 8k} \cdot C = \frac{3}{4} C$$

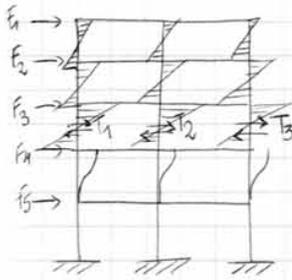
La coppia va per $\frac{1}{8}$ su ciascuno dei 2 montanti e per $\frac{3}{4}$ sul traverso.

Esempio:



Disegno i solai molto più spessi dei pilastri.

$\rightarrow M_{D0}$ (caso 4)



Taglio i pilastri → che devono essere in grado di reagire alle forze orizzontali.

$$\sum T_i = \sum F_i$$

$T_1 + T_2 + T_3 = F_1 + F_2 + F_3$ (non F_4 ed F_5 perché ciò che sta sotto non si considera).

da deformazione del solaio parte e arriva em tg verticali.

I Solai sono infinitamente rigidi. Tendono ad essere gettati con le travi principali. Centro del pilastro: ipotizzo la cerniera.

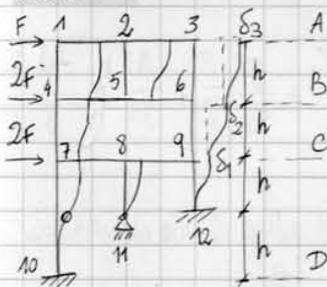
$\sum F_i = \sum k_i \cdot \delta$ δ è lo scostamento di un piano rispetto all'altro (non considera quello che succede al di sotto).

$$\delta = \frac{\sum F_i}{\sum k_i}$$

$$T_1 = \frac{k_1}{\sum k_i} \cdot \sum F_i \Rightarrow \text{valore del singolo taglio} \Rightarrow T_1 = k_1 \cdot \delta_1$$

Il diagramma di taglio aumenta spostandosi dalla sommità alla base (aumenta n° di forze F).

ESERCIZIO



Incastrato incastrato → deformazione: (1 tg verticale)

Incastrato incernierato → deformazione: (1 tg verticale)

Determinare:
 • T_{ij}
 • δ_{TOT}
 • M

$$T_{1-4} = T_{2-5} = T_{3-6} = \frac{F}{3} \quad (\text{perché il taglio complessivo } T_{1-4} + T_{2-5} + T_{3-6} \text{ vale } F, \text{ ma il singolo è } \frac{F}{3})$$

$$T_{4-7} = T_{6-9} = \frac{3F}{2}$$

$$F_{c-D} = 5F$$

$$k_{1-10} = \frac{12EJ}{(2h)^3} = \frac{12EJ}{8h^3} = \frac{3}{2} \frac{EJ}{h^3}$$

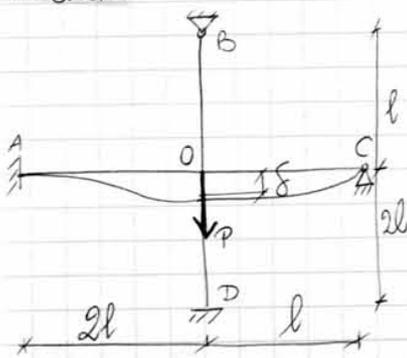
$$k_{8-11} = \frac{2EJ}{h^3}$$

$$k_{9-12} = \frac{12EJ}{h^3}$$

$$\sum k_i = \left(\frac{3}{2} + 3 + 12 \right) \cdot \frac{EJ}{h^3} = \frac{33}{2} \frac{EJ}{h^3}$$

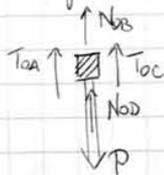
13/12/2016

Esercizio



Ho un carico verticale in O. Unica possibilità di movimento è una traslazione verso il basso (δ).

Bisogna scrivere equilibrio per O.



\uparrow è sostenuta dalle altre 4 forze e ha verso contrario ad esse.

Equilibrio in O: $N_{OB} + N_{OD} + T_{OC} + T_{OA} = P$

$$N_{OB} = \frac{EA}{l} \cdot \delta$$

$$N_{OD} = \frac{EA}{2l} \cdot \delta$$

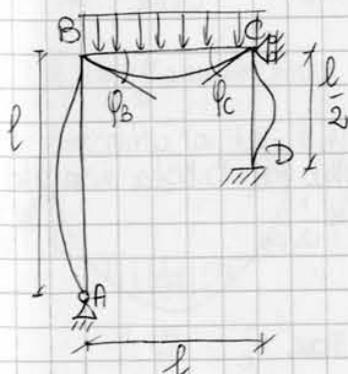
$$T_{OA} = \frac{12EJ}{(2l)^3} \delta = \frac{3EJ}{2l^3} \delta$$

$$T_{OC} = \frac{3EJ}{l^3} \delta$$

$$\left(\frac{EA}{l} + \frac{EA}{2l} + \frac{3}{2} \cdot \frac{EJ}{l^3} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \cdot \delta = P \Rightarrow \delta = \frac{P}{\left(\frac{5EA}{2l} + \frac{9EJ}{2l^3} \right)}$$

Sostituisco poi δ nelle forze.

Esercizio



da struttura si può spostare a destra o a sinistra \Rightarrow occorre aggiungere un altro vincolo (carrello in C). \Rightarrow le incognite sono solo più 2.

Per effetto del carico uniformemente distribuito la trave di sopra è portata a "impanciarsi". Su AB parte con tg verticale in B, su CD parte e arriva con tg verticale.

Per effetto del carico, AB e CD si accorciano (le deformazioni flessionali sono decisamente più grandi degli accorciamenti \Rightarrow quindi li trasuro). Accorciamenti: centesimi di mm; Deformazioni flessionali: decimi di mm. φ_B e φ_C sono le 2 incognite.

$$d) M_{CD} = \frac{4EJ}{L} \varphi_C = \frac{8EJ}{L} \varphi_C$$

=> ho quindi trovato le 4 equazioni di legame. (a), b), c), d)).

Sostituiamo i momenti nel sistema precedente, e abbiamo incognite φ_B e φ_C .

$$\varphi_B = \frac{7}{480} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = \frac{3}{320} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$M_{BC} = \frac{19}{480} ql^2$$

$$M_{BA} = \frac{7}{160} ql^2$$

$$M_{CB} = \frac{1}{120} ql^2$$

$$M_{CD} = \frac{3}{40} ql^2$$

$$M_{BC} + M_{BA} = \frac{19}{480} ql^2 + \frac{7}{160} ql^2 = \frac{1}{12} ql^2 \rightarrow \text{verifica}$$

$$M_{CB} + M_{CD} = \frac{1}{120} ql^2 + \frac{3}{40} ql^2 = \frac{1}{12} ql^2 \rightarrow \text{verifica}$$

Essendo i mom. positivi vuol dire che abbiamo ipotizzato il verso giusto.

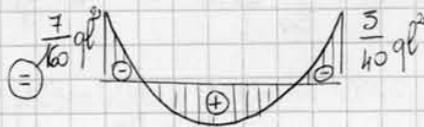
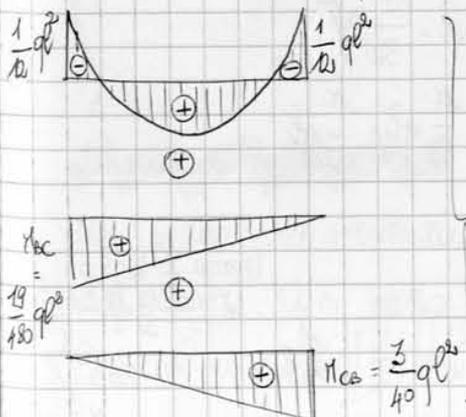
Se la coppia applicata è oraria, la reazione sarà contraria.



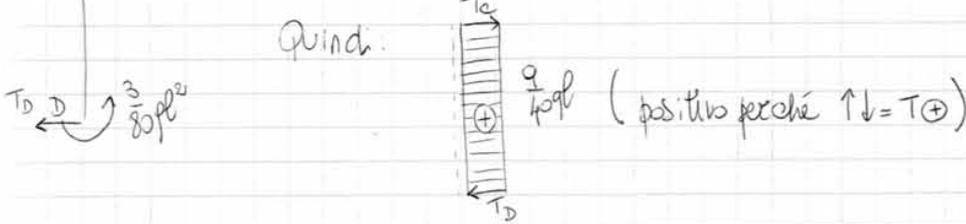
$$\left(\frac{1}{12} - \frac{19}{480} \right) ql^2 = \frac{7}{160} ql^2 = M_{BA} \text{ finale}$$

$$\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{120} \right) ql^2 = \frac{3}{40} ql^2 = M_{CD}$$

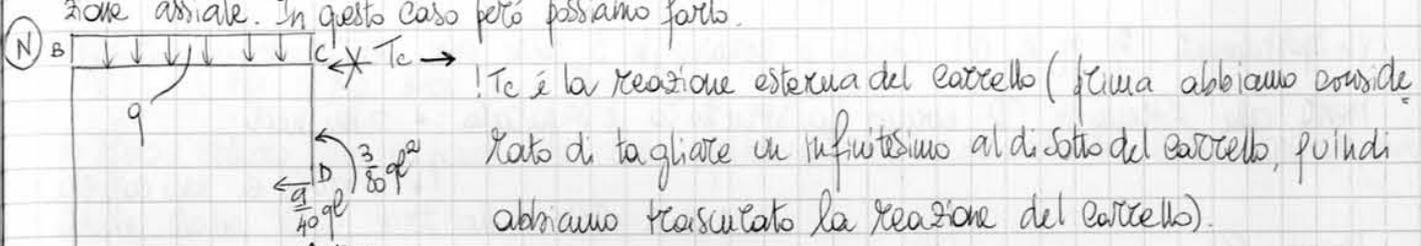
Il diagramma finale dell'asta è dato da somma di 2 mom. di incastro perfetto, da coppia concentrata in B, coppia concentrata in C.



$$\sum M_c = 0 \Rightarrow \frac{3}{40} ql^2 + \frac{3}{80} ql^2 - T_c \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow T_c = \left(\frac{3}{40} ql + \frac{3}{80} ql \right) \cdot 2 = \frac{6+3}{80} ql \cdot 2 = \frac{9}{40} ql$$

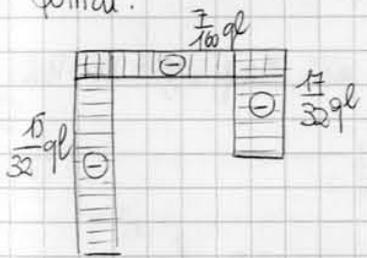


Tracciare lo sforzo normale non è sempre possibile perché richiede di conoscere la deformazione assiale. In questo caso però possiamo farlo.

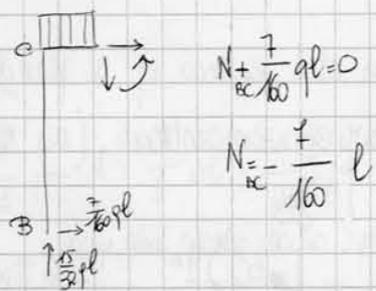


$$\sum X = 0 \Rightarrow \frac{7}{160} ql - \frac{9}{40} ql - T_c = 0 \Rightarrow T_c = -\frac{9}{40} ql + \frac{7}{160} ql = -\frac{29}{160} ql \text{ (quindi invertito il segno).}$$

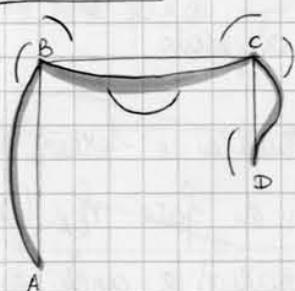
Quindi:



Per la asta BC:



DEFORMATA



LA MATRICE DI RIGIDEZZA

Nel piano una struttura iperstatica è pensata come serie di aste collegate fra loro da nodi. Ogni nodo mi dà 3 reazioni di vincolo. (e ha 3 GdL).
 Ciascun nodo ha 3 componenti di spostamento; in termini di forze ha 3 vincoli

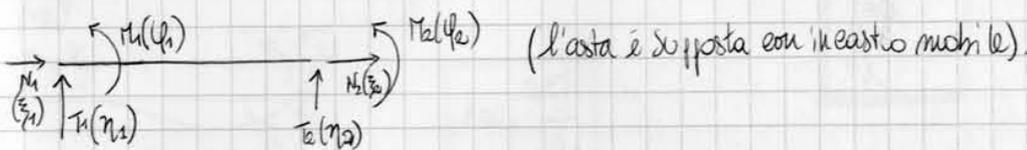
rigidezze applicate. In termini matriciali: $[F_i] = \{K_{ij}\} \cdot [s_j]$
 @ rigidezze della struttura

$$\begin{matrix} N_1 \\ T_1 \\ \varphi_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \varphi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \varphi_2 \end{matrix}$$

Lo sforzo assiale non dipende solo dallo spostamento determinato dal carico assiale, ma anche dalle forze verticali e dalle rotazioni.

Se so che $N_1 = K_{11} \cdot \xi_1$ tengo conto dello spostamento ξ_1 ma tutto il resto è bloccato.

20/12/16



$$N_1 = K_{11} \xi_1 + K_{12} \eta_1 + K_{13} \varphi_1 + K_{14} \xi_2 + K_{15} \eta_2 + K_{16} \varphi_2$$

$\xi_1 = \Delta l = \frac{Nl}{EA} \rightarrow N = \frac{EA}{l} \Delta l = \frac{EA}{l} \xi_1$
 forza che nasce dallo spostamento cui tutto in 1 (considerando bloccati gli altri spostam.)

K_{11} vale quindi $\frac{EA}{l}$ $K_{11} = EA/l$

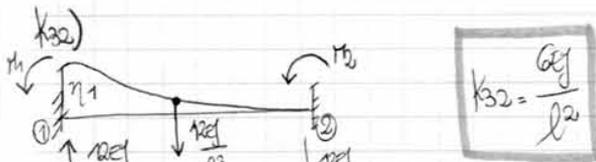
K_{12} vale ϕ perché non nascono sforzi assiali.

K_{13} vale ϕ perché non nascono sforzi assiali.

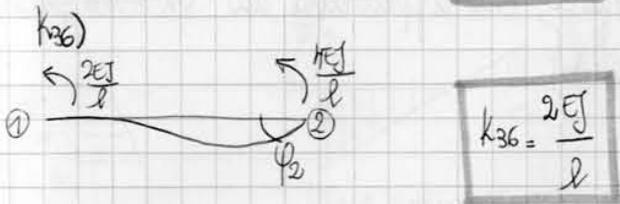
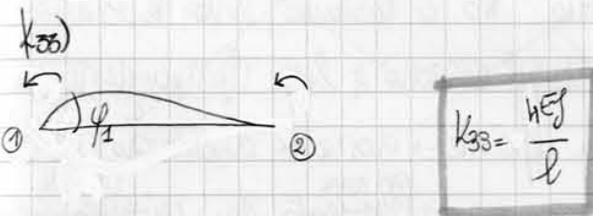
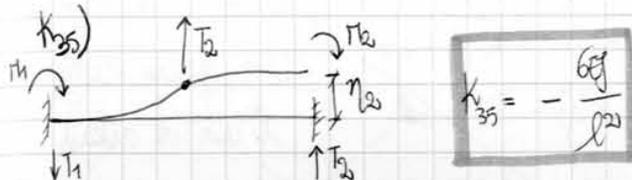
$$\xi_2 = \Delta l = -\frac{Nl}{EA} \rightarrow N = -\frac{EA}{l} \Delta l = -\frac{EA}{l} \xi_2$$

! questa forza è uguale e contraria a N_2 (quindi il segno è negativo). La forza si genera perché io continuo a considerare il modo l !

$K_{14} = -\frac{EA}{l}$



! Trasferisco il taglio $\frac{12EJ}{l^3}$ nel punto di flesso (al centro della trave).
 $M_1 = \frac{12EJ}{l^3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{6EJ}{l^2}$



Quindi, sostituendo i valori di k ottenuti, avrò:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & \dots & \dots \end{array} \right.$$

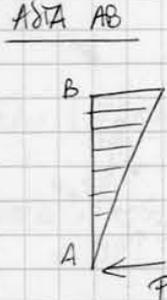
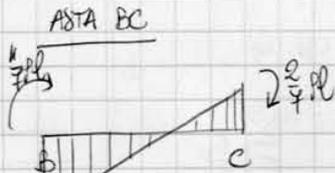
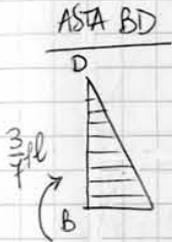
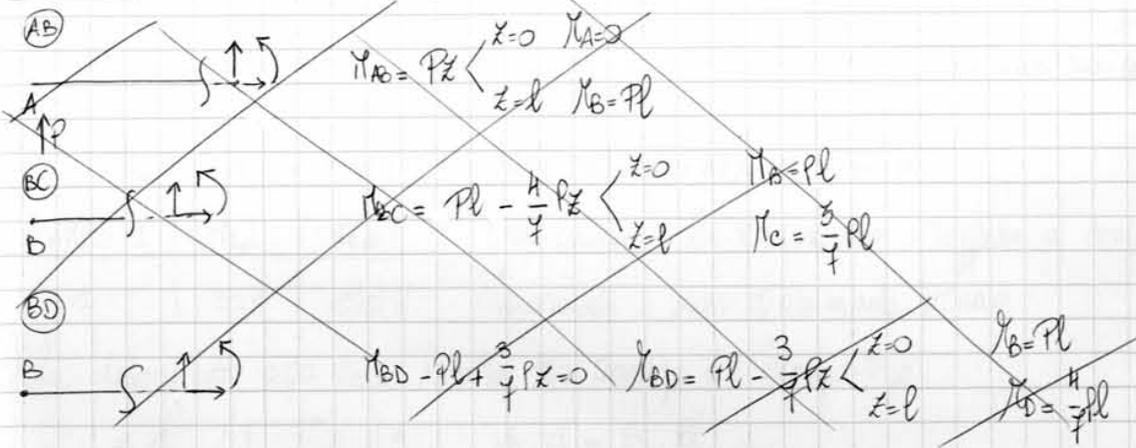
! la matrice è simmetrica rispetto alla diagonale.

$$M_{BD} = \frac{3Pl}{l} \cdot \frac{Pl^2}{7} = \frac{3}{7} Pl$$

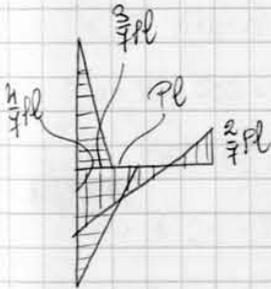
$$M_{BC} = \frac{4Pl}{l} \cdot \frac{Pl^2}{7} = \frac{4}{7} Pl$$

VERIFICA: $M_{BD} + M_{BC} = \frac{3}{7} Pl + \frac{4}{7} Pl = Pl$

MOMENTO (nella convenzione è sempre ϕ !)

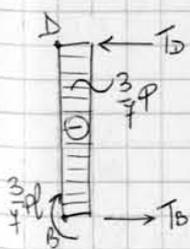


! In C il momento è la metà di quello in B ed è opposto.



TAGLIO

ASTA BD



Il taglio è derivato dalla distribuzione del momento flessionale!

$T_B - T_D$ è la coppia resistente a $\frac{3}{7} Pl$.

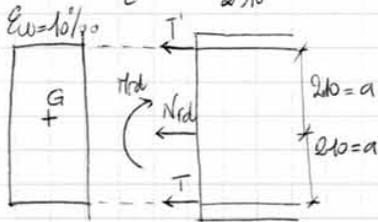
La forza P è assiale rispetto a BC quindi non ha influenza sul taglio ma solo sullo sforzo normale in BC. (lo sforzo di taglio è trascurabile perché piccolissimo).

$$T_D \cdot l - \frac{3}{7} Pl = 0 \quad T_D = \frac{3}{7} P$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\epsilon_{syd} = \frac{f_{yd}}{E} = \frac{391,3}{2 \cdot 10^5} = 1,95\%$$

$$\epsilon_w = 10\%$$



CAMPO 1

$$N_{rd} = T + T'$$

$$T = A_s \sigma_s$$

$$T' = A_s \sigma'_s$$

$$T = 900 \cdot 391,3 \cdot 10^{-3} = 352 \text{ kN}$$

$$T' = 500 \cdot 391,3 \cdot 10^{-3} = 195,65 \text{ kN}$$

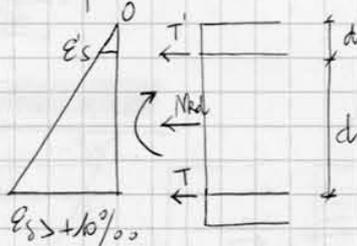
$$N_{rd} = 547,8 \text{ kN}$$

$$M_{rd} = T \cdot a - T' \cdot a = a(T - T') = 0,21(352 - 195,65) = 32,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

CAMPO 1	M_{rd}	N_{rd}
1	32,8	547,8

! Nel campo 1 la sezione non è soggetta a compressione, ma il momento è immediatamente prima.

1.2) da deformata allo stato limite tra campo 1 e campo 2 è:



$$d' : d = \epsilon'_s : \epsilon_s$$

$$460 : 10 = 10 : \epsilon'_s$$

$$\epsilon'_s = \frac{10 \cdot 10}{460} = 0,21\% \text{ (deformazione)}$$

$$\sigma'_s = \epsilon'_s \cdot E = 0,21 \cdot 2 \cdot 10^5 = 174 \text{ N/mm}^2 \text{ (tensione della barra d'acciaio superiore)}$$

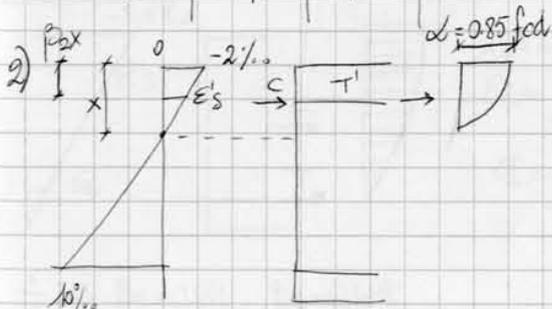
$$T = 900 \cdot 391,3 \cdot 10^{-3} = 352 \text{ kN}$$

$$T' = 500 \cdot 174 \cdot 10^{-3} = 87 \text{ kN}$$

$$N_{rd} = 87 + 352 = 439 \text{ kN}$$

$$M_{rd} = (352 - 87) \cdot 0,21 = 55,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

CAMPO 1-2	M_{rd}	N_{rd}
1-2	55,7	439



$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_{cl}}{\epsilon_{cl} + \epsilon_s}$$

$$x = \frac{\epsilon_{cl}}{\epsilon_{cl} + \epsilon_s} \cdot d = \frac{2}{12 + 10} \cdot \frac{230}{160} = 77 \text{ mm (asse neutro - posizione)}$$

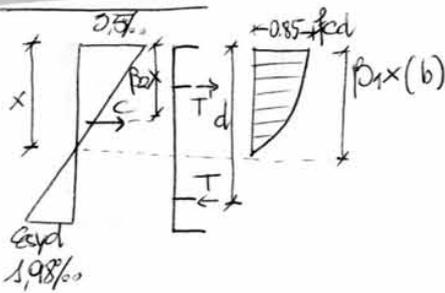
$$\alpha = 0,85 f_{cd}$$

$$\epsilon_{syd} = 1,95\%$$

$$N_{rd} = T - T' - C$$

↓ perché c'è compressione

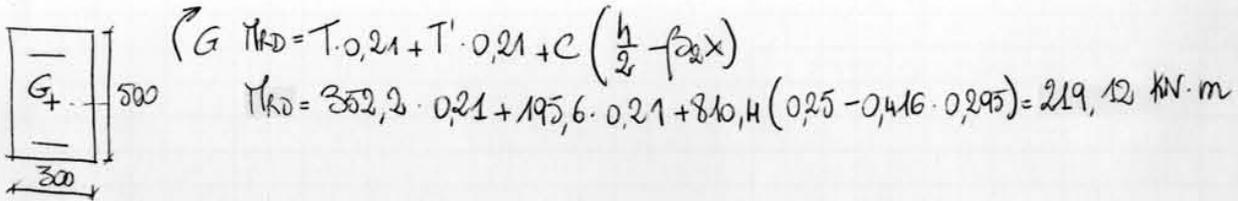
CAPITOLO 3-4



$$\epsilon_s = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \frac{|\epsilon_c|}{|\epsilon_c| + \epsilon_{syd}} \quad x = 295 \text{ mm}$$

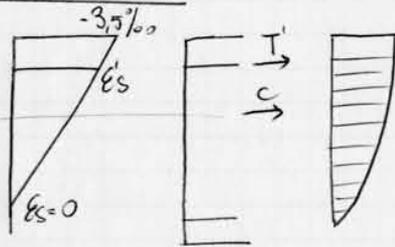
$$\begin{aligned} \epsilon_s &\Rightarrow \beta_{1L}, \beta_{2L} & T &= A_s \cdot \sigma_s & \beta_{1L} &= 0,81 & \beta_{2L} &= 0,416 \\ N_{RD} &= T - T' - C & T &= 900 \cdot 391,3 & & & &= 352,2 \text{ kN} \\ & & T' &= 500 \cdot 391,3 & & & &= 195,65 \text{ kN} \\ & & C &= (0,85 \cdot 13,8 \cdot 0,81 \cdot 295 \cdot 500) & & & &= 86,4 \text{ kN} \end{aligned}$$

$N_{RD} = -653,8 \text{ kN}$



$$\begin{aligned} \uparrow G \quad M_{RD} &= T \cdot 0,21 + T' \cdot 0,21 + C \left(\frac{h}{2} - \beta_{2L} x \right) \\ M_{RD} &= 352,2 \cdot 0,21 + 195,6 \cdot 0,21 + 86,4 \cdot \left(0,25 - 0,416 \cdot 0,295 \right) = 219,12 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

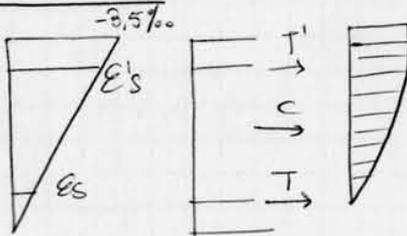
CAPITOLO 4-4a



$$\begin{aligned} x &= d = 460 \text{ mm} \\ \epsilon'_s \cdot \epsilon_c &= d - 40 - d \\ \epsilon'_s &= \frac{-3,5(d - 40)}{460} = -3,4\text{‰} \\ \frac{x}{d} &\rightarrow \beta_{1L} = 0,81 \quad \sigma_s = f_{yk} \\ & \quad \beta_{2L} = 0,416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{RD} &= -T' - C \\ N_{RD} &= [-195,6 - (0,85 f_{yk} d \cdot 0,81 \cdot 460 \cdot 300)] = -1459 \text{ kN} \\ M_{RD} &= 195,6 \cdot 0,21 + 1263,7 \cdot (0,25 - 0,416 \cdot 460) = 115,18 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

CAPITOLO 4a-5



$$\begin{aligned} x &= h = 500 \text{ mm} \\ \epsilon'_s &= \frac{-\epsilon_c \cdot 40}{500} = 0,28\text{‰} \Rightarrow \epsilon'_s < \epsilon_{syd} \\ \sigma_s &= \underbrace{-0,28 \cdot 2 \cdot 10^5}_{\epsilon} = \underbrace{-56}_{E} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{d} &\Rightarrow \beta_{1L} = 0,81, \beta_{2L} = 0,416 \\ N_{RD} &= -T - T' - C \\ N_{RD} &= -(900 \cdot 56) - 500 \cdot 391,3 - (0,85 \cdot 13,8 \cdot 0,81 \cdot 500 \cdot 300) \cdot 10^{-3} = -1619 \text{ kN} \\ M_{RD} &= (500 \cdot 391,3) \cdot 0,21 + (0,85 \cdot 13,8 \cdot 0,81 \cdot 200 \cdot 300) \cdot 0,416 \cdot 500 - [(900 \cdot 56) \cdot 0,21] = 88,25 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\frac{Pl}{8} - \frac{4EJ}{l} \varphi_b - \frac{4EJ}{l} \varphi_b = 0$$

$$\frac{8EJ}{l} \varphi_b = \frac{Pl}{8} \rightarrow \varphi_b = \frac{Pl^2}{64EJ}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= \frac{4EJ}{l} \cdot \frac{Pl^2}{64EJ} = \frac{1}{16} Pl \\ M_{BC} &= \frac{4EJ}{l} \cdot \frac{Pl^2}{64EJ} = \frac{1}{16} Pl \end{aligned} \right\} M_{BA} = M_{BC} = \frac{1}{16} Pl$$

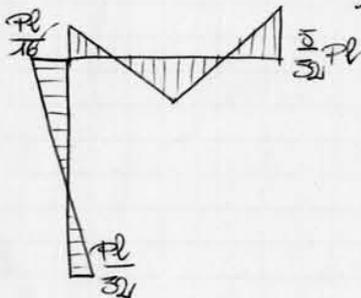
$$\left. \begin{aligned} M_c &= \frac{Pl}{32} \\ M_A &= \frac{Pl}{32} \end{aligned} \right\} M_A = M_c$$

Per la sovrapposizione degli effetti:

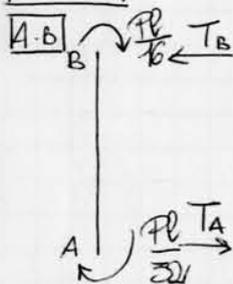
$$M_{c,fin} = \frac{Pl}{8} + \frac{Pl}{32} = \frac{5}{32} Pl$$

VERIFICA

$$M_{BA} = M_{TOT} - M_{BC} \Rightarrow \frac{Pl}{16} = \frac{Pl}{8} - \frac{Pl}{16} \Rightarrow \frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{16} \quad \underline{OK}$$



TAGLIO

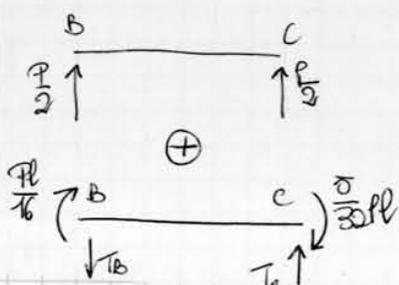


$$\textcircled{M_B} \quad -\frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{32} + T_A l = 0 \quad T_A = \frac{3}{32} P$$

$$\textcircled{M_A} \quad -\frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{32} + T_B l = 0 \quad T_B = \frac{3}{32} P$$

B-C

Per la sovrapposizione degli effetti:



$$T_B = \frac{P}{2} - \frac{3}{32} P = \frac{13}{32} P$$

$$T_c = \frac{P}{2} + \frac{3}{32} P = \frac{19}{32} P$$

