



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 266

DATA : 05/03/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Raguseo

MATERIA : Strutture II a

Prof. Ventura

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

STRUTTURE

21/09/09

Prof. Giulio Ventura → giulio.ventura@polito.it

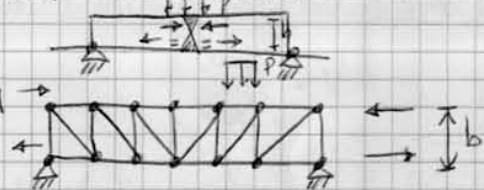
Bisogna avere padronanza di:

- comportamento dei materiali;
- funzionamento strutturale;
- tecniche costruttive.

- |                                      |                                 |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1) Modellazione della struttura      | } importanza della modellazione |
| 2) Modellazione dei nodi             |                                 |
| 3) Modellazione delle sollecitazioni |                                 |
| 4) Modellazione del materiale        |                                 |

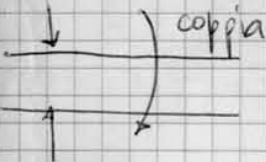
① a) Strutture monodimensionali (travi, aste, funi) schematizzate con la "linea media"

- Trave piena → limiti di luce libera
- Trave reticolare → rigidità, portanza
- L'acciaio la fune



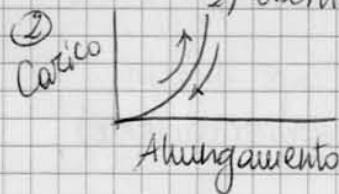
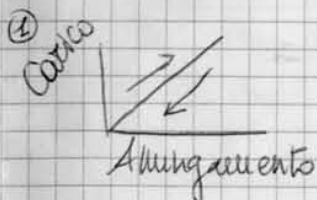
b) Strutture bidimensionali (piastre, gusci, membrane) → modellazione tramite il

c) Strutture tridimensionali (strutture massicce, murature, "piano medio" elementi tozzi)



Per creare un incastro → sistema ricuro che generi una coppia di forze che genera un momento

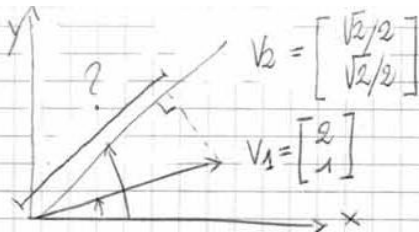
COMPORIAMENTO MECCANICO → 1) elastico lineare  
2) elastico non lineare



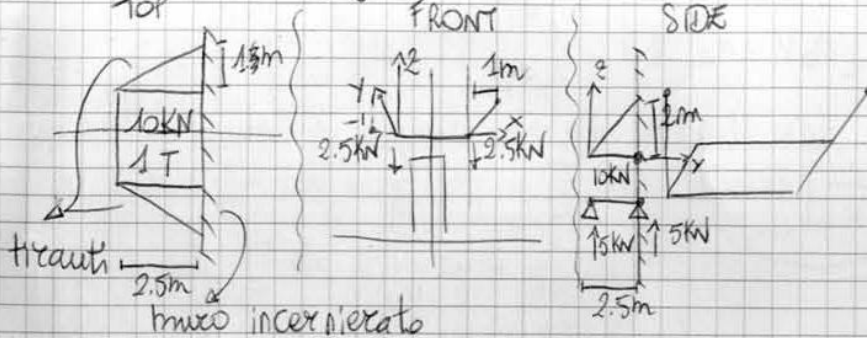
PROGRAMMA

- 1) Meccanica di corpi deformabili e teoria dell'elasticità
- 2) Il solido di Saint Venant e le verifiche di resistenza
- 3) Teoria della trave e meccanica delle strutture
- 4) Stabilità dell'equilibrio
  - 1) Analisi della deformazione e della tensione
  - 2) Principio dei lavori virtuali
  - 3) Teoria dell'elasticità lineare

LEGGE di HOOKE:  $\sigma = E \cdot \epsilon$



? =  $V_2 \cdot V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1$



Del 10kN 5 si scaricano sul muro e 5 sui fili/trauti/coppie di assi.

Incernierando il peso a una sua estremità sull'altre si applica una forza pari a  $\frac{1}{4}$  peso.

Da valori alle 3 componenti (1.5m, 1m e 2m) - Dobbiamo però stabilire x, y e z.

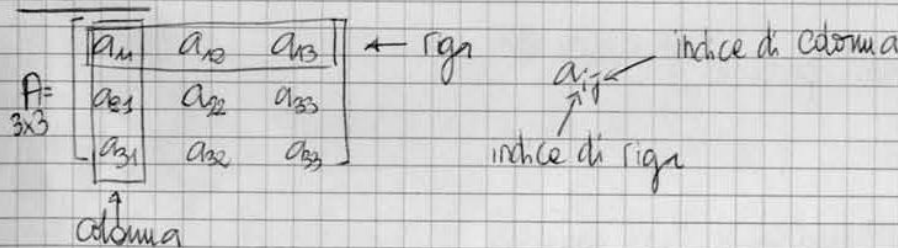


Vettore che individua il carico  $\Rightarrow V = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \\ 2 \end{bmatrix}$  (sul cavo)

$\frac{1}{2} V = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2.5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , poi moltiplico per 2.5kN  $\Rightarrow R = \begin{bmatrix} -2.5/2 \\ 2.5^2/2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

$N=R = \sqrt{\left(\frac{2.5}{2}\right)^2 + \left(\frac{2.5}{2}\right)^2 + 2.5^2} \Rightarrow$  ottingo lo sforzo normale

**MATRICE**



**Somma di matrici**

• Devono avere stesso numero di righe e colonne

A, B     A+B =

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$       $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

**Prod. Scalate:**

- 1) 1 riga - 1 colonna
- 2) 2 riga - 1 colonna
- 3) 1 riga - 2 colonna
- 4) 2 riga - 2 colonna

**Prodotto di matrici (detto prodotto righe per colonne)**

$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

$$u_Q = u_P + \frac{\partial u}{\partial x} (x_Q - x_P) + \frac{\partial u}{\partial y} (y_Q - y_P) + \frac{\partial u}{\partial z} (z_Q - z_P)$$

(u = spostamento sull'asse dello x)

$$v_Q = v_P + \frac{\partial v}{\partial x} (x_Q - x_P) + \frac{\partial v}{\partial y} (y_Q - y_P) + \frac{\partial v}{\partial z} (z_Q - z_P)$$

$$w_Q = w_P + \frac{\partial w}{\partial x} (x_Q - x_P) + \frac{\partial w}{\partial y} (y_Q - y_P) + \frac{\partial w}{\partial z} (z_Q - z_P)$$

$$dr = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{bmatrix}$$

$$u_Q = u_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v_Q = v_P + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w_Q = w_P + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$M_Q = M_P + J dr$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$M_P$  = spostamento totale

$M_P$  = traslazione

$J$  = deformazione + rotazione

! lo spostamento è soggetto a:

- deformazione
- traslazione
- rotazione rigida

$$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMMETRICA}}}{\text{sym}(A)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ERISTOTRICA/ANTISIMMETRICA}}}{\text{eui}(A)}$$

SIMMETRICA

ERISTOTRICA/ANTISIMMETRICA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{TRASPOSTA di } A \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{sym}(A) = \frac{1}{2} (A + A^T) \rightarrow \text{vi è legata la deformazione}$$

$$\text{eui}(A) = \frac{1}{2} (A - A^T) \rightarrow \text{vi è legata la rotazione rigida} \quad \rightarrow \text{termini uguali}$$

$$\text{sym}(A) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{eui}(A) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

termini = e opposti

diagonale nulla

$$M_Q = M_P + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deformazione}}}{\text{sym}(J)} dr + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rot. rigida}}}{\text{eui}(J)} dr$$

$$\text{sym}(J) = \frac{1}{2} (J + J^T) = D \rightarrow \text{DEFORMAZIONE}$$

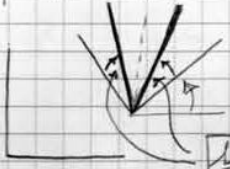
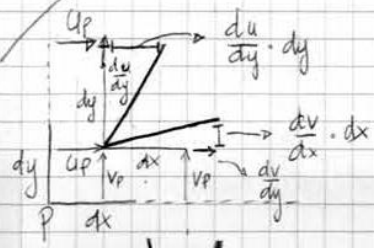
$$\text{eui}(J) = \frac{1}{2} (J - J^T) = R \rightarrow \text{ROTAZIONE RIGIDA}$$

$$M_Q = M_P + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trasl. rigida}}}{D} dr + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rot. rigida}}}{R} dr$$

! A noi interessa D dr!

$\epsilon_y dy$  (allungamento in direzione  $y$ )

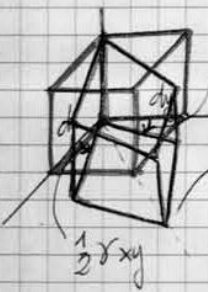
! Deformazioni assiali  $\Rightarrow$  modificano il volume del cubetto



$\Rightarrow$  la bisettrice è la stessa  $\Rightarrow$  il sistema di riferimento è girato

ruotato

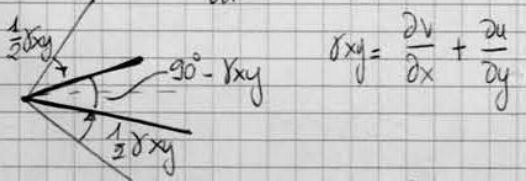
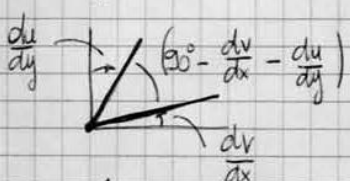
$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \rho$$



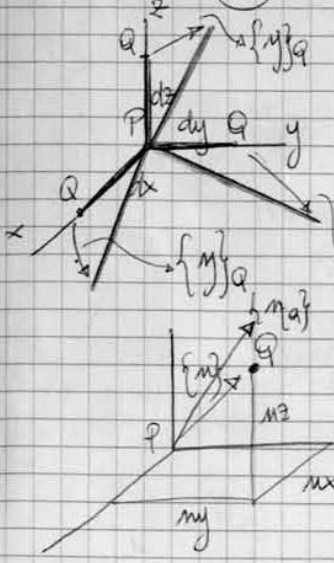
$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}$$

$\frac{1}{2} \gamma_{xy}$  è una DISTORSIONE ANGOLARE!

$\rightarrow$  bisettrice  $\rightarrow$  le fibre  $v_i$  si vanno a concludere intorno  
! base diventa un rombo



$$\{m_Q\} = [D]_P \cdot \{m\} \rightarrow \text{vettore da } P \text{ a } Q$$



$\{m\} = \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$  coordinate del punto Q  
 $\Rightarrow$  componenti del vettore  $m$

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$u = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

Se conosco matrice di deformazione e posizione di Q, ottengo la deformazione.

$$J_{II} = -\det(I) - \det(II) - \det(III) \Rightarrow \text{somma dei determinanti delle sottomatrici}$$

$$\begin{matrix} \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{bmatrix} E_y & \frac{1}{2}\delta_{xy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & E_y \end{bmatrix} & \Rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{xy} \\ \frac{1}{2}\delta_{yz} & E_z \end{bmatrix} & \Rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta_{xy} & E_y \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$J_{III} = \det[D_p] \rightarrow$  matrice di deformazione senza  $\epsilon_n$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 =$  **DEFORMAZIONI PRINCIPALI** (allungamento delle fibre)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \stackrel{T}{=} \det = 0$$

$$\star \boxed{x_3 = 2x_1 + x_2}$$

$$([D_p] - \epsilon_n [I]) \{m\} = \{0\} \rightarrow \begin{cases} m_x \\ m_y \\ m_z \end{cases}$$

$\det = 0 \rightarrow \epsilon_n$  sono note  
 $\rightarrow$  2 equazioni  $\Rightarrow$  3 incognite  $\Rightarrow m_x, m_y, m_z \rightarrow$  ma faccio dipendere una riga dalle altre!  
 $1 \text{ eq} \rightarrow \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = 1$  (esempio  $\Rightarrow$  posso fissare un qualsiasi valore)  
 modulo

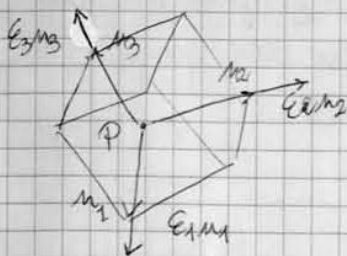
EQUAZIONI:

- ①  $\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = 1$
- ②  $([D_p] - \epsilon_n [I]) \{m\} = 0$
- ③  $x_3 = 2x_1 + x_2$

$m_x = 1 \rightarrow 2? m_y, m_z$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$

$$\begin{aligned} ([D_p] - \epsilon_1 [I]) \{m\} &= 0 \rightarrow \{m_1\} \\ ([D_p] - \epsilon_2 [I]) \{m\} &= 0 \rightarrow \{m_2\} \\ ([D_p] - \epsilon_3 [I]) \{m\} &= 0 \rightarrow \{m_3\} \end{aligned} \Rightarrow \text{direzioni ortogonali fra loro}$$



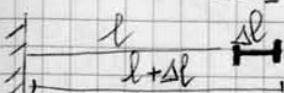
$$[D_p] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

$m_1, m_2, m_3$

CASO PIANO

$$D = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{xy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_{finale} - l_{iniziale}}{l_{iniziale}}$$



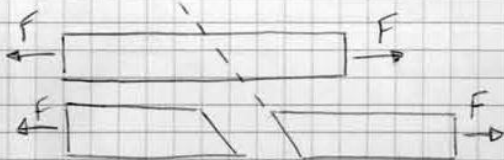
5/10/09

! Quando dividiamo la struttura in 2 parti, entrambe devono essere ancora in equilibrio.

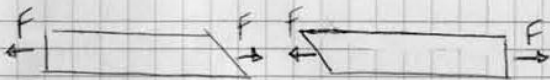


$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma A = F$  ↳ forza risultante totale

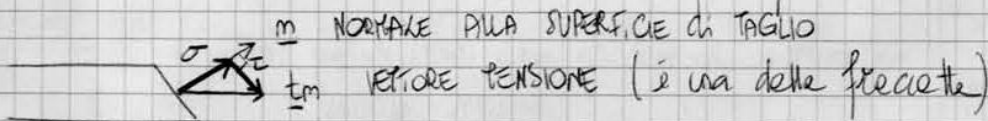
$\sigma$  lo chiamiamo tensione normale perché agisce ortogonalmente alla superficie "di taglio".



! Se la forza d'equilibrio fosse  $\Rightarrow$  No! avrebbe una componente verticale non equilibrata da un'altra.



(direzione ORIZZONTALE  $\rightarrow$  c'è così equilibrio)



Vettore tensione  $\rightarrow$  rappresenta la forza per unità di area scambiata fra le due parti.

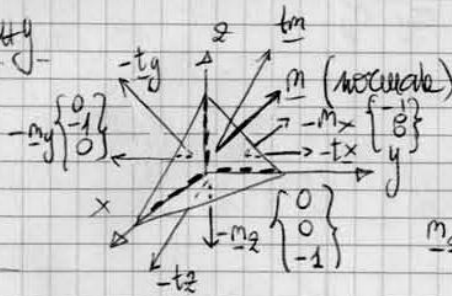
In questo caso:

$t_n = F/A_m$  ( $A_m =$  area della superficie di taglio).  
 $\Rightarrow F = t_n \cdot A_m$

$\sigma =$  tensione normale ( $\sigma = \sigma_{11}$ )  
 $T =$  tensione tangenziale ( $T = T_{11}$ )

IL TETRAEDRO di CAUCHY

$t_n = \begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix}$



$m_2 \Rightarrow$  normale all'asse z

~~$t_n - t_x - t_y - t_z = 0$~~

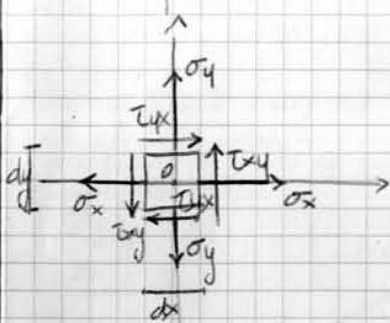
$\Rightarrow t_n \Omega_n - t_x \Omega_x - t_y \Omega_y - t_z \Omega_z = 0 \Rightarrow$  risultante delle forze agenti sulle facce di area  $\Omega$

$\downarrow$  forza  $\swarrow$  area  
 unità di area



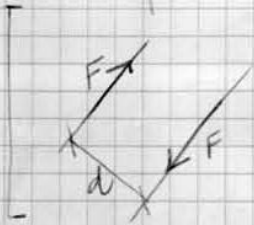
Punto rispetto al quale è più semplice scrivere l'equilibrio alla rotazione è quello in cui ho un braccio più lungo → RISULTANTE è NULLA!

Il braccio della forza è la distanza del punto rispetto a cui calcolo il momento dalla linea d'azione della forza (segmento di perpendicolare condotto dal punto alla forza).



$$\overbrace{dy \tau_{xy} dx}^{\text{RISULTANTE}} - \overbrace{\tau_{yx} dx dy}^{\text{BRACCIO}} = 0 \Rightarrow \text{ES. DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE}^*$$

$$dy \cdot \frac{dx}{2} \cdot \tau_{xy} + dy \cdot \frac{dx}{2} \cdot \tau_{yx} \quad (\text{calcolo momento della coppia di forze rispetto al centro } o)$$



$$M = F \cdot d = F \cdot \frac{d}{2} + F \cdot \frac{d}{2}$$

$$* \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

T è una MATRICE SIMMETRICA

TENSIONI PRINCIPALI e DIREZIONI PRINCIPALI di TENSIONE

$\underline{T} \cdot \underline{m} = \underline{Tm}$   
 dove  $\underline{m}$  deve avere la stessa direzione di  $\underline{Tm}$

$$|\underline{m}| = 1$$

$\underline{Tm}$  produce solo tensione normale se ha la stessa direzione di  $\underline{m}$ .

$$\underline{Tm} = \sigma_n \cdot \underline{m} \Rightarrow \underline{Tm} = \sigma_n \cdot \underline{m} \rightarrow \text{c'è solo tensione normale! (e non tangenziale)}$$

modulo  $\rightarrow$  direzione  
 (incognita)

problema di autovalori & autovettori per la matrice T.

Dato  $\underline{Tm} = \sigma_n \cdot \underline{m}$  INCOGNITE:  $\sigma_n$   
 $\underline{m}$

$$\underline{Tm} - \sigma_n \underline{m} = \underline{0} \quad (\text{dove } \underline{0} \text{ è un vettore})$$

~~$(T - \sigma_n) \underline{m} = \underline{0} \Rightarrow$~~  non posso!  $\Rightarrow$  le matrici sono diverse (non posso sottrarre)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{MATRICE IDENTICA (o IDENTITÀ)}$$

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad \underline{Tm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{Tm} = \underline{m}$$

Per  $\sigma_n = \sigma_1 = 3,19 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} 3-3,19 & 1 \\ 1 & -2-3,19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

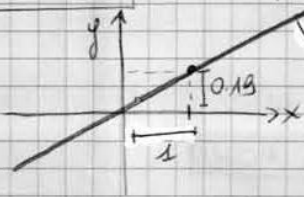
$$\begin{cases} (3-3,19)m_x + 1m_y = 0 \\ 1 \cdot m_x + (-2-3,19)m_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0,19m_x + m_y = 0 \\ m_x - 5,19m_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_y = 0,19m_x \\ m_x - 5,19(0,19m_x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_y = 0 \\ m_x = 0 \end{cases}$$

Ma delle 2 equazioni solo una è quella significativa (sono la stessa cosa  $\rightarrow$  me ne scelgo 1!)

$\Rightarrow$  scelgo (es.)  $-0,19m_x + m_y = 0 \Rightarrow \underline{m_y = 0,19m_x}$

$\Delta \text{det} = 0$

$\frac{m_y}{m_x} = 0,19 \Rightarrow$  l'equazione mi porta non al valore di  $m_x$  ed  $m_y$ , ma alla direzione.

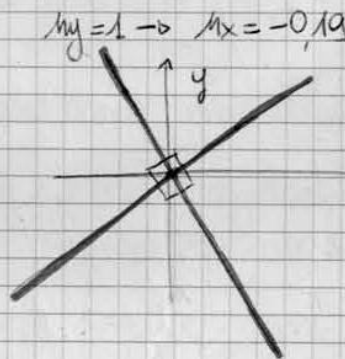
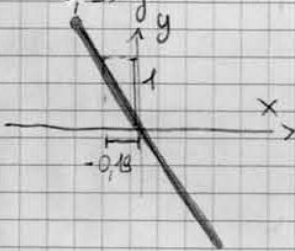


$\Delta$  DIREZIONE PRINCIPALE di TENSIONE associata a  $\sigma_1$

Per  $\sigma_n = \sigma_2 = -2,19 \text{ N/mm}^2$

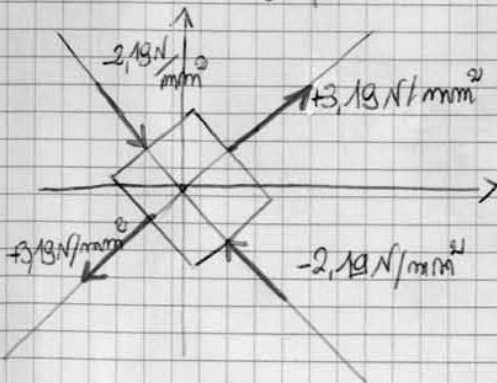
$$\begin{bmatrix} 3+2,19 & 1 \\ 1 & -2+2,19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5,19m_x + m_y = 0 \\ m_x + 0,19m_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{m_x = -0,19m_y}$$



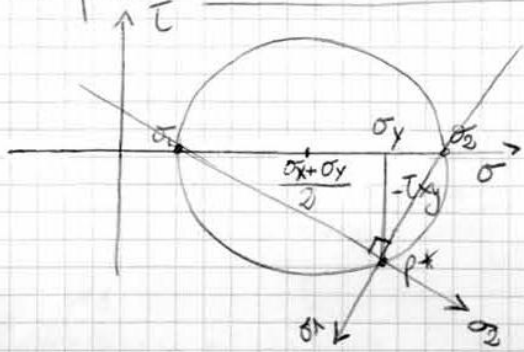
$\Rightarrow$  le 2 direzioni sono ortogonali fra loro

Rappresentazione grafica:



$\Rightarrow$  Ruotando il sistema ho solo TENSIONE NORMALE (sulle facce).

Si definisce Polo del CERCHIO di MOHR il punto  $P^* \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$



$$C \equiv \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

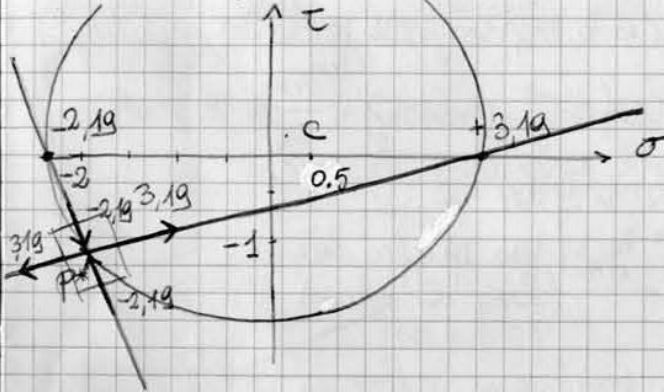
$$P^* \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$\Rightarrow$  congiungendo  $P^*$  con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ottengo le tensioni principali

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C \equiv \left( \frac{3-2}{2}, 0 \right) \equiv (0,5, 0)$$

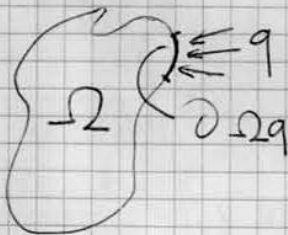
$$P^* \equiv (-2, -1)$$



! Le intersezioni con l'asse  $\sigma$  mi danno le 2 tensioni principali.

EQUAZIONI di EQUILIBRIO (per il CONTINUO DEFORMABILE)

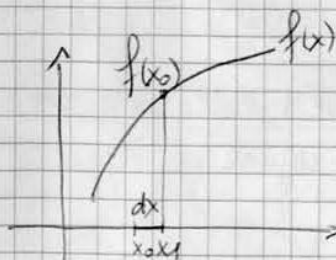
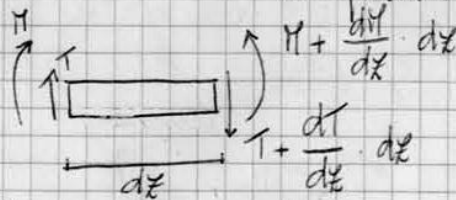
12/10/09



$T_m = g$  (carico applicato) sulla parte di contorno caricato

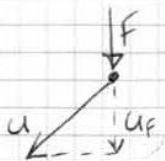
! Per l'equilibrio serve una forza uguale e opposta a quella applicata.

$$\frac{dT}{dx} = T$$



$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + \frac{df}{dx} (x - x_0)$$

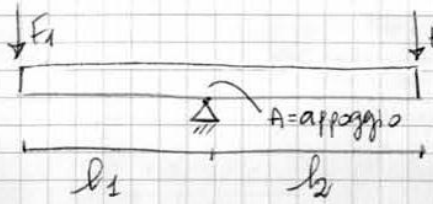
$$f(x + dx) = f(x) + \frac{df}{dx} \cdot dx$$



$$d = F \cdot u_F = \underline{F} \cdot \underline{u}$$

(prodotto scalare)

$u$  = spostamento del punto  
 $u_F$  = componente in direzione  $F$  dello spostamento



→ leva a bracci disuguali con fulcro nel mezzo (struttura labile) ⇒ ma staticamente determinata  
 (sta in equilibrio!)

Eq. di equilibrio alla rotazione attorno ad A:

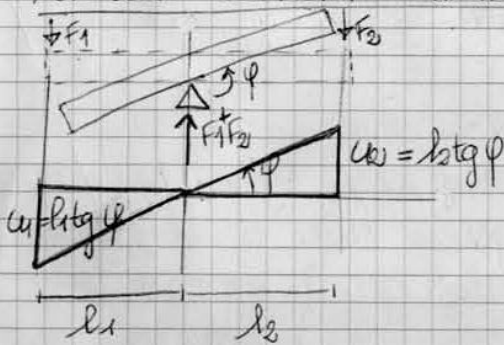
$$A) \quad F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$$

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

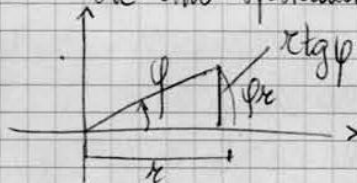
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Assegnare un campo di spostamenti virtuali ⇒ virtuali significa:

- INFINITESIMI
- COMPATIBILI CON I VINCOLI
- NON SONO SPOSTAMENTI REALI DELLA STRUTTURA!



⇒ se  $\phi$  è estremamente piccolo, la sua tangente equivale allo spostamento espresso in radianti.



$$\boxed{u_1 = l_1 \delta \phi}$$

$$\boxed{u_2 = l_2 \delta \phi} \Rightarrow \text{SPOSTAMENTI INFINITESIMI}$$

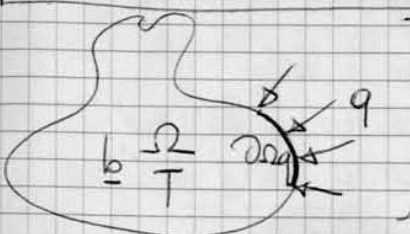
Forze che agiscono sul sistema sono  $\delta$ :  $F_1$   $F_2$   $F_1 + F_2$ .

$$F_1 u_1 - F_2 u_2 = 0$$

$$F_1 l_1 \delta \phi - F_2 l_2 \delta \phi = 0$$

$$\Rightarrow F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$$

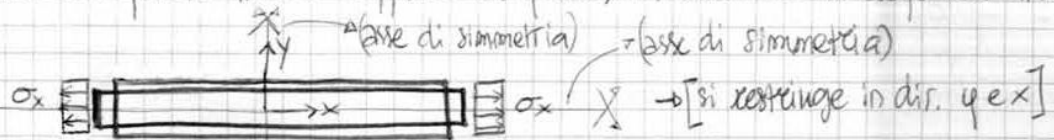
**SISTEMA FORZE - TENSIONI**



IN EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0 \quad [\dots] \quad \Delta \text{ trasl. lungo gli assi } \delta s_i$$

! Nel legno l'isotropia non ha lo stesso effetto  $\Rightarrow$  le fibre sono dirette in un certo verso ma, a seconda del punto in cui applico la forza, il materiale si deforma diversamente



! Si deforma in un rettangolo (allungato nella direzione x)  $\Rightarrow$  per omogeneità e isotropia. Spostamento angolare  $\rightarrow$  dimensione di angolo che c'è nella configurazione indeformata.

Deformazioni sono proporzionali alle tensioni (è LINEARE).

$\Rightarrow E_x \propto \sigma_x$  ( $E_x$  è proporzionale al carico applicato)

$$E_x = k \sigma_x$$

$\hookrightarrow$  COSTANTE di PROPORZIONALITÀ (misurata con un esperimento di laboratorio).

Prendo la barra e misurando l'allungamento ottengo  $k$ .

$$k = \frac{1}{E}$$

$\hookrightarrow$  MODULO di ELASTICITÀ NORMALE / MODULO di YOUNG

$$E_x = \frac{1}{E} \sigma_x \rightarrow \sigma_x = E \cdot E_x$$

↑ allungamento specifico  $\left( \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow$  NUMERO PURO)   
 ↳ tensione  $\left( \frac{F}{L^2} \right)$

!  $E$  è positivo (lunghezza finale è maggiore di lunghezza iniziale)

$$l_f > l_i$$

↳  $\left[ \frac{F}{L^2} \right] \Rightarrow$  forza per unità di area

$$E_y = -\nu E_x$$

CONTRAZIONE   
 COEFFICIENTE di POISSON (numero puro)

$$E_y = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \Rightarrow \text{per l'ipotesi di isotropia} \Rightarrow E_z = E_y = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \quad (\nu = \text{"n"})$$

TRAZIONE	$E_x$	$E_y$	$E_z$
$\sigma_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x$	$-\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x$
$\sigma_y$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_y$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_y$
$\sigma_z$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_z$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_z$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Se agiscono insieme  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , per il PRINCIPIO di SOPRAPPORZIONE degli EFFETTI:

$$E_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z \pm \frac{\nu}{E} \sigma_x$$

$$E_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z \pm \frac{\nu}{E} \sigma_y$$

$$E_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \pm \frac{\nu}{E} \sigma_z$$

SOMMA delle COLONNE

$\Rightarrow$  Legami tra  $\sigma$ -tensioni

$$\tau_{xy} = G \delta_{xy}$$

MATERIALE	E	$\nu$
CALCESTRUZZO	$20000 \text{ kg/cm}^2$ $30000 \text{ N/mm}^2$	$0.2 \div 0.3$
LEGNO (DIR. FIBRE)	$10000 \text{ kg/cm}^2$ $10000 \text{ N/mm}^2$	"
ACCIAIO	$2100000 \text{ kg/cm}^2$ $210000 \text{ N/mm}^2$	"
GOMME	$50000 \text{ kg/cm}^2$	"

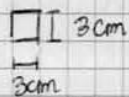
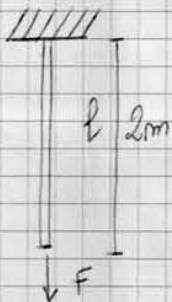
$$-1 \leq \nu \leq 1/2$$

$$0 \leq \nu \leq 1/2$$

↑  
materiale non subisce  
contrazione trasversale

Variatione di  
volume è  $\phi$

! Gomme hanno  $\nu = 0.5$  (si deformano a volume costante).



$$F = 500 \text{ kg} = 5 \text{ kN}$$

$$E_x = \frac{\Delta l}{l}$$

$$1 \text{ kg}_f = 1 \text{ daN} = 10 \text{ N}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{5000 \text{ N}}{20 \times 20 \text{ mm}^2} = 5.55 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 5.55 \text{ MPa}$$

IPOTESI: LEGNO

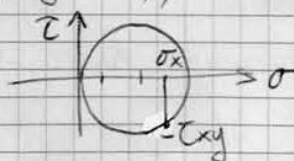
$$E = 10000 \text{ N/mm}^2$$

$$E_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{5.55 \text{ N/mm}^2}{10000 \text{ N/mm}^2} = 5.55 \cdot 10^{-4}$$

$$E_x = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = E_x \cdot l$$

$$\Delta l = 5.55 \cdot 10^{-4} \cdot 2000 \text{ mm} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = 1 \text{ mm} \text{ (con l'acciaio è circa } 1/20 \text{ mm)}$$

UNO STATO DI TENSIONE si dice TRIASSIALE se le tre tensioni principali sono tutte diverse da  $\phi$  (non sono  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ !)

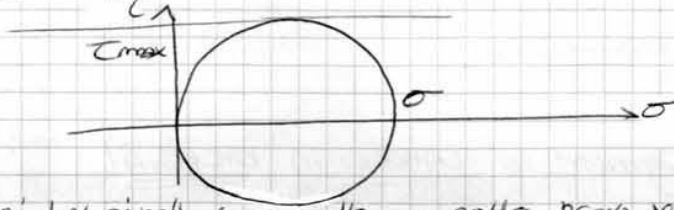


PIANO O BIASSIALE => Se due tensioni principali sono diverse da  $\phi$  e una è nulla.

MONOASSIALE => Se due tensioni principali sono nulle ed una è  $\neq \phi$

Noti  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , quanto vale la tensione tangenziale massima?  $\Rightarrow$  raggio del cerchio più grande.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \Rightarrow \text{CASO TRIASSIALE}$$



$$\tau_{max} = \frac{|\sigma|}{2}$$

$\Rightarrow$  PROVA MONOASSIALE

! 2 tensioni principali sono nulle  $\Rightarrow$  nella prova MONOASSIALE.

UGUAGLIAMO  $\tau_{max}$  monoassiale a  $\tau_{max}$  triassiale:

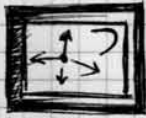
$$\sigma = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|).$$

$\uparrow$

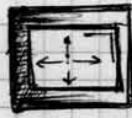
TENSIONE IDEALE O EQUIVALENTE di TRESCA

$\hookrightarrow$  minore della tensione ammissibile o della tensione di calcolo.

In presenza di una tensione di contenimento il materiale resiste di più.



RESISTE



NON RESISTE

$\leftarrow$  compresso sotto il capo fucile

(usate le staffe per la formazione di travi e pilastri)

CRITERIO di VON MISES

noto  $T$

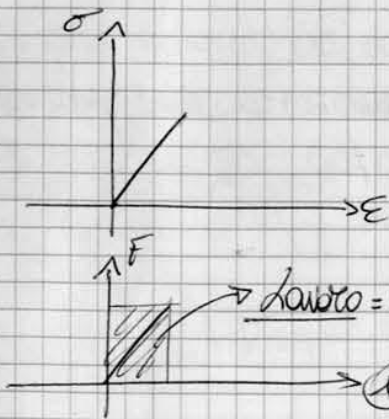
calcoliamo la sua "parte sferica" (idrostatica) come:

$$Sf(T) = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{bmatrix}$$

TENSIONE NORMALE MEDIA

parte legata allo stato di sollecitazione idrostatica.

$$T - Sf(T) = dev(T) \Rightarrow \text{PARTE DEVIATORICA}$$



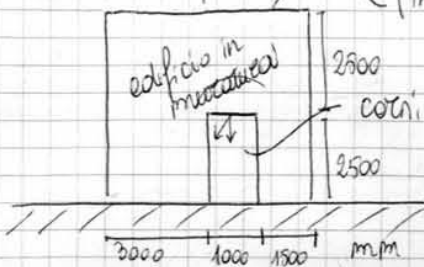
$u$   
(spostamento orizzontale)

! Se faccio l'integrale del prodotto  $F \cdot u$ , ottengo il triangolo sotteso al grafico. (resta del lavoro di deformazione).

13

(Calcolo con computer)

21/10/03



(immagino una linea di sezione)

cornice della porta è SCALICA  $\Rightarrow T \cdot \vec{n} = 0$

$\swarrow$  tensione delle tensioni  
 $\searrow$  normale alla superficie

Componente trasversale alla sezione è lo SFORZO NORMALE. Nella parete, le tensioni ad essa ortogonali sono nulle.

- STATO PIANO di TENSIONE
- GEOMETRIA
- MATERIALE
- CARICHI
- VINCOLI



$50000 \text{ kg/cm}^3$   
 $500000 \text{ N/cm}^2 \rightarrow 5000 \text{ N/mm}^2$  (modulo di Young)  
 $\nu = 0.2 \Rightarrow$  modulo / coeff. di Poisson

$F = m \cdot a$

$1000 \text{ kgf} = 10000 \text{ N}$

$10000 \text{ N} = m \cdot 10 \text{ m/s}^2$   
 $m = 1000 \text{ kg}_m$  (massa)

S.I. peso  $1800 \text{ kgf/m}^3$

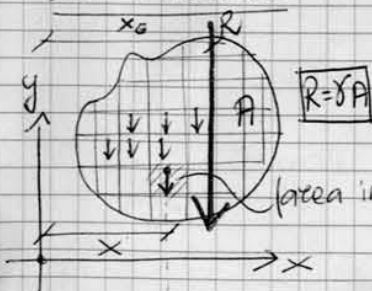
S.I. massa  $1800 \text{ kg}_m/\text{m}^3$

$f = 1800 \cdot 10^{-9} \text{ kg}_m/\text{mm}^3$   
 $= 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ kg}_m/\text{mm}^3$   
 $= 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ t}/\text{mm}^3$

Gli sforzi generati dai carichi fluiscano all'interno della struttura. Dopo aver discretizzato, applico il carico e verifico la nuova forma ottenuta.

**GEOMETRIA delle AREE**

IL BARICENTRO



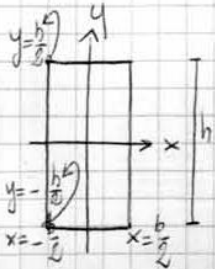
$$Y = \sum (r dA) \cdot x$$
  
 (area infinitesima)  $\rightarrow$  braccio della forza  
 $\uparrow$  peso specifico  
 $\uparrow$  momento  

$$= \gamma \int_A x dA$$
 (integrale esteso ad A)



$I_{xy} = \int_A xy \, dA$  MOM. D'INERZIA CENTRIFUGO

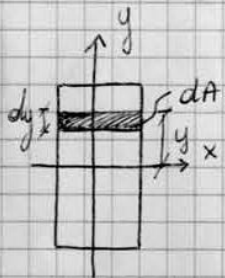
$I_p = I_{xx} + I_{yy} = \int_A x^2 + y^2 \, dA$  MOM. D'INERZIA POLARE  
 $\int_A r^2 \, dA$



$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \left( y^2 \int_{-b/2}^{b/2} 1 \, dx \right) dy = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \left[ x \right]_{-b/2}^{b/2} dy = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy =$$

$$= b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$

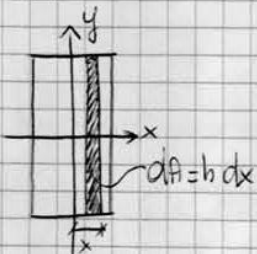


$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \left( \frac{(h/2)^3}{3} + \frac{(h/2)^3}{3} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

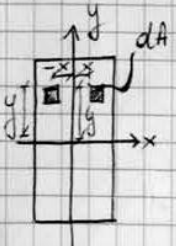


$$I_{xx} = \int_0^h y^2 \, dA = \int_0^h y^2 b \, dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$\Rightarrow$  (cambio il sistema di riferimento)



$$I_{yy} = \int_A x^2 \, dA = \int_{-b/2}^{b/2} h x^2 \, dx = h \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12}$$



$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

$$\sum xy \, dA$$

$$\underline{S} = \int_A \underline{r} dA = \int_A \underline{r}_0 + \underline{\bar{r}} dA = \int_A \underline{r}_0 dA + \int_A \underline{\bar{r}} dA =$$

$$= \underline{r}_0 \int_A dA + \underline{\bar{S}} = \underline{r}_0 A + \underline{\bar{S}} =$$

$$= \underline{\bar{S}} + \underline{r}_0 A$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_x &= \bar{S}_x + y_0 A \\ S_y &= \bar{S}_y + x_0 A \end{aligned}}$$

Nota  $\underline{\bar{r}}$  calcolare  $\underline{I}$

$$\underline{I} = \int_A \underline{r} \underline{r}^T dA = \int_A (\underline{r}_0 + \underline{\bar{r}})(\underline{r}_0 + \underline{\bar{r}})^T dA = \int_A (\underline{r}_0 \underline{r}_0^T + \underline{\bar{r}} \underline{r}_0^T + \underline{r}_0 \underline{\bar{r}}^T + \underline{\bar{r}} \underline{\bar{r}}^T) dA =$$

$$= \underline{r}_0 \underline{r}_0^T \int_A dA + \int_A \underline{\bar{r}} dA \underline{r}_0^T + \underline{r}_0 \int_A \underline{\bar{r}}^T dA + \int_A \underline{\bar{r}} \underline{\bar{r}}^T dA$$

$$\boxed{\underline{I} = \underline{r}_0 \underline{r}_0^T A + \underline{\bar{S}} \underline{r}_0^T + \underline{r}_0 \underline{\bar{S}}^T + \underline{\bar{I}}}$$

$$\begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0^2 & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & x_0^2 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} \bar{S}_y \\ \bar{S}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_y & \bar{S}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{I}_{yy} & \bar{I}_{xy} \\ \bar{I}_{xy} & \bar{I}_{xx} \end{bmatrix}$$

- $I_{yy} = y_0^2 A + \bar{S}_y x_0 + \bar{S}_y x_0 + \bar{I}_{yy} = \bar{I}_{yy} + y_0^2 A + 2x_0 \bar{S}_y$
- $I_{xx} = \bar{I}_{xx} + x_0^2 A + 2y_0 \bar{S}_x$
- $I_{xy} = x_0 y_0 A + \bar{S}_y y_0 + \bar{S}_x x_0 + \bar{I}_{xy}$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{yy} &= \bar{I}_{yy} + y_0^2 A + 2x_0 \bar{S}_y \\ I_{xx} &= \bar{I}_{xx} + x_0^2 A + 2y_0 \bar{S}_x \\ I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + x_0 y_0 A + \bar{S}_y y_0 + \bar{S}_x x_0 \\ S_x &= \bar{S}_x + y_0 A \\ S_y &= \bar{S}_y + x_0 A \end{aligned}}$$

Se  $\bar{x}$   $\bar{y}$  è baricentrico: (mom. statici nulli)

$$S_x = y_0 A \quad \bar{S}_y = x_0 A$$

$$I_{yy} = \bar{I}_{yy} + y_0^2 A$$

$$I_{xx} = \bar{I}_{xx} + x_0^2 A$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + x_0 y_0 A$$

FORMULE di  
HUYGENS  
STEINER

$$\bar{I}_{yy} = \frac{10 \cdot 50^3}{12} = \frac{1250000}{12} = 104167 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

APPLICHIAMO le FORMULE di TRASPORTO:

$$I_{xx}^{\text{D}} = 4167 + 50 \cdot 10 (11,1^2) = 65772 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy}^{\text{D}} = 104167 + \phi = 104167 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy}^{\text{D}} = \phi$$

**FIGURA 2)**

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 11,1 - 25 = -13,9$$

$$A^{\text{D}} = 400 \text{ cm}^2$$

$$\bar{I}_{xx}^{\text{D}} = \frac{10 \cdot 40^3}{12} = 53333 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{yy}^{\text{D}} = \frac{40 \cdot 10^3}{12} = 3333 \text{ cm}^4$$

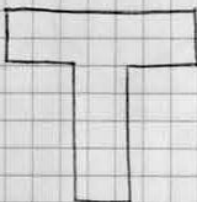
$$\bar{I}_{xy}^{\text{D}} = 0$$

APPLICHIAMO le FORMULE di TRASPORTO:

$$I_{xx}^{\text{D}} = 53333 + 400 (-13,9)^2 = 130617 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy}^{\text{D}} = 3333 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy}^{\text{D}} = 0$$

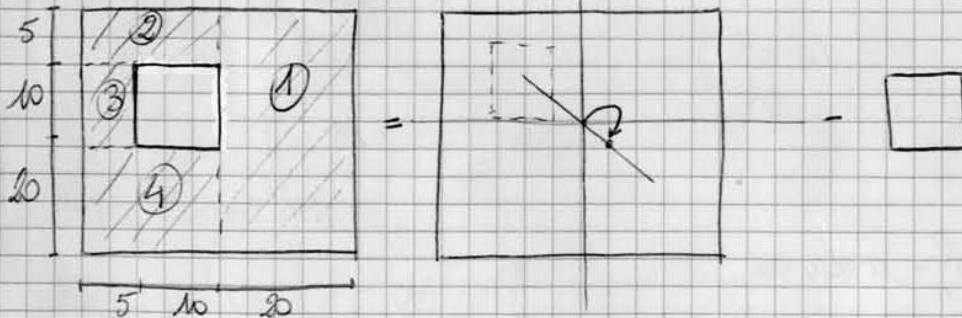


$$I_{xx} = 65772 + 130617 = 196389 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \phi$$

$$I_{yy} = 104167 + 3333 = 107500 \text{ cm}^4$$

**FIGURE "COL BUCO"**



$$I_{yy} = I_{xx}$$

$$I_{xy} = -550 \text{ cm}^4$$

FIGURA ②

$$\bar{I}_{xx} = \bar{I}_{yy} = \frac{10^4}{A}$$

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

$$x_0 = -9,17 \text{ cm}$$

$$y_0 = 8,17 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{10^4}{A} + 10^2 (8,17)^2 = 7808 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 10^2 (-9,17)(8,17) = -6675 \text{ cm}^4$$

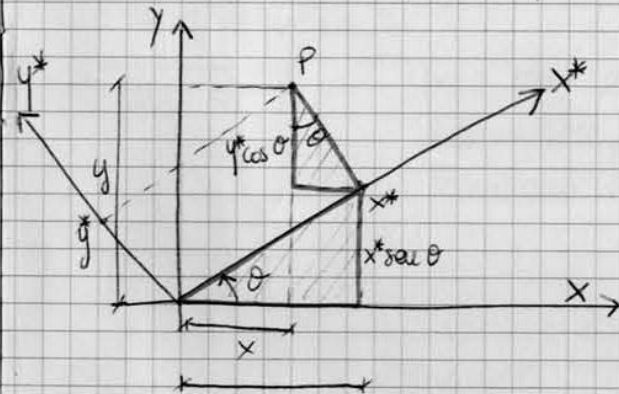
MOMENTI d'INERZIA TOTALI

$$I_{xx} = 125002 - 7808 = 118094 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = I_{xx}$$

$$I_{xy} = -550 - (-6675) = 6125 \text{ cm}^4$$

TRASFORMAZIONE delle formule per ROTAZIONE del sistema di riferimento



$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \underline{r}^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

$$x = x^* \cos \theta - y^* \sin \theta$$

$$y = x^* \sin \theta + y^* \cos \theta$$

$$N = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow N^{-1} = N^T$$

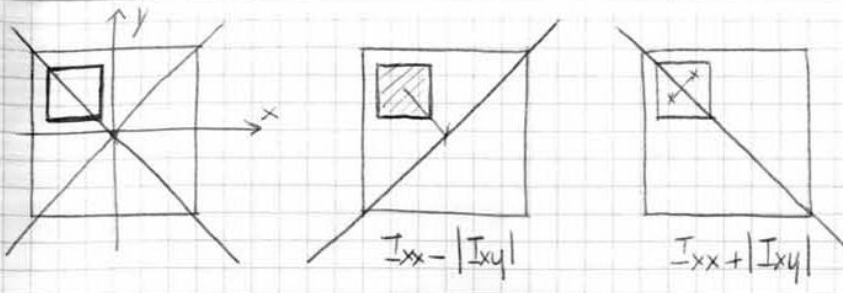
$$\underline{r} = N \underline{r}^* \quad \underline{r}^* = N^T \underline{r}$$

Nota  $\underline{S}^*$  calcolare  $\underline{S}$

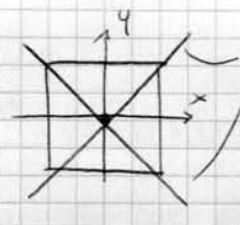
$$\underline{S} = \int_A \underline{r} \, dA = \int_A N \underline{r}^* \, dA = N \underline{S}^*$$

Nota  $I^*$  calcolare  $I$

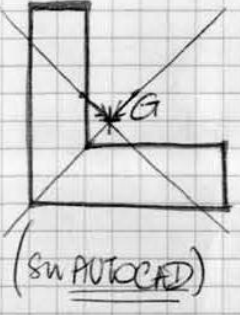
$$\underline{I} = \int_A \underline{r} \underline{r}^T \, dA = \int_A N \underline{r}^* (\underline{r}^*)^T N^T \, dA = \int_A N \underline{r}^* \underline{r}^{*T} N^T \, dA =$$



Caso in cui  
 $I_{xx} = I_{yy}$   
 $I_{xy} = 0$   
 $\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{0}{0}$

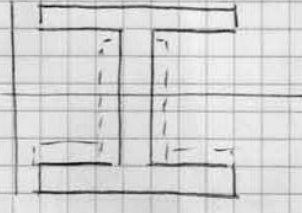


assi di simmetria  
 => comunque venga ruotato il sistema di Riferimento il mom. d'inerzia non cambia.  
 (vale x tutte le figure in cui  $I_{xx} = I_{yy}$  e  $I_{xy} = 0$ )



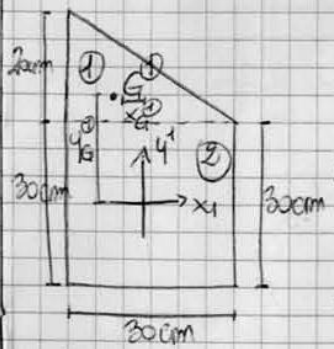
- Geometria
- Regione
- Mass prop → select region
- ↳ coord. baricentrico (risp. ues coerente)
- ↳ area
- ↳  $I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$
- ↳  $I_{xx}, I_{yy}$

Es. sistema a doppio t

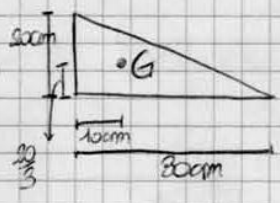


! Se il mom. d'inerzia è troppo basso occorre aumentare le aree di acciaio all'interno.  
 Modelliamo quindi la forma della sezione

2/11/20



? Baricentro  
 ? assi e momenti principali e centrali d'inerzia



$\frac{20}{3} = 6,67 \text{ cm}$

Risp.  $x_1, y_1$   
 $S_x = 0, S_y = 0$   
 $S_x = P y_G$   
 in cui  
 $y_G = 15 + 6,67 = 21,67 \text{ cm}$

MOMENTI d' INERZIA TOTALI

$$I_{xx} = I_{xx}^{(1)} + I_{xx}^{(2)} =$$

$$= I_{x_0x_0}^{(1)} + A^{(1)} y_{G_0}^{(1)2} + I_{x_0x_0}^{(2)} + A^{(2)} y_{G_0}^{(2)2} =$$

(j<sub>0</sub> della bilia)

$$I_{xx} = 6'667 + 300(16,35)^2 + 67'800 + 900(-5,42)^2 = 179'825 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 15'000 + 300(-3,75)^2 + 67'500 + 900(1,25)^2 = 98'125 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_{x_0y_0} + A x_0 y_0 \text{ (applicato per fig. 1 e fig. 2)}$$

$$I_{xy} = -5000 + 300(-3,75)(16,35) + 0 + 900(1,25)(-5,42) = -29'379 \text{ cm}^4$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(-29'379)}{98'125 - 179'825} = 16,33^\circ$$

$$\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{138'975}{2} \text{ cm}^4$$

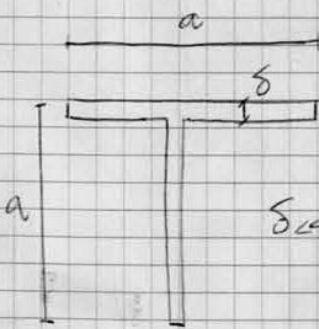
$$\frac{1}{2} \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2} = 108'920 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx} > I_{yy} \Rightarrow I_{\xi\xi} = a + \frac{b}{2} = 189'430 \text{ cm}^4$$

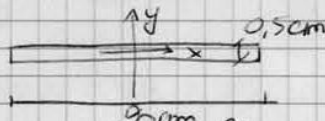
$$I_{\eta\eta} = a - \frac{b}{2} = 79'520 \text{ cm}^4$$

Sezioni "SOTTILI" (in parete sottile)

Passo relativo a tutti i profili metallici  $\Rightarrow$  ottengo calcolo semplificato.



$\delta \ll a$



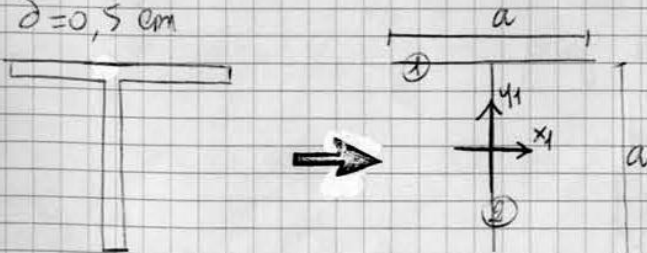
$$I_{xx} = \frac{a \cdot \delta^3}{12} = \frac{200 \cdot 0,5^3}{12} = 0,34 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{\delta \cdot a^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 200^3}{12} = 333 \text{ cm}^4$$

(trascurabile)

$\rightarrow$  come se profilo fosse a spessore nullo

$a = 200 \text{ cm}$   
 $\delta = 0,5 \text{ cm}$



Centro elastico della sezione

$$z_G^F = \frac{S_y^E}{AE}$$

$$y_G^E = \frac{S_x^E}{AE}$$

se  $E = \text{cost}$   $\rightarrow$   $x_G \equiv x_G^E$   
 $\rightarrow$   $y_G \equiv y_G^E$

$$I_{xx}^E = \int_A E y^2 dA \quad \text{se } E = \text{cost} \Rightarrow I_{xx}^E = E I_{xx}$$

$$I_{yy}^E = \int_A E x^2 dA \quad \text{se } E = \text{cost} \Rightarrow I_{yy}^E = E I_{yy}$$

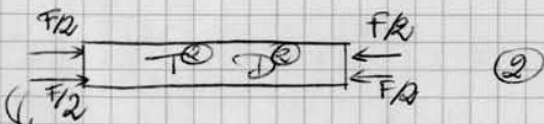
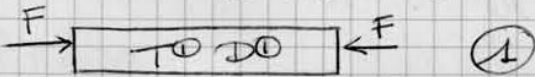
$$I_{xy}^E = \int_A E xy dA \quad \text{se } E = \text{cost} \Rightarrow I_{xy}^E = E I_{xy}$$

TEORIA di SAINT VENANT

Ipotesi di base:

- piccoli spostamenti e deformazioni
- legame costitutivo elastico lineare
- materiale omogeneo isotropo
- sono assenti le forze di volume
- carichi applicati solo sulle basi del cilindro costituente la trave

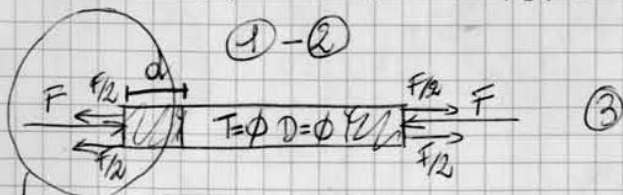
Postulato di Saint Venant: lo stato di tensione e deformazione nella trave, ad una certa distanza dalle basi, non dipende dalla distribuzione effettiva del carico ma solo dalle caratteristiche della sollecitazione  $N, M, T$ .



(generano lo stesso risultante della F precedente)

↓ Vale il principio di sovrapposizione degli effetti  $\Rightarrow$  la soluzione è prodotta dagli effetti del primo caso e da quelli del secondo caso.

Consideriamo il caso DIFFERENZA



$\Rightarrow$  nella parte così segnata non so cosa succede  $\Rightarrow$  dipende dal tipo di forza applicata

sistema autoequilibrato  $T^3 = T^1 - T^2$  (per il principio di sovrapposizione degli effetti)  
 $D^3 = D^1 - D^2$

[d = distanza di estinzione degli effetti]

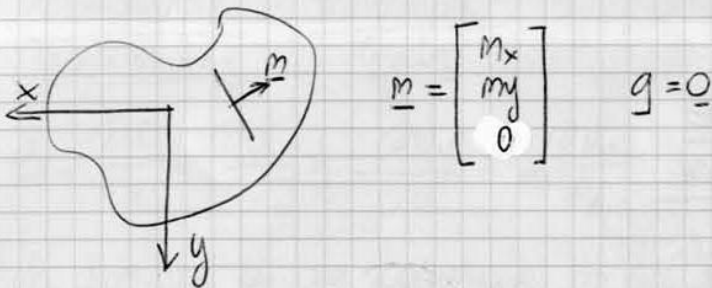
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{le tensioni tangenziali sono indipendenti da } z \Rightarrow \text{uguali su tutta la trave.}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$$

NEL PIANO della SEZIONE TRASVERSALE



$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} \underline{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx} m_x + \tau_{zy} m_y \end{bmatrix}$$

Ridefinisco:

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\tau} \cdot \underline{m} = 0 \quad (\text{i due vettori sono ortogonali} \Rightarrow \text{prodotto scalare})$$

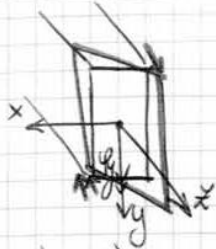
Sulle basi:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ortogonale alla base}$$

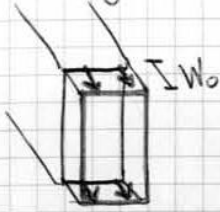
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \Rightarrow \text{componenti di tensione coincidono con il carico applicato alla base}$$





$$w = -\varphi_y x$$



$\Rightarrow$  [traslazione uniforme]  
 $\downarrow$   
 spostamento longitudinale

$$w = ax + by + c$$

$$w = \varphi_x y - \varphi_y x + w_0$$

rotazioni risp.  
 attorno a x e y

traslazione  
 rigida

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} y - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} x + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

La derivata di una rotazione mi dà la curvatura (inverso del raggio di curvatura)

$$\epsilon_z = \chi_{xy} - \chi_{yx} + \epsilon_0$$

lettera greca "chi"  $\Rightarrow$  è la curvatura

In stato di tensione monodirezionale:

$$\sigma_z = E \epsilon_z \quad (\text{legame costitutivo elastico lineare})$$

$$\sigma_z = E \chi_{xy} - E \chi_{yx} + E \epsilon_0$$

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

$\Rightarrow$  ottengo il risultante lungo z (N)

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA$$

$\Rightarrow$  y è il braccio della forza  
 $\Rightarrow \sigma_z A$  è la forza

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA$$

$\Rightarrow$  x è il braccio della forza  
 $\Rightarrow \sigma_z A$  è la forza

$$\epsilon_0 = \frac{N}{EA}$$

$$\chi_x = \frac{M_x}{EI_{xx}}$$

$$\chi_y = \frac{M_y}{EI_{yy}}$$

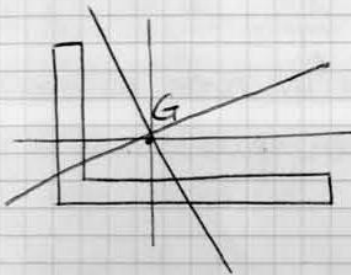
$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x + \frac{N}{A}$$

↓ stato di sollecitazione indotto da  $M_x, M_y, N$

(applicato SOLO se il sistema baricentrico è principale d'inerzia)

Se  $x, y$  BARICENTRICO non è principale d'inerzia:

$$\sigma_z = \frac{I_{yy} M_x + I_{xy} M_y}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} y - \frac{I_{xx} M_y + I_{xy} M_x}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} x + \frac{N}{A}$$

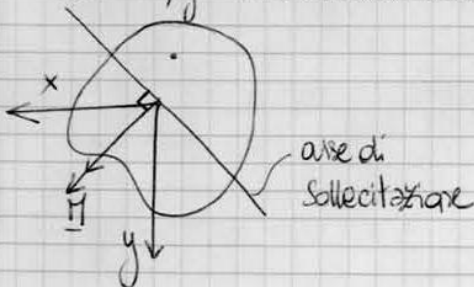


$I_{xy} \neq 0$  (se ho una sezione disimmetrica non ho un sistema principale d'inerzia con la formula precedente)  
 ↓ (100%)

9/11/09

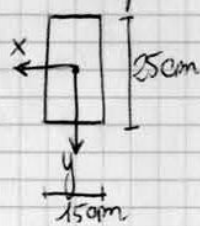
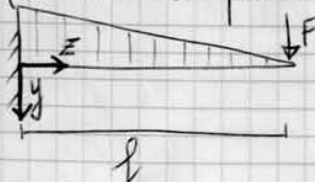
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

con  $x, y$  PRINCIPALI e CENTRALI d'inerzia



Definiamo ASSE NEUTRO (della sezione) il luogo dei punti del piano (della sezione trasversale) in cui  $\sigma_z = 0$ .

Definiamo ASSE di SOLLECITAZIONE la retta ortogonale al vettore momento flettente. (traccia del piano in cui c'è la coppia che genera il momento).



$\Rightarrow$  (come fosse una trave di legno) ? Calcolare  $\sigma_z^{max}$

$F = 5000 \text{ N} = 500 \text{ kg}$   
 $l = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$

$$S_{x_1} = 5 \cdot 80 \cdot 32,5 = 13000 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{13000}{1000} = 13 \text{ cm}$$

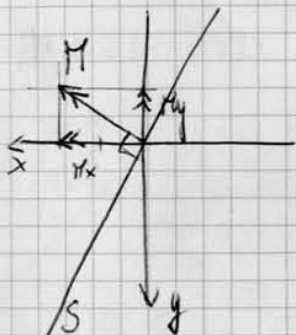
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

$$I_{xx} = \underbrace{\frac{10 \cdot 60^3}{12} + \frac{600}{100} \left( \frac{13}{y_{CG}} \right)^2}_{\text{FIG. (1)}} + \underbrace{\frac{80 \cdot 5^3}{12} + \frac{400}{100} \left( \frac{32,5 - 13}{x_{CG}} \right)^2}_{\text{FIG. (2)}}$$

$$I_{yy} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} + \frac{5 \cdot 80^3}{12}$$

$$I_{xx} = 434333 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 218333 \text{ cm}^4$$



ASSE NEUTRO ( $\sigma_z = 0$ )

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

eq. asse neutro

$$\frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x = 0$$

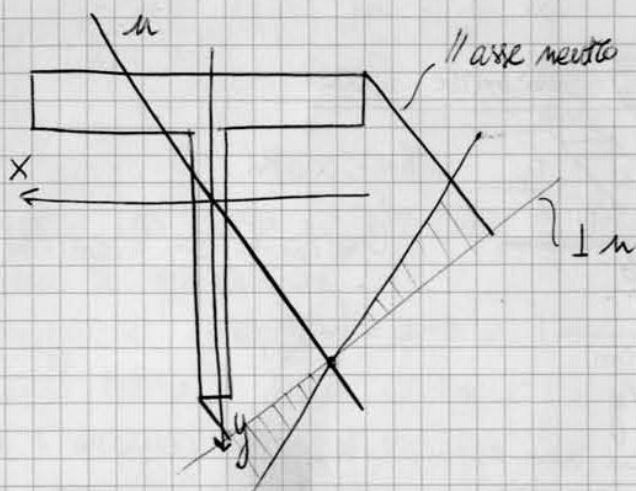
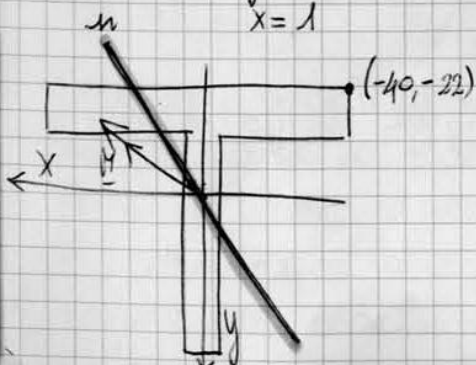
$$\frac{200 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ N cm}}{434333 \text{ cm}^4} y + \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ N cm}}{218333 \text{ cm}^4} x = 0$$

$$\frac{2}{4,3} y + \frac{1}{2,2} x = 0$$

$$y = -\frac{1}{2,2} \cdot \frac{4,3}{2} x = -0,98x$$

eq. asse neutro

$$\text{es } x=1 \Rightarrow y = -0,98$$



$$I_{xx} = \frac{90 \cdot 80^3}{12} = 3.84 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{80 \cdot 90^3}{12} = 4.86 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$A = 80 \cdot 90 = 7200 \text{ cm}^2$$

• CALCOLO ASSE NEUTRO ( $\sigma_z = 0$ )

$$\frac{N}{A} + \frac{N_{ey}}{I_{xx}} y + \frac{N_{ex}}{I_{yy}} x = 0$$

$$\frac{10^6}{7200} + \frac{(-20)}{3.84 \cdot 10^6} y + \frac{(-15)}{4.86 \cdot 10^6} x = 0$$

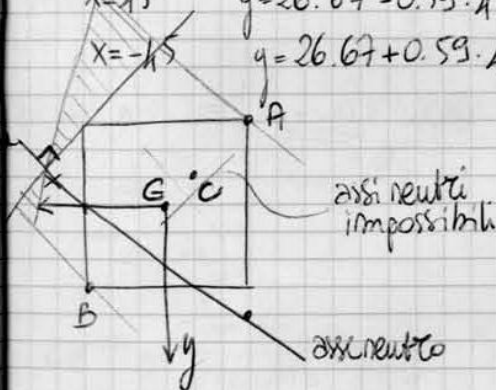
$$\frac{1000}{7.2} + \frac{-20}{3.84} y - \frac{15}{4.86} x = 0$$

$$y = \left( \frac{1000}{7.2} - \frac{15}{4.86} x \right) \cdot \frac{3.84}{20}$$

$$y = 26.67 - 0.59x$$

$$x=15 \quad y = 26.67 - 0.59 \cdot 15 = 0.12$$

$$x=-15 \quad y = 26.67 + 0.59 \cdot 15 = 53.22$$



! L'asse neutro e il centro di pressione stanno da parti opposte rispetto al baricentro.

• CALCOLO delle  $\sigma_z$

$$A \equiv (-40, -20)$$

$$C \equiv (15, -20)$$

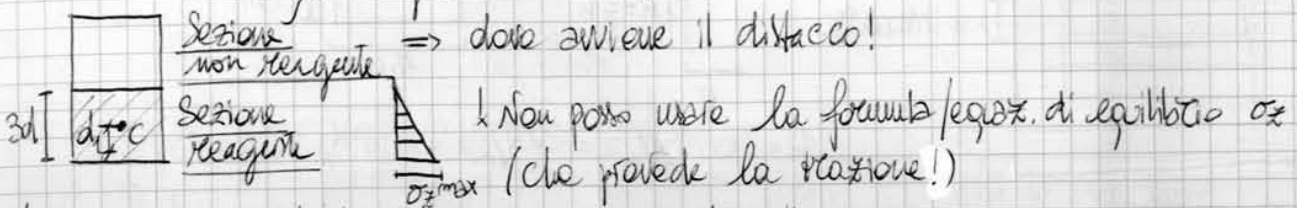
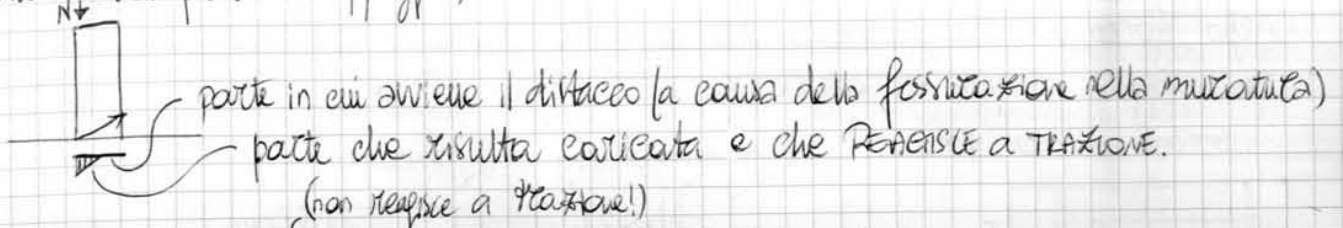
$$\sigma_z = -2 \cdot 10^6 \cdot \left( \frac{1}{7200} + \frac{(-20)}{3.84 \cdot 10^6} \cdot (-40) + \frac{(-15)}{4.86 \cdot 10^6} \cdot (-15) \right) = \dots \text{ N/cm}^2$$

$$B \equiv (45, 40)$$

Struttura in muratura  $\rightarrow$  se applico una forza la struttura si flette da un lato e laddove ho trazione avviene la fessurazione.

Se ho un sistema a cui sono applicate forze con segni  $\neq$ , l'asse neutro  $\perp$  alla sezione; se il segno  $\dot{\text{e}}$  lo stesso  $n$  sarà esterno o al pi $\dot{u}$  tangente alla sezione.

Quando si è fuori dal nucleo d'inezia, una parte dell'oggetto si "stacca" (si solleva dal piano d'appoggio).



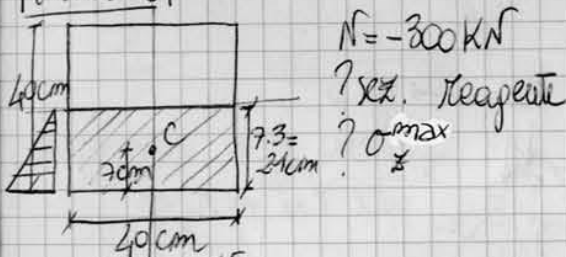
La sezione reagente ha sempre  $n$  tangente alla sezione.  
 Moltiplico di per 3 e ottengo l'altezza della sezione reagente.

$$\frac{1}{2} \sigma_z^{\max} \cdot 3d \cdot b = N$$

Risultante  $\sigma_z$

$$\sigma_z^{\max} = \frac{2N}{A_{\text{reag}}} \quad A_{\text{reag}} = b \cdot 3d$$

**ESERCIZIO**



$$\sigma_z^{\max} = \frac{-300 \text{ kN}}{40 \cdot 21.7} = -\frac{5}{7} \text{ N/cm}^2$$

18/11/03

VERIFICA a FLESSIONE e SFORZO NORMALE NOTI  $N$   $M_x$   $M_y$  CALCOLARE  $\sigma_z$

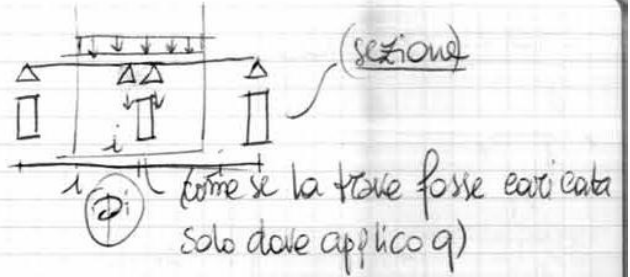
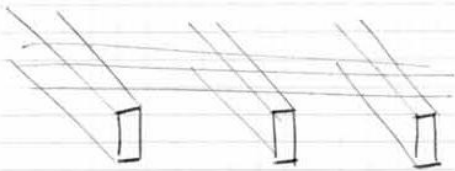
1) Determinare sist. rif. principale e centrale d'inezia

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

$$\sigma_y = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xx}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

2) Disegnare l'asse neutro  $\rightarrow$  otteniamo il diagramma qualitativo delle  $\sigma_z$

3) Calcolare la tensione massima nei punti più distanti dall'asse neutro sostituendo le coordinate nella formula.



$$\sigma_z^{\max} = \sigma_{amm}$$

$$\frac{M}{W} = \sigma_{amm}$$

$$\frac{p \cdot l^2}{8} \cdot \frac{6}{b \left(\frac{2}{3}b\right)^2} = \sigma_{amm} \quad (\text{incognita è la } b)$$

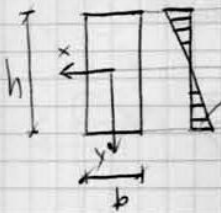
$$\frac{p \cdot l^2}{8} \cdot \frac{6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{b^3} = \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{p \cdot l^2}{3b^3} = \sigma_{amm} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{p \cdot l^2}{3 \sigma_{amm}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 1000^2}{3 \cdot 6}} = 9 \text{ cm}$$

=> per la sola verifica di resistenza basterebbe una trave 10x15.

$$\frac{M}{W} = \sigma_{amm}$$

$$W = \frac{M}{\sigma_{amm}}$$

=> calcolo il modulo di resistenza minimo a soddisfare le esigenze.



$$\sigma_z^{\max} = \sigma_z \left( y = \frac{h}{2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y$$



$$\sigma_z = - \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

$$\sigma_z^{\max} = \sigma_z \left( x = \frac{b}{2} \right) = - \frac{M_y}{hb^3/12} \cdot \frac{b}{2} = - \frac{M_y}{W_y}$$

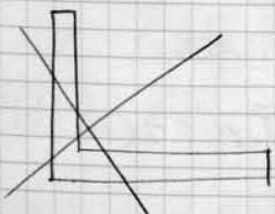
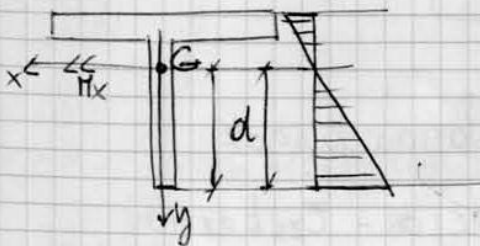
$$W_x = \frac{bh^3}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^3}{6}$$

nelle tabelle dei profili metallici

$$W_x = \frac{I_{xx}}{d}$$

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x}{I_{xx}} y$$



=> nel profilo a L gli assi principali non coincidono con le direzioni principali di profilo, ruotato di 45°.



$$\bar{z}_{xs} = \int_{A^*} \frac{d\sigma_z}{d\epsilon} dA$$

$$\left[ \begin{aligned} M_x &= -T_y(l-z) \\ \sigma_z &= \frac{M_x}{I_{xx}} y = -\frac{T_y(l-z)y}{I_{xx}} \\ \frac{d\sigma_z}{dz} &= \frac{T_y y}{I_{xx}} \end{aligned} \right]$$

$\Rightarrow$  IPOTESI xy SIST. di RIFERIMENTO BARICENTRICO e PRINCIPALE d'INERZIA

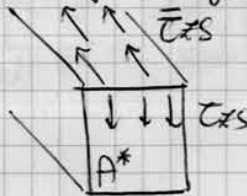
$$\Rightarrow \bar{z}_{xs} = \int_{A^*} \frac{T_y y}{I_{xx}} dA \Rightarrow \bar{z}_{xs} = \frac{T_y}{I_{xx}} \int_{A^*} y dA = \frac{T_y S_x^*}{I_{xx}}$$

$$\bar{z}_{xs} = \frac{T_y S_x^*}{I_{xx} \cdot b}$$

FORMULA di JOURAWSKY

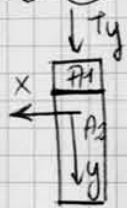
(calcolo delle tensioni generate dal taglio)

teoria del taglio secondo Jourawsky



! trattino su  $\bar{z}_{xs}$  perché è la TENSIONE MEDIA!

ESERCIZIO

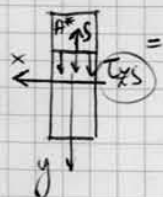


$$\bar{z}_{xs} = \frac{T_y S_x^*}{I_{xx} b}$$

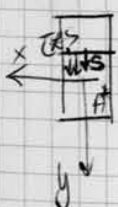
$\Rightarrow$  in questo caso  $S_x^* = 0$

$\frac{S_x}{TOT} = 0$  (asse x è baricentrico della sezione)

$$S_x^{A1} + S_x^{A2} = 0 \quad S_x^{A1} = -S_x^{A2}$$



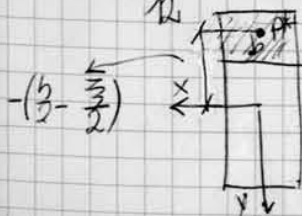
$\Rightarrow$  il momento statico è negativo  $\Rightarrow$  le  $\tau$  sono  $< 0$   $\Rightarrow$  uscenti dall'area  $A^*$



$\Rightarrow$  il momento statico è positivo  $\Rightarrow$  le  $\tau$  sono  $> 0$   $\Rightarrow$  entranti nell'area  $A^*$

$\Rightarrow$  è quindi indifferente quale area/parte di sezione prendere in considerazione

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$



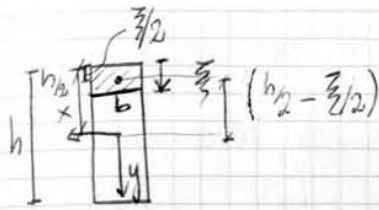
$$S_x^* = ?$$

$$S_x^* = -b \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2} - \frac{z}{2}} y dy$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_{xx} b} \cdot S_x^*$$

COSTANTE

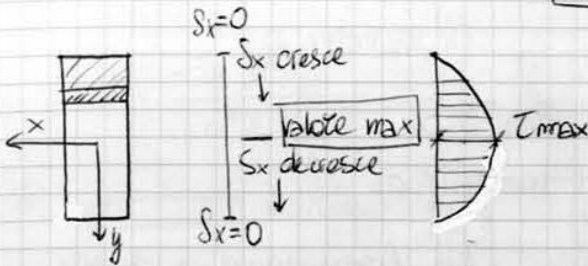
il diagramma qualitativo delle tensioni tangenziali è uguale a quello del momento statico



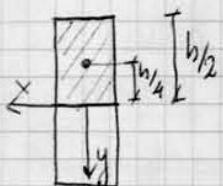
$$S_x^* = \overbrace{-b \frac{z}{2}}^{\text{area}} \left( \frac{h}{2} - \frac{z}{2} \right)$$

per la formula di trasporto del mom. statico

LEGGE PARABOLICA



CALCOLO T\_max:

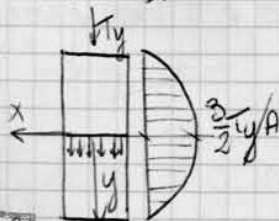


$$S_x^* = b \cdot \frac{h}{2} \left( -\frac{h}{4} \right) = -\frac{bh^2}{8}$$

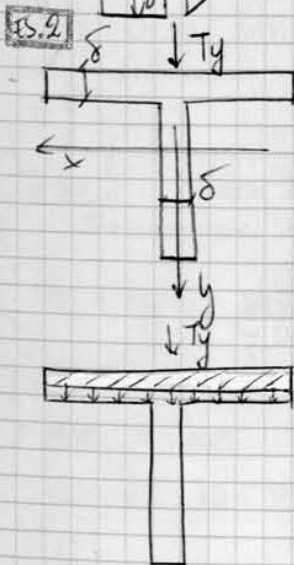
$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$

$$T_{max} = \frac{T_y \left( -\frac{bh^2}{8} \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = -\frac{12}{8} \frac{T_y h^2}{b^2 h^3} = -\frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}$$

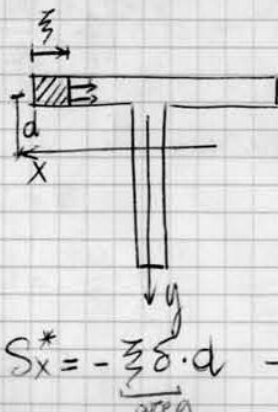
$$T_{max} = -\frac{3}{2} \frac{T_y}{A}$$



Le tensioni tangenziali devono essere uguali al taglio agente sulla sezione => devono avere stesso verso.



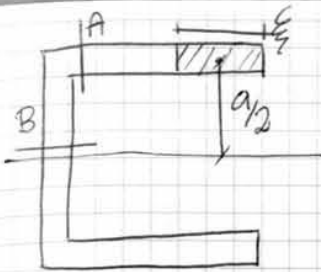
- 1) calcolo il baricentro
- 2) calcolo Ixx



→ entrambe corrette (ma bisogna considerare quella in cui ho le maggiori tensioni tg)

$$S_x^* = -\frac{z}{\text{area}} \cdot d \rightarrow \text{legge lineare in } z \text{ (d è costante)}$$





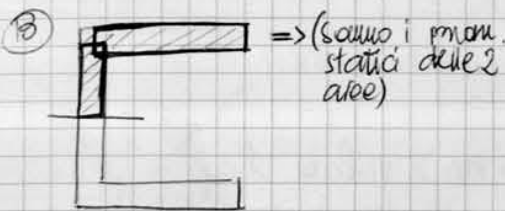
$$S_x^* = \frac{2}{3} \delta \frac{a}{2}$$

(A)  $S_x^* = - a \delta \cdot \frac{a}{2} = - \frac{a^2 \delta}{2}$

(dist. baricentro

di a dall'asse x)

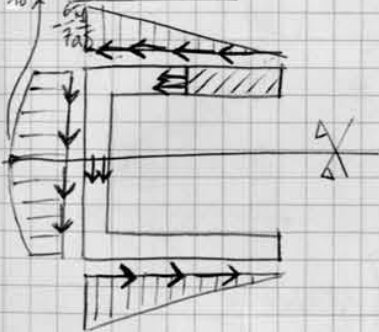
$$\tau^A = \frac{-T_y \cdot \frac{\delta}{2}}{a^2 \delta \cdot \frac{1}{6} \delta} = - \frac{6}{7} \cdot \frac{T_y}{a \delta}$$



$$S_x^* = - \frac{a^2 \delta}{2} - \frac{a \delta a}{2} = - \frac{a^2 \delta}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = - \frac{3}{4} a^2 \delta$$

$$\tau^B = - \frac{T_y \cdot \frac{\delta^2}{8}}{a^2 \delta \cdot \frac{1}{6} \delta} = - \frac{15}{14} \frac{T_y}{a \delta}$$

DIAGRAMMA:



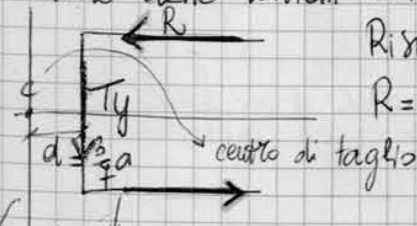
La distribuzione di tensioni tangenziali deve essere uguale al valore di taglio.

Il risultante degli sforzi tangenziali è uguale al taglio

=> componenti verticali (risultante):  $T_y$

=> componenti orizzontali (risultante):  $\phi$

Si definisce CENTRO di TAGLIO della sezione il punto in cui è applicato il risultante delle tensioni tangenziali da taglio => in questo caso è VERTICALE.



Risultante  $e = a T_y \rightarrow$  per l'eq. alla traslazione verticale.

$$R = \frac{3}{7} T_y$$

in quanto le tensioni tangenziali sono distribuite lungo la corda di lunghezza  $\delta$

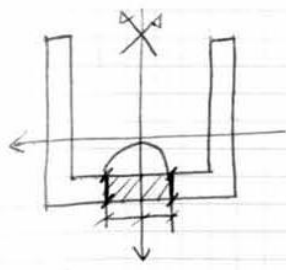
(linea media della sezione "c")

Se faccio il momento rispetto a c, considerando  $d$  come incognita e il momento pari a zero, trovo la posizione di c.

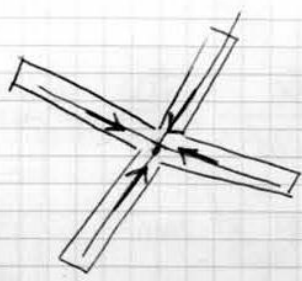
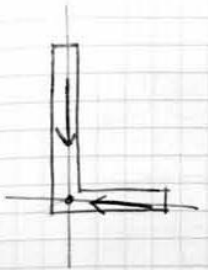
MOMENTO RISPETTO A C =  $\phi$

$$R a - T_y d = 0 \rightarrow d = \frac{R a}{T_y} = \frac{3}{7} \frac{T_y a}{T_y} = \frac{3}{7} a \rightarrow \text{il punto si trova dal lato giusto}$$

perché il momento della coppia è la forza  $\cdot$  braccio della coppia (opp.  $\frac{R a}{2} + \frac{R a}{2}$ ) 31

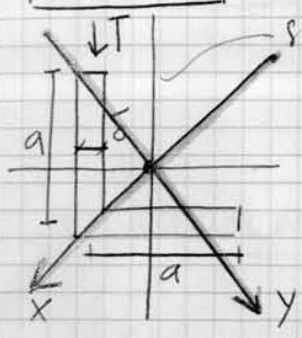


Quando ho un asse di simmetria su cui agisce la  $T_y$  (taglio), ottengo lo  $\phi$  delle tensioni tangenziali da taglio  $\Rightarrow$  all'inizio dei tratti e lungo l'asse di simmetria ( $\Rightarrow$  se  $T_y$  agisce su di esso!).

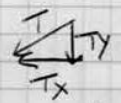
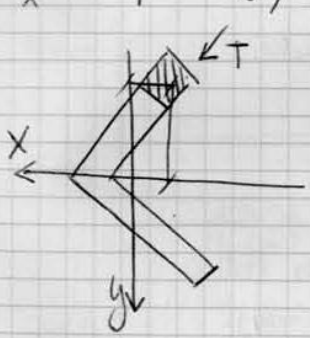


Assi di simmetria e forze convergenti in un punto ci danno lo sforzo di taglio.

**ESERCIZIO**



sistema d'assi non è principale d'inerzia  $\rightarrow$  non posso applicare Jourawsky.

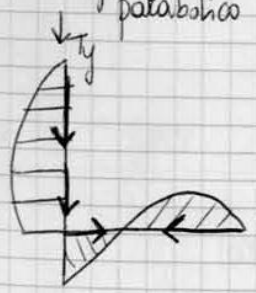


$\rightarrow$  ruoto di  $45^\circ$  in senso antiorario

$$\tau = \frac{T_y S_y^*}{I_{xx} \delta} + \frac{T_x S_x^*}{I_{yy} \delta}$$

diagramma parabolico

diagramma parabolico



$\Rightarrow$  aree = e opposte (bisogna soddisfare l'equilibrio alla trasl. orizzontale)

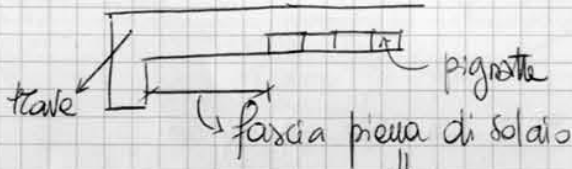
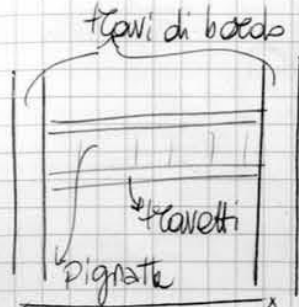
**VON MISES**

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

**TRESCA**

=> calcolare dove la tensione eq. è massima.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

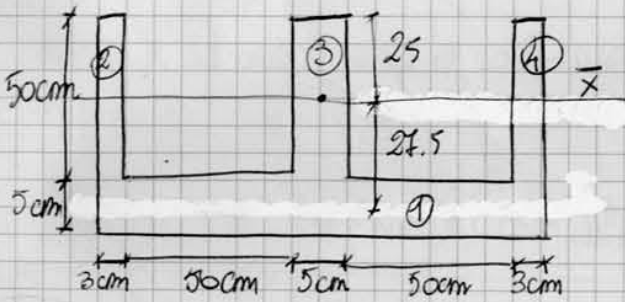


serve per sopportare le tensioni di taglio (tangenziali)

(schema statico dei trave)

30/11/08

**ESERCITAZIONE d'ESAME (15/06/08)**



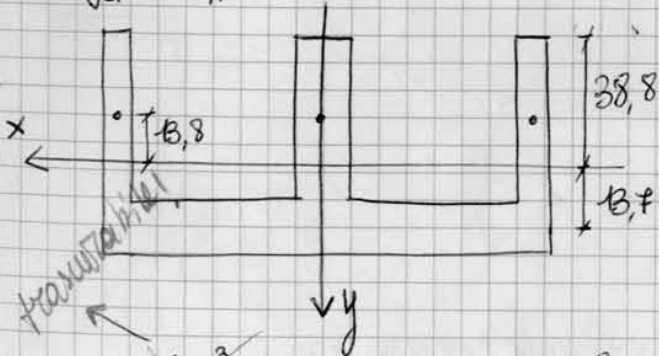
$T_y = 35 \text{ kN}$   
Ha un'asse principale di simmetria => il sistema è BARICENTRICO e PRINCIPALE d'INERZIA.

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{I_{xx} b}$$

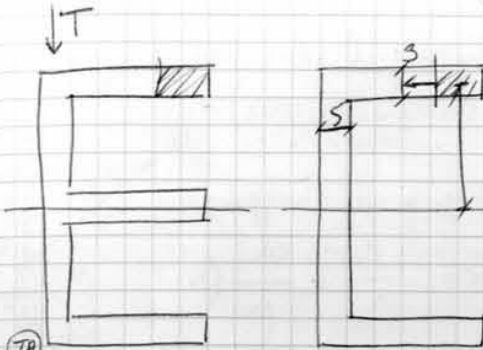
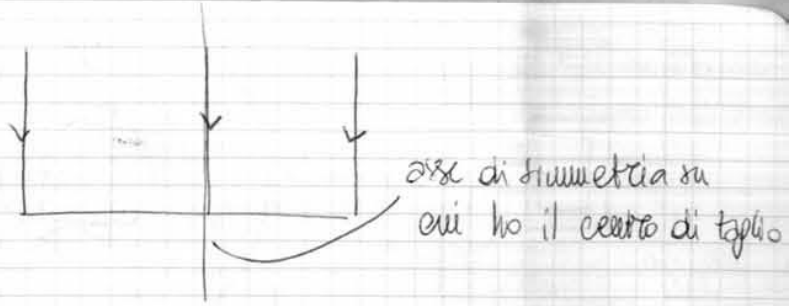
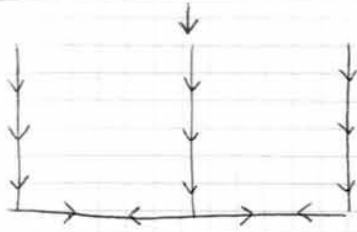
$$S_x = \frac{M \cdot 5 \cdot 27.5}{A_0} = 15263 \text{ cm}^3$$

$$A = 2 \cdot \frac{50 \cdot 3}{2} + 50 \cdot 5 + \frac{M \cdot 5}{2} = 1105 \text{ cm}^2$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 13.8 \text{ cm}$$

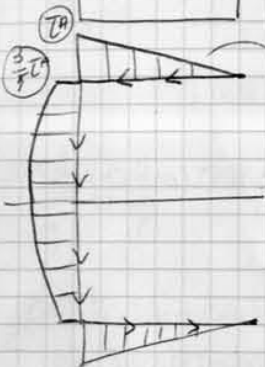


$$I_{xx} = \frac{M \cdot 3^3}{12} + \frac{1105 \cdot 13.7^2}{A_0} + 2 \left( \frac{3 \cdot 50^3}{12} + 150 \cdot 13.8^2 \right) + \frac{5 \cdot 50^3}{12} + 250 \cdot 13.8^2 = 324656 \text{ cm}^4$$



Le 2 sezioni hanno uguale baricentro e uguale momento d'inerzia.

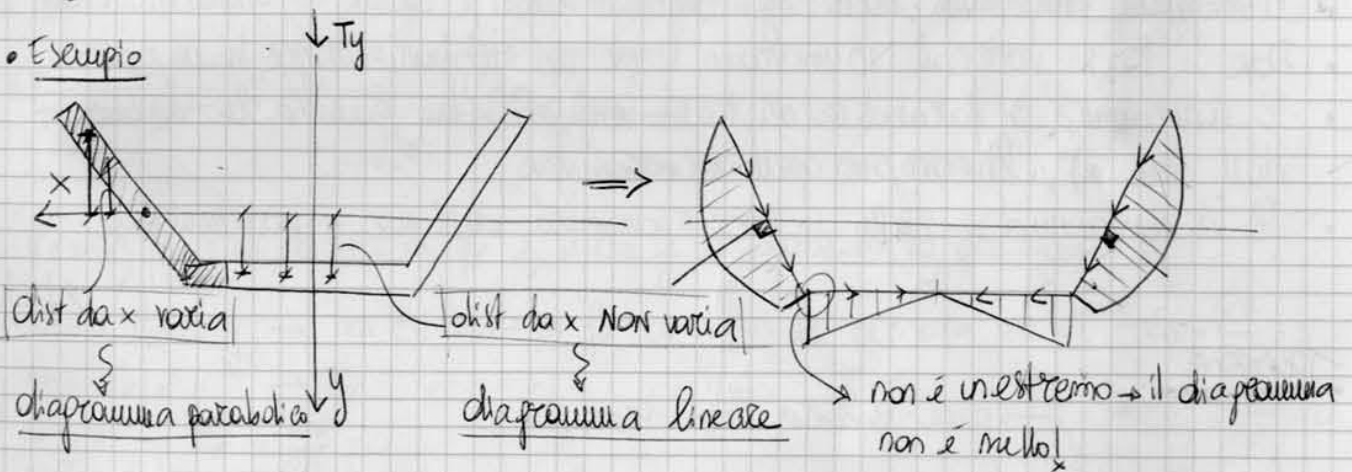
$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{I_{xx} \delta}$$



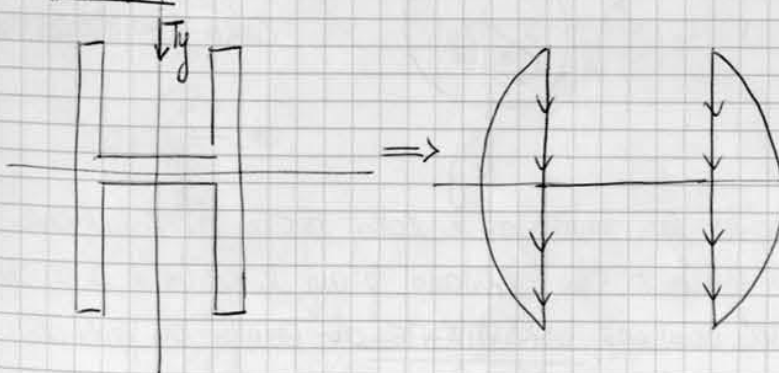
lineare → la distanza da x non varia.

⇒ diagramma definitivo è uguale a quello della sez. a "C"

• Esempio



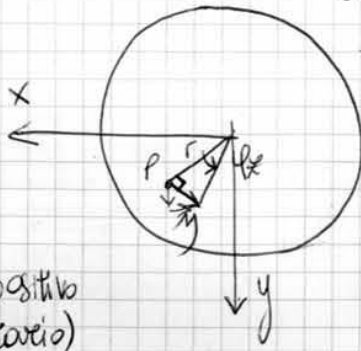
• Esempio



⇒ agli estremi il diagramma assume valore  $\phi$ .

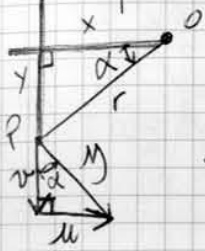
↳ In corrispondenza dell'asse baricentrico le tensioni tangenziali sono nulle.

$$y = \varphi'_x \cdot r$$



comp  $x$  è opposta alla  $x$  di riferimento!  
 se molto piccoli  
 Sono così detti  
 UGUPA  
 differiscono per  
 infinitesimi di  $\phi$   
 di 2° grado

l'angolo di rotazione è positivo  
 (senso antiorario)



Applico la proporzione tra i 2 triangoli:

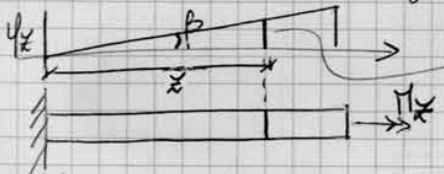
$$1) \frac{|u|}{y} = \frac{y}{r} \Rightarrow |u| = y \frac{y}{r} = \varphi'_x \cdot \frac{y}{r} \Rightarrow u = -\varphi'_x y$$

(cateto opposto ad alfa: ipotenusa)

$$2) \frac{v}{y} = \frac{y}{r} \quad v = y \frac{x}{r} = \varphi'_x \cdot r \cdot \frac{x}{r} \Rightarrow v = \varphi'_x \cdot x$$

(cateto adiacente ad alfa: ipotenusa)

lo spostamento  $w$  lungo  $x$  è  $\phi$  perché le sezioni ruotano piano.



$$\varphi'_x = \varphi'_x \cdot z$$

angolo unitario di rotazione

$\varphi'_x = \tan \beta$  (la derivata di  $\varphi_x$  è il coeff. angolare  $\Rightarrow \tan$  dell'angolo)

$$u = -\varphi'_x z \cdot y \rightarrow \text{non c'è nulla in } \varphi'_x \text{ di } x \Rightarrow \text{la derivata wrt } \phi \rightarrow \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$v = \varphi'_x z \cdot x \rightarrow \text{" " " " } y \Rightarrow \text{" " " " } \tau \cdot \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$w = \phi \rightarrow \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi'_x z + \varphi'_x z = 0$$

$$\tau = G\gamma$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\varphi'_x y \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi'_x x \end{cases}$$

uniche diverse da  $\phi$ !

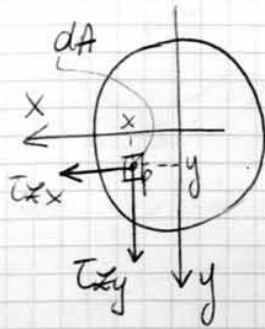
$$\tau_{xz} = -\varphi'_x y G$$

$$\tau_{xy} = \varphi'_x x G$$

$$\tau_x = \int_A \tau_{xz} dA = \int_A -\varphi'_z y G dA = -\varphi'_z G \underbrace{\int_A y dA}_{S_x} = 0$$

$$\tau_y = \int_A \tau_{yz} dA = \varphi'_z G \int_A x dA = 0$$

non dipendono dallo spessore di taglio  $b$



$$\tau'_z = \int_A (\tau_{xy} \cdot x - \tau_{yx} \cdot y) dA = *$$

(perché genera momento orario)

Il momento torcente è uguale al momento risultante delle tensioni tangenziali.

$$* = \int_A (\varphi'_z \cdot x^2 \cdot G + \varphi'_z y^2 G) dA = \varphi'_z G \int_A (x^2 + y^2) dA = \varphi'_z G \int_A r^2 dA = \varphi'_z G I_p$$

$$\left. \begin{aligned} \int_A x^2 dA &= \text{momento d'inerzia risp. a } y \\ \int_A y^2 dA &= \text{momento d'inerzia risp. a } x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \int_A x^2 + y^2 dA &= I_{xx} + I_{yy} \\ \int_A x^2 dA &= I_{yy} ; \int_A y^2 dA = I_{xx} \end{aligned}$$

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_A r^2 dA = I_p \Rightarrow \text{MOMENTO D'INERZIA POLARE}$$

$$\varphi'_z = \frac{M_z}{G \cdot I_p}$$

(scompare il modulo di elasticità)

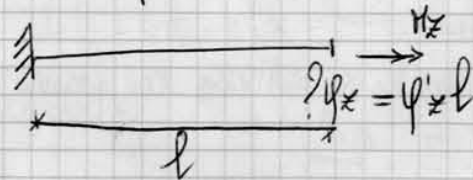
$$\tau_z = \varphi'_z G r$$

$$\tau_z = \frac{M_z}{I_p} \cdot r$$



$$\varphi'_z = \frac{M_z}{I_p G}$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$



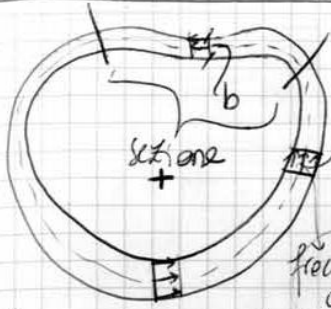
$\tau_z$  resta lo stesso indipendentemente dal materiale, ma l'angolo unitario di deformazione sarà molto più grande per (es.) una trave di alluminio rispetto a una di acciaio.



$$I_p = \frac{\pi R_e^4}{2} - \frac{\pi R_i^4}{2}$$

$R_e = \text{raggio esterno}$   
 $R_i = \text{raggio interno}$

## SEZIONE CHIUSA POTTILE



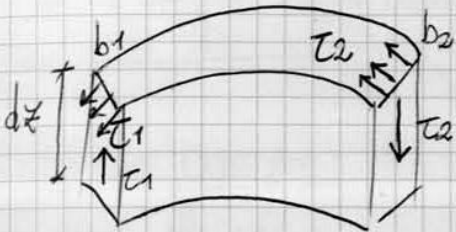
le tensioni tangenziali fluiscono all'interno della linea mediana del "ciclo"

Il flusso del circuito dev'essere costante!

potrà a  
unità di tempo

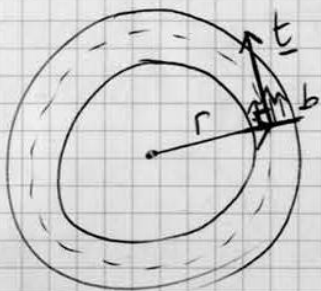
\* [per il principio di CONSERVAZIONE del FLUSSO]

flusso  $q = \tau \cdot b \Rightarrow$  COSTANTE



Per l'eq. di equilibrio lungo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  verticali devono essere uguali e opposte.

$$\tau_1 b_1 dz = \tau_2 b_2 dz \Rightarrow q = \tau b = \text{COSTANTE}$$



$$\underline{t} \perp \underline{b}$$

$$\underline{M}_z = \int_M \underline{r} \times \underline{\tau} b ds$$

linea mediana di sezione

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tau} b = q$$

$$\underline{\tau} = \underline{\tau} \underline{t}$$

(versore della tangente)

$$\underline{M}_z = \int_M \underline{r} \times \underline{\tau} b \underline{t} ds = \tau b \int_M \underline{r} \times \underline{t} ds$$

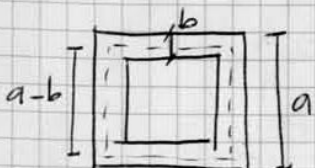
costanti  $\Rightarrow$  posso portarle fuori

$$\underline{M}_z = \underline{M}_z \cdot (\underline{k}) = \tau b \int_M \underline{r} \times \underline{t} \cdot \underline{k} ds$$

(versore dell'asse x) funzione della geometria della sezione = l'area media della sezione (racchiusa dalle 2 cfr)

$$\tau = \underline{M}_z / 2A_m b$$

$\rightarrow$  calcolo delle tensioni tangenziali in una area chiusa di una sezione qualunque.



$(a-b)^2 =$  area racchiusa dalla linea mediana

Il momento torcente si ripartisce tra i vari elementi della sezione.

$$\frac{M_x^{\textcircled{1}}}{I_t^{\textcircled{1}} G} = \frac{M_x^{\textcircled{2}}}{I_t^{\textcircled{2}} G} = \frac{M_x^{\textcircled{3}}}{I_t^{\textcircled{3}} G} = \dots = \frac{M_x}{G I_t} \rightarrow \text{totale}$$

$$M_x = M_x^{\textcircled{1}} + M_x^{\textcircled{2}} + M_x^{\textcircled{3}} \dots$$

$$I_t = I_t^{\textcircled{1}} + I_t^{\textcircled{2}} + I_t^{\textcircled{3}} + \dots$$

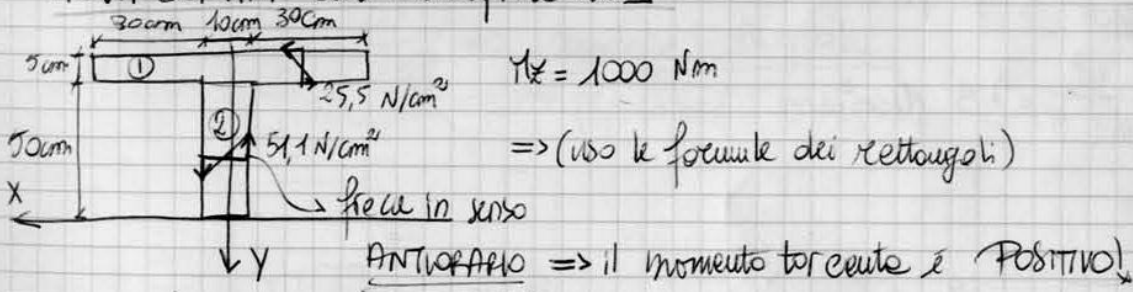
$$\boxed{M_x^{\textcircled{1}} = \frac{I_t^{\textcircled{1}}}{I_t} M_x} \rightarrow \text{momento torcente assorbito dall' } i\text{-esimo pezzo}$$

$$\left( \frac{M_x^{\textcircled{1}}}{I_t^{\textcircled{1}} G} = \frac{M_x}{G I_t} \right)$$

### SEZIONE COMPOSTA

- 1) CALCOLO  $I_t^{\textcircled{1}}$
- 2) CALCOLO  $I_t = \sum I_t^{\textcircled{i}}$
- 3) CALCOLO  $M_x^{\textcircled{1}} = \frac{I_t^{\textcircled{1}}}{I_t} M_x$
- 4) CALCOLO  $\tau = (\dots)$  per ogni elemento della sezione composta

PROVA SCRITTA del 20 aprile 2009



①  $a = 70 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$

②  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$

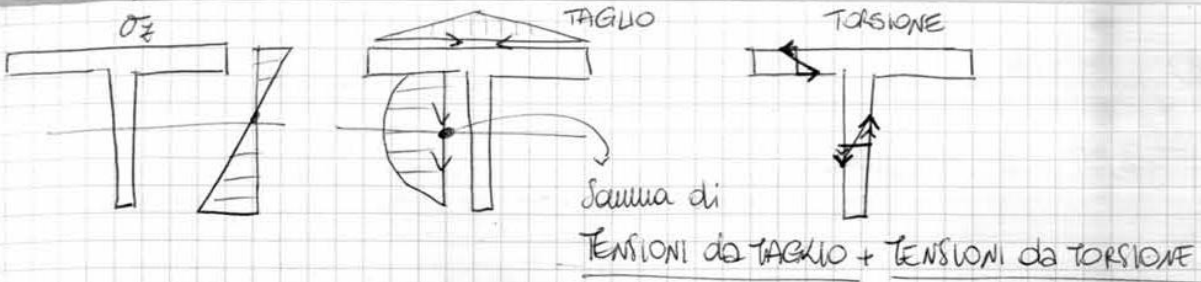
$$I_t^{\textcircled{1}} = \frac{ab^3}{3} = \frac{70 \cdot 5^3}{3} = 2917 \text{ cm}^4$$

$$I_t^{\textcircled{2}} = \frac{ab^3}{3} = \frac{50 \cdot 10^3}{3} = 16667 \text{ cm}^4$$

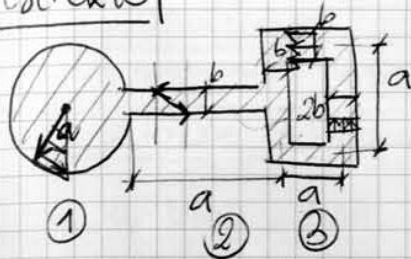
$$I_t = I_t^{\textcircled{1}} + I_t^{\textcircled{2}} = 19584 \text{ cm}^4$$

$$M_x^{\textcircled{1}} = \frac{I_t^{\textcircled{1}}}{I_t} M_x = \frac{2917}{19584} \cdot 1000 \text{ Nm} = 149 \text{ Nm}$$





**ESERCIZIO**



$$① \quad I_p^{①} = I_t^{①} = \frac{\pi a^4}{2}$$

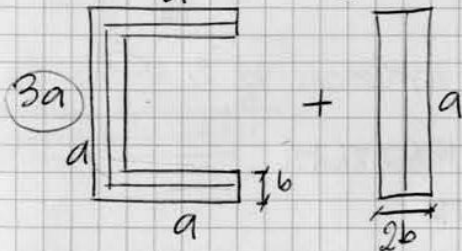
$$② \quad I_t^{②} = \frac{ab^3}{3}$$

$$③ \quad I_t^{③} = \frac{4A_m^2}{\int \frac{1}{b(s)} ds}$$

$A_m = a^2$  (segmento di perimetro)

$$\int \frac{1}{b(s)} ds = \frac{3a}{b} + \frac{a}{2b} \Rightarrow \text{scorporo l'integrale}$$

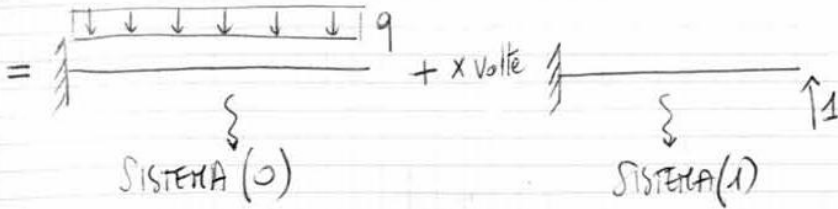
(spessore del segmento)



$$\Rightarrow I_t^{③} = \frac{4A_m^2}{\int \frac{1}{b(s)} ds} = \frac{4a^2}{\frac{3a}{b} + \frac{a}{2b}}$$

$$I_t = I_t^{①} + I_t^{②} + I_t^{③}$$

$$\eta_x^{①} = \frac{I_t^{①}}{I_t} \quad \eta_x^{②} = \frac{I_t^{②}}{I_t} \quad \eta_x^{③} = \frac{I_t^{③}}{I_t}$$



⇒ entrambe sono  
isostate che  
divido in 2 strutture e x il  
princ. di sovrapposizione  
degli effetti.

SISTEMA REALE = SIST(0) + x SIST(1)

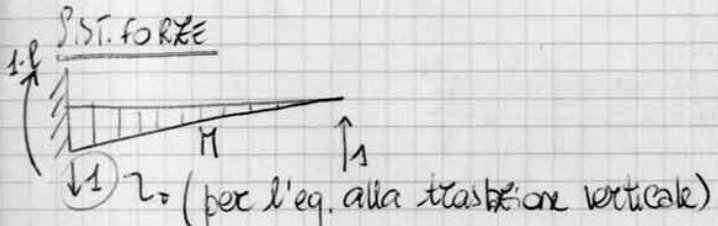
Assumo come:

- SISTEMA SPOSTAMENTI il sistema reale;
- SISTEMA FORZE il sistema (1).

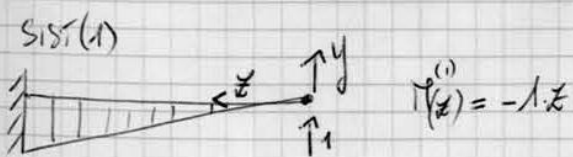
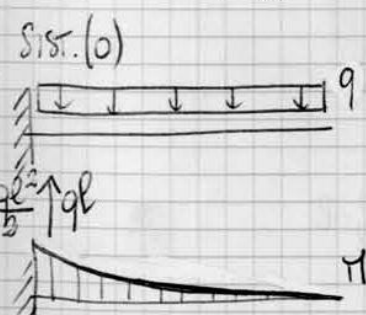
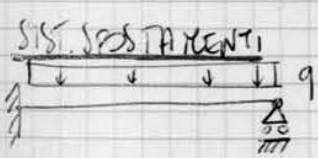
PRINC. dei LAVORI VIRTUALI:

forze sist. forza • spost. sist. reale =

$$= \int_{\Omega} \epsilon(DT) dV = \int_{\text{struttura}} M^{(F)} \cdot \frac{\delta^{(R)}}{EI} dx + \int_{\text{struttura}} N^{(F)} \cdot \frac{\delta_N^{(R)}}{EA} dx + \dots$$



forza in B  
↓  
LAVORO VIRTUALE ESTERNO = 1 · 0 = 0  
↑  
Spost. di B  
rel sist. reale



⇒ M^{(R)} = M^{(0)} + x M^{(1)}