



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 25

DATA : 07/02/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Espinoza

MATERIA : Fisica - Fenomeni Ondulatori - Prof. Allia

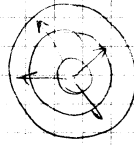
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FENOMENI ONDULATORI

Monopolo acustico → fronti d'onda s: espulsioni in fase con velocità radiale



particelle fluide oscillano avanti e indietro attorno posizione di equilibrio

attenuazione geometrica

$$p_{\text{ain}}(r,t) = \frac{p_{\text{max}}}{kr} e^{i(kr - \omega t)}$$

onda acustica → energia \propto (pressione)²

→ nel energia trasportata da un'onda subtrazione sempre un quadrato di qualcosa

$$I_{\text{av}} \propto \frac{|p_{\text{max}}|^2}{(kr)^2}$$

intensità dell'onda = en. per unità di tempo per unità di superficie

proporzionale a meno di costante

Potenza irradiata: $\int_S I(r, \theta, \varphi) dS = \int_{\Omega} \underbrace{I(r, \theta, \varphi)}_{= I(r) \propto \frac{1}{r^2}} r^2 d\Omega$

$$\propto \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega$$

= 4π è una costante indipendente da r

Pressione e velocità oscillanti non sono né in fase né in opposizione (→ non presentano una precisa relazione) ma quando $kr \gg 1$ è molto grande

$\frac{1}{kr} \gg \frac{1}{(kr)^2} \Rightarrow$ a grandi distanze dall'origine (in condizioni di CAMPO REMOTO) (→ $kr \gg 1$)

il termine $\frac{\cos(kr - \omega t)}{(kr)^2}$ è trascurabile rispetto $\frac{\sin(kr - \omega t)}{kr}$

pressione e velocità sono in fase

è ciò che accade alle onde piane

→ Onde sferiche, molto lontane dalla sorgente \sim onde piane

ONDE IN LIQUIDI

per i fluidi vale l'eq di Eulero (↔ che è l'eq di Newton per i fluidi)

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{accelerazione delle particelle fluide}} = - \frac{1}{\rho} \nabla p \rightarrow \text{pressione nel fluido}$$

accelerazione delle particelle fluide

forza per unità di massa

avevamo trascurato

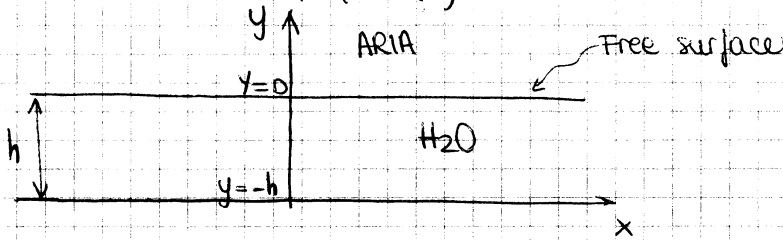
→ trascurata

- forze di attrito viscoso
- forza peso

Nella realtà liquido è decisamente comprimibile

(se noi trascuriamo questa delle comprimibilità \Rightarrow all'interno del liquido NON si possono avere onde)

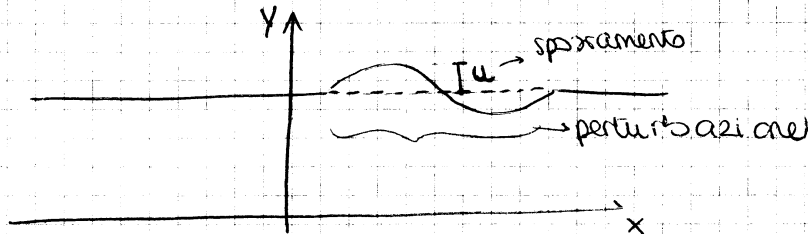
ci chiediamo possono esserci al contorno? all'interfaccia con la superficie?



ora immagino perturbazione del liquido alla superficie (ma il liquido pesa, lasciato andare cade qui e potrebbe provocare effetto che si propaga...)

\rightarrow effetto di interfaccia alla superficie H₂O/aria

vediamo ora le condizioni al contorno.



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \left(-gy - \frac{1}{\rho_0} p + cost \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \phi) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \left(-gy - \frac{1}{\rho_0} p + cost \right)$$

scambio derivate

(integrando parzialmente)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} p + gy + f(t)$$

le condizioni al contorno sono quelle nella Free surface ($y = \phi$)
 se la superficie è increspata $\rightarrow y = u$

1^a condizione al contorno $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=u} = \frac{1}{\rho_0} p_{atm} + gu + f(t) \right\} \Rightarrow gu$

ATMOSPHERIC PRESSION (= cost)

\rightarrow la faccio costante in y

\downarrow
 \neq arbitraria

con una certa scelta di GAUGE:

$$\phi_{\pi} = \phi + g(t) \rightarrow \text{1/2 arbitraria della trans}$$

(la velocità è invariante per trasformazione di Gauge)

$$\frac{\partial \phi_{\pi}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + g'(t) = \frac{1}{\rho_0} p_{atm} + gu + f(t) + g'(t) = gu$$

\downarrow
 impiego l'uguaglianza e trovo g

$$\frac{\partial \phi_{\pi}}{\partial t} \Big|_{y=u} = gu$$

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt - \frac{1}{\rho_0} p_{atm} t$$

\leftarrow che deriva dalla trasformazione, d'ora in poi con ϕ intendo ϕ_{π}

Affinche' siano soddisfatte le condizioni al contorno queste deve valere:

$$\omega^2 \cosh(kh) = gk \sinh(kh)$$

ossia

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

$$\omega = [gk \tanh(kh)]^{1/2}$$

RELAZIONE
Tra frequenza ω e
numero d'onda k

RELAZIONE DI DISPERSIONE \rightarrow NON LINEARE

\neq Velocità di fase e velocità di gruppo sono differenti quando v_f è funzione delle lunghezze d'onda

velocità di fase di queste onde è $v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}$
e' \neq di λ !

$$v_f = v_f(k) = v_f(\lambda)$$

MEZZO DISPERSIVO
PER LE ONDE di GRAVITA'

Se mezzo è dispersivo
allora

si deve definire velocità di gruppo.

consideriamo i 2 casi:

Ⓐ $kh \gg 1$

$$h \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

ACQUA PROFONDA

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi} \lambda} \propto \lambda^{1/2} \rightarrow \text{condizioni di dispersione}$$

quando $kh \gg 1 \Rightarrow \tanh(kh) \rightarrow 1$

Ⓑ $kh \ll 1$

$$h \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

ACQUA BASSA

(SHALLOW WATER)

$$\sinh(kh) \approx kh$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{gh}$$

\Rightarrow NON VI È PIÙ DISPERSIONE
infatti v_f è INDIPENDENTE da λ

$\Rightarrow v_f$ dipende dalle profondità
e da g , acceler. di gravità.

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$$

$$v_{\text{gruppo}} = \frac{d\omega}{dk}$$

$v_{\text{gruppo}} \downarrow$ se $\lambda \uparrow$

Nel caso di

ACQUA BASSA

v_f non dipende da λ

quindi $v_f = v_{\text{gruppo}}$

perche' siamo in MEZZO NON DISPERSIVO
(invece ACQUA ALTA \rightarrow DISPERSIVO)

ACQUA PROFONDA

$$\tanh(kh) \rightarrow 1 \Rightarrow \omega \approx \sqrt{gk}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} g^{1/2} \cdot \frac{1}{k^{1/2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f \Rightarrow v_g < v_f$$

si ottiene cioè un moto complesso delle particelle fluide



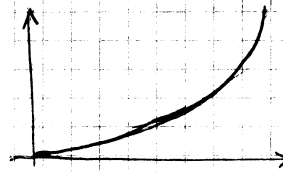
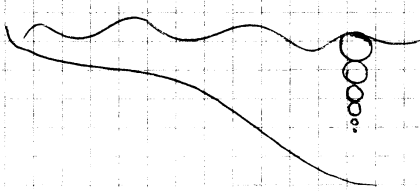
Mentre onda passa particelle fluide
si alza, si abbassa
ma contemporaneamente
va verso dx e dx

⇒ moto rotatorio

Questo tipo di onde si chiama
ONDA DI AIRY
ed è tipica delle H₂O profonde

13.12.2010

Particelle fluide alla superficie dell'H₂O
si muovono di moto circolare
tale moto permette la propagazione
un'onda con ampiezza sempre più ridotta.



In H₂O BASSE → MOTO ELLITTICO

(→ moto orizzontale non influenzato
invece componente verticale π ! → circonferenza si schiaccia,
diventa un'ellisse.

Quando il fondale si alza
onda rallenta

→ aumenta en. potenziale → cioè onda si alza → può uscire dalle
linearità → si rompono.

La velocità di fase in funzione della lunghezza d'onda cresce.
(→ onde di lunghezza d'onda maggiore hanno velocità
maggiore)

→ se produciamo un'onda con lunghezza d'onda \neq le
onde con lunghezza λ → arrivano prima perché hanno
velocità $>$.

(basta stare nell'acqua e guardare le onde prodotte
andare verso riva, al passare del tempo la lunghezza
d'onda diminuisce, perché le onde con $\lambda <$ arrivano dopo)

Onde di capillarità (RIPPLES)
prodotte dal vento che
soffia tangenziale.

Nel caso di moto oscillatorio nei fluidi
siamo partiti da

FORZA PER UNITÀ DI MASSA

$$\vec{F} = \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \left(-gy - \frac{1}{\rho_0} p \right)$$

da qui abbiamo scritto varie
espressioni in cui compare

abbiamo introdotto il potenziale delle velocità $\phi(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} p + gy + f(t) \xrightarrow{\text{scelta di GAUGE}} gy$$

eq. per ϕ è l'eq di Laplace: $\nabla^2 \phi = 0$

$\phi = \cosh[k(y+h)] e^{i(kx - \omega t)}$ → è soluzione dell'eq di Laplace ma vanno bene solo i valori di ω e k che soddisfanno condizioni al contorno

↓
dipendenza dell'ampiezza dalla profondità y - onda piana

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{y=0} = -\omega^2 \cosh(kh) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = k \sinh(kh) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right|_{y=0} = -k^2 \cosh(kh) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

Quindi la condizione al contorno sarà:

$$\left[-\omega^2 \cosh(kh) + gk \sinh(kh) + \left(\frac{T}{\rho_0}\right) k^3 \sinh(kh) \right] e^{i(kx - \omega t)} = 0$$

e dice che dev'essere una precisa relazione tra ω e k → nella soluzione cioè non tutte le scelte vanno bene.

$$\omega^2 = \left[\left(\frac{T}{\rho_0}\right) k^3 + gk \right] \tanh kh$$

$$\omega = \left[\left(\frac{T}{\rho_0}\right) k^3 + gk \right]^{1/2} \tanh^{1/2} kh \rightarrow \text{espressione funzionale complicata non lineare sono presenti onde di gravità e capillari}$$

$$v_{\text{fase}}(k) = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{T}{\rho_0} k + \frac{g}{k} \right]^{1/2} \tanh^{1/2}(kh)$$

$$v_{\text{fase}}(\lambda) = \left[\frac{T}{\rho_0} \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right]^{1/2} \tanh^{1/2}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \rightarrow \text{FORMULA PER LA VELOCITÀ DELLE ONDE SULLA SUPERFICIE DI UN FLUIDO}$$

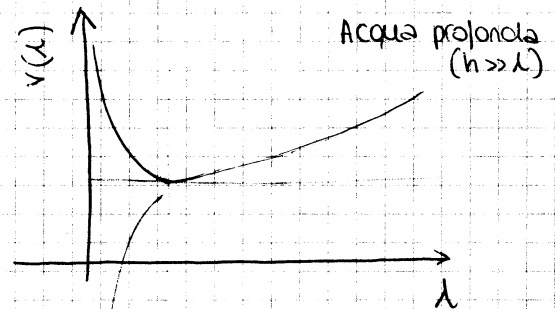
v_{fase} funzione di λ e il mezzo è dispersivo ⇒ v_{fase} e v_{gruppo} NON coincidono

termine che dipende linearmente con λ

termine che \uparrow con λ

condizione di Acqua profonda è $kh \gg 1$

$$\frac{2\pi}{\lambda} h \gg 1 \rightarrow \tanh(\cdot) \sim 1$$



è una velocità di fase minima al di sotto della quale non si propagano onde nell'H₂O

Quando si considerano lunghe lunghezze d'onda si possono trascurare le tensioni superficiali perché quando λ molto grande

allora $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ molto piccolo

⇒ nel limite di lunga λ non entrano in gioco fenomeni di tensione superficiale $T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

invece quando λ piccola \rightarrow preponderanza del termine $T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

- G scelta tale che $\varphi \rightarrow 0$ quando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$
- \vec{A} scelta tale che sia campi solenoidale: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Suppongo di aver generato un \vec{A} non solenoidale $\rightarrow \vec{A}_{ns}$
 allora $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{ns} = v(x, y, z) \neq 0$

↓
funzione scalare

$\vec{A} = \vec{A}_{ns} - \vec{\nabla} f$ ← lo trasformo in A solenoidale

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{ns} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = v(x, y, z) - \nabla^2 f$

↓
divergenza del gradiente di f

$\nabla^2 f = v(x, y, z)$ eq. di Poisson (che ammette sempre una soluzione)

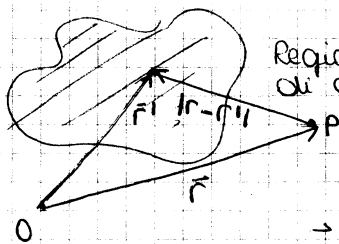
$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ → cambiamento di densità in $\vec{r}(x, y, z)$

$\vec{\nabla}(-\vec{\nabla} \varphi) = -\nabla^2 \varphi = \rho/\epsilon_0$

$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$ → Eq. di Poisson per il campo elettrostatico

soluzione formale e'

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$



Regione dello spazio in cui n e' densita' di carica $\neq 0$.

Si immagina tutto il volume come una serie di punti

→ Potenziale di una carica puntiforme → sommo i potenziali di carica puntiforme
 → integro per ottenere potenziale generato da distribuzione di carica

Ora analizziamo scelta di gauge per campo \vec{B}

$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \rightarrow$ equivalente a dire $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow$ e vuol dire che non entrano poli magnetici

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$ → sorgente di campo \vec{B} pratico sono correnti di cariche

~~ROTORE~~ $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

rotore del rotore di \vec{A}
divergenza del gradiente di \vec{A}
Gradiente della div \vec{A}

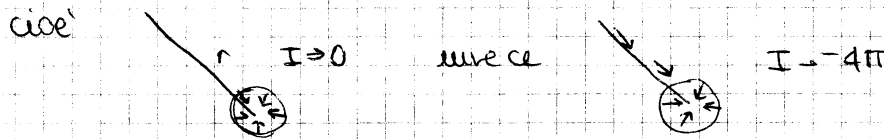
0 con la scelta di Gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$ anche \vec{A} soddisfa eq di Poisson

abbiamo trovato stessa struttura formale identica a $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$ avendo fatto scelta di Gauge

→ allora ammetteremo stesse soluzioni

Se $r \neq 0$, facendo tendere $\epsilon \rightarrow 0$ $I \rightarrow 0$
 è l'unica possibilità tale che $I \neq 0$ e di far tendere contemporaneamente
 $r \rightarrow 0$ e $\epsilon \rightarrow 0$ (nota che $I = -\frac{4\pi}{r^2} \epsilon^2$ → sono uguali in ordine)
 $I \rightarrow -4\pi$



— MAKA UNIONE —

17.12.2010

ELETTRODINAMICA (in vuoto)

definiamo $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ oppure $\varphi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$

GAUGE ↔ DI COULOMB → presenta difficoltà
 DI LORENZ → funziona!
 EFFETTO CAUSA

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \\ \nabla \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \end{cases} \rightarrow \text{Arriviamo a 2 eq. disaccoppiate (una per } \varphi \text{ e una per } \vec{A}) \text{ lineari, ai coefficienti costanti}$$

Si corso del disaccoppiamento delle eq. di Maxwell è che siamo passati al 2° ordine

effetto nello spazio di un potenziale scalare → presenza di una densità di carica $\rho(\vec{r}, t)$

una volta che φ ed \vec{A} sono creati, vivono di vita propria infatti
 → lontano dalle sorgenti del campo auremo:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \text{ eq omogenee.}$$

ipotesi Ma per ottenere la forma esplicita di un potenziale considero:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (*)$$

caso statico. $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$ → eq. di Poisson, e avevamo usato un'opportuna funzione ausiliaria di GREEN e richiedendo:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'$$

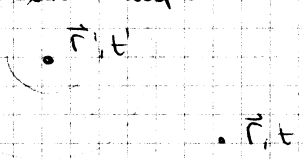
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

È nel caso generalizzato

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$$

Il ϕ di Eichen è il potenziale di una carica uniforme che nasce istantaneamente in \vec{r}' e istantaneamente muore. Cioè è il potenziale di un "impulso di carica".

Se abbiamo quindi un "impulso di carica" in \vec{r}' all'istante t' ci accorgiamo del potenziale che essa ha prodotto in \vec{r} in un tempo t tale che:



$$t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

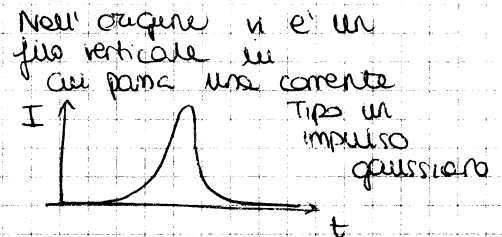
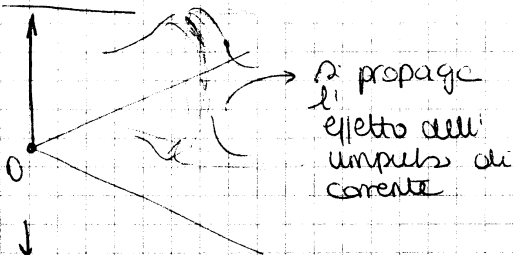
Il luogo dei punti in cui il potenziale è lo stesso è quello che rispetta la relazione:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = c(t - t') \quad t > t'$$

- si ha una sfera di cui raggio cresce nel tempo
- onda sferica impulsiva di raggio crescente

$$\phi = \frac{\delta(t' - t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \text{L'ampiezza va come la distanza dall'origine}$$

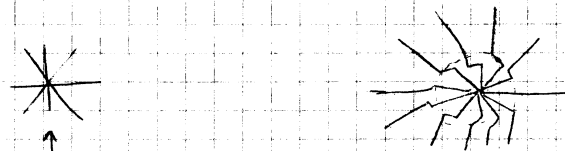
Considero:



Se invece ho corrente oscillante lungo z → avrà effetto che si propaga oscillando anch'esso. E al crescere della distanza l'ampiezza dei fronti d'onda diminuisce.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

A diretto anche lui lungo z ← diretto lungo z (filo verticale)

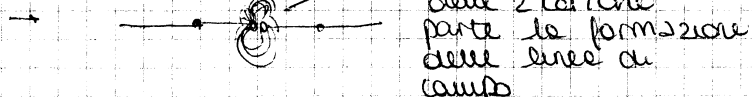
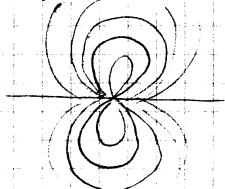


carica puntuiforme con linee di campo

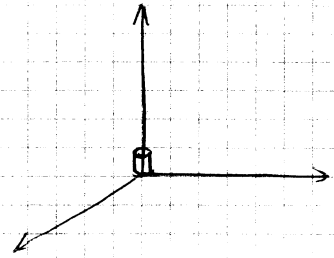
→ accelera improvvisamente

nei punti all'interno l'informazione dell'accelerazione della carica si già arrivata all'esterno invece no! → Potenziale ritardato

Campi di un dipolo elettrico



Il dipolo equivale a un cilindretto ~ uniforme
 $\hat{k} \uparrow$ di $I(t)$



La densità di corrente $\vec{j}(t)$

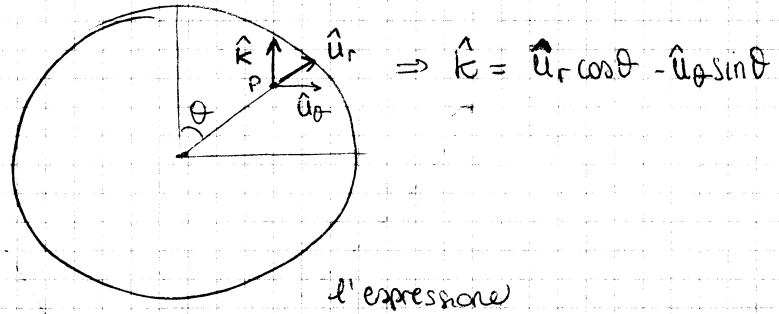
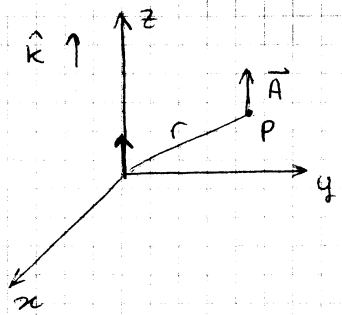
$\vec{j}(t) = \frac{I}{S} e^{i\omega t}$ ma è anche f_z dello spazio... ad m² (senza)

Introduciamo in $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{I}{S} e^{i\omega t} \delta(\vec{r})$

$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I/S e^{i\omega t} \delta(\vec{r}') e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0 I}{4\pi S} \frac{e^{-ikr}}{r} S \delta(\hat{k})$
 (versare lungo come z)

$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{i\omega t}$

~~Non caso in cui la corrente non è~~ V. FILE POWER-POINT -> DIPOLO OSCILLANTE



Quando possiamo definire il potenziale vettore in termini di r, θ, φ - sostituendo a \hat{k}

troviamo le componenti $A_r(r) = \frac{\mu_0 I d l}{4\pi r} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta$
 $A_\theta(r) = -\frac{\mu_0 I d l}{4\pi r} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta$

e poi reali espressioni

$\nabla_n A = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\dots \right] u_r + \frac{1}{r} \left[\dots \right] u_\theta + \dots u_\varphi$
 $A_\varphi = 0$ A_θ non dipende da $\varphi \Rightarrow \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = 0$ $\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 0$ $A_\varphi = 0$

=> allora abbiamo solo

$\nabla_n A = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] u_\varphi$

$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_n A = \frac{1}{\mu_0 r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] u_\varphi$

Trovo che H è azimutale, le sue linee di flusso sono circonferenze chiuse centrate attorno all'asse.

Troviamo il campo E

$\vec{B} = \nabla_n \vec{A}$
 $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$kr \ll 1 \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ near field approximation 20.12.2010

$$E_r(r) \cong \frac{2Z_0 I d \ell \pi \cos\theta}{\lambda^2} \left[- \left(\frac{\lambda^*}{2\pi r} \right)^3 \sin(kr - \omega t) + \left(\frac{\lambda^*}{2\pi r} \right)^2 \cos(kr - \omega t) \right]$$

↓
Questo termine domina
poiché siamo in approssimazione di $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$

vicino alla sorgente il campo v.m. è prevalentemente elettrico (c'è poca componente magnetica)

Invece in Far-field approximation:

$kr \gg 1 \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$

ora domina il termine alla 1^a potenza

$$E_\theta(r) = \left(\frac{Z_0 I d \ell \pi \sin\theta}{\lambda^2} \right) \left[- \left(\right)^3 + \left(\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right) \sin(kr - \omega t) \right]$$

in $E_r(r) \rightarrow$ non compare la 1^a potenza.

↑
domina questo termine

$\Rightarrow E_r(r) = 0$ componente radiale \sim nulla, $E_\theta(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right) \sin(kr - \omega t)$

- componente magnetica diretta come H_ϕ
- " " elettrica diretta come H_θ

onde generate dal dipolo che è nell'origine si sta espandendo
 \rightarrow direzione di irradiazione è RADIALE

Campo elettrico e magnetico sono \perp tra loro e \perp alla propagazione (effettivamente molto lontano dalle proprie onde stence \sim onde piana)

$E \perp H \perp U_r$, $\frac{|E|}{|H|} = \frac{E_\theta}{H_\phi} = Z_0$

in far field approximation:

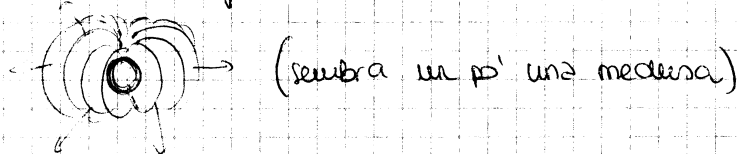
$\left. \begin{matrix} E_\theta(r) \\ H_\phi(r) \end{matrix} \right\}$ hanno stesso andamento, e vibrano in fase, corrispondenze di minimi e massimi

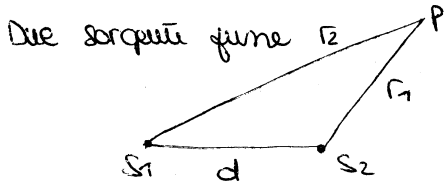
NB. E_θ e H_ϕ devono essere uguali a parte un fattore moltiplicativo

v. dipolo magnetico oscillante



Vicino alla sorgente \rightarrow campo del dipolo ^{dinamico} ha effetto pulsante.





10.01.2010

Le due sorgenti emettono onde, sono sorgenti monocromatiche

$$\begin{cases} f_1 = \frac{A}{r_1} e^{-ikr_1} e^{i\omega t} \\ f_2 = \frac{A}{r_2} e^{-ikr_2} e^{i\omega t} \end{cases} \rightarrow \text{le 2 onde sono monocromatiche, hanno la stessa frequenza}$$

stessa ampiezza, (solo x semplicità)

non è condizione troppo stringente la monocromaticità per vedere l'interferenza (e per semplicità)

onde definite a meno di una fase (che noi abbiamo posto = 0)

$$f_1 = A \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} e^{i(\omega - \delta_1)t} \quad \dots \quad e^{i(\omega - \delta_2)t} \quad \delta_1 = \delta_2 = 0$$

le fasi δ_1 e δ_2 non è necessario siano =

$$= A \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} e^{i\omega t} e^{-i\delta_1 t} = A' \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} e^{i\omega t}$$

fase inglobata in ampiezza complessa

Per osservare interferenza:

δ_1 può essere $\neq \delta_2$ MA la loro differenza deve restare costante cioè le due onde devono avere COERENZA di FASE. in \forall pto osservato dal fenomeno ondulatorio

\Rightarrow onde MONOCROMATICHE \rightarrow Per vedere interferenza COERENTI

Un' unica sorgente molto piccola di onde e.u. (non può essere puriforme al minimo e duplo)

la fase non deve variare nei tempi caratteristici del sistema l'oggetto

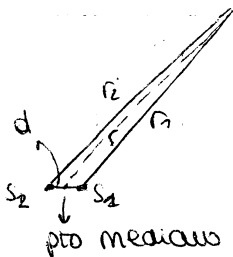
abbiamo una freq. definita ω

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \leftarrow \text{che ci definisce } T$$

le soluzioni di un' eq lineare sono lineari quindi avremo: la somma:

$$F = f_1 + f_2 = A e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]$$

ma quando ora sorgenti vicine



$$\begin{aligned} r_1 &\gg d \\ r_2 &\gg d \end{aligned}$$

$$r \sim r_1 \sim r_2 \Rightarrow r \gg d$$

$$F = A e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{e^{-ikr}}{r} \right]$$

MA NB! non abbiamo fatto il cambio $r_1 = r_2 = r$ per l'argomento dell'exp.

se lo mettiamo anche nell'exp avrei che le 2 sorgenti sono una sola INVECE

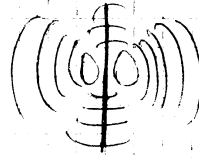
le particelle fluide si muovono \perp ai fronti d'onda.

Se inseriamo una parete rigida in questo sistema in cui si propagano le onde



se inseriamo un ellissoide che non produce attrito al punto dell'ellissoide matematico \rightarrow NO vi è modellazione del fenomeno.

possiamo mettere un piano tra le 2 sorgenti



non abbiamo modificazione del fenomeno.



vedo il stesso interf. come se

una sola sorgente con un muro si comporta

come se vi fossero 2 sorgenti

Ciò vuol dire che in realtà benché le due sorgenti non si vedono più e quindi non interferiscono l'una con l'altra

ma avviene interferenza per riflessione, e il fenomeno osservato è lo stesso

\rightarrow se le freq. sono \neq , interferenze non si vede.

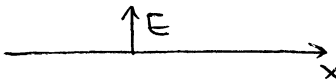
Se si può osservare di nuovo se le 2 freq. sono multiple l'una dell'altra. (in questo caso le figure di interferenza sono più complicate)

\rightarrow Non è nemmeno necessario che le 2 ampiezze siano $=$. Anche se la condizione di ampiezze = fa vedere nel migliore dei modi l'interferenza

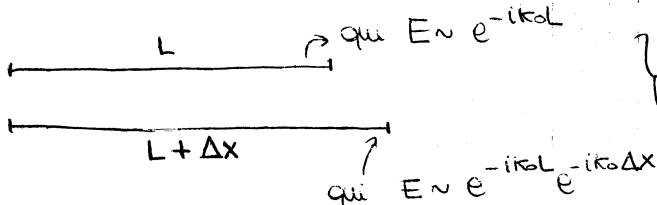
INTERFEROMETRO DI FABRI-PEROT

Si sfruttano proprietà di riflessione di una lastra trasparente per realizzare un fenomeno di interferenza ad altissima sensibilità

in 1D, considero una delle componenti di $E \rightarrow E(x,t) = E_0 e^{-i(kx - \omega t)}$
 nel vuoto in aria (indice di rifrazione = 1)



Nel vuoto riusciamo di avere 2 percorsi:



al termine del percorso sono sfasate di un fattore $e^{-i(k\Delta x)}$

la fase dipende dalle differenze di cammino.

la stessa cosa in un mezzo materiale \rightarrow CAMMINO OTTICO in un mezzo isotropico nel quale:

$$v_{faz} = \frac{c}{n} < c$$

n \hookrightarrow indice di rifrazione

Quindi a parità di $\omega \rightarrow$ cambiano v e λ
 perché $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c} = nk_0$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$

\rightarrow Nel mezzo avremo quindi: $E(x,t) = E_0 e^{-i(kx - \omega t)} = E_0 e^{-i(k_0 n x - \omega t)}$

Riflettività $R = |r|^2 = |r'|^2$

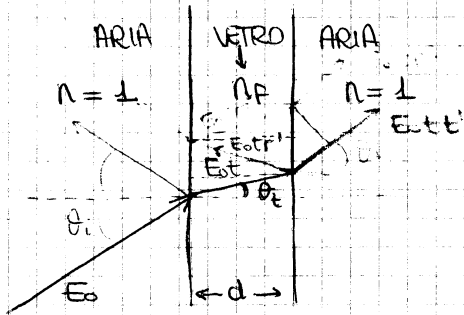
reale, positivo

$$0 \leq R \leq 1$$

assenza di interfaccia

specchio

con rinite



t' = coeff. transm. vetro | aria

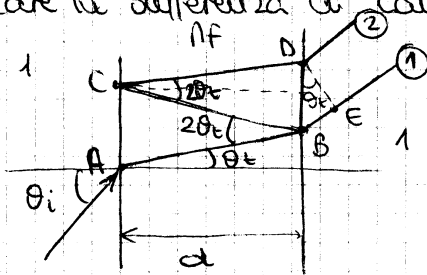
iterativamente attraverso infinite riflessioni e trasmissioni ma attenzione tra

$E_{0t'}$

vi è una costante differenza di cammino ottico

$$E_{0t'} > E_{0t} r'^2 t'$$

Dobbiamo calcolare la differenza di cammino ottico



$$\textcircled{1} n_f \overline{AB} + \overline{BE}$$

$$\textcircled{2} n_f (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) = 3n_f \overline{AB}$$

Differenza: $2n_f \overline{AB} - \overline{BE}$

$$\overline{BE} = \overline{BD} \sin \theta_t$$

$$\overline{BD} = 2d \tan \theta_t$$

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos \theta_t}$$

$$\text{Diff. di cammino ottico} = 2n_f \frac{d}{\cos \theta_t} - 2d \tan \theta_t \sin \theta_t$$

Per legge di Snell $1 \cdot \sin \theta_i = n_f \sin \theta_t$

$$\text{ora: Diff} = 2n_f \frac{d}{\cos \theta_t} - 2n_f d \frac{\sin^2 \theta_t}{\cos \theta_t}$$

$$= \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} \cos^2 \theta_t = 2n_f d \cos \theta_t$$

in aria

$$\delta = k \cdot (\text{diff. di cammino ottico})$$

spostamento

$$\Rightarrow \delta = 2n_f k d \cos \theta_t$$

ora $r' \neq 1$ e hanno ampiezze \neq e sono sfasati!

$$E_T = E_{0t} t' + E_{0t} r'^2 t' e^{i\delta} + E_{0t} r'^4 t' e^{2i\delta} + E_{0t} r'^6 t' e^{3i\delta} + \dots$$

campo trasmesso totale

$$E_T = E_{0t} t' [1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots]$$

↑ per cui $r = -r'$ (ai quadrato...)

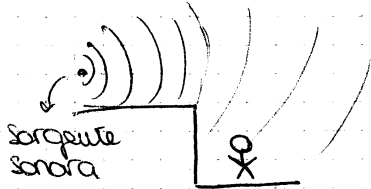
DIFFRAZIONE

14.01.2010

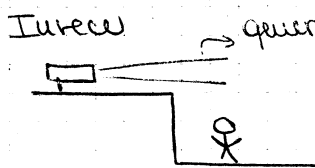
robby@py@hotmail.it

Def: Interferenza di un'onda con se stessa

Si verifica quando onde incontrano nel suo percorso un ostacolo di cui, confrontabile con la sua λ .
 Quindi è facilmente verificabile x fenomeni ondulatori che non microscopici (es. onde acustiche)



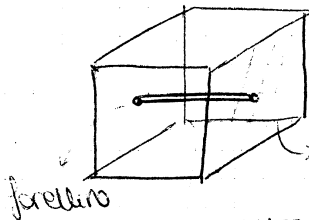
→ fronti d'onda si propagano anche in questa regione schermata dallo scalo



quadrato di onde e.c. quasi piano

Non si verifica diffrazione perché la geometria dello scalo è molto $>$ della λ delle onde e.m.

→ Per vedere diffrazione di luce bisogna avere ostacoli submicroscopici



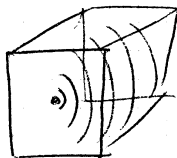
parete con plet. assorbente

→ entra luce → si avrebbe luce solo nel fascio di direzione del fascino e il resto sarebbe buio

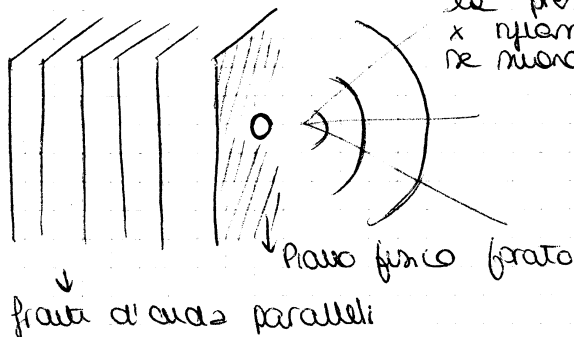
Se vediamo luce più estesa è per fenomeno di diffrazione provocato dalla presenza di aria, polvere.

Invece con il suono: si ha fenomeno di diffrazione,

si diffonde in tutta la camera.



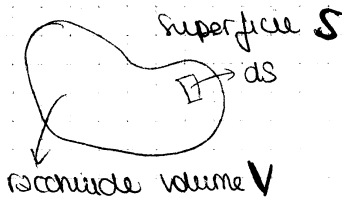
Es. con microscopio radiale se faccio gli assogliaanti x equalare le presenze gli altri vedono il segnale x ritemore se nono il cloaca il suono si diffonde e raggiunge le altre macchine



Eq. di d'Alambert:
$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \rightarrow \text{risolvendo l'eq.}$$

descrive il fenomeno ondulatorio (in modo esatto o approssimato) (→ onde acustiche)

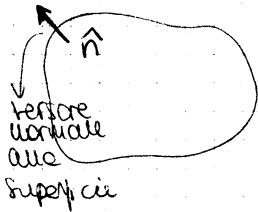
TH GREEN



Se considero due f.e. u, v soluzioni dell'equazione di d'Alembert, vale:

$$\int_V (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dV = \int_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

Per qualsiasi volume, per qualsiasi superficie



(\hat{n} = vettore unitario normale ad S punto per punto)

Fluorotender dalla S all'esterno di un tratto dn u e v essendo f.e. del punto caratteristico \rightarrow avremo S_v, S_u

derivate delle funz. rispetto alle normali in \pm pto.

v è una f.e. matematica ausiliaria che può essere scelta a piacere \rightarrow quindi siccome lo scelgo io ne conoscerò le forme.

conosco le forme di u . (\leftarrow)

Invece di u so solo che risolve $\nabla^2 u = k^2 u$ e che è monodimensionale (in r fissata)

$v = \frac{e^{ikr}}{r}$ Scelgo questa v (\leftarrow)

\rightarrow ad una distanza r da P v vale $v(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$

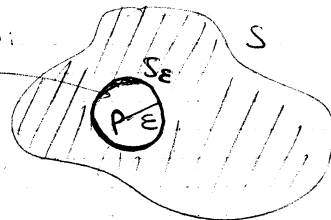
Scelgo una superficie opportuna (\leftarrow)

Costruisco S_ϵ in questo modo: sfera di raggio ϵ

superf. Totale = $S + S_\epsilon$

Volume totale = $V - \frac{4}{3}\pi\epsilon^3$

So che $\begin{cases} \nabla^2 u = -k^2 u \\ \nabla^2 v = -k^2 v \end{cases} \rightarrow$ sempre

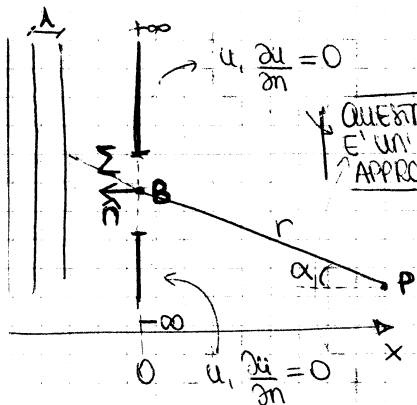


l'unico punto problematico è il punto P , ma effettivamente grazie alla definizione di S_ϵ esso è fuori da S

$$\int_V (-v k^2 u + u k^2 v) dV = 0 = \int_{S+S_\epsilon} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

$$* \int_{S_\epsilon} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS = - \int_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

Calcolo integrale e' in superficie sferica! \Rightarrow abbiamo semplificato!



B, punto nella fenditura.
 Come a serbatoio nella superf. Σ
 queste esprimibili nel caso di un'onda incidente piana:
 $u(x) = u_0 e^{ikx}$

$$u|_{x=0} = u_0$$

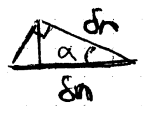
$\frac{\partial u}{\partial n}$ = variazione rispetto a spostarsi su x, da dx a -dx.

$$-\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial n}$$

Quindi
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{x=0} = -\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = -iku_0$$

$$v = \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \alpha = \left(-\frac{e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r} \right) \cos \alpha = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos \alpha$$



$$\frac{dr}{dn} = \cos \alpha$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \sim ikv$$

$$\begin{aligned} r &\gg \lambda \\ kr &\gg 1 \\ k &\gg \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} \sim ikv \cos \alpha$$

Quindi:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} (-iku_0) - u_0 ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos \alpha \right] ds$$

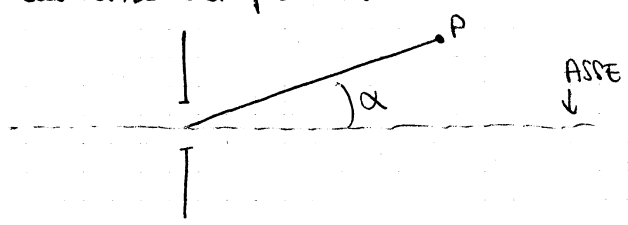
$$u(P) = \frac{1}{2\pi} (-iku_0) \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) ds$$

$$= \frac{u_0}{2\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) ds$$

$$u(P) = \frac{u_0}{i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{r} \right) ds$$

Quanto \int da l'ampiezza del fenomeno ondulatorio ed e' definito in tutto il piano a valle della fenditura. Le onde sferiche del fenomeno ondulatorio a valle della fenditura sono queste onde sferiche $\left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$ in ogni pts.

MODULAZIONE (FATTORE DI OBLIQUITA') (due quanto e' obliqua la posizione di P rispetto all'asse del problema:

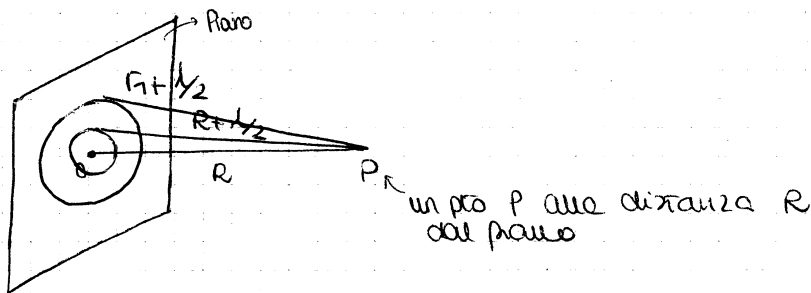


Continuazione..

17.01.2011

Supponendo che fenditura $\rightarrow \infty$

Fresnel, invece un calcolo:
arriva a individuare le ZONE DI FRESNEL

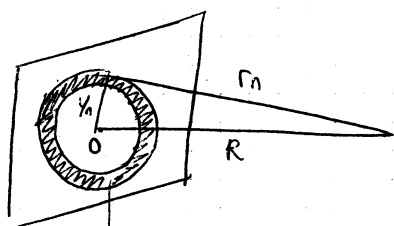


definisco una 1° zona ^{con raggio} tale che i pt sulla circ. esterna abbiano distanza da P: $r_1 = R + \frac{\lambda}{2}$

def. poi una 2° zona tale che i pt sulla circ. esterna derivino da P: $r_1 + \frac{\lambda}{2}$

Per l'ennesima zona la distanza punti-circ. esterna / P = $r_n = R + n \frac{\lambda}{2}$

$$r_n = R + n \frac{\lambda}{2}$$



$$y_n^2 = r_n^2 - R^2 = \left(R + n \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2 = n\lambda R + \frac{n^2 \lambda^2}{4}$$

$$\approx n\lambda R$$

Quando $R \gg \lambda$

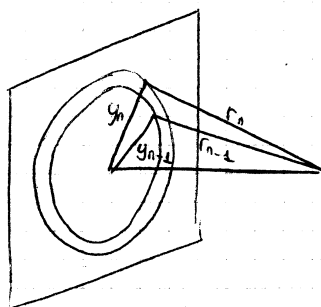
La superficie della zona n-esima = $\pi(y_n^2 - y_{n-1}^2) \approx$

$$\approx \pi(n\lambda R - (n-1)\lambda R) = \pi\lambda R$$

contengono lo stesso # di pt sorgente
 \Rightarrow hanno lo stesso peso

tutte le zone hanno la stessa superficie

spiega la dipendenza da n



differenza di fase tra le onde emesse dai punti sulle circ. interna e quella sulla circ. esterna E' SEMPRE LA STESSA:

$$\Delta\varphi = (k) \cdot \text{differenza di percorso}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_n - r_{n-1})$$

$$\text{ma } r_n = R + \frac{n\lambda}{2}$$

ora

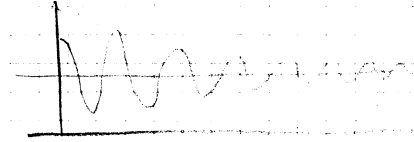
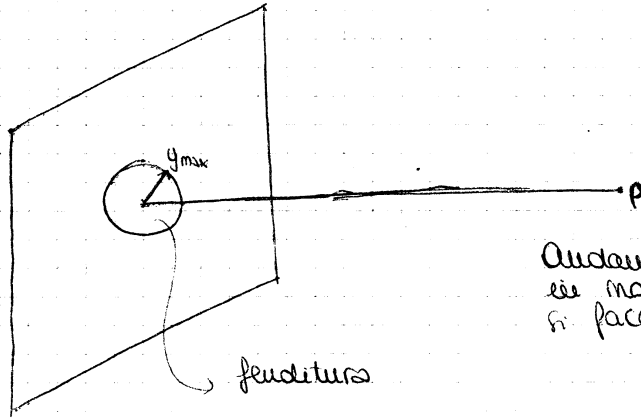
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[R + \frac{n\lambda}{2} - R - \left(R + \frac{(n-1)\lambda}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}$$

le onde dal bordo interno e quello esterno tendono a compensarsi sono in controfase.
ma e' solo compensazione parziale (bordo esterno e più obliquo e...)

Ora considero nuovamente schermo ^{opaco} con una fenditura che abbia un raggio = 1^a zona di Fresnel.

attraverso essa ~~passa~~ solo il contributo di quella 1^a zona

Ha ATTENZIONE in questo caso il campo che troviamo a valle della fenditura sarà 4 volte quello che avremmo senza fenditura.
 => ciò è molto contro intuitivo ed è una grande prova della NATURA ONDULATORIA della luce, è un effetto DIFFRATTIVO.



Quando a scegliere la fenditura in modo che si faccia parecchie zone:

- 1
- 1+2
- 1+2+3

e così via

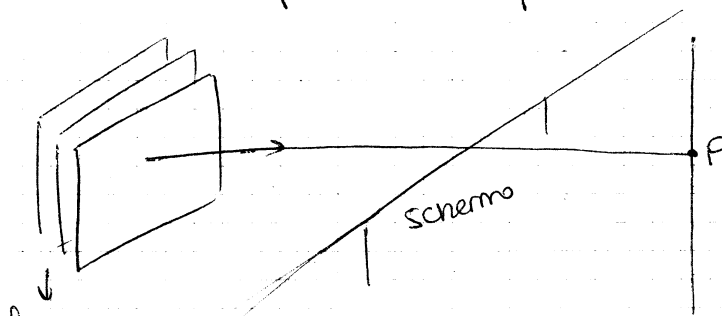
Le zone di Fresnel dipendono dalle λ della luce e da R , distanza dallo schermo } Quando si osservano \neq effetti sullo schermo.



Punto di Poisson

In un sistema composto da sorgente di luce, schermo circolare opaco e schermo di raccolta -> c'è sempre luce sull'asse, nel pto di Poisson

borde dello schermo non sono ben definiti... -> è fenomeno di diffrazione questo !!



P alle stessa altezza del bordo superiore dello schermo

fronte d'onda che giungono onzialmente

Al piano dell'onda che si appiccica sullo schermo cosa accade?

-> Tutte le zone di Fresnel sono tagliate in 2. se tutte le zone danno contributo U_0 , allora metà delle zone di Fresnel daranno contributo $U_0/2$

ora facciamo muovere su e giù il pto P:
 Quali sono le zone di Fresnel associate alla nuova posizione? avremo che spostando P verso l'alto man mano facciamo sorgere una dopo l'altra le zone di Fresnel. Quando ~~passa~~ è sotto la 1^a zona allora l'ampiezza dovrà crescere tanto perché è bilanciata solamente dalla 2^a zona che non è ancora nata se invece P si sposta in giù --

Quali sono i legami tra le onde ondulatorie e le onde precedenti?

è possibile trovare un linguaggio ibrido tra quello ondulatorio e quello geometrico che permette di trovare una continuità fra i 2 approcci descrittivi delle onde?

(i calcoli no all'esame)

considero una Fz. ondulatoria scalare, per esempio

Potenziale scalare $\varphi(\vec{r}, t)$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

una soluzione privilegiata in 3dim è la seguente:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad v = \frac{\omega}{k}$$

perpendicolare $\vec{k} \parallel \vec{r}$, dove \vec{r} = direzione di propagazione

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

$$k = \frac{\omega}{v}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{k}{n} \quad (\text{nel vuoto}), \quad \text{quindi } k > k_0$$

la soluzione in un mezzo si può scrivere come:

$$= \varphi_0 e^{i k_0 (nr - ct)} \rightarrow \text{soluzione ad } n = \text{cost}$$

Ora immaginiamo che n non sia più una costante.

In generale $n(x, y, z, t, \omega)$ è f.z dello spazio, del tempo e della freq.

In una situazione stazionaria (non dipendenza dal tempo) e consideriamo

1 sola frequenza cioè nel caso $n(x, y, z)$

introduciamo un'ipotesi ausiliaria:

n varia in distanze molto grandi rispetto λ in modo apprezzabile

n varia lentamente nello spazio mentre l'onda oscilla con una λ molto più piccola



se $n(x, y, z)$ non si hanno più soluzioni facili di d'Alembert.
 → si deve risolvere in via numerica.
 se vogliamo risolverlo in via analitica

$$\varphi = A(\vec{r}) e^{i k_0 (S(\vec{r}) - ct)} \rightarrow \text{soluzione di prova}$$

si suppone che la soluzione abbia la stessa forma ondulatoria perché nelle piccole distanze non vedo che n cambia
 ⇒ localmente come soluzione ondulatoria come prova

dov'è det. $A(\vec{r})$ e $S(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} A e^{i k_0 (S - ct)} + A i k_0 \vec{\nabla} S e^{i k_0 (S - ct)} \rightarrow \text{dipendenti da } r$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 A e^{i k_0 (S - ct)} + 2 i k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S e^{i k_0 (S - ct)} + i k_0 A \nabla^2 S e^{i k_0 (S - ct)}$$

19.01.2011

Indice di rifrazione NON COSTANTE MA VARIA su curvatura
 $\Rightarrow \lambda$

Applicazioni in $\begin{cases} \text{OTICA} \\ \text{ACUSTICA} \end{cases} \rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{\text{velocità luce nel vuoto}}{\text{velocità luce nel mezzo}}$

$n = \frac{c}{v} \rightarrow \text{cost}$

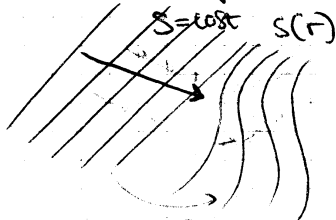
se varia = cambia la velocità v dell'onda nei vari pt del mezzo attraversato e i FRONTI D'ONDA PIANI SI DEFORMANO

DEFORMAZIONE dei fronti d'onda $\boxed{(\nabla S)^2 = n^2(r)}$ EQ EIKONALE

$S = \text{costante} \Rightarrow$ fronte costante
 \rightarrow fronte d'onda

se $S(r) = S(x, y, z)$

Nel caso di fronti d'onda piani



vettori \perp superficie $\propto \nabla S$
 e se $S = \text{cost}$ sono \parallel

se n diventa variabile fronti d'onda deformabili

Queste linee localmente \perp ai fronti \rightarrow i raggi di luce dell'ottica geometrica

Soluzione ipotetica: $\varphi = A(r) e^{i(k_0(S(r)) - ct)}$

introdotta nell'eq. di d'Alembert

Obtengo anche un'altra equazione:

$\boxed{A^2 \nabla A \cdot \nabla S + A^2 \nabla^2 S = 0}$

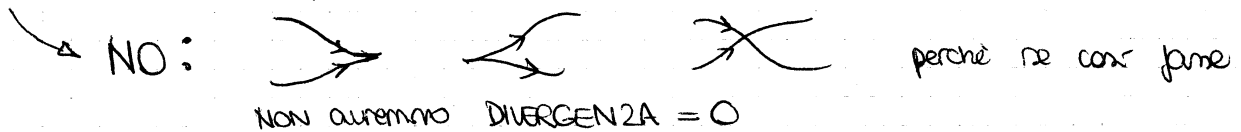
multiplico per A ($f \neq$ scalare)

$= \nabla \cdot (A^2 \nabla S) = 0$

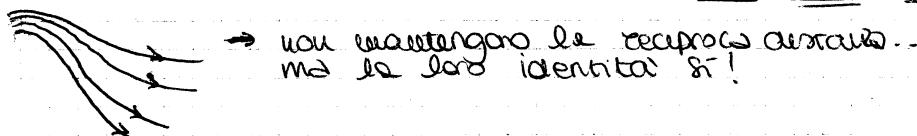
Quindi il campo vettoriale $A^2 \nabla S$ è SOLENOIDALE (divergenza = 0)

- \Rightarrow NO punti di partenza delle linee di flusso
- \Rightarrow NO punti di terminazione delle linee di flusso
- \Rightarrow NO incroci delle linee di flusso

$\frac{1}{n} \nabla S = \hat{u} \rightarrow$ vettore unitario \perp sup $S = \text{cost}$ che dà la direzione del raggio



Possono avere \nearrow della densità delle linee ma NON INCROCI



Si dimostra che quest'espressione si può scrivere come:

$$= \frac{1}{2n} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} S) \quad \text{cf.} \quad \left(\frac{1}{n} \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} S$$

Prodotto scalare di 2 vettori
 \Rightarrow è un numero

Qui invece
 avevo un operatore differenziale
 che non saprei definire.

$$= \frac{1}{2n} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} S)^2 = \cancel{\frac{1}{2n} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} S)^2}$$

$$= \frac{1}{2n} \vec{\nabla} \cdot (n^2) \quad \leftarrow \text{sfruttando l'eq. eikonale}$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot 2n \vec{\nabla} n = \vec{\nabla} n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n$$

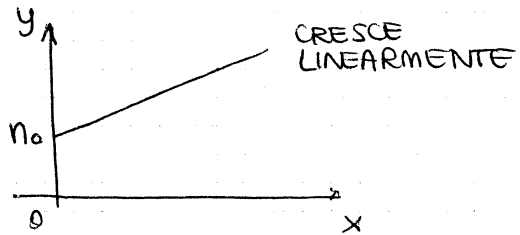
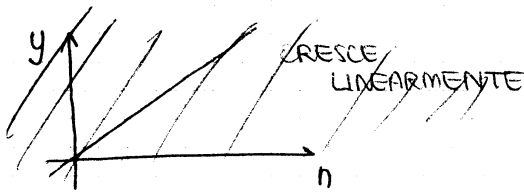
abbiamo fatto sparire S! (ii)

$$\boxed{\frac{d}{ds} (n \hat{u}) = \vec{\nabla} n}$$

Quindi, poiché
 sappiamo come varia n nello spazio
 $\vec{\nabla} n$ è noto, n è noto.

ora possiamo capire come varia \hat{u} con s.

$$n = n(x, y, z) = n(y)$$



$$n = n_0 (1 + \tilde{k} y) \quad \leftarrow \text{small constant}$$

$$\vec{\nabla} n \rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \emptyset, \quad \frac{\partial n}{\partial y} = n_0 \tilde{k}, \quad \frac{\partial n}{\partial z} = \emptyset$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \emptyset \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = 0$$

$$\boxed{n \left(\frac{dx}{ds} \right) = \text{costante} = 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) &= \frac{d}{dx} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left(n \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{n} = n_0 \tilde{k} \end{aligned}$$

amio α :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n_0^2 (1 + \tilde{k} y) = \emptyset$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n_0^2 \tilde{k} y = n_0^2 \tilde{k} \quad \rightarrow \text{eq. diff. del 2° ordine con coeff. costanti, lineare}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n_0^2 \tilde{k} y - n_0^2 \tilde{k} = 0$$

$$\text{Soluz. generale: } y(x) = C_1 e^{n_0 \tilde{k} x} + C_2 e^{-n_0 \tilde{k} x} - \frac{1}{\tilde{k}}$$

Imponendo:

$$y(x=0) = y_0 \quad \text{Nota}$$

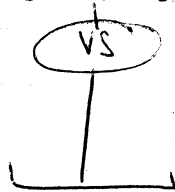
$$y'(x=0) = y'_0 \quad \text{Nota}$$

21.01.2011

La luce è descritta da un'eq. delle onde (quella di D'Alembert)

tuttavia quando $\lambda \rightarrow \infty$ si va verso CITICA GEOMETRICA

Eq. delle onde
 ↓
 soluzioni oscillatorie
 fonti d'onda



raggi

il campo vettoriale di competenza
 qui in mezzo è l'eq. EIKONALE

$$(\vec{\nabla}S)^2 = n^2$$

$$\vec{\nabla}S = n\hat{u}$$

fronte d'onda

↑ direzione dei raggi

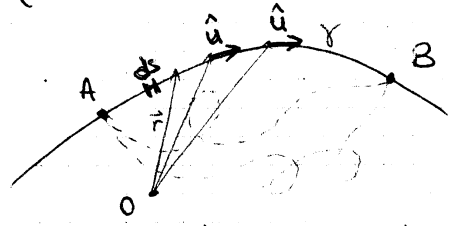
$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{ik_0(S(\vec{r}) - ct)}$$

ha le dimensioni di ct , cioè uno spazio

le superfici $S(\vec{r}) = \text{cost}$, attraversate \perp dai raggi
 rappresentano lo spazio percorso dalla luce nel raggio
 in un certo tempo.

∃ un principio (PRINCIPIO di FERMAT)

considero un percorso effettuato dalla luce tra 2 punti, anche non in linea
 retta (→ es. curvatura dovuta a cambiamento di n)



il raggio sceglie tra gli infiniti percorsi, quello per cui il tempo di percorrenza è minimo.

il tempo dt in cui luce percorre ds è $v = \frac{ds}{dt}$

$$dt = \frac{ds}{v} = \left(\frac{n}{c}\right) ds$$

il tempo di percorrenza da $A \rightarrow B$ è calcolato su questa curva γ

$$T_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} dt = \frac{1}{c} \int_A^B n(\vec{r}) ds \leftarrow \hat{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\hat{u} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 1$$

$$nds = n\hat{u} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{c} \int_A^B n(\vec{r}) \hat{u} ds = \frac{1}{c} \int_A^B \vec{\nabla}S \cdot d\vec{r} = \frac{1}{c} S_{AB} \text{ tempo}$$

la versione originale del principio di Fermat è racchiusa in questo integrale

tempo impiegato dal raggio nel percorso vero è STAZIONARIO $\delta T_{AB} = 0$
 ossia se opero su percorsi diversi:
 il percorso vero è minimo (oppure un massimo) → in casi particolari

Questa azione S ha dimensioni finché \neq da S dell' ottica.

* si definisce relazione:

$$\begin{cases} \vec{p} = \nabla S \\ p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} \end{cases}$$

EQUAZIONE di HAMILTON - JACOBI

Se ne x funzioni di n particelle, ma noi le scriviamo per una singola particella.

~~$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \phi$$~~

→ azione generalizzata
(per $S(x, y, z, t)$ poi se non dip da t $\frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow \phi$)

$$H(x, y, z, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \phi$$

Si può dimostrare che quest' eq è del tutto equivalente a quella di Newton.

è un' eq lineare nel tempo mentre le eq. di Newton è del 2° ordine nel tempo (accelerazione).

funzione Hamiltoniana, rappresenta en. meccanica totale del sistema (somma delle en. cinetiche e potenziali \Rightarrow cioè ciò si applica in presenza di FORZE CONSERVATIVE)

Per una particella libera

$$H = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \quad , p_x = mv_x$$

$$\downarrow = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Assenza di en. potenziale (\rightarrow che è l'unica possibile causa di variazione nel tempo)

Quindi
$$H = \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 \quad (\text{no en. potenz.})$$

Se invece la particella è soggetta ad un' energia potenziale non dipendente dal tempo

$$H = \frac{1}{2} mv^2 + V(x, y, z) = \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V(x, y, z) \quad (\text{en. pot. non dipendente } t)$$

Se H non dipende dal tempo allora $\frac{\partial S}{\partial t} = \text{cost} = -E$

allora l' eq. di Hamilton - Jacobi diventa $H = E$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \Rightarrow S(x, y, z, t) = S(x, y, z) - Et$$

Alle meccanica delle particelle è associabile λ ?

Sembra che un unico fascio di e^- attraversando una fenditura si ottenga qualcosa di ondulatorio...
 ma qual è l'interpretazione di quest'onda?
 si individuò legame tra questa λ e l'en. cinetica degli e^- .

Approccio di Schrodinger → associa onde di materia al moto delle particelle anche se trascura aspetti relativistici

Oltre fine dell'800

era evidente che vi fosse aspetto ondulatorio associato al moto delle particelle... MA QUAL È IL SIGNIFICATO DI QUESTA ONDA DI MATERIA?

Immo un e^- per volta sullo schermo facciamo passare attraverso fenditura → si rilevano effetti diffattivi? NO, il singolo e^- si comporta come particella.

Schermo composto da rivelatori che si accendono all'arrivo degli e^- .

ma se si tien memoria degli impatti di singolo elettrone durante lo scorrere del tempo allora con il tempo si comincerà ad avere una figura di diffrazione

a posteriori analizzando le freq. di impatto degli e^- sullo schermo si vede che

vi sono zone a impatto frequente e zone a basso impatto → ~~struttura~~ figura di diffrazione.

→ Anche le probab. a priori con come le freq. a posteriori dipendono dalle natura ondulatoria?

$\psi(\vec{r}, t)$
 onda associata al moto delle particelle

suppongo che risolva l'equazione d'Hamilton

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

n dipende da λ e quindi da ν

velocità di fase dell'onda

vale $v = \lambda \nu$

in meccanica classica

$$p = \hbar |\vec{\nabla} S| = \hbar \sqrt{2m(E - V(x, y, z))}$$

Ci dev'essere un legame tra n e p

lo dice il formalismo di Hamilton-Jacobi → $n = \left(f_z \text{ di } \nu \right) \sqrt{2m(E - V(x, y, z))}$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda \nu} = C(\nu) \sqrt{2m(E - V)}$$

non lo conosco ma è ragionevole che ci sia

$$\frac{1}{\lambda} = C(\nu) \nu \sqrt{2m(E - V)}$$

▷ Associamo dirett. questa ν fase di questa misteriosa onda alle velocità della particella?

ottengo:

$$\nabla^2 [\psi e^{-i\omega t}] - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\psi e^{-i\omega t}] = \phi$$

$$(\nabla^2 \psi) e^{-i\omega t} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi e^{-i\omega t} = \phi$$

ottengo eq stazionaria

$$\frac{\omega}{v} = k$$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = \phi$$

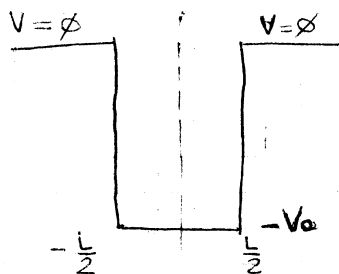
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h} p = \frac{1}{h} \sqrt{2m(E-V)}$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{1}{h^2} 2m(E-V) \psi = \phi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x,y,z) \psi = E \psi$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x,y,z) \right] \psi(x,y,z) = E \psi(x,y,z) \rightarrow \text{eq. Stazionaria}$$

↓
eq. agli autovalori



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{V(x)\psi}_{\substack{\text{funzione} \\ \text{pari di } x}} = E\psi$$

$$V = \begin{cases} -V_0 & |x| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

Se $V(x)$ è pari non ci aspettiamo di trovare una prob. che cambia per inversione delle x .

$|\psi(x)|^2 \rightarrow$ PARE $\psi(x) \begin{cases} \text{Pari} \\ \text{dispari} \end{cases}$ ma non ibride

Scriviamo gli stati legati:
 perché tutti gli stati erano legati perché la particella fuori non poteva uscire!

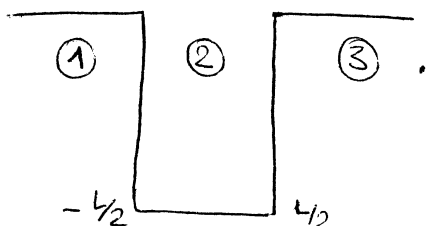
~~...~~

$$-V_0 < E < 0$$

energia totale composta da en. cinetica (sempre > 0) e en. potenziale che può essere \oplus o \ominus a seconda di dove metto lo zero del potenziale

$\psi(x)$ deve esistere per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$
 deve essere normalizzabile
 e deve tendere a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$ perché la prob. non deve divergere

Individuo quindi 3 regioni.



- $\psi_1 = A e^{\alpha x}$ x è negativo in ①
 $\alpha = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ \rightarrow questa è l'unica soluzione che \nrightarrow e va a 0 per $x \rightarrow -\infty$
- $\psi_3 = \pm A e^{-\alpha x}$
 - $\oplus \Rightarrow$ soluzione pari
 - $\ominus \Rightarrow$ soluzione dispari

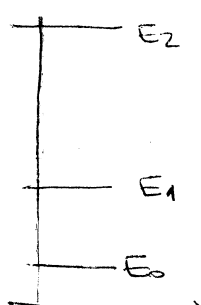
$$k_n = \pm (n+1) \frac{\pi}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (n+1)^2 \frac{\pi^2}{L^2}$$

→ ENERGIA MINIMA: $E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2}$ → ENERGIA DI PUNTO ZERO



Se particella è intrappolata in buca di potenziale non può avere energie più basse di E_0 .



$$E_n = (n+1)^2 E_0$$

$$E_1 = 4E_0$$

$$E_2 = 9E_0$$

Analogia con i modi di ~~oscillazione~~ oscillazione di una corda ai estremi liberi.

stati energetici delle buche di potenziale:
modi razionali di oscillazione di un'onda tale che l'oscillazione sia nulla agli estremi

Onda piana senza barriera di potenziale ⇒ non sappiamo nulla sulla sua posizione.

Invece se siamo all'interno di una buca di potenziale acquistiamo informazioni sulla posizione delle particelle (incertezza di L (dimensione buca)) e perdiamo quindi informazione sulla quantità di moto. x Heisenberg

Non posso avere energia ϕ altrimenti avrei ~~una~~ informazione certa anche su quantità di moto

e

$$\underbrace{\Delta x}_{\text{incertezza}} \cdot \underbrace{\Delta p}_{\text{quantità di moto}} = \Delta x \cdot \Delta p \neq \hbar$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{L} x \right] e^{-\frac{iE_n}{\hbar} t}$$

$$|\psi_n(x,t)|^2 = |\psi_n(x)|^2 \Rightarrow \text{indipendente da } t \Rightarrow \text{stazionario}$$

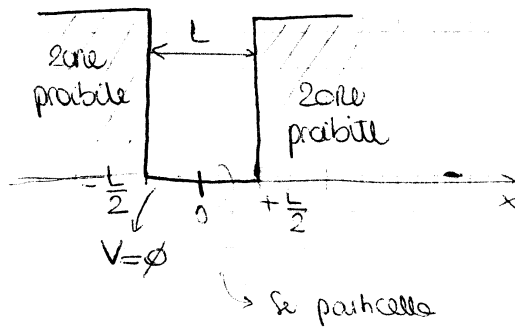
LA SOMMA DI DUE STATI STAZIONARI E' STAZIONARIO?

es. $\psi_2 + \psi_5 = \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \sin\left(\frac{6\pi}{L}x\right) e^{-\frac{iE_5}{\hbar}t} \right]$

e' ancora soluzione ma e' razionale?

28.01.2011

Una buca di energia potenziale ha una altezza finita



$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

Qual è la forma di $\psi(x)$? Se non vi fossero le barriere la particella sarebbe libera

e avremmo: $\psi(x,t) = Ae^{i(kx \pm \omega t)}$

non consideriamo dipendenza temporale ma fissiamoci solo su dipendenza spaziale

$$\psi(x) = \psi \quad x \leq -\frac{L}{2}, \quad x \geq +\frac{L}{2}$$

Eq. di Schrödinger stazionaria sarà:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

cerchiamo soluzioni in cui E della particella = cost.

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \text{Energia interamente cinetica}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Condizioni al contorno:

$$\psi\left(\frac{L}{2}\right) = Ae^{ik\frac{L}{2}} + Be^{-ik\frac{L}{2}} = \psi$$

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = Ae^{-ik\frac{L}{2}} + Be^{ik\frac{L}{2}} = \psi$$

per garantire la continuità delle f.d'onda

$$\begin{vmatrix} e^{ik\frac{L}{2}} & e^{-ik\frac{L}{2}} \\ e^{-ik\frac{L}{2}} & e^{ik\frac{L}{2}} \end{vmatrix} = \psi$$

→ affinché sistema abbia soluzioni $\Rightarrow \det = \psi$

$$e^{ikL} - e^{-ikL} = 2i \sin(kL) = \psi$$

→ cioè k è QUANTIZZATO!

$$k = 0, \pm \frac{\pi}{L}, \pm \frac{2\pi}{L}, \dots$$

$$\alpha A' = k B \sin \frac{kL}{2}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{\alpha A'}{k B}}$$

(*)

$$\alpha A' = -k B \cos \frac{kL}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{kL}{2}\right) = -\frac{\alpha A'}{k B}}$$

devono valere contempor. per sol. pari \otimes
 " " " " " dispari \blacktriangle

dividendo una per l'altra trovo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{kL}{2} = \frac{\alpha}{k} & \text{da applicare per PARI} \\ -\operatorname{ctg} \left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{\alpha}{k} & \text{DISPARI} \end{cases}$$

$$\left(\frac{A'}{B}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right) = 1$$

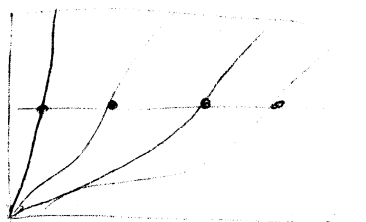
$$B^2 = A^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right)$$

Vogliamo trovare dei valori di energie comprese tra $-V_0$ e 0 che sono degli autostati legati.

→ uso energia come parametro (lo faccio variare)

A la trovo tramite normalizzazione delle probabilità

V. slide (determ. degli stati legati)



→ in questo caso ottengo 4 stati legati

Al crescere di n ($n=3$) aumenta prob. di trovare particelle fuori dalla buca.
 (in effetti il livello E_3 e' quasi libero!)

Quando studiamo livelli en. profondi, possiamo studiare il caso delle buche siffatte!

Slide n° 13 → e' sbagliato, curva rossa e blu sono invertite!

È possibile scrivere una meccanica ondulatoria del pto materiale che diventa la mecc. classica nel limite $\lambda \rightarrow 0$? 24.01.2011

A) • \exists fenomeno ondul. associato al moto delle particelle tale che $\lambda = \frac{h}{p}$ ②

B) • $E = h\nu$ ① ① e ② leggi deducibili sperimentalmente anche se 1) ottenuta da Einstein 2) " " De Broglie } per via teorica.

C) • velocità classica di una particella è legata ad una velocità di gruppo v_g e non ad una velocità di fase.

v_{FASE} non è legata alla velocità di una particella, può anche essere $> c$, invece $v_g < c$,

Eq. di d'Alembert	+	Assunzioni A) B) C)	+	soluzione ondulatoria $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}$ armonica
-------------------	---	---------------------------	---	---------------------------------------------------------------------------------------

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

\downarrow
funz dello spazio
 $V(x, y, z)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi = E\psi = \text{EQ DI SCHRODINGER STAZIONARIA}$$

(oper. differenziale che opera su fz di variabile reale (x, y, z) , ψ è fz dello spazio)

il suo effetto è quello di fornire l'energia dello stato stazionario

Eq. di d'Alembert non è stazionaria però! dipende dal tempo.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi(r)(-i\omega)e^{-i\omega t}$$

$$E = h\nu = \hbar\omega \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi(r)\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi(r)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

moltiplico questo i membri della per il fattore di fase $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

$$\left[\psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = E\psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right]$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\left[H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \text{ EQ di SCHRODINGER dipendente dal tempo}$$

SOLUZIONI dell'eq. di Schrödinger solitamente non REALI (complesse)
 MA ONDULATORIE! Nel presentavo aspetti di tipo "rilassamento"
 la presenza di $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow$ EQ NON SIMMETRICA
 per IMMERSIONE DI TEMPO
 eppure è ondulatoria!

↓
 è un ibrido
 rispetto a eq.
 di D'Alembert
 e di Fourier.

↓
 allora è numerica o no lo è?
 Sì, lo è ma non si vede così.

Se conosciamo in un pto r , ad un certo ~~tra~~ tempo t
 posso conoscere le ψ di ψ in un tempo successivo?

Sì! perché applicando operatore $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V$ che non ha
 alcuna dipendenza dal tempo a ψ
 ottengo $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, ma:

$$\psi(\vec{r}, t + dt) = \psi(\vec{r}, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot dt$$

↓
 allora
 conosco ψ al tempo $t + dt$!!

Operatore differenziale
 Hamiltoniano dice come evolve nel
 tempo le ψ di onda!

Quando le soluzioni sono complesse appare problema, sembra che
 esse non ~~esistono~~ descrivano fenomeno fisico.
 Se voglio descrivere fenomeno reale devo poi scegliere
 parte reale delle soluzioni,
 qui invece ho soluzioni intrinsecamente complesse!

$\psi(\vec{r}, t)$, complessa \rightarrow lo scrivo come:

$$\psi(\vec{r}, t) = \underbrace{A(\vec{r}, t)}_{\text{modulo}} e^{i \underbrace{S(\vec{r}, t)}_{\text{fase}}}$$

lo inserisco nell'eq.
 di Schrödinger

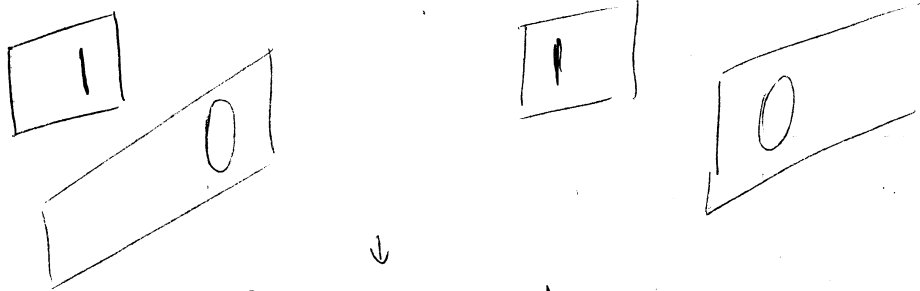
$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} A e^{i \frac{S}{\hbar}} + A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S e^{i \frac{S}{\hbar}} \right)$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \vec{\nabla}^2 A e^{i \frac{S}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S e^{i \frac{S}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar} A \nabla^2 S e^{i \frac{S}{\hbar}} - \frac{1}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S)^2 A e^{i \frac{S}{\hbar}}$$

↓
scalare

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \left[\frac{\partial A}{\partial t} e^{i \frac{S}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial S}{\partial t} e^{i \frac{S}{\hbar}} \right]$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 A + \frac{2i}{\hbar} \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S + \frac{i}{\hbar} A \nabla^2 S - \frac{1}{\hbar^2} A (\vec{\nabla} S)^2 \right] e^{i \frac{S}{\hbar}} + V A e^{i \frac{S}{\hbar}}$$



Se apriamo una fenditura alla volta.

Invece aprendo entrambe le fenditure si osserva FIGURA di interferenze

↓
figura di prob. integrata che il fotone arriva sullo schermo passando per l'una o per l'altra fenditura.

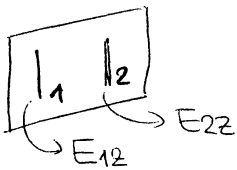
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

↓
considero una componente $\vec{E}_z = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$|E_z|^2 \rightarrow$ proporzionale all'intensità

Nell'ottica classica ondulatoria il campo e.m. è REALE, l'intensità è a maggior ragione reale.

Interferenza deriva dal fatto che ciò che si somma non è l'intensità ma il campo elettrico in tutte le sue componenti:



$$E_{tot,2} = E_{12} + E_{22}$$

$$I_{tot} = |E_{12} + E_{22}|^2 \neq |E_{12}|^2 + |E_{22}|^2$$

Dal pto di vista di interf. di luce monocromatica nel limite di $\lambda \gg m$ ma intensità quando emerge la corpuscolarità delle onde e.m., le figure di interferenza sembra sparire... ma in realtà non è così perché la PROBABILITÀ che il fotone impatti in un pto piuttosto che un altro è modulata dalle figure di interferenza.

↓
FIGURA DI ~~INTERFERENZA~~

e⁻ FIGURA di PROBABILITÀ

Prob. di impatto legate a figura di interf. \rightarrow legata a $|E_{12} + E_{22}|^2$

$$\rightarrow \psi = \psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\rightarrow |\psi|^2$$

\rightarrow fz. ondulatoria di Schrodinger non è del tipo $\psi_0 \cos(kx - \omega t)$?
è invece intrinsecamente complessa.
il suo modulo quadro è invece reale $|\psi|^2$

Dal pto di vista di Wigner
 eq di Schr. è invariante per inversione di tempo.

□ ~~onda di probabilità~~ regressiva = onda di prob. progressiva(?)

Casi unidimensionali sono trattati molto di modo nelle fizice nano.

↓
 Considero 1D)

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

→ $\omega = \frac{E}{\hbar}$ → energia

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$ → mom. lineare.

Eq. per un elettrone libero:

$V(x,y,z) = \emptyset$ allora l'eq. sarà:

~~$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi = \omega \hbar \psi$~~

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi$ $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\psi$ $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi$

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi = \omega \hbar \psi$

↑ ↓
 E

Tutta l'energia è cinetica essendo $V = \emptyset$

$$E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}\hbar^2 k^2$$

2 osservazioni:

① Se fossimo nel caso di una soluzione reale di un'eq. reale posso scrivere la soluz. oscillatoria come exp complesso x comodità, ma in realtà lo sd. sarebbe $\cos(\dots)$

$$\psi = B \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Bk \sin(\dots)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = +\omega B \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -Bk^2 \cos(\dots) = -k^2 \psi$$

$$-\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \cos(\dots) = i\hbar \omega \sin(\dots)$$

↓

ottergo una assurdità $\Rightarrow \psi = B \cos(\dots)$
 NON È SOLUZIONE!

→ la soluzione è intrinsecamente complessa

26.01.2011

Eq di Schrodinger in 1D, temp-dipendente,

$$H\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}, \quad \psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

Eq di Schr. stazionaria: $H\psi(x) = E\psi(x)$

nel caso di particelle libera massiva (1D) $\rightarrow V(x) = 0$

la soluzione e': $\psi(x,t) = Ae^{i(kx \pm \omega t)}$ \rightarrow onda piana intrinsecamente complessa

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad k = \frac{p}{\hbar}$$

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} \rightarrow \text{Dipende da } k \Rightarrow \text{DISPERSIONE}$$

Energia e' perfettamente nota perche' siamo in un autostato (stato stazionario $\Rightarrow E$ non cambia) e di conseguenza anche p (quantita' di moto non cambia ed e' nota)

La probabilita' e' data da $|\psi(x,t)|^2 = A^2 = \text{costante}$ la posizione della particella e' sconosciuta quindi! Perche' la prob e' equidistribuita su tutto l'asse x .

\Rightarrow particella ha quantita' di moto nota ma non si puo' stabilire a priori la sua posizione perche' non vi e' un pto x con prob maggiore di contenere la particella

\Rightarrow e' il principio di Heisenberg

$$\underbrace{\Delta x}_{\substack{\text{incertezza} \\ \text{sulla} \\ \text{posizione} \\ \text{di una} \\ \text{particella} \\ \text{quantica}}} \underbrace{\Delta p}_{\substack{\text{incertezza} \\ \text{sulla} \\ \text{quantita'} \\ \text{di} \\ \text{moto}}} \approx \hbar \rightarrow \text{piccolo... ma non } \emptyset!$$

Abbiamo visto nel nostro caso che p e' perfettamente nota $\Rightarrow \Delta p \rightarrow \emptyset$ ALLORA \times Heisenberg Δx diverge a ∞ .

Su scala microscopica, vedere l' e^- \Rightarrow farlo interagire con campo e.m. \Rightarrow che non puo' essere piccolo a piacere \Rightarrow e' composto da quanti (\rightarrow FOTONI) poniamo usare un campo e.m. il + piccolo possibile \times interazione per con l' e^- . (MA ~~non~~ il minimo campo e.m. e' comunque un quanto \Rightarrow interagisce con e^- perturbandolo molto! \rightarrow cambia molto la sua

Anche guardare un oggetto grande comporta il cambiare la sua quantita' di moto \times interazione con fotoni, ma grazie alla grande massa non ci accorgiamo del cambio della quantita' di moto.

Posizione di un oggetto NON e' compatibile con il suo stare "fermo", perche' se e' fermo NON conosco la sua posizione!

l'incertezza con cui conosciamo la posizione delle particelle
 è legata a $\sigma_x = \frac{1}{\sigma_k}$

$$\sigma_x \sigma_k = 1$$

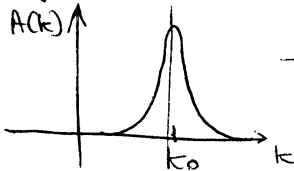
$k = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow$ allora c'è incertezza nella quantità di moto
 pari a $\sigma_p = \hbar \sigma_k$

lettura finale di questa relazione matematica:

$$\boxed{\sigma_x \sigma_p = \hbar \Leftrightarrow \Delta x \Delta p = \hbar = \frac{h}{2\pi}}$$

e in tempi successivi? Abbiamo visto che a $t=0$ abbiamo una
 dist. gaussiana... ma qual è l'evoluzione in temp successivi?

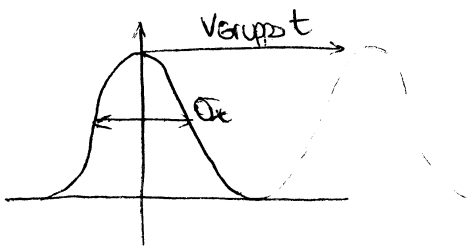
Immaginiamo che usiga



\rightarrow in questo caso si avrà spostamento da k_0 verso k_1
 perché abbiamo un $k_0 > 0$

Se avessimo $k_0 = 0$ allora avremmo
 che la prob. non si sposta.

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad v_{\text{gruppo}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m} = \text{velocità con cui si muove il massimo della probabilità di trovare le particelle}$$



Considera che il mezzo è dispersivo! Il pacchetto si
 ALLARGA MENTRE SI SPOSTA, lo σ_x diventa $\sigma_x(t)$ f2 del tempo!

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\sigma_x^2(0) + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_x(0)}\right)^2}$$

facendo i calcoli a scoprire che

tanto è più stretto inizialmente il pacchetto di prob. nello spazio tanto più velocemente questo si allarga!!

Allargamento è quasi lineare nel tempo



perché se σ_x è ben definito $\Rightarrow \sigma_k$ è molto largo \Rightarrow pacchetto formato da moltissime lunghezze d'onda \Rightarrow effetto dispersivo sarà più intenso!



un pacchetto ben definito all'istante iniziale si allarga più velocemente di uno poco definito