NUMERO : 258

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Grand Blanc

MATERIA : Geometria
Prof. Gatto

Appunti di GEOMETRIA

ELEMENTI DI GEOMETRIA NELLO SPAZIO (EUCLIDEO REALE TRIDIMENSIONALE)

- In $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali) sono definite due operazioni = somma (+) e prodotto (·), rispetto alle quali la TERNA ORDINATA

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \text{ si } \cancel{\text{dice}} \text{ CAMPO}$$

ovvero è un campo posso applicare le proprietà della somma e del prodotto

- $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle colonne ad n entrate reali (o componenti)

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(un modo per ordinare n numeri reali)

Su $\mathbb{R}^n$ sono definite ~~due~~ tre operazioni:

A) Somma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

B) Prodotto per uno scalare

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, +, \cdot, < >) \cong \mathbb{R}^n$ si dice

SPAZIO VETTORIALE REALE EUCLIDEO

Definizioni

A) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, si dice MODULO di $\vec{u}$ e si indica

$$|\vec{u}| = \sqrt{<\vec{u},\vec{u}>}$$

B) $\vec{v}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ si dicono ORTOGONALI se e solo se

$$<\vec{u},\vec{v}> = 0$$

(*) DIMOSTRAZIONI

II) $<\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}> = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})(i)\cdot\vec{w}(i) =$ | i è un CONTATORE

$= \sum_{i=1}^{n}(\lambda\vec{u}(i)+\mu\vec{v}(i))\cdot\vec{w}(i) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\vec{u}(i)\cdot\vec{w}(i)+\mu\vec{v}(i)\cdot\vec{w}(i)) =$

$= \lambda\sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\cdot\vec{w}(i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\vec{v}(i)\cdot\vec{w}(i) = \lambda<\vec{u},\vec{w}> + \mu<\vec{v},\vec{w}>$

C.V.V.

(Prop. distributiva generalizzazione)

III) $<\vec{u},\vec{v}> = \sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\cdot\vec{v}(i) = \sum_{i=1}^{n}\vec{v}(i)\cdot\vec{u}(i) = <\vec{v},\vec{u}>$

(generalizzazione prop. commutativa)

IV) $<\vec{u},\vec{u}> = \sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\cdot\vec{u}(i) = \sum_{i=1}^{n}[\vec{u}(i)]^2 \geq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 174

Sia det : $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{R}$

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{u}_n) \longmapsto \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n)$$

Allora il determinante è una FORMA MULTILINEARE (I) ASIMMETRICA (II)

I) $\det(\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = \lambda \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n) + \mu \det(\vec{u}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{u}_n)$

II) $\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h, \dots \vec{u}_k, \dots \vec{u}_n) = -\det(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k, \dots \vec{u}_h, \dots \vec{u}_n)$

scambiando due colonne il segno del det si inverte.

▷ Se una matrice ha due colonne uguali ha det = 0.

$\Rightarrow \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n) =$

$= \det(\vec{u}_1 + k\vec{u}_2, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n) =$

$(= \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n) + k(\vec{u}_2, \vec{u}_2, \vec{u}_n)$

<u>Definizione</u>

Il <u>determinante</u> è l'unica forma multilineare asimmetrica tale che

$$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

DEF ↳ $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ è l'unico vettore / $\vec{e}_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ DELTA KRONECKER

• <u>Applicazione delle matrici per risolvere sistemi lineari</u>

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \iff x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$$

$$\det(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) =$$

$$= x \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + y\underbrace{(\vec{b}, \vec{b}, \vec{c})}_{=0} + z\underbrace{(\vec{c}, \vec{b}, \vec{c})}_{=0}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

E ... $$y = \frac{\det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

$$z = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

~~Riflett[illegible]~~

definizione di $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \iff$$

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \iff$$

$$\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Riflettiamo sulle condizioni di: (v. definizioni rette p. 11)

$\forall \;\big|\; \vec{v}_s, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, r e s rette (${v_r}$ e ${v_s}$ vettori direzione delle rette.

- PARALLELISMO (TRA ~~vettori~~ RETTE)
  $\vec{v}_r \,//\, \vec{v}_s \iff \vec{v}_s = \lambda\,\vec{v}_r$

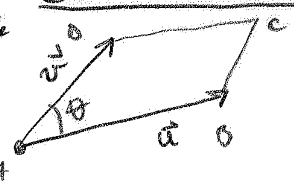
- COLLINEARITÀ ~~COINCIDENZA~~ (TRA ~~vettori~~ RETTE)
  $\vec{v}_r = \vec{v}_s \iff \begin{cases} \vec{v}_r = \lambda\vec{v}_s \\ r \cap s \neq \emptyset \end{cases}$ ~~altro~~

- INCIDENZA ($\sim$)
  $\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \iff \vec{v}_r \neq \lambda\vec{v}_s$, $r\cap s = \emptyset$

- SGHEMBE ($\sim$)
  $\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \iff \vec{v}_r \neq \lambda\vec{v}_s$, $r\cap s \neq \emptyset$

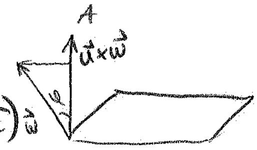
~~Par~~ ~~Parallelogramma~~ Considerazione

I)



$$\text{Area}(ABCD) = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\operatorname{sen}\theta = \vec{u}\times\vec{v}\ !$$

II)



$$\text{Volume}(ABCDA'B'C'D') = \text{Area}(ABCD)\cdot|\vec{\omega}|\cdot\cos\varphi =$$

$$= \langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{\omega}\rangle\ !$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 174

E quindi se

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \Rightarrow |\cos(\vec{u},\vec{v})| = \frac{|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

e $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$

$\Rightarrow |\cos(\vec{u},\vec{v})| \leq 1$

∽ SPAZI AFFINI EUCLIDEI ∽

Sia A un insieme

Sia $f : A \times A \to \mathbb{R}^n$

$(A,B) \mapsto f(A,B) \in \mathbb{R}^n$

per comodità scriveremo $f(A,B) = \vec{AB}$

Se A, $f : A\times A \to \mathbb{R}^n$ verifica:

i) se $\forall (A,B) \in A\times A$,

$\exists!\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \;/\; \vec{AB} = \vec{v}$

$\forall A \in A$
$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \exists!\, B \;/\; \vec{AB} = \vec{v}$

ii) $\forall (A,B,C) \in A\times A\times A$

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (Relaz di CHARLES)

A si dice <u>SPAZIO AFFINE</u> (modellato su $\mathbb{R}^n$)
e i suoi elementi vengono detti <u>PUNTI</u>.

<u>Proprietà</u>

a) $\forall A \in A$, $\vec{AA} = \vec{0}$ → $\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}}$
$\vec{AA} + \vec{AA} = \vec{AA} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0}$ $\quad A=B=C$

b) $\vec{AB} = -\vec{BA}$ → $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ $\quad A=C\neq B$
$\vec{AB} = -\vec{BA}$

c) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

↓

$\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$ $\quad A\neq B$, $C=O$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$$\Rightarrow d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{<\vec{AB},\vec{AB}>}$$

Definizioni

Sia $[A,B]$ il segmento di estremi A e B, la lunghezza di $[A,B]$ ~~e d(A,B)~~ è per definizione $d(A,B)$ e verrà indicata con $\overline{AB}$.

$$|\vec{AB}| = \overline{AB}$$

se $\vec{AP}$ segmento definibile come
$[AP] = \{P / \vec{AP} = t \cdot \vec{AB},\ t \in [0,1]\}$
dimm $[A,P]$ = lunghezza segmento

DEF

Una matrice si dice RIDOTTA PER COLONNA se in ogni colonna non nulla c'è un elemento non nullo a destra del quale ci sono soltanto zeri.

$$A_R = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{pmatrix}$$

Per ridurre a colonne si può

1. Sommare colonne a colonne
2. Scambiare due colonne
3. moltiplicare una colonna per $\lambda \neq 0$

⚠ Cambia il det A! ma non il RANGO (# colonne non nulle)

- Per controllare se due rette in forma parametrica

$$r = \begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases} \quad e \quad s = \begin{cases} x = x_0' + s u_1 \\ y = y_0' + s u_2 \\ z = z_0' + s u_3 \end{cases}$$

sono distinte si può operare nel seguente modo:

$$P_r\,(x_0 + tv_1,\ y_0 + tv_2,\ z_0 + tv_3)$$
$$P_s\,(x_0' + su_1,\ y_0' + su_2,\ z_0 + su_3)$$

$\mapsto \vec{P_rP_s} \neq \lambda \vec{v}$ o $\lambda \vec{u}$ → sono distinte

(ovvero sono non //)

NB.
Un triangolo ABC è rettangolo in A se e solamente se

$$\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = 0$$

Teorema di Pitagora

Un triangolo è rettangolo (in A) $\Leftrightarrow$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

dim

Rel. di Charles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$$\Rightarrow \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AC} - \vec{AB}|^2$$

$$\overline{BC}^2 = \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle - 2\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle$$

ma $\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = 0$
C rettangolo in A

$$= |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$$

⚠ Vale anche il viceversa!
(se $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow \langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = 0$)

▷ vale per tutti i triangoli!

$\Rightarrow$ Teorema di Carnot

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$

dimostrato $\forall$
- $\forall n$
- $\forall$ prodotto scalare bilineare, def positivo e simmetrico

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_{1,q} - x_{1,p} \\ x_{2,q} - x_{2,p} \\ \vdots \\ x_{n,q} - x_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$d(P,Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_{i,q} - x_{i,p})^2}$$

Definizioni: Se esistono i limiti

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{y_0,z_0}(x_0+h) - f_{y_0,z_0}(x_0)}{h}$$

... e $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $P(x_0, y_0, z_0)$

~~⚠ Se voglio derivare una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R}^3$ posso scrivere le coordinate in parametro t e derivare rispetto a t (in $t=0$)~~

~~$\Rightarrow F'_{\vec{u}}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tu_1, y_0+tu_2, z_0+tu_3) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$ $|\vec{u}|=1$~~

~~$\Rightarrow$ derivata direzionale~~

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Il GRADIENTE di f in P_0 è definito come

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{k}$$

Concetto di derivata direzionale

Posso calcolarmi la derivata di una funzione rispetto ad una determinata direzione $\vec{u}$

($|\vec{u}|=1$ NORMALIZZATA)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t u_1 \\ y = y_0 + t u_2 \\ z = z_0 + t u_3 \end{cases} \Rightarrow F'_{\vec{u}}(0) \stackrel{!}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tu_1, y_0+tu_2, z_0+tu_3) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\right|_{P_0} = \langle \vec{\nabla} f(P_0), \vec{u} \rangle$$

Campo Vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ \vdots \\ F_n(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Un campo vettoriale

$\vec{F} : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}^3 \to \mathbb{R}^3$ si dice CONSERVATIVO $\Leftrightarrow$

$\exists\, U : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;/\; \vec{F} = \nabla \vec{U}$

Divergente

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

Elementi di Geometria differenziale delle curve nello spazio affine euclideo

Definizione

$\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{E}^n$ si dice CURVA

$\Rightarrow$ definire una curva significa definire n funzioni

$X_i : (a,b) \to \mathbb{R}$

$1 \leq i \leq n$

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

$\hookrightarrow$ γ è derivabile in t_0 $\Leftrightarrow$ $x_i : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $t_0 \in (a,b)\ \forall i$

◦ Riparametrizzazione

Definizione

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti della retta reale

$$\begin{tikzcd} \overset{t}{I} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r] & \overset{s}{J} \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

differenziabili tali che

$s = f(t)$ e $t = g(s)$

derivabili tali che

$g \circ f = Id_I \qquad f \circ g = Id_J$

$\Rightarrow$ Allora f e g si dicono CAMBI DI PARAMETRO

• Se γ (curva) $: I \to \mathcal{E}^3$

$t \mapsto \gamma(t)$

$s = espre(t)$

$\gamma(t) = espre^{-1}(t)$

TILDE

$\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathcal{E}^3$

$s \mapsto \tilde{\gamma}(s) \quad \nrightarrow \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$

↳ si dice che $\tilde{\gamma}(s)$ è una riparametrizzazione di γ con parametro s.

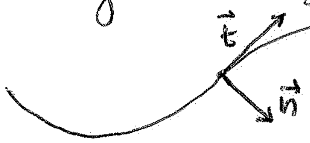
▫ LUNGHEZZA D'ARCO

Sia $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{E}^n$ differenziabile e regolare $\forall t \in I$

La lunghezza d'arco è definita ~~dall~~'equazione differenziale:

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| \quad \to \quad ds = \int_{s_0}^{s} |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad (*)$$

(sotto ipotesi che tale funzione esiste ed è unica a meno di una costante) o Se γ è biregolare in $(a,b) \in \mathbb{R}^3$



$$\Rightarrow \quad \vec{t}(s) = \vec{\gamma}'(s) \qquad \vec{n}(s) = \frac{\vec{\gamma}''(s)}{|\vec{\gamma}''(s)|}$$

Se $s_0 \in (a,b)$

$\boxed{K(s_0) = |\vec{\gamma}''(s_0)|}$ si dice CURVATURA della curva γ in s_0

Esempio

$\gamma(t) = (R\cos 3t,\ R\,\text{sen}\,3t) \subseteq \mathcal{E}^2$ determinare la curvatura K

1) $\dfrac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)|$

1a. $\dot{\gamma}(t) = (-R(\text{sen}\,3t)\,3,\ 3R\cos 3t)$

$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{9R^2\,\text{sen}^2 3t + 9R^2\cos^2 3t}$

$= 3R$

1b. $ds = 3R\,dt$

$s = s_0 + 3R\cdot t$

$\Rightarrow t = \dfrac{s}{3R}$

2) $\gamma(s) = \left(R\cos\dfrac{\cancel{3}s}{\cancel{3}R},\ R\,\text{sen}\dfrac{\cancel{3}s}{\cancel{3}R}\right)$

3) $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} -\text{sen}\,(s/R) \\ \cos\,(s/R) \end{pmatrix} \quad \Big|\ |\gamma'(s)| = 1$

4) $\gamma''(s) = \begin{pmatrix} -\cos(s/R)\cdot\frac{1}{R} \\ -\text{sen}\,(s/R)\cdot\frac{1}{R} \end{pmatrix} \Rightarrow K = |\gamma''(s)| = \sqrt{\dfrac{1}{R^2}\cos^2\left(\dfrac{s}{R}\right) + \dfrac{1}{R^2}\,\text{sen}^2\left(\dfrac{s}{R}\right)} = \dfrac{1}{R}$

$\rightarrow$ più K è alto, minore è il raggio!

Definizione

Sia $\gamma : (a,b) \rightarrow \mathcal{E}^3$

$\Rightarrow \quad R(s) = \dfrac{1}{K(s)}$ si dice RAGGIO DI CURVATURA

$\rightarrow$ raggio del cerchio "osculante" (a tg in quel punto)

$\hookrightarrow \Pi_{\gamma(s_0),\vec{t},\vec{n}} = \{ P \in \mathcal{E}^3 / < \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t), \overrightarrow{\gamma(s_0)P} > = 0 \}$

<u>dimostrazione</u>

T: $[\vec{t},\vec{n}] = [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)]$

Allora $\vec{t} \parallel \dot{\gamma}(t)$ per Hp.

resta da dimostrare che $\ddot{\gamma}(t) = a\gamma'(s) + b\gamma''(s)$:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| \cdot \gamma'(s)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{d(\dot{\gamma}(t))}{dt} = \frac{d|\dot{\gamma}(t)|}{dt} \cdot \gamma'(s) + |\dot{\gamma}(t)| \cdot \frac{d\gamma'(s)}{dt} =$$

$$= \frac{d|\dot{\gamma}(t)|}{dt} \cdot \vec{t} + |\dot{\gamma}(t)| \cdot \frac{d\gamma'(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} =$$

$$= \frac{d|\dot{\gamma}(t)|}{dt} \cdot \vec{t} + |\dot{\gamma}(t)|^2 \cdot \gamma''(s) =$$

$$= \underbrace{\frac{d|\dot{\gamma}(t)|}{dt}}_{\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}} \cdot \vec{t} + \underbrace{|\dot{\gamma}(t)|^2 \cdot |\gamma''(s)|}_{a_{cp} = \frac{v^2}{R}} \cdot \vec{n} \quad \checkmark$$

<u>Definizione</u>

Sia $\gamma : (a,b) \to \mathcal{E}^3$ curva differenziabile biregolare

essa è <u>PIANA</u> $\iff \exists$ un piano che la contiene

ossia

$\forall$ a, b, c, d non tutti nulli, $\forall t \in (a,b)$

$\exists$ $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$

Definizione

Il FASCIO DI PIANI avente per asse la retta

$r: \Pi_1 \cap \Pi_2$ è la famiglia di piani:

$$\lambda \Pi_1(x,y,z) + \mu \Pi_2(x,y,z) = 0$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ $= \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

NB. Non è tanto importante il valore di λ e μ, ma del loro rapporto $(\lambda : \mu)$

⇒ classe di equivalenza
$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow$
$a d - b \cdot c = 0$

• Ogni piano del fascio contiene
$r: \Pi_1 \cap \Pi_2$.
Infatti se $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$
$\Rightarrow \Pi_1(x_0,y_0,z_0) = 0$ $\Rightarrow \lambda \Pi_1 + \mu \Pi_2 = 0$!
$\Pi_2(x_0,y_0,z_0) = 0$

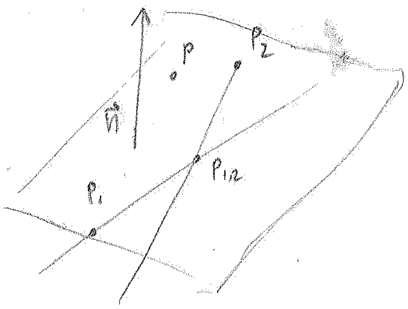
Esercizio:

Siano r_1, r_2 rette date in forma parametrica che si intersecano in P_{12} (quindi complanari). Individuare eq. cartesiana di Π, piano che le contiene entrambe.

I) Metto a sistema r_1 e r_2 (di parametri rispettivamente t ed s), e trasformo in eq. cartesiana ✓

II) Trovo $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e pongo

$$< \overrightarrow{P_{12}P_1} \times \overrightarrow{P_{12}P_2}, \overrightarrow{P_{12}P_{(x,y,z)}} > = 0 \quad ✓$$



III) Trovo eq piano $ax+by+cz+d=0$ ✓✓

con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e impongo il passaggio per P_{12}.

$| \; r_1 /\!/ \vec{v} \quad r_2 /\!/ \vec{u}$

NB. Siano
$\vec{u}, \vec{v}$ vettori non nulli.
La proiezione ortogonale di $\vec{u}$ su $\vec{v}$ è per definizione

$$\pi_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left\langle \vec{u}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$|\pi_{\vec{v}}(\vec{u})| = |\vec{u}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}\right)$$

DISTANZE TRA ELEMENTI

1) PUNTO - PUNTO

Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{E}^3$

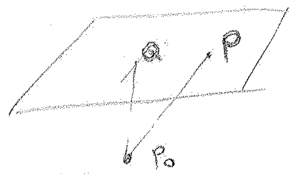
$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \left\| \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

2) PUNTO - PIANO

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $\Pi: ax + by + cz + d = 0$

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

dimostrazione



$$d(P_0, \Pi) \overset{DEF}{=} [\inf] \min \{ d(P_0, P) \,/\, P \in \Pi \}$$

$= d(P_0, Q)$ vedi figura

$d(P_0, Q) \leq d(P_0, P)$

$\vec{n}_\Pi = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q}}{|\overrightarrow{P_0Q}|} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$d(P_0, Q) = |\overrightarrow{P_0Q}| = |\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_\pi \rangle| =$$

5) RETTE //

$d(r_1, r_2) = d(P_0, r_2)$ dove $P_0 \in r_1$.

6) PIANI //

$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_0, \Pi_2) \;/\; P_0 \in \Pi_1$

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

• SFERA

Definizione:

Sia $P_0 \in \mathcal{E}^{n+1}$, $R (\in \mathbb{R}) > 0$

$$S^n_{P_0}(R) = \{ P \in \mathcal{E}^{n+1} / |\overrightarrow{P_0P}| = R \}$$

Se $n=2$

$P(x,y,z) = S^2_{P_0}(R) \Rightarrow |\overrightarrow{P_0P}|^2 = R^2$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

FORMA CANONICA
(evidenziati CENTRO $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e RAGGIO R)

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R = 0$$

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D = 0$$

Dati
$A = -2x_0$
$B = -2y_0$
$C = -2z_0$
$D = x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$

$\Rightarrow C\left(\frac{A}{-2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$

$R^2 = (x_0^2+y_0^2+z_0^2-d) =$

$= \frac{A^2+B^2+C^2}{4}$

◦ FASCI DI SFERE

$$S_i(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$ polinomio

$S_1(x,y,z)=0$ sfere

$\forall (\lambda:\mu) \in \mathbb{P}$ non entrambi nulli indico con $S(\lambda,\mu)$ la sfera:

$$S(\lambda:\mu)(x,y,z) = \lambda S_1(x,y,z) + \mu S_2(x,y,z) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{P_0 \in S_1 \cap S_2 \iff P_0 \in S(\lambda:\mu) \quad \forall (\lambda:\mu) \in \mathbb{P}}$$

dim

- $P_0 \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow S(\lambda:\mu)(P_0) = \lambda S_1(P_0) + \mu S_2(P_0) = 0$ ✓ (è verificato $=0$; è verificato $=0$)
- $P_0 \in S(\lambda:\mu) \, \forall (\lambda:\mu)$

$\Rightarrow$ $S(1;0) = S_1$, $S(0;1) = S_2$ $\Rightarrow P_0 \in S_1 \cap S_2$.

In particolare

$$S(\lambda:\mu) \cap S_1 = S_1 \cap S_2 \quad \forall (\lambda:\mu) \in \mathbb{P}$$

$\Rightarrow$ per $(\lambda:\mu) = (1,-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1: x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ S(1,-1): (A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)z+(D_1-D_2)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ intersezione sfera-sfera = intersezione sfera-piano

$\Rightarrow$ CIRCONFERENZA

(che giace sul PIANO RADICALE)

- Consideriamo

$$S(\lambda:\mu) = x^2+y^2+z^2 + \frac{(\lambda A_1+\mu A_2)}{\lambda+\mu}x + \frac{(\lambda B_1+\mu B_2)}{\mu+\lambda}y + \frac{(\lambda C_1+\mu C_2)}{\mu+\lambda}z + \frac{(\lambda D_1+\mu D_2)}{\mu+\lambda}$$

di centro e raggio

$C(\lambda;\mu)$ $R(\lambda:\mu)$

NB. $\lim_{\mu+\lambda\to 0} R(\lambda:\mu) = \infty$ $\Rightarrow$ il piano radicale può essere considerato a tutti gli effetti una sfera (di raggio ∞)

• Sia

$f : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^k $(k \geq 2)$

provvisoriamente, esistono tutte le derivate parziali rispetto a x, y, z fino all'ordine k e sono continue.

Per ogni $h \geq 0$ il luogo

$$S_h = \{(x,y,z) \in \mathcal{E}^3 \ / \ f(x,y,z) = h\}$$ si dicono

<u>SUPERFICI DI LIVELLO</u>

Un esempio di superfici di livello sono le <u>isoterme</u>

$T(x,y,z) = 25°C$ $\quad$ (NB $T(x,y,z) = -274°C = \emptyset$)

NB

Sia $P_0 \in \mathcal{D}_f$.

P_0 si dice regolare per $f \iff \nabla \vec{f}\big|_{P_0} \neq \vec{0}$

→ Se P_0 è regolare e $f(x_0, y_0, z_0) = h$

allora $\vec{\nabla}_{P_0} f$ è ortogonale alla superficie di livello.

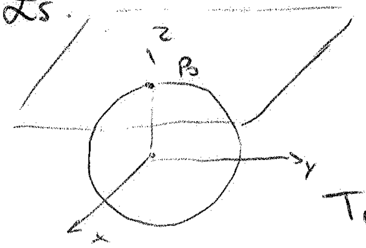
(al piano tg in P_0)

$$\boxed{T_{P_0} S_h = \{P \ / \ \langle \vec{P_0P}, \vec{\nabla}_{P_0} f \rangle = 0\}}$$

è il piano tangente a S_h nel punto P_0

(piano per P_0 $\perp$ a $\vec{\nabla} f_{(P_0)}$).

Es.



$P_0(0,0,1)$

$S : x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$T_{P_0} S_h$?

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z-1) = 0$$

$$2x\big|_{x=0} \cdot x + 2y\big|_{y=0} \cdot y + 2z\big|_{z=1} \cdot z = 0 \Rightarrow \underbrace{z = 1}_{T_{P_0} S_h}$$

Es.

$(\mathbb{Z}, \cdot)$

g1) $\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$ ✓

g2) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ✓

g3) $\exists\, 1 \in \mathbb{Z} \,/\, a \cdot 1 = a$ ✓

g4) $\exists\, \bar{a} : a \cdot \bar{a} = 1$?

no, infatti se $a = 2$
$\bar{a} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ✗ $\Rightarrow$ non è un gruppo abeliano.

/ $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$ sono tutti gruppi commutativi.

/ $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sono gruppi abeliani rispetto alla somma per colonne.

DEFINIZIONE

- Un insieme

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ per le quali valgono

P1) $(a+b) \cdot c = ac + b \cdot c$

P2) $a \cdot (b+c) = ab + ac$

Si dice CAMPO.

(e verrà indicato con $\mathbb{K}$)

e i suoi elementi sono detti SCALARI

Dove "+" e "·" sono operazioni binarie interne /

× $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano.

× $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot) = (\mathbb{K}^*, \cdot)$ è un gruppo commutativo

NB $\{0\}$ elemento neutro di "+"

Es

$\mathbb{R}^n$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

D'ora in poi $\vec{u}(i)$ indicherà la i-esima componente di $\vec{u} \in \mathbb{K}^n$.

NB.

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})(i) = \vec{u}(i) + \vec{v}(i) \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$

$(\lambda \vec{u})(i) = \lambda \cdot \vec{u}(i)$

. In particolare $\mathbb{K}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale (spazio vettoriale su se stesso)

Esempi

A) $\mathbb{C}^2$ è uno $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

B) $\mathbb{C}^2$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

C) $\mathbb{R}^2$ non è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

a dim. 2.

NB $\begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ l'ultimo passaggio lo posso fare solo se $\mathbb{C}^2$ è uno $\mathbb{C}$-spazio vettoriale!

a dimensione 4 (servono 4 elementi $\in \mathbb{R}$ per definirne uno di $\mathbb{C}^2$)

~ se $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ è naturale
scrivere ~~così~~ la i-esima componente
di $\vec{v}$ con l'espressione $\vec{v}(i)$.

c) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia

$$\mathbb{R}^D = \{ f : D \to \mathbb{R} \}$$

definite da
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Sia Y un insieme qualsiasi.
Una **SUCCESSIONE** di elementi di Y è un elemento di

$$Y^{\mathbb{N}^*} = \{ f : \mathbb{N}^* \to Y \}$$

$\hookrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ = SPAZIO SUCCESSIONI SCALARI
(e spazio vettoriale)

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $(f : \mathbb{N} \to \mathbb{K})$

un elemento di $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sarà della forma:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) =$$
$$= a_0 (1, 0, 0, \dots, 0) + a_1 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, 0, \dots, 1) =$$
$$= a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$$

NB $a_n \in \mathbb{K}$
$x^n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

passaggi permessi x k' $\mathbb{K}^n$ è uno spazio vettoriale

si ~~diceva~~ dice anche che

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ = {spazio vettoriale delle **SERIE FORMALI**}

- D'ora in poi, con V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale indicheremo qualunque esempio fatto e i vettori verranno indicati con "sopraffreccette" [$\rightarrow$] per distinguerli con i scalari.

TERMINOLOGIA

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vettori di V

$$\Rightarrow \underline{[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] \overset{DEF}{=} \{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n \;/\; \lambda_i \in \mathbb{K}\}}$$

= insieme di tutte le $\mathbb{K}$-combinazioni lineari (cioè con coeff. in $\mathbb{K}$) di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$.

- In generale diremo che
$$\vec{v} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n] \iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \;/$$
$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots \lambda_n\vec{v}_n$$

Es. 1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \notin [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$$

Es 2

in $K[x]$ $\quad [1, x, x^2, x^3]$ = insieme dei polinomi di grado $n \leq 3$

- Osservo che se $\vec{u}, \vec{v} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \underline{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]}$ infatti

$$\lambda\vec{u} = \lambda \sum_{i} \lambda_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \sum_i \underbrace{(\lambda\lambda_i + \mu\cdot\mu_i)}_{\text{denomino } \nu_i}\vec{v}_i \;.$$
$$\mu\vec{v} = \cancel{\mu} \sum_{i} \mu_i \vec{v}_i$$

cvd.

Definizione

Siano $W_1, W_2 \in G(V)$

$$\boxed{W_1 + W_2 \overset{DEF}{=} \left\{ \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \;/\; \begin{matrix} \vec{U}_1 \in W_1 \\ \vec{U}_2 \in W_2 \end{matrix} \right\}}$$

ovvero

$$\vec{v} \in W_1 + W_2 \iff \exists \vec{u}_1 \in W_1, \vec{u}_2 \in W_2 \;/\; \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{v}$$

Prop

$$W_1 + W_2 \in G(V)$$

dim

$\vec{u}, \vec{v} \in W_1 + W_2$

ovvero

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ allora $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} =$$

$$= \underbrace{\lambda \vec{u}_1 + \vec{v}_1 \cdot \mu}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda \vec{u}_2 \cdot \mu \cdot \vec{v}_2}_{\in W_2} \quad \cancel{\in G(V)}$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W_1 + W_2$$

$$\Rightarrow W_1 + W_2 \in G(V)$$

• Definizione **SOMMA DIRETTA**

Siano $W_1, W_2 \in G(V)$
dico che la somma $W_1 + W_2$ è DIRETTA
e si indica con

$$\boxed{W_1 \oplus W_2}$$

$\iff$ Ogni $\vec{w} \in W_1 \oplus W_2$ si scrive come somma $\vec{v_1} + \vec{v_2} \,/\, \vec{v_i} \in W_i$ in modo unico!

Es.
in $\mathbb{R}^2$
$W_1 + W_2 \quad [\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [\vec{e}_1 - \vec{e}_2]$

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ oppure
$+3\vec{e}_2$
$= -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

la somma non è unica!

• $W_1 + W_2 \quad [\vec{e}_1] + [\vec{e}_2]$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1 \oplus W_2$

Proposizione
$\Rightarrow W_1, W_2 \in G(V)$

$W_1 + W_2 \to W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Definizioni

Siano V, W spazi vettoriali. La funzione $f: V \to W$ ~~detta~~ si dice **$\mathbb{K}$-lineare**

$\iff \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda f(\vec{v}_1) + \mu f(\vec{v}_2)$$

Notazione

L'insieme delle funzioni $f: V \to W$ $\mathbb{K}$-lineari lo denomino:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{ f: V \to W \,/\, f \ \mathbb{K}\text{-lineare} \}$$

Proprietà

Sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

1) $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

2) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

$f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Se X è insieme non vuoto e W è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$

$W^X = \{ f: X \to W \}$ è spazio vettoriale

$\iff \forall f, g \in W^X$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\Longrightarrow (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

dimostrazione

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in U$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$(g \circ f)(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = g\left[f(\overbrace{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}}^{\in U})\right] \overset{\mathbb{K}\text{-linearità}}{=} g\Big(\underbrace{\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})}_{\in V}\Big) =$$

$$= \lambda\, g\circ f(\vec{u}) + \underbrace{\mu\, g\circ f(\vec{v})}_{W} \quad \checkmark$$

Esempio (I parte)

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{$insieme delle funzioni reali di variabile reale$\}$

$C^{\infty}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f$ derivabile ∞ volte$\}$

$\Rightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}) \in G(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$

- Infatti
  f, g derivabili $\Rightarrow \lambda f + \mu g$ derivabile

$\frac{d}{dx} : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$

$\frac{d}{dx} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}(\mathbb{R}), C^{\infty}(\mathbb{R}))$ | $\frac{d}{dx}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{df}{dx} + \mu \frac{dg}{dx}$

Ovviamente se $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$

- $f: V \to W$ è SURIETTIVA $\iff Im(f) = W$

ovvero

f suriettiva $\iff \forall \vec{u} \in W \ \exists \vec{v} \in V \ / \ f(\vec{v}) = \vec{w}$

$$\left.\begin{array}{l} W \subseteq Im(f) \\ Im(f) \subseteq W \end{array}\right. \Rightarrow W = Im(f)$$

viceversa

$Im(f) = W$

$\Rightarrow$ ~~Ogni~~ $\forall \ \vec{w} \in W$

$\vec{w} \in Im f$

$\Rightarrow \ \exists \ \vec{v} \in V \ / \ \vec{w} = f(\vec{v})$ $\quad f$ suriettiva.

- $f: V \to W$ è INIETTIVA $\iff Ker f = \{\vec{0}_V\}$

dimostra

D) Se f è iniettiva, $\vec{v} \in Ker(f)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0}_W \\ \text{ma} \\ f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \text{ in generale} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{poiché } f \text{ è iniettiva} \\ \vec{v} = \vec{0} \end{array}$$

$\Rightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_V\}$

Definizione

- Sia $f: V \to W$ lineare e biettiva, ossia iniettiva e suriettiva.

  Allora f si dice <u>ISOMORFISMO</u>

$\Rightarrow f \in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$ è isomorfismo $\Leftrightarrow$ $Ker f = \{\vec{0}_V\}$, $Im f = W$

$\hookrightarrow f(\underbrace{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}}_{V}) = \underbrace{\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})}_{W}$

- V, W ($\mathbb{K}$-spazi vettoriali) si dicono <u>ISOMORFI</u>

  $\Leftrightarrow$ esiste isomorfismo tra loro.

  → c'è una funzione che "traduce" ciò che succede in V in quello che succede in W.

Esempio

Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{$polinomi di grado $\leq 2\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

Infatti posso considerare la funzione $f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3$:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

verifica

1) $f\left(\lambda(a_0+a_1x+a_2x^2)+\mu(b_0+b_1x+b_2x^2)\right) = f\left(\lambda a_0+\mu b_0+(\lambda a_1+\mu b_1)x+(\lambda a_2+\mu b_2)x^2\right)$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_0+\mu b_0 \\ \lambda a_1+\mu b_1 \\ \lambda a_2+\mu b_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda f(a_0+a_1x+a_2x^2)+\mu f(b_0+b_1x+b_2x^2)$$

✓ (lineare)

⇝ "$\circ$" verifica le seguenti proprietà:

- <u>ASSOCIATIVA</u>

$$(g\circ f)\circ h = g\circ(f\circ h)$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend left, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rrr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & V \arrow[r, "h"] & V
\end{tikzcd}$$

- <u>ELEMENTO NEUTRO</u>

$$id_V : V \longrightarrow V$$
$$\vec{v} \longmapsto id_V(\vec{v}) = \vec{v}$$

1) Verifica che id_V è LINEARE:

- $id_V(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda id_V(\vec{u}) + \mu id_V(\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$

2) " id_V è NEUTRO:

$f \in End_K(V)$

$$\Rightarrow \forall\, \vec{u},\vec{v} \quad (f\circ id_V)(\vec{u}) \overset{\text{def "}\circ\text{"}}{=} f\left[id_V(\vec{u})\right] \overset{\text{def "}id_V\text{"}}{=} f(\vec{u})$$
$$(id_V\circ f)(\vec{v}) = id_V\left[f(\vec{v})\right] = f(\vec{v})$$

- $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$
- $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$

$\forall\, f,g,h \in End_K(V)$

Riassumo dicendo che $End_K(V)$ è una K-algebra

NB. Non commutativa!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 174

Osservazione

$(Aut(V), \circ)$ è un gruppo, ma non è commutativo.

possiede
- composizione interna,
- associatività
- elemento neutro (id_V)

Es

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \neq 0$$

$\Rightarrow$ Mostriamo che $\nexists f^{-1}$, infatti se esistesse

$$f^{-1}\left(f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\neq$ $\Rightarrow$ non esiste f^{-1}

$$f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indipendenza & dipendenza lineare

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ (o semplicemente $\vec{v}_i$ i contatore $1 \le i \le n$)

vettori di V

$\Rightarrow$ Un'espressione del tipo

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}\right)$$

viene detta COMBINAZIONE LINEARE NULLA

Proposizione

Sia $W \in G(V)$ e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in W$ /

$$W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n]$$

Allora $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono l.i. $\Leftrightarrow$ ogni $\vec{v} \in W$ si può scrivere come combinazione lineare (C.L.) di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ in <u>modo unico</u>.

<u>dim</u>

1) $\vec{v}_i$ l.i.

$\vec{w} \in W$; $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$ $\quad \vec{w} = \sum_i \mu_i \vec{v}_i$

combinaz. lin. dello stesso vettore

$$\sum_i \lambda_i \vec{v}_i = \sum_i \mu_i \vec{v}_i$$

$\Rightarrow \sum_i (\lambda_i - \mu_i) \vec{v}_i = \vec{0}$ ma $\vec{v}_i$ sono l.i.

$\Rightarrow (\lambda_i - \mu_i) = 0$

E quindi $\lambda_i = \mu_i$. $\forall 1 \leq i \leq n$.

2) $\vec{w} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$ in modo unico

$\sum_i \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ vettore nullo si può scrivere come

$$\sum_i 0 \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

ma poiché ogni vettore $\vec{w}$ viene scritto come C.L. in modo unico $\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$.

Definizione

- Sia $W \in G(V)$ (V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale)

W si dice finitamente generato $\Leftrightarrow$

$$\exists\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots \vec{u}_n \in W \ / \ W = [\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n]$$

- Inoltre se

$W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_n]$ e $\vec{b}_i$ sono lin. ind

Allora

$B = (\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n)$ si dice $\underbrace{\text{BASE}}_{\text{insieme ordinato di vettori linearmente indipendenti.}}$ di W

Proposizione

Se W è finitamente generato, può sempre costruirsi una base per mezzo dell' ALGORITMO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI.

Algoritmo degli Scarti

Sia $W = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$

1) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ sono l.i. $\Rightarrow (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$ è una BASE

2) Se $\vec{v}_i$ sono l.d, allora almeno uno è comb. lin. dei rimanenti.
Non è restrittivo supporre che tale vettore sia $\vec{v}_n$.

Conseguenze (1)

Sia B base di n elementi di V e siano

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}, \dots \vec{u}_{n+p}$ vettori di

V con $p \geq 1$

$\Rightarrow (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n+p}$ sono lin. dip.

dim

· Supponiamo $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n+p}$ l.i.

$\Rightarrow (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sono lin. ind. e costituiscono una base di n elementi di V

Allora ogni altro vettore di V può essere scritto come comb. lin. di $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$

Per esempio $\vec{u}_{n+1}$, ma questo va contro l'ipotesi!

$\Rightarrow$ assurdo.

Conseguenze (2)

Siano $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots \vec{b}_m)$ e $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ basi di V

$\Rightarrow m = n$.

dim

Poiché $\mathcal{B}$ base e $\vec{c}_i$ lin. ind $\rightarrow n \leq m$
" $\mathcal{C}$ " e $\mathcal{B}_i$ lin. ind $\rightarrow m \leq n$ $\Big\}$ $n = m$

<u>dim</u>

1) $V = W$

$\Rightarrow V \subseteq W \qquad\qquad W \subseteq W$

$\dim V \leq \dim W \quad \& \quad \dim W \leq \dim V$

$\Rightarrow \dim V = \dim W$

2) $\dim V = \dim W$.

Mostriamo che $W \subseteq V$:

$\dim W = n \Rightarrow \exists\, (\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n)$ base di W

$b_i \in V$

$\Rightarrow \vec{b}_i$ base di $V \qquad \forall\, \vec{v} \in V$

$\vec{v} = \sum \lambda_i \vec{b}_i \in W$

• Analogo per $V \subseteq W$

$\Rightarrow \quad V = W$.

<u>Esempio</u>

$V = \mathbb{R}[x]$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = \infty$ infatti se $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = n$

$\Rightarrow$ esisterebbe una base di n elementi

$P_1, P_2, \dots P_n,$

che, supponendoli disposti in ordine crescente:

$\deg(P_n) = d_n$.

$\Rightarrow x^{d_n + 1} \in \mathbb{R}[x]$ è l.i. e non è contenuta nella base (assurdo).

Proposizione

Sia $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ e $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n)$ base di V

Allora

$$Im f = [f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n)]$$

NB. Non sto affermando che la base dell'immagine è l'immagine della base, ma solo che l'immagine della base è generatrice dell'immagine.

dim

Sia $\vec{w} \in Im(f)$

$$\Rightarrow \exists\ \vec{v} \in V \ / \ f(\vec{v}) = \vec{w}$$

$$\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{b}_i$$

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f\left(\sum_i \lambda_i \vec{b}_i\right) = \sum_i \lambda_i f(\vec{b}_i)$$

ovvero che ogni $\vec{w} \in Im(f)$ è comb. lin delle $f(\vec{b}_i)$

ovvero

$$W = [f(\vec{b}_1), \dots f(\vec{b}_n)]$$

Teorema Dimensione Nucleo & Immagine

Sia $f: V \to W$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Allora

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f}$$

dim

$\operatorname{Ker} f \in G(V) \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f \leq n = \dim_{\mathbb{K}} V$

Sia $U = (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$ base di $\operatorname{Ker} f$

$B = (\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n)$ base di V

$\Rightarrow$ Non è restrittivo supporre

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{b}_{ip+1}, \dots \vec{b}_{in})$ base di V (T.C. base)

Poiché dunque

Ora $\operatorname{Im} f = [\underbrace{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)}_{\in \operatorname{Ker} f \to \vec{0}_W}, \underbrace{f(\vec{b}_{ip+1}), \dots f(\vec{b}_{in})}_{n-p \text{ vettori}}]$

Quindi $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = p$

$\dim_{\mathbb{K}} V = n$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$

e $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = n - p$

Proprietà (IMPORTANTE)

Sia $B = (\vec{b_1}, \dots \vec{b_n})$ base di V e siano $\vec{u_1}, \dots \vec{u_n}$ scelti arbitrariamente.

$$\Rightarrow \boxed{\exists!\, f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \;/\; f(\vec{b_i}) = \vec{u_i} \quad (1 \le i \le n)}$$

dim

1) ESISTENZA

Sia $f: V \to W$ definita da

$$f(\vec{v}) = \sum_i \lambda_i \vec{u_i} \quad \text{dove} \quad \vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{b_i}$$

$$\vec{w} = \sum_i \mu_i \vec{b_i} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow f(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = f\Big(\lambda \sum_i \lambda_i \vec{b_i} + \mu \sum_i \mu_i \vec{b_i}\Big) =$$

$$= f\Big(\sum_i (\mu\mu_i + \lambda\lambda_i)\vec{b_i}\Big) \overset{\text{def } f}{=} \sum_i (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)\vec{u_i} =$$

$$= \lambda \sum_i \lambda_i \vec{u_i} + \mu \sum_i \mu_i \vec{u_i} = \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w})$$

($f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ e verifica le condiz. iniziali).

2) UNICITÀ

Supponiamo esiste una $g: V \to W \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ /

$$g(\vec{b_i}) = \vec{u}(i)$$

Allora $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{b_i}$

$$f(\vec{v}) = g\Big(\sum_i \lambda_i \vec{b_i}\Big) = \sum_i \lambda_i\, g(\vec{b_i}) = \sum_i \lambda_i \vec{u_i}$$

$$f(\vec{v}) = g(\vec{v}) \Rightarrow f = g \;\checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ (campo)

$\mathbb{K}^{m,n}$ matrice m righe
n colonne

che possiede una struttura di spazio vettoriale, per cui dobbiamo definire

SOMMA

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \Big| \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

NB $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non è definita

MOLTIPLICAZIONE (per un numero scalare $\in \mathbb{K}$)

Sia $\alpha \in \mathbb{K}$
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 174

Matrici simmetriche

Sia $A = (a_{ij})$, si dice che A è simmetrica se

$$^tA = A$$

ovvero

$$\left(a(i,j) = a(j,i) \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix} \right)$$

IN PARTICOLARE

Una matrice è simmetrica $\iff m = n$

Proprietà

Siano:

$$V = \{ A \in \mathbb{K}^{m \times n} \ / \ A \text{ è simmetrico} \}$$

$$D = \{ A \in \mathbb{K}^{m \times n} \ / \ A \text{ è diagonale} \}$$

$$\Rightarrow \quad D \le V \le \mathbb{K}^{m \times n}$$

$\boxed{\text{dimostrazione}}$ 1) $V \le \mathbb{K}^{m \times n}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (0)$ simmetrica

ii) $A, B \in V$, $A + B \overset{?}{=} V$

$$\begin{array}{l} ^tA = A \\ ^tB = B \end{array} \quad +$$

$$\overline{}$$

$$^t(A) + {}^tB = A + B = {}^t(A+B) \in V$$

Matrici Antisimmetriche

Sia $A = (a_{ij})$ si dice che A è antisimmetrica $\Leftrightarrow$

$$^tA = -A$$

ovvero

$$\left(a(ij) = -a(ji) \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \leq i \leq (m=n) \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \right)$$

Proposizione

sia

$$W = \{ A \in \mathbb{K}^{m \times n} \mid A \text{ antisimmetrica} \}$$

$$\Rightarrow W \leq \mathbb{K}^{m \times n}$$

Teorema

$$\mathbb{K}^{m \times n} = V \oplus W \;\middle|\; \begin{matrix} V \text{ simmetrico} \\ W \text{ antisimmetrico} \end{matrix}$$

$\boxed{\text{dimostrazione}}$

unico elemento che contemporaneamente soddisfa le due relazioni

1- $V \cap W = \{ 0_{\mathbb{K}^{n \times n}} \}$ ✓

$$\begin{cases} (a_{ij}) = (a_{ji}) \\ (a_{ij}) = -(a_{ji}) \end{cases} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} = 0$$

2- $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ ✓

$A + {}^tA \in V$ (dimostrato precedentemente)

$${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) =$$

$$= {}^tA - A = -(A - {}^tA)$$

Proprietà

i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ associative ~~commutative~~

ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

iii) $(A + B) \cdot C = AC + BC$

iv) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A(\lambda B)$

$A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ non è vero

$$^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$$

La matrice identica

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Osservazione

$$A \cdot \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n \cdot A = A$$

ma attenzione

$$A \cdot B = B \not\Rightarrow A = \mathbb{1}_n \text{? No}$$

Notazione

$A(i,j) = a_{ij}$

Es

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}(1,2) = 3$

Proposizione

Le matrici si combinano linearmente combinando linearmente le entrate.

$A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow (\lambda A + \mu B) = \lambda A(i,j) + \mu B(i,j)$

Definizione

Definisco un'operazione da $\underbrace{(\mathbb{K}^n)^v}_{\text{spazio vettoriale delle righe}} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

$\vec{v} \in (\mathbb{K}^n)^v$; $\vec{u} = (\mathbb{K}^n)$

$(\vec{v}, \vec{u}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathbb{K}$

dove

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}(i) \cdot \vec{u}(i)$$

Attenzione

$$A = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_m(A) \end{pmatrix} = \left(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A) \right)$$

ovvero

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ può essere vista come colonna di m righe o come riga di n colonne

$\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq m$

$R_i(A)$ è una riga di n elementi $\in (\mathbb{K}^n)^\vee$

$\forall\, 1 \leq j \leq n$

$C_i(A)$ è una colonna di m elementi $\in \mathbb{K}^n$

↳ **Definizione** (rivisitata)

$A \in \mathbb{K}^{m,p}$, $B \in \mathbb{K}^{p,n}$

$\Rightarrow A \cdot B$ è l'unica matrice $\in \mathbb{K}^{m \times n}$ /

$$(A \cdot B)(i,j) = R_i(A) \cdot C_j(B)$$

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(A)C_1(B) & R_1(A)C_2(B) \\ R_2(A)C_1(B) & R_2(A)C_2(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2 \times 3} \quad \mathbb{R}^{3 \times 2} \to \mathbb{R}^{2 \times 2}$

NB

$$A \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

ovvero

$$A(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda A\vec{u} + \mu A\vec{v}$$

Esercizio 1

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 2z - t \\ x + y - z - 4t \end{pmatrix}$$ Provare che f è lineare.

Soluzione

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, per cui anche f di conseguenza

Esercizio 2

Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{matrix} x - 2y - 7z + 5t = 0 \\ 2x - 3y + 8t = 0 \end{matrix} \right\}$

W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

$$W = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{u}) = \vec{O}_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \vec{u} \in Ker(A)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 174

Es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Riduzione per righe

$$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & \boxed{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rangorighe}(A) = 2$$

2) Riduzione per colonne

$$A \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4 \to C_4 + 3C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rangocolonne}(A) = 2$$

$$rk(A) = 2$$

Definizione

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ si dice RIDOTTA PER RIGHE $\Leftrightarrow$ ogni riga non nulla possiede almeno un elemento non nullo al di sotto del quale vi sono al più zeri.

$\rightarrow$ In una matrice ~~non~~ ridotta per righe $rk(A) = \#$ di righe non nulle.

Osservazione

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\boxed{C_j(A) = A \cdot \vec{e}_j}$; $R_i(A) = \varepsilon_i \cdot A$

se voglio $R_1(A)$

$$(1, 0, \dots 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se voglio $C_2(A)$

$$C_2(A) = A \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

Proposizione

Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ pensata come applicazione lineare

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

Allora

$$rk(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$$

dimostrazione

Sia $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ base di V e

$f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = [f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n)]$

Introduzione alle teoria dei Sistemi Lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema di m equazioni e n incognite (a coefficienti in $\mathbb{K}$)

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono le incognite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ COLONNA INCOGNITA

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ COLONNA "COSTANTE"

$\Rightarrow$

Un sistema può essere visto come un'equazione vettoriale a coefficienti matriciali

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 174

dimostrazione

Il sistema è risolubile

$\iff \exists \vec{x} \in \mathbb{K}^n \,/\, A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ossia

$\iff \vec{b} \in \mathrm{Im}(A) \iff \vec{b} \in [C_1(A), \dots, C_n(A)]$

$\iff \dim \mathrm{Im}(A) = \dim [C_1(A), \dots, C_n(A), \vec{b}]$

$rk(A) = rk(A|\vec{b})$

Osservazione

$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ è risolubile

Infatti

$A^{-1}(\vec{0}) = \mathrm{Ker}(A)$ nel quale c'è sempre ovvero il vettore nullo.

Verifica Rouchè - Capelli:

$rk(A) = rk(A|\vec{0})$

a) Sia $\vec{x}_1 \in A^{-1}(\vec{b})$

$(A \cdot \vec{x}_1 = \vec{b})$

Allora $A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0 \iff$

$A\vec{x}_1 - A\vec{x}_0 = \vec{0} \iff$

$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_0 \in Ker(A)$

$\Rightarrow \vec{x}_1 \in \vec{x}_0 + Ker(A)$

b) $x_0 + Ker(A) \subseteq A^{-1}(\vec{b})$

Sia $\vec{u} \in Ker(A)$ arbitrario

Allora

$A(\vec{x}_0 + \vec{u}) = A \cdot \vec{x}_0 + A \cdot \vec{u} = \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{x}_0 + \vec{u} \in A^{-1}(\vec{b})$

• S'è detto che se $\vec{x}_0 \in A^{-1}(\vec{b}) \Rightarrow$

$$A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x}_0 + \vec{u} \;/\; \vec{u} \in Ker(A)\}$$

Quindi $A^{-1}(\vec{b}) \subseteq \mathbb{K}^n$ è sottospazio $\iff$

$\vec{b} = \vec{0}$ ovvero $A^{-1}(\vec{0}) = Ker(A)$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A^{-1}(\vec{b})$

$\Rightarrow \lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2 \in A^{-1}(\vec{b})$

se e solo se

$A(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2) = \vec{b}$

$\lambda A\vec{x}_1 + \mu A\vec{x}_2 = \vec{b}$

$\vec{b}(\lambda + \mu) = \vec{b}$

se $\lambda + \mu \neq 0$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$ c.v.d.