



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 255

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Grand Blanc

MATERIA : Termodinamica - Termofluodinamica

Prof. Malandrone - Bertani

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Termodinamica - Termodinamica

Dato per un fluido, ma

$f(p, \rho, T)$, si può definire la densità come

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT$$

ovvero, definiti i coeff. di

compressibilità
isoterma

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

espansione
termica

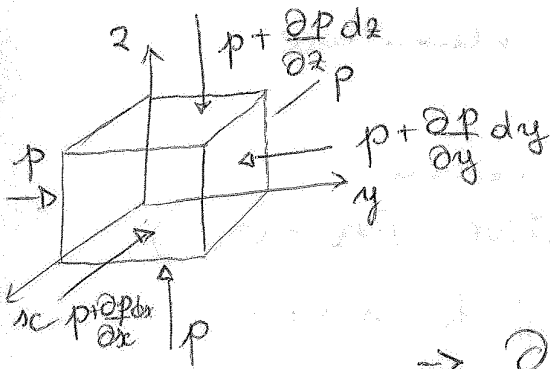
$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa_T dp - \beta dT$$

NOTABENE Per i gas ideali

$$p/\rho = R^* T, \quad \kappa_T = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{T}$$

In un fluido statico le sole forze agenti sono le forze normali alle superficie (pressione) e le forze del campo (gravità)



Equazioni

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = 0$$

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \right] dx dz = 0$$

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \right] dx dy - \rho g dx dy dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g}$$

Equazione differenziale statica

Se supponiamo ρ cost

$$\Rightarrow \int_1^2 dp = \int_1^2 -\rho g dz \rightarrow p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1$$

ovvero

$$p + \rho g z = K \rightarrow$$

$$\frac{p}{\rho g} + z = K$$

→ quota piezometrica

↳ altezza piezometrica

$$\left[\text{notazione } z_{max} = K \right]$$

Mi manca il punto di applicazione, per definire completamente le forze.

↳ centro di spinta.

Teorema Varignon:

"le risultante dei momenti dei vettori concorrenti in un punto è uguale al momento della risultante di detti vettori rispetto allo stesso polo"

Per cui

$$|\bar{M}| = \int_{\sigma} p x \, d\sigma = S \xi \quad \begin{matrix} \xi \\ \uparrow \\ \text{coord. centro} \\ \text{di spinta} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\int_{\sigma} p x \, d\sigma}{\int_{\sigma} p \, d\sigma} = \frac{\rho g \max \int_{\sigma} x^2 \, d\sigma}{\rho g \max \int_{\sigma} x \, d\sigma} = \frac{I_{yy}}{M_y}$$

momento statico di σ rispetto linea di spande

Analogamente (per l'altre coordinate)

$$\eta = \frac{\int_{\sigma} x y \, d\sigma}{\int_{\sigma} x \, d\sigma} = \frac{I_{xy}}{M_{xy}} \quad \begin{matrix} \text{Inertia} \\ \text{centrifuga} \end{matrix}$$

Per cui

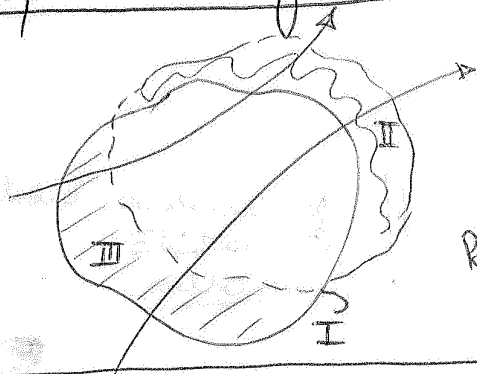
→ Quando σ è simmetrica rispetto a x si annulla η

→ variando α non cambiano le coordinate

$$\rightarrow \xi > x_G \quad \xi = \frac{I_G + \sigma x_G^2}{\sigma x_G} = x_G + \frac{I_G}{\sigma x_G} > x_G$$

EQUAZIONI INTEGRALI DI CONSERVAZIONE

Eqne 2. integr. conservaz. massa



sistema
 - al tempo t
 - al tempo $t + dt$
 I linea intera
 II massa uscite in dt
 III " entrate " dt
 Basso scrivere

$$m_I(t) = m_I(t+dt) - m_{III}(t+dt) + m_{II}(t+dt)$$

avere

$$\frac{m_I(t+dt) - m_I(t)}{\Delta t} = \frac{m_{III}(t+dt)}{\Delta t} - \frac{m_{II}(t+dt)}{\Delta t}$$

passo al limite

lim
 $\Delta t \rightarrow 0$

|| passo del discreto al continuo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = - \int_{cs} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

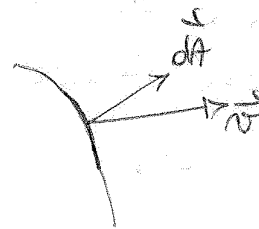
cs control surface

vc volume controllo

Note che

$$\frac{m_I(t+dt) - m_I(t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV$$

$$m_{III} = \int_{A_{in}} \rho v \cos \alpha dA, \quad m_{II} = \int_{A_{out}} \rho v \cos \alpha dA \quad \left. \vphantom{m_{III}} \right\} - \int_{cs} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$



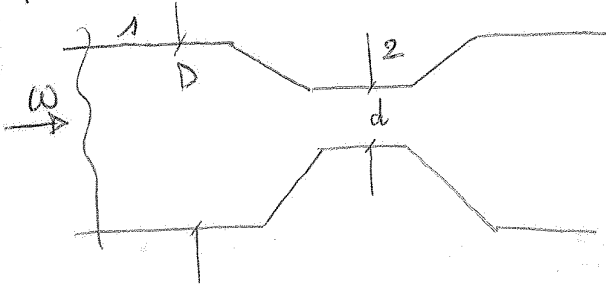
Def.

PORTATA SPECIFICA

$$G = \rho \cdot v$$

"mass velocity"
[kg / m² s]

Tubo di Venturi



note $p_1 = p_2 = p$ cost

la portata si conserva

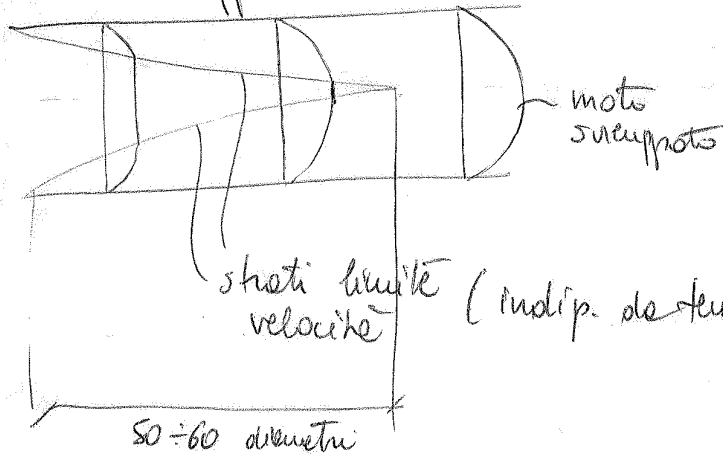
$$\rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} = \rho v_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

$$G v_1 D^2 = v_2 d^2$$

Ovvero

$$v_2 = v_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad (D > d)$$

Moto sviluppato e in sviluppo

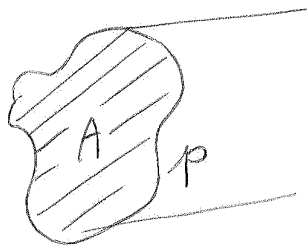


Il moto rimane sviluppato se aumentano i parametri

- viscosità
- densità
- temperatura

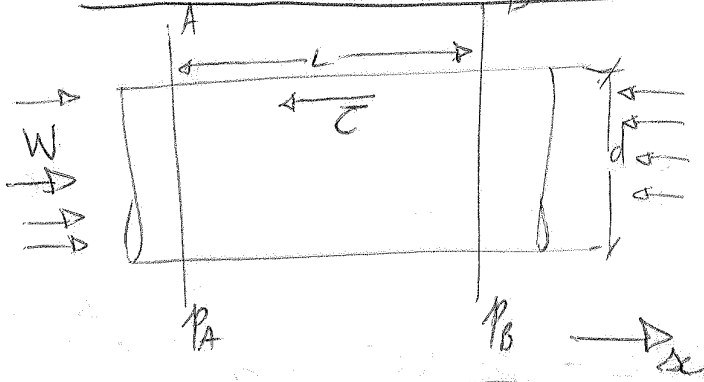
Diametro idraulico

$$D_{hy} = 4 \frac{A}{p}$$



Tubo orizzontale, moto verso destra, attutito

Esempi:



dati:
 - profilo velocità non variabile,
 - ρ costante

$$\vec{F}_s + \int_{sc} \vec{B} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \vec{v} \rho dV + \int_{sc} \vec{v} \rho \vec{v} dA$$

$\vec{v} = 0$ stazionario
 ρ cost, A cost \parallel sommando nulle
 $\Rightarrow v$ cost

tubo orizz. no grav

$$P_A \frac{\pi d^2}{4} - P_B \frac{\pi d^2}{4} = \tau d \pi L$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = \frac{4 \tau L}{d}$$

Sperimentalmente, se i numeri di Reynolds sono abbastanza elevati

$$\tau \propto \frac{1}{2} \rho v_m^2 \quad \text{con}$$

v_m velocità media nella sezione

$$v_m = \frac{4W}{\rho \pi d^2}$$

Per cui:

$$P_A - P_B = \frac{4L}{d} f \frac{1}{2} \rho v_m^2 = f_B \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho v_m^2$$

$$f_B = 4f \quad \text{fattore di Blasius}$$

- 11 -

$$\Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{\rho_B} (\rho_B v_B)^2 - \frac{1}{\rho_A} (\rho_A v_A)^2$$

Ritornando le def di portate specifiche, $G = \rho v$
 e poiché queste è costante

(w cost, A cost \Rightarrow)

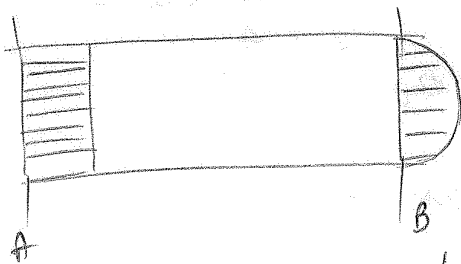
si trova

$$P_A - P_B = G^2 \left(\frac{1}{\rho_B} - \frac{1}{\rho_A} \right)$$

Δp "accelerazione"

CS dovute alle
 variazioni di
 velocità
nello spazio

Tubo orizzontale, con velocità con
 regione stabilizzata



hp.

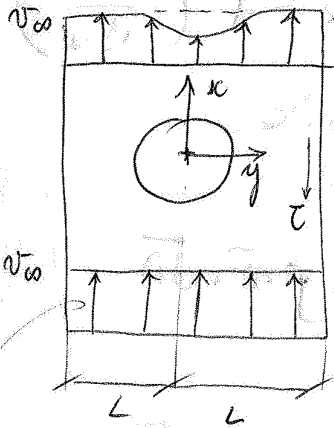
$$\tau = 0$$

$$P_A = P_B = P$$

$$(P_A - P_B) \frac{\pi d^2}{4} = \int_0^{d/2} \rho v^2 2\pi r dr - v_A^2 \rho \frac{\pi d^2}{4}$$

[mente di che, ricordarsi che sempre
 delle def. pure delle cons. di H]

Forze applicate ad un ostacolo da un flusso



$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

mentre

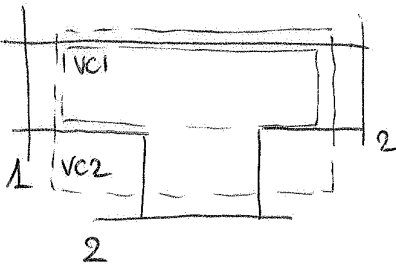
$$F_{ix} = \int_{-L}^{+L} v^2(y) \rho dy - v_{\infty}^2 \rho 2L$$

erice α alle perle
(A, ρ costanti \times hp)
per cui x conserva
massa manca
motore

$$+ v_{\infty} \left[\rho v_{\infty} 2L - \int_{-L}^{+L} v(y) \rho dy \right]$$

portata che esce lateralmente

Derivazione



Applico la cons. quantità moto
al VC 1

$$\begin{aligned} p_1 A - p_2 A &= v_2^2 \rho A - v_1^2 \rho A = \\ &= G_2 v_2 A - G_1 v_1 A = \\ &= (G_2^2 - G_1^2) \frac{A}{\rho} \end{aligned}$$

per cui

hp $A_1 = A_2 = A$
 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

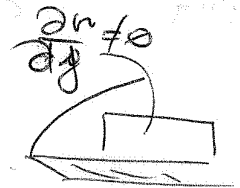
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\rho} (G_2^2 - G_1^2)$$

Volevo dire \int inserire : densozazione
: ostro
: ee \rightarrow Fattore correttivo K_{12}

- $\frac{dW_c}{dt}$ (shear work) \rightarrow lavoro effettuato sull'ambiente esterno
 (quando fluido applica sforzo di taglio su elementi sulle sup. contigue).
 quasi sempre nullo
- lavoro x muovere il fluido attraverso sup. contigue (flow work)

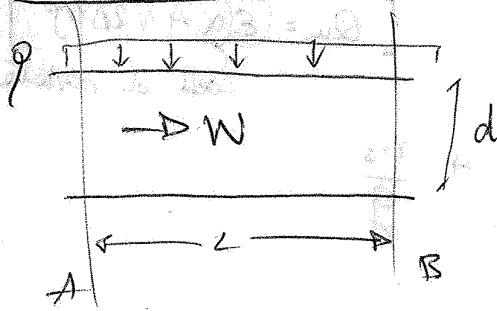
Sforzo di taglio

$$\tau_{\text{res}} = -p + \underbrace{2\mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(\vec{v})}_{\text{termini viscosi, solitamente nulli o trascurabili}}$$



Notare che solitamente τ non compare lavoro // normale nullo sulle pareti.
 e cause della
 (principio verificato sperimentale)

Caso: condotto isolato



$$q [W/m^2]$$

nota $\frac{dQ}{dt} = q \cdot (\pi d L)$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{cs} \left(u + \frac{1}{2} v^2 + g z + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} =$$

$$= \int_{cs} h \vec{v} \cdot d\vec{A} = (h_B - h_A) W = W C_p (T_B - T_A)$$

Se il fluido non è uniforme

$$\frac{dQ}{dt} = W \left[h_{vs}(1-x) + h_{vs}(x) - h_A \right]$$

se titolo in vesse di vapore

Considerazioni sulla T_w (parete) e su q

- Se q è costante $\Rightarrow T$ cresce linearmente con la distanza

(se consideriamo

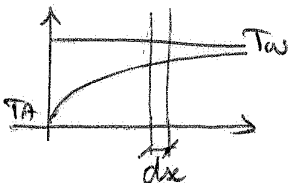
T_{bulk} medie sulle sezioni)

$$q = h_c (T_w - T_b) \text{ notiamo che}$$

anche T_w (parete) cresce linearmente

(se q costante)

- Se T_w è costante $\Rightarrow T$ varia con continue ma non linearmente



integrale su dx dell'elemento infinitesimo

Per eliminare l'obscure occorre definire un fattore di corso C

$$\rightarrow Q_{um} = A_2 \frac{C}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2\Delta p \rho}$$

In particolare per i tubi circolari, definito

$$\beta = \frac{d}{D} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} d \text{ diametro sezione ristretta} \\ D \text{ diametro sezione aperta} \end{array}$$

Ottengo

$$\rightarrow Q_{um} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{C}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho\Delta p}$$

Definisco

$$\frac{C}{\sqrt{1 - \beta^4}} \parallel \alpha(\beta, \text{dispositivo, posizione prese in considerazione, num. di Reynolds})$$

(note $Q_0 = \frac{\pi d^2}{4} \alpha \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$)

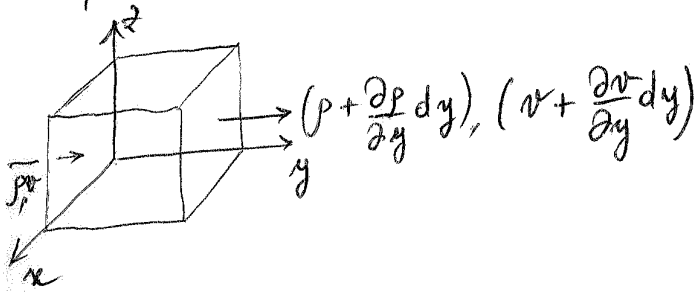
Infine, per fluidi comprimibili, devo introdurre un coeff. di comprimibilità E

$$\rightarrow Q_{um} = E \alpha \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2\rho\Delta p} \parallel E(\beta, \frac{p_2}{p_1}, \text{R esponente isoterma})$$

NOTE

- Δp dell'ordine di qualche decimo di bar (0,37 bar)?
- affinché α sia valutato correttamente, occorre che le misure non si siano estese per una certa distanza, espresse in un certo numero di diametri.

Equazione differenziale conservazione massa



portate entrante

$$\rho v dx dz$$

portate uscente

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dx dz =$$

$$= (\rho v + \frac{\partial \rho}{\partial y} v dy + \rho \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy \frac{\partial v}{\partial y} dy) dx dz$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho v)$$

dy^2 termine di infinitesimo ordine superiore

portate entrante - uscente

$$- \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz$$

masse accumulate

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho(dx dy dz)}{dt}$$

questi termini sono eguali per il principio di conservazione della massa per cui

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v)$$

che per x consideriamo il problema nelle 3 dimensioni otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\rho \vec{v})$$

(EULERIANA)

in regime stazionario

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

se ρ cost

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Equazione differenziale conservativa. quantità di moto

II Legge di Newton: " variazione p.te moto è uguale alle forze esterne "

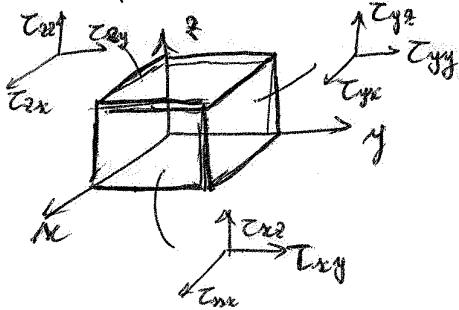
$$\frac{d}{dt}(mu) = F_{ext} \quad mu \frac{du}{dt} = F_{ext}$$

Come pertanto determinare le forze d'inerzia del fluido che scorre in ogni direzione cardinale ed uguagliarle alle forze esterne.

In particolare le forze esterne sono

- forze normali dovute alla PRESSIONE;
- forze normali e tangenziali di tipo viscose;
- forze di campo (GRAVITAZIONALE).

Consideriamo un elemento di volume $(dx dy dz)$ in un sistema di ref. cartesiano:



Su ognuna delle 6 facce c'è

- una componente normale
- due componenti trasversali

Note

sulle facce opposte in generale si può scrivere uno sforzo diverso equivamente attraverso sviluppo Taylor

In particolare è possibile dimostrare che gli sforzi agenti sulla sup. in un punto di un fluido possono essere descritti da 9 elementi (3 elem. agenti su ciascuna delle 3 coppie di facce)

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

La matrice degli sforzi

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

NOTA

$$\begin{cases} T_{yx} = T_{xy} \\ T_{zx} = T_{xz} \\ T_{zy} = T_{yz} \end{cases}$$

si ricorre impo- do le condi- di equi- alla rotazione eliminando influ-

In particolare, della Legge di Stokes:

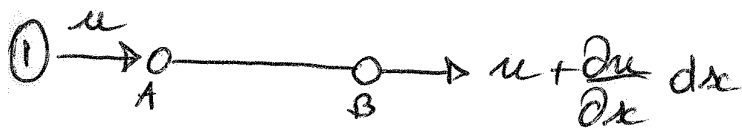
$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ vel. deformaz. lineare

$\operatorname{div}(\vec{v})$ vel. deform. volume

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Piccola dimostrazione:



$$d\xi = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt - u dt$$

ovvero la vel. di def. (lineare)

$$\frac{d\xi}{dx dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$d\xi$ allungamento
 $\frac{d\xi}{dx}$ deformazione

⇒ Con considerazioni analoghe si può verificare che nel 3D

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \operatorname{div}(\vec{v})$$

rappresenta la ~~vel.~~ vel. di def. volume.

⚠ ~~coefficienti~~ In realtà Stokes dice che, ed es legge

$$\tau_{xx} = -p + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}$$

⚠ coeff. $\delta = 2\mu$ e $\lambda = -2/3 \mu$ derivano sostanzialmente da considerazioni sui moduli elastici E, G e sul mod di Poisson // FOND. MECC. STRUTTURALE

FORZE DI SUPERFICIE

$$F_{Sx} = \left(-\tau_{xx} + \tau_{xyc} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz +$$

$$+ \left(-\tau_{yx} + \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz +$$

$$+ \left(-\tau_{zx} + \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy$$

Agguagliando e dividendo per l'unità di volume ottengo

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\rho \frac{\partial PE}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \vec{v}) +$$

$$\left[\operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} u) + \operatorname{div} \left(\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) \right]$$

che sotto l'ipotesi di ρ e μ costanti si trasforma nell'equazione ^{DENSITÀ} _o ^{VISCOSITÀ}

Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\rho \frac{\partial PE}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

(NOTA $\rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{D\rho}{Dt} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$)

2. Sugli sforzi

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (v = 0)$$

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = -p \quad (\text{fluido incompressibile e moto sviluppato})$$

Sotto ipotesi tubo circolare (simmetria assiale)

- fluido incompressibile
- moto sviluppato

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} \right) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \right)$$

con

$$\tau_{rr} = \tau_{\theta\theta} = \tau_{zz} = -p$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \frac{du_z}{dr}$$

Equazione differenziale conservazione energia

Collega la temperatura T con le velocità e le proprietà fisiche

↳ si potrebbe determinare il coeff di scambio termico convettivo (appross. \neq se quello attraverso numeri adimensionati)

per moto laminare & generale non troppo complesse

- Controllo inanzitutto il lavoro per unità di tempo compiuto dagli sforzi normali e tangenziali sul volume infinitesimo (v. dlu. appunti)

NORMALI

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (w \tau_{zz}) \right] dx dy dz$$

TANGENZIALI

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) \right] dx dy dz \quad \{\text{et similia}\}$$

Ora vogliamo applicare il 1° principio della termodinamica al volume infinitesimo in moto

↳ sistema chiuso:

variaz. di energie totale = scambio netto di calore e lavoro

Calore → conduzione
irraggiamento
guerdione interne

|| ho conv. masso all'interno
del fluido
(sistema continuo)

In particolare

$$\vec{q}_c = -i k_x \frac{\partial T}{\partial x} - j k_y \frac{\partial T}{\partial y} - k k_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad || \text{ Legge di Fourier}$$

(in gen. $k_x = k_y = k_z$)

de
val netto di entrata

$$\left[-k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] dy dz$$

e uscite

$$\left[-k_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz$$

sulle tre dimensioni è pari a

$$- \operatorname{div} (\vec{q}_c)$$

Per cui in generale

$$Q + L = \Delta U + \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot}$$

ovvero

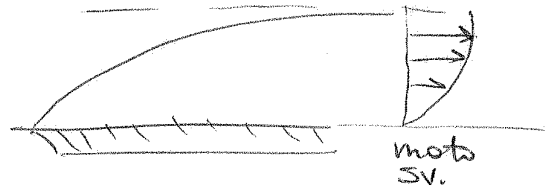
Applicazione

Per det. il coeff. di scambio termico in

- convezione forzata
- moto laminare

si applica l'eq. diff. convez. e' applicata ad un flusso

- bidimensionale
- stazionario
- $\vec{q}_r = \vec{0}$ e $q_r = 0$
- $\mu \vec{\Phi} = 0$



$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Secondo le considerazioni di L'epre

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx 0$$

$$v \ll u \Rightarrow v \approx 0$$

Per cui rimane

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Se introduco un'ulteriore semplificazione data

da $u = \text{cost. } y$ (distanza dalla parete) // in realtà probabile?

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial y} = h_c (T_w - T_\infty)$$

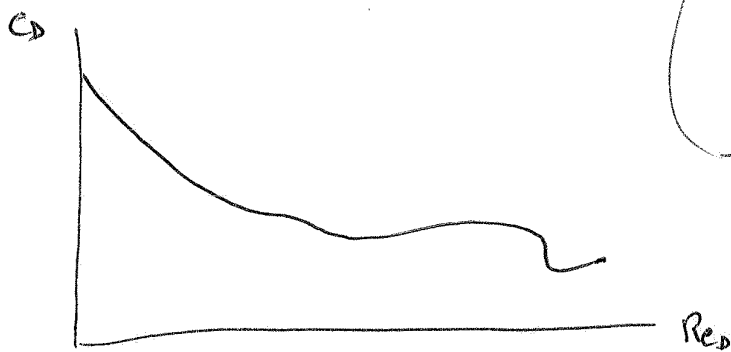
$w = \text{wall, parete}$

È possibile invece rappresentare l'iterazione tra corrente e cilindro mediante due soli parametri indipendenti, che sono

$$Re_D = \frac{\rho v_{\infty} D}{\mu} \quad \text{numero di Reynolds}$$

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 D L} \quad \text{coeff. di Drag}$$

Una volta determinate le curve (sperimentale) $C_D = C_D(Re)$



possiamo risolvere facilmente il problema

→ meno prove, grazie a computer

NOTA

Il diagramma è valido per velocità $< \frac{C_s}{2}$. Altrimenti si dimostra che è necessario un altro numero adimensionato ($M = \frac{C}{C_s}$ numero di Mach)

DIMOSTRAZIONE

Applico al prob. l'eq. di continuità

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho \operatorname{div} \vec{v} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ore

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u_v}{\partial r} \right)_{r=R}$$

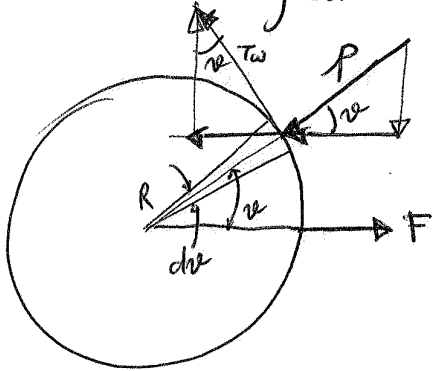
$$e \tau_w^* = \frac{\tau_w}{\rho v_{\infty}^2} \Rightarrow \tau_w^* = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_v^*}{\partial r^*} \right)_{r^*=1}$$

NOTA

$$\tau_w^* = f_7(\alpha, Re)$$

$$(p^*)_{r^*=1} = f_{10}(\alpha, Re)$$

no di r^* !



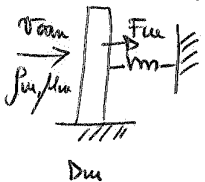
$$(DRAG)_p = 2 \int_0^\pi p \cos \theta R d\theta$$

$$(DRAG)_{\tau_w} = 2 \int_0^\pi \tau_w \sin \theta R d\theta$$

Perche' integro su θ , ottengo che

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 D L} = f(Re) \text{ solo di Reynolds!}$$

• Per cui posso costruire un modello



$$e \text{ noto } Re_m = \frac{\rho_m v_{\infty_m} D_m}{\mu} = Re$$

$$\Rightarrow C_{Dm} = C_D \text{ e viano } F$$

Per cui mi ritrovo con un problema di
 3 equazioni (una per le usse, una per le equipe
 e una per il tempo) e 6 incognite k_i

$$\textcircled{M} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$\textcircled{T} \quad -2k_1 - k_3 - k_4 = 0$$

$$\textcircled{L} \quad -k_1 - 3k_2 - k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 0$$

Per definire dei num. edim. (semplicità) posso
 3 condizioni (arbitrarie): individuo 3
 variabili che considero fondamentali e posso
 per ciascuna di esse un vettore adimensionato
 in cui ~~esse~~ ^{una} ha esponente unitario e le altre
 due esponente nullo.

In questo modo P ho determinato 3 k_i per
~~esse~~ ~~equazioni~~ \Rightarrow posso risolvere il problema.

A seconda delle scelte più o meno scelti
 delle grandezze ottengo vettori adimensionati
 più o meno noti.

Se questi non sono noti, allora darò opportunamente
 moltiplicare le loro igli u_i :

In particolare, esistono formule empiriche

• TUBO LUNGO ($L/D > 60$)

$$Nu = 0.023 Re^e \cdot Pr^{0.8} \quad (e = 0,3 \text{ o } 0,4)$$

\rightarrow riscaldato / raffreddato
 \leftarrow raffreddato / riscaldato

\rightarrow Dittus-Boelter

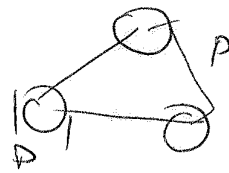
• SOLO CONV. NATURALE

$$Nu = e (Gr \cdot Pr)^e$$

\leftarrow Gr

• GEOM. DIVERSE, TUBI CORTI

$$Nu = e Re^b Pr^c \left(\frac{L}{D}\right)^e$$



Stima delle soluzioni attraverso edimensionalizzazione
variabili.

1. Definisco il problema nel modo più semplice possibile

- ep conoscenza (differenziale) \rightarrow energia
- \rightarrow uscite
- \rightarrow prodotti di noto

e definisco le condizioni di contorno necessarie.

2. Adimensiono opportunamente il problema

- \rightarrow in particolare deve comparire il dato che intendo stimare
- \rightarrow avendo cura del fatto che se interesse me differenziale di pressione o temperatura non adimensiono, le variabile esclude l'analisi

3. ~~de~~ Faccio una combinazione ingegneristica su quei termini che concorrenti e puoi sero influenti

\rightarrow volentieri sugli ordini di grandezza e stime [VEDI TABELLE]

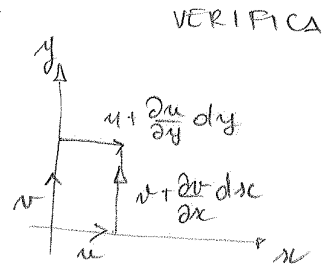
Inoltre ho che

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

MOTO ROTAZIONALE

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$



Componenti di vorticità
(velocità di rotazione di elementi
di fluido)

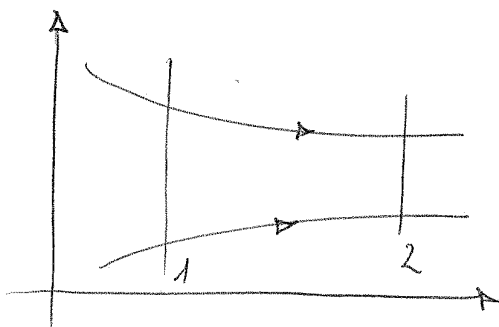
La velocità di rotazione media
dell'elemento bidimensionale è la media delle
due rotazioni

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Def

$$\Psi(P) = \int_0^P \vec{V} \cdot \vec{t} \, dl \quad \text{FUNZIONE CORRENTE}$$

representa la portata relativa che
attraversa una linea qualunque che
corigina il punto P con il
punto P considerato



$$\Psi_2 - \Psi_1 = \text{portata (colonna)}$$

Se si applicano le ipotesi di irrotazionalità
 ottengo che

$$\nabla^2 \psi = 0$$

In fine.

Eulero (Navier-Stokes con $\mu=0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial PE}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (=0 \text{ (gravità)})$$

applico quindi

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{CONDIZ.} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{IMMEDIAT}$$

$$\bullet u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \quad \text{sviluppiamento}$$

$$\bullet u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{def}$$

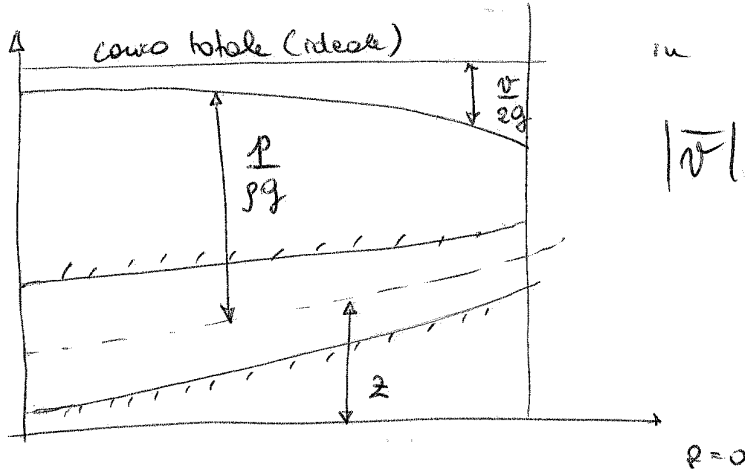
Integro rispetto a x e ottengo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{PE}{\rho} = F_1(y, z, t)$$

dell'integrazione rispetto a y e w rispettivamente
 e ottengo

$$F_2(y, x, t) = F_3(z, x, t) = F_1(y, z, t) \quad \text{per cui}$$

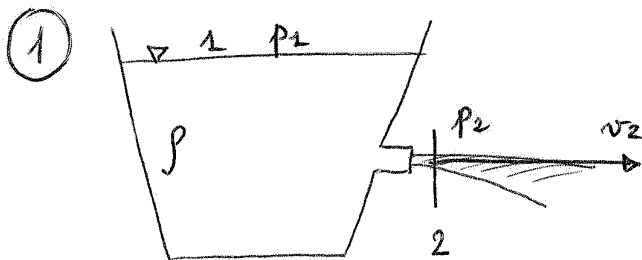
Nel caso di un fluido reale il corso totale non è costante
 ⇒ ho delle perdite di carico



in particolare

$$|\vec{v}| = v = \frac{W}{\rho A}$$

Esempi di applicazione



Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

In particolare

- $v_1 \approx 0$
- $p_1 = p_2 \approx 0$

Per cui

$$v_2 = \sqrt{2g h} \quad \text{con} \quad h = z_1 - z_2$$

Nel caso reale, a cause di dissipazioni (attriti) (all'interno)

$$v_{2re} < v_2$$

Esprimiamo ora le potenze di un flusso di fluido in un condotto

$$\begin{aligned}
 \text{Pot} &= \rho \int_A \left(gz + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v \, dA = \\
 &= \rho \int_A \left(gz + \frac{P}{\rho} \right) v \, dA + \rho \int_A \frac{v^2}{2} \cdot v \, dA = \\
 &= \rho \left(gz + \frac{P}{\rho} \right) v_m \cdot A + \rho \int_A \frac{v^3}{2} \, dA
 \end{aligned}$$

Introduciamo un'ipotesi

$$\int_A v^3 \, dA = \alpha v_m^3 A \quad \text{con} \quad \alpha \text{ COEFF. DI CORCOUS}$$

$\parallel \alpha = 1,06 \div 1,07$ moto turbolento
 $\parallel \alpha = 2$ moto laminare

Per cui, in definitiva

$$\text{Pot} = \rho v_m A \left(gz + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \alpha v_m^2 \right)$$

Ora perché

$$\tau_w = f \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{con}$$

• f fattore d'attrito di PANNINO

$$f = f(\text{Re})$$

Posso integrare

$$\int_{z_1}^{z_2} d(p + \rho g z) = - 4 \frac{f \frac{1}{2} \rho v^2}{d} \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \left| \begin{array}{l} \text{ipotesi qui} \\ f, \rho, v, \tau_w \text{ costanti} \end{array} \right.$$

e
otengo

$$(P_2 - P_1) + \rho g (z_2 - z_1) = - 4f \frac{(z_2 - z_1)}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho v^2$$

pongo

• $L = z_2 - z_1$

• $f_B = 4f$ fattore di BLAISE

$$P_1 - P_2 = \rho g L + f_B \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho v^2$$

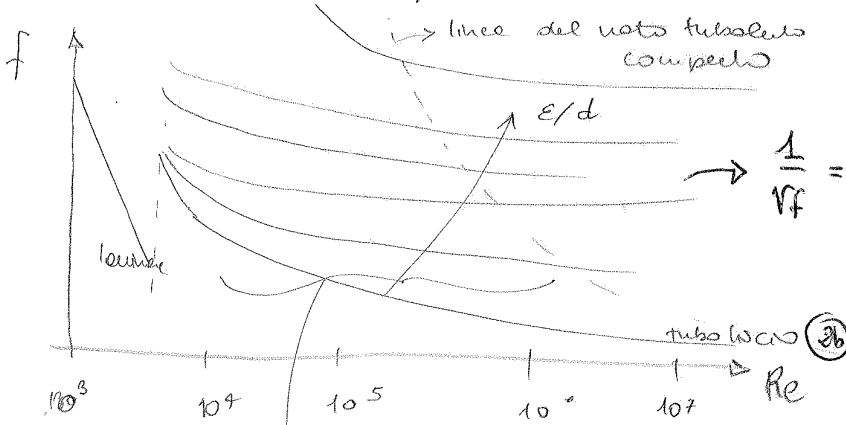
con $f_B \approx 0,015 \div 0,02$ (e ad ogni punto di riferimento è $10^{-3} \rightarrow f$)

(2b) $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \ln(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.4$ $\text{Re} = 4000 \div 3 \cdot 10^6$
 (modello semi-teorico)

(2c) Per tubi rugosi ϵ , per rapporti non troppo elevati di ϵ/d

$$f_B = 0.055 \left(1 + 3 \sqrt[3]{2000 \frac{\epsilon}{d} + \frac{10^6}{\text{Re}}} \right)$$

DIAGRAMMA DI MOODY



$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.06 \ln \frac{kw}{\epsilon} + 3.36$$

Von Karman

(v. N. Nikuradse)

①

transizione
 ~~$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \ln \frac{kw}{\epsilon} + 3.48 - 4 \ln \left(1 + 9.35 \frac{kw}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$~~

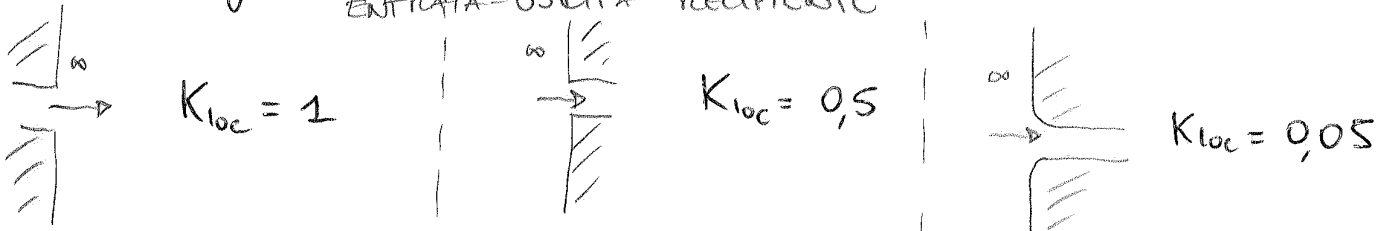
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \ln \frac{kw}{\epsilon} + 3.48 - 4 \ln \left(1 + 9.35 \frac{kw}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

Colebrook

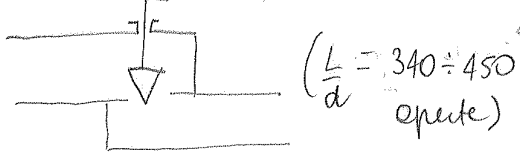
valido per $\frac{kw}{\text{Re} \sqrt{f}} < 0.005$

Tipici odg (condizi di grandezza)

ENTRATA - USCITA RECIPROCA



VALVOLA A TAPPO



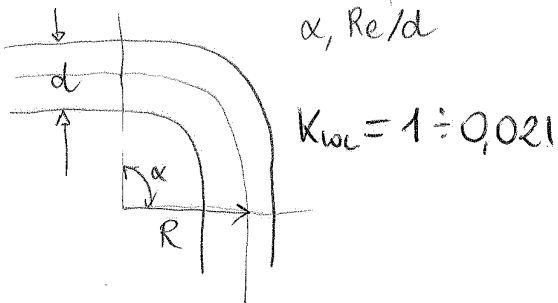
$K_{loc} = 10$

VALVOLA A SARRACINESCA

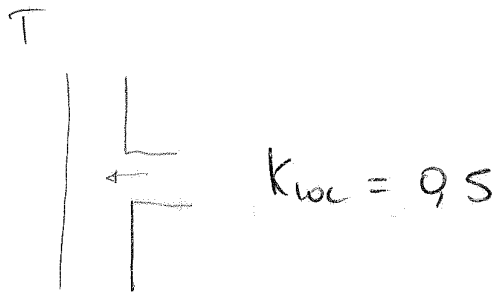


$K_{loc} = 0,15$

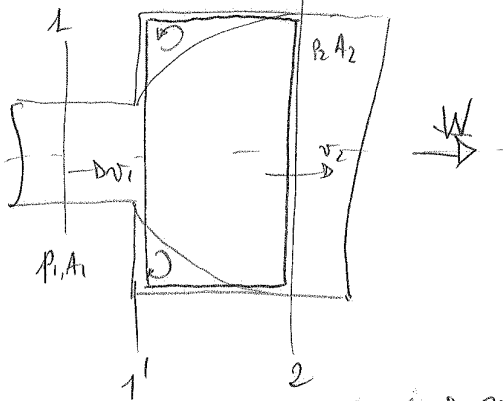
CURVE



$(\alpha = 90^\circ \rightarrow L/d = 30)$



Modello: espansione brusca



Principio di Borda

→ nelle sezioni trasversali al deflusso con distanza della vena fonda la pressione è uniforme

$P_2 = P_1'$

ep integrale cons. quantita' usata

$P_1 A_2 - P_2 A_2 = W (v_2 - v_1)$

v medio sezione
 T_w trascurabile

Area deflusso

$\sigma = \frac{A_1}{A_2}$ e ricardo

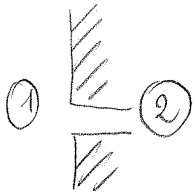
$v_1 = \frac{W}{\rho A_1}$ e

$G_1 = \frac{W}{A_1}$

Per cui in definitiva

$$P_1 - P_2 = \frac{G_2^2}{2\rho} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c_c & \end{pmatrix}}_{\Delta P_{irr}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix}}_{\Delta P_{rev}} \right] \rightarrow \text{tabelle } \frac{1}{\sigma}, c_c$$

in particolare

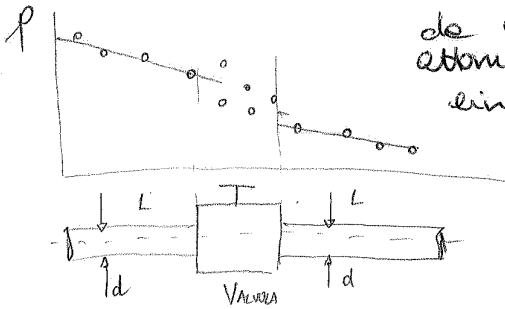


$$P_1 - P_2 = \frac{G_2^2}{2\rho} (0,5 + 1)$$

specimentale

$$\sigma = \frac{A_1}{A_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \rightarrow 0$$

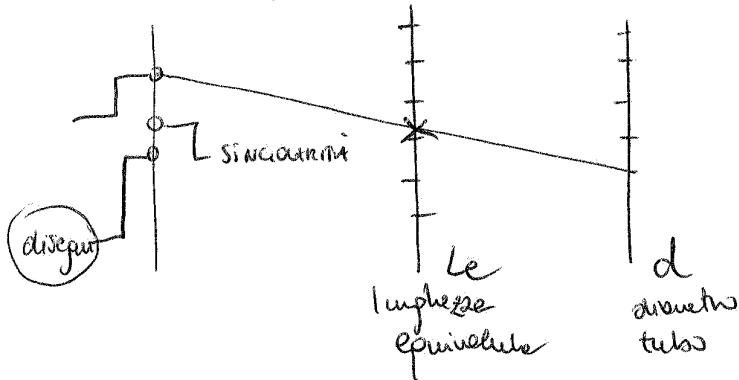
NOTA



de misurazioni noto che
 abbiamo alle perdite localizzate pseudo le
 linee continue, non è possibile costruire un
 numero costante sulle un pezzo delle
 (p cost) velocità de costruzioni
 →

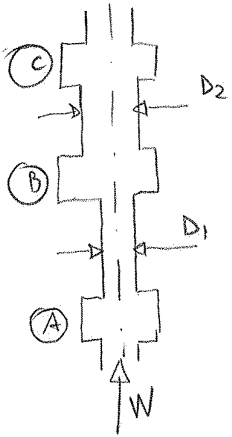
NOTA

Esistono disegni (v. appunti) del tipo



collega imp. con d
 corrispondenti
 ⇒ nuovo
 Le

SERIE

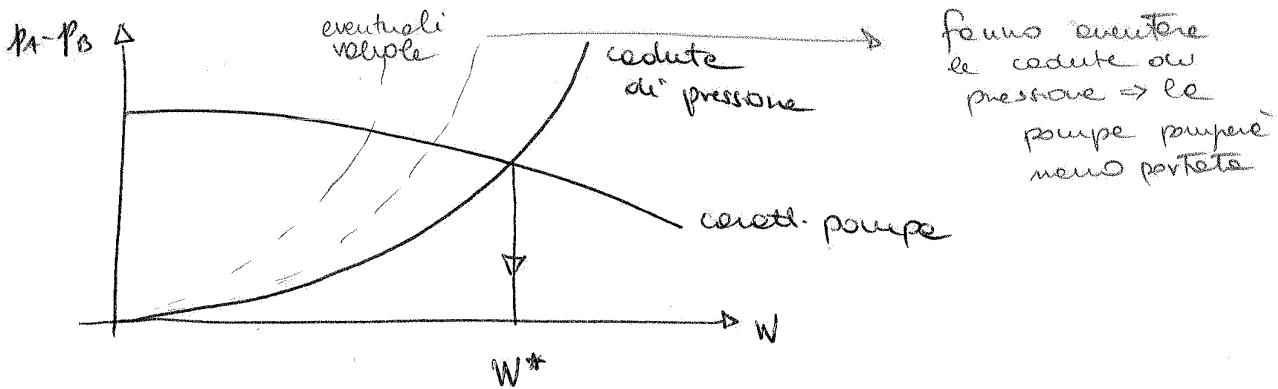


- > eq. cons. masse
- > cond. pressione

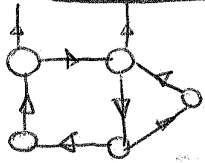
$$W_1 = W_2 = W$$

$$P_A - P_C = \Delta P_{AB} + \Delta P_{BC}$$

Dato le caratteristiche di una pompa in un circuito più complesso, noti i dati geometrici, ρ e μ , determino W nel seguente modo



CIRCUITI PIÙ COMPLESSI



con circuiti reticolati, oppure dove non riesce a ripartirsi con scheme parallelo o serie, i calcoli diventano più complessi, ma di base i principi da utilizzare sono

- eq. conservazione verso ai nodi
 - stesse cadute di pressione tra due nodi
- } Leggi di Kirchhoff

=> algoritmi di calcolo

Al primo d'ordine una soluzione esatta alle equaz. di Navier-Stokes non è stata trovata. Prandtl propose con un metodo approssimato: dividere il campo di moto in due regioni, una vicino alla parete (strato limite) in cui le forze visose sono rilevanti e un'altra di fuori dello s.l. dove tali forze sono trascurabili.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{> eq. cont. massa}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{> eq. cont. impulso, x}$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \text{> eq. cont. impulso, y}$$

Prandtl fece delle considerazioni basate sulle valutazioni degli ordini di grandezza ($o(\delta)$), in particolare fece le seguenti ipotesi:

> $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$ $u, v = o(1)$

> $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}$ $u, v = o(\delta)$ con $\delta \ll 1$

(ipotesi conf. da osservare sperimentali che soddisfano le condiz. $\frac{\delta}{x} \ll 1$)

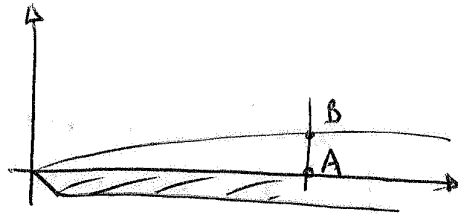
Per cui, ricavo

$$\frac{o(1)}{o(1)} + \frac{o(v)}{o(\delta)} = 0 \Rightarrow v = o(\delta)$$

se la somma algebrica deve dare 0.

Si ricave inolle che

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

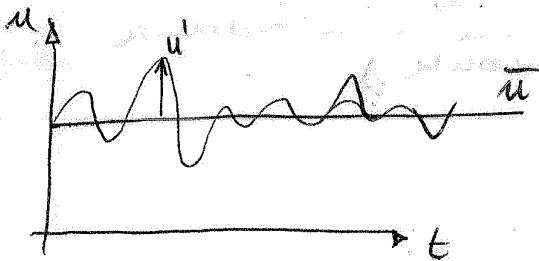


$$p_A = p_B$$

Transizione tra stato limite laminare e stato limite turbolento

Le eq. di Prandtl valgono quando lo stato all'interno dello stato limite è "laminare". Reynolds ha dimostrato che esiste almeno un caso in cui le singole particelle si muovono in modo disordinato e fluttuante (moto turbolento)

Descrizione qualitativa:



$$u = \bar{u} + u'$$

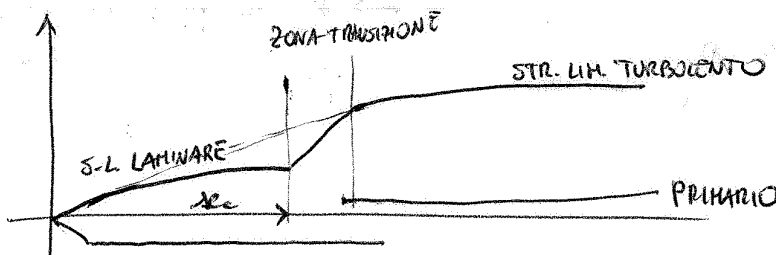
Il moto turbolento è detto stocastico quando \bar{u} non varia nel tempo.

Nel moto unidimensionale ($v=w=0$) posso definire un'

INTENSITÀ DI TURBOLENZA

$$T_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)}}{\bar{u}}$$

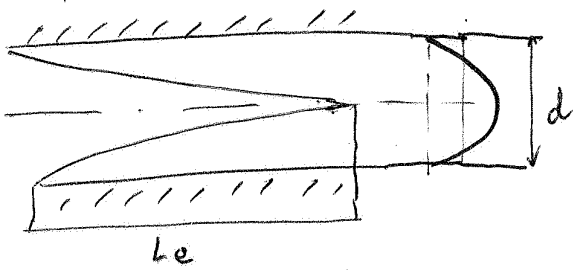
In particolare durante il deflusso ~~del fluido~~ ^{il fluido} ~~da un profilo~~ ^{ed in un} ~~da un profilo~~ ^{disteso}, denominato distesa critica, una zona di transizione in cui il moto passa da stato laminare a stato turbolento



di un piccolo sottolimite laminare dello stato limite laminare prima

Il fenomeno della transizione è un fenomeno su cui si sta tuttora studiando. Per due anni si conosceva energeticamente del fatto che il n. lam. aveva influenza in certe situazioni e si verificava in tubi, sotto l'influenza di disturbi esterni anche piccolissimi. Essò inoltre era guardato come un processo fortuito ed era una poss. vede del punto di transizione.

Con riferim. al deflusso in un tubo



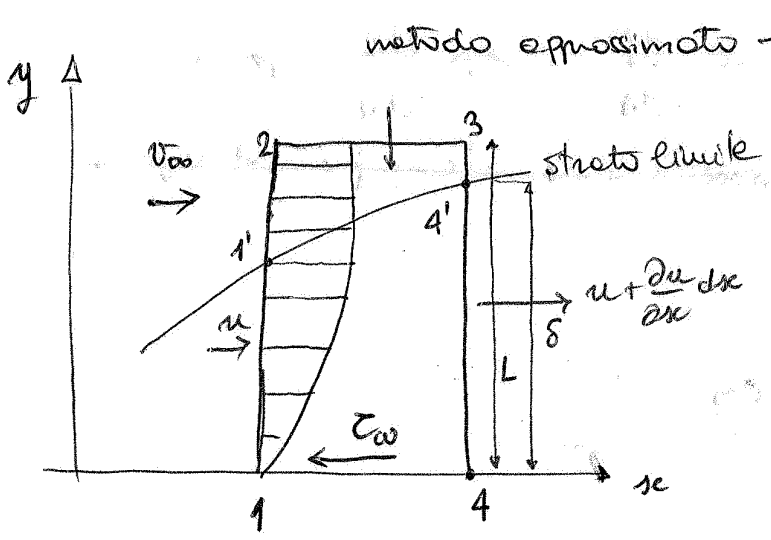
$$\frac{l_e}{d} = f(Re)$$

In particolare si ~~può~~ ^{re valore} distinguere Re_{lam} o turbolento e'

$$Re = \frac{\rho U_m d}{\mu} = 2300 \div 3000 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Una velocità media} \\ \text{sulle sezioni} \end{array} \right)$$

(Si può raggiungere $Re = 500000$ circa evitando i disturbi, ne solitamente in cond. industriali l_e in tub. e $Re > 3000$)

Spessore dello strato limite Metodo di Von Karman



metodo approssimato \rightarrow in eccesso con dati sperimentali

\rightarrow Applicazione delle eq. integrali di con. masse e p. moto al volume di controllo (VC) 1-2-3-4 di profondità unitaria.

Per risolvere gli integrali devo assumere un profilo di velocità, perché non viene indicato dalle equazioni differenziali.

Assumo quindi un andamento polinomiale del tipo

$$u = e + by + cy^2 + dy^3$$

dal momento che dispongo di 4 equazioni e 4 costanti

NOTA fissato x , $u(y)$ è sempre lo stesso
coeff fissi e x fissato!!
($a, b, c, d = f(x)$)

$$\begin{cases} u=0 & \text{per } y=0 & (1) \\ u=v_{\infty} & \text{per } y=\delta & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{per } y=\delta & (3) \end{cases}$$

e perché

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

con $y=0 \rightarrow$

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ per } y=0 \quad (4)$$

Ottengo il nuovo coefficiente e ottengo

$$u = v_{\infty} \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \quad \text{centro inferiore su } x$$

PROFILLO VELOCITÀ MOTO LAMINARE

Otengo

➤ STRATO LAMINARE

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}$$

➤ S.L. TURBOLENTO

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.376}{Re_x^{1/5}}$$

con ipotesi di $\delta=0$ e $x=0$

dove

$$Re_x = \frac{\rho V_{\infty} x}{\mu}$$

NOTA

Posso determinare anche la velocità u_b al confine tra laminare e regione turbolenta

$$\frac{u_b}{V_{\infty}} = \frac{2.12}{Re_x^{0.12}}$$

per cui

δ_b lo si trova da $u_b = V_{\infty} \left(\frac{\mu}{\delta} \right)^{1/7} \rightarrow \delta_b$

$$\Rightarrow \frac{\delta_b}{\delta} = \left(\frac{u_b}{V_{\infty}} \right)^7$$

Dalla definizione di τ_w posto anche trovare il fattore di attrito di fouling, definito da

$$\tau_w = f \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$$

NOTA

Previsione laminare. Il profilo di velocità nel m-turbolento è di profilo tip



fluttuazioni \Rightarrow le medie da ottengo e' forte in diverse misurazioni e il valore non e' istantaneamente vero... le formule forniscono valori medi

l'equazione si riduce a

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

perché $u = u(r)$ nel moto sviluppato

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

con $u=0$ e $r=r_w$ (1) condiz. al contorno
 $\frac{du}{dr}=0$ e $r=0$ (2) (no shear)

$$\int_0^r \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{r}{\mu} dr = \int_0^r \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) dr$$

avendo

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{C_1}{r} \quad \text{da (1)} \rightarrow C_1 = 0$$

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + C_2 \quad \text{da (2)} \rightarrow C_2 = -\frac{r_w^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (r^2 - r_w^2)$$

NOTA

perché $r - r_w < 0$ sempre
 se $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ allora
 $u < 0$!

⇒ questo spiega per esempio le perdite nei fluidi quando si hanno aperture

Come viene la \bar{u} media?

Dalla portata in volume Q_v

$$Q_v = \int_0^{r_w} u(r) 2\pi r dr = -\frac{\pi r_w^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

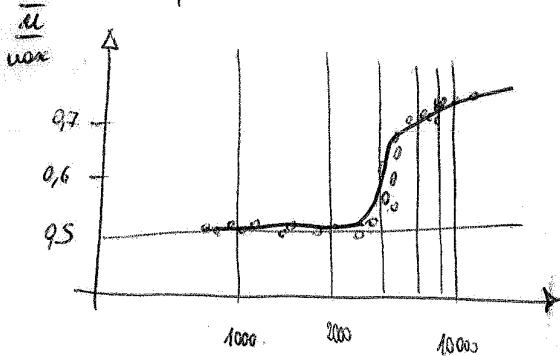
Area cerchio circolare

$$\mu \frac{\delta \bar{u}}{\delta w} = f \frac{1}{2} \rho \bar{u}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\mu}{\rho \bar{u} dw} = \frac{16}{Re} \quad \left(Re = \frac{\rho \bar{u} dw}{\mu} \right)$$

Gli stessi risultati si ottengono per tubi non orizzontali.
 Nel caso di moto laminare sia u (profilo velocità) sia f si ritengono in modo permanente tempo.

Sperimentalmente è stato verificato che il modello è valido per Re fino a 2000



Confronto con dati sperimentali
 conferme che da come
 accade fra valori teorici
 e sperimentali di u ,
 lo stesso accade per f .

→ Cenni su situazioni non isoterme

In presenza di variazioni notevoli di temperature del fluido il profilo di velocità si può discostare da quello parabolico. Questo in quanto variano le proprietà fisiche (ρ, μ) supposte costanti e le determinazioni del modello.

In generale il comportamento è diverso nei liquidi e gas in quanto la viscosità μ diminuisce con T nei primi e aumenta nei secondi.

- uso assoluto nei condotti
vedi appunti... nulle di perpendicolarità rilevante
- equazioni di Reynolds
- ~~teoria della similitudine di Prandtl~~
o Prandtl

Reynolds ha modificato le equazioni riprese di Navier-Stokes introducendo i valori medi e i valori fluttuanti al posto di quelli istantanei, con l'ipotesi che i val. fluttuanti siano funzione continua nel tempo e nello spazio.

→ eq. cons. p. moti, ρ (PE = 0)

$$\frac{D u_i}{D t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_i$$

ove u_i, v_i, w_i, p_i sono componenti istantanee delle velocità e pressione.

u, v, w, p sono comp. ^{valori medi} delle

→ eq. cons. nelle comp. delle velocità e pressione
fluido incomprimibile, u', v', w' comp. fluttuanti

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0$$

Se riscriviamo

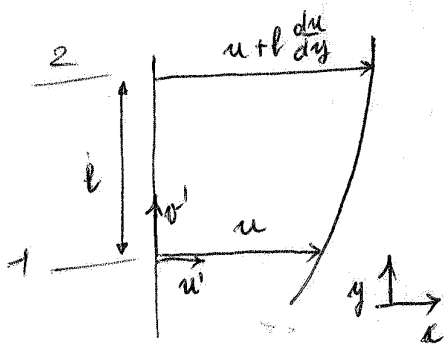
$$\begin{aligned} \frac{D u_i}{D t} &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + w_i \frac{\partial u_i}{\partial z} + u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2 u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial (u_i v_i)}{\partial y} + \frac{\partial (u_i w_i)}{\partial z} \end{aligned}$$

→ Teoria delle lunghezze di mescolamento di Prandtl

Sperimentalmente le perdite di pressione per attrito in moto turbolento sono molto superiori e quelle attribuibili alle viscosità molecolari;

Prandtl le attribuisce allo scambio di quantità di moto tra le particelle fluide. Tra due strati adiacenti di fluido in m. turb. e correntizz. di velocità diverse si verifica uno scambio di particelle fluide: ciò comporta uno scambio di quantità di moto, le cui conseguenze espone uno sforzo di taglio tra i due strati.

Prandtl introduce il concetto di **LUNGHEZZA DI MESCOLAMENTO** = distanza che ogni particella di fluido deve percorrere trasversalmente alla direzione principale del moto prima di perdere la sua identità, vale a dire i valori di velocità che possiede all'inizio.



moto bidim.

$$v, w \text{ (valori medi)} = 0$$

$$u \neq 0$$

u', v' non nulle (comp. fluttuanti)

istantanea

} moto sviluppato in un condotto

Per Prandtl la lung. di mescolamento l è tale che

$$u' = l \frac{du}{dy} \quad \left| \quad \text{avere } u' \propto \text{diff di velocità medie di due strati distanti } l$$

$$\tau = \tau_e + \tau_t = \left(\mu + \rho l^2 \frac{du}{dy} \right) \frac{du}{dy} =$$

$$= (\mu + E_m) \frac{du}{dy}$$

con

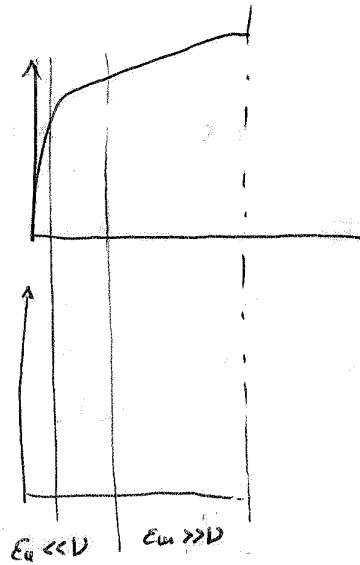
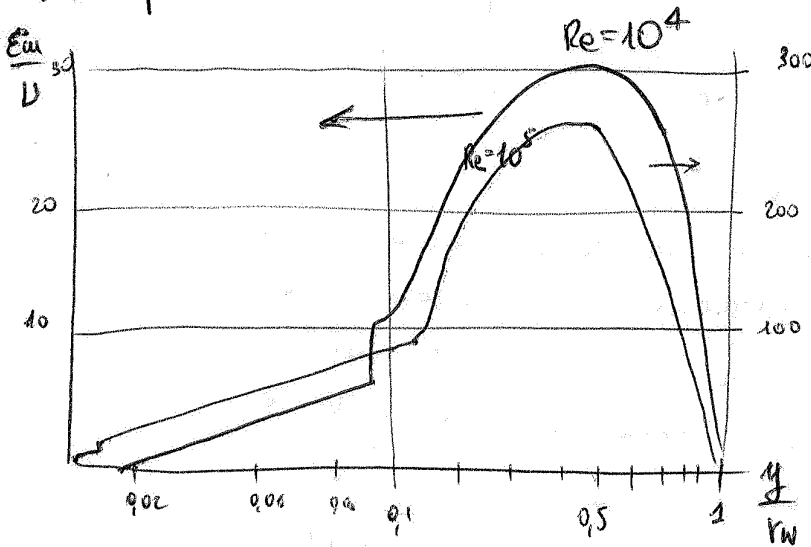
$$E_m = \rho l^2 \frac{du}{dy} \text{ EDDY VISCOSITY}$$

se il moto è intensamente turbolento
 $\tau_e \ll \tau_t$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\rho} = (l + E_m) \frac{du}{dy} \quad \text{con}$$

l viscosità cinetica
 E_m EDDY DIFFUSIVITY
 o diffusività
 turbolenta

Esempi:



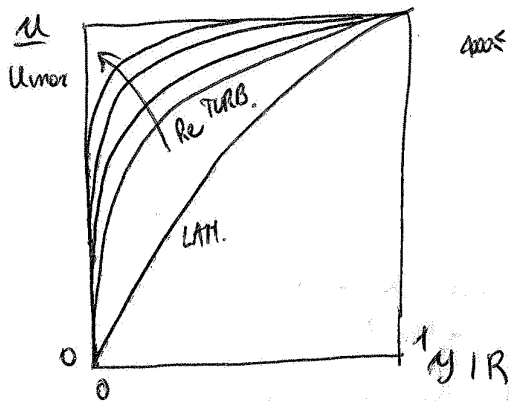
che l è funzione di y , ma non è nota.
 \rightarrow Prandtl e Van Karman hanno fatto delle ipotesi per verificare. (VEDI P01)

NOTA

Per valutare le comp. fluttuanti (velori medi) si utilizza la tecnica dell' ANEMOMETRIA A PLO CALDO ... Teoria statistica della turbolenza non trattata.

→ profilo di velocità di Prandtl
delle misurazioni

I risultati di Nikuradse sono stati rappresentati
poi nelle figure seguenti



4000 $Re \leq 3240000$ (costi che comprendono la maggior parte dei costi tecnici di interesse)

Prandtl esprime l'espressione del
fattore d'attrito in funzione di Blasius

$$f = 0,079 Re^{-1/4}$$

e sulle base delle relazioni

$$\tau = \tau(f, \rho, \bar{u})$$

È con un numero di espressioni
numerici la seguente relazione

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R_w} \right)^{1/n} \quad \text{con}$$

n espone empirico funz. Reynolds

$Re = \frac{\rho \bar{u} d_w}{\mu}$	n
4000	6
23000	6.6
110000	7
170000	8.8
2000000	10
3240000	10

Questo metodo non
permette di calcolare
il valore di gradiente
di velocità alla parete

(grad u $\rightarrow \infty$). Non
può pertanto essere
utilizzato x il calcolo
dello sforzo di taglio

Inoltre Prudt assume che agente modello per la emigrazione di mercato
 $(L = Ky)$ | non influenza che E o V

con K cost. universale = 0,4

(ottenuto da Prudt e Nijkusse sulla base di dati finanziari)

Per cui

$$Ky \frac{du}{dy} = u^*$$

$$\Rightarrow u = \frac{u^*}{K} \ln y + C$$

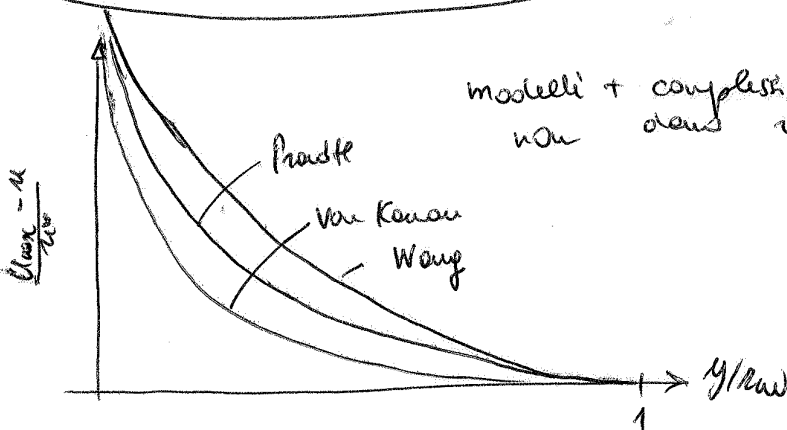
Per determinare C Prudt impone la condizione

$u = u_{max}$ per $y = \frac{Y}{\pi W}$ (non potrebbe applicare questa cond. al contario in quanto $1 - \frac{Y}{\pi W} \neq 1$ non è più vero)

Per cui infine

$$u = u_{max} + 2,5 u^* \ln \frac{Y}{\pi W}$$

Non si presta ad appross. pratica:
 - non si conosce u_{max} , ma u_{red}
 - non si può esprimere πW perché non è variabile alle poste.



modelli + complessi (V.K, Wang)
 non danno risultati migliori.

Che mi definiscono

$$y^+ = \frac{y u^*}{\mu P} \quad e \quad u^+ = \frac{u}{u^*}$$

Nello stato laminare $u^+ = y^+$.

Imparando il ricordo di queste relazioni con la legge logaritmica di Prandtl è stato ricavato

$$u^+ = 5,5 + 2,5 \ln y^+$$

Tale sviluppo ha messo in evidenza che le validità di u^+ e y^+ non è illimitata allo stato laminare \rightarrow applicabili fino al centro del tubo.

È stato inoltre verificato che esiste una zona per

$5 < y^+ < 30$ nelle quali non sono valide le due formule precedenti. Per tale regione intermedia è stato adottato empiricamente un'espressione con la stessa struttura logaritmica da definire

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & 0 < y^+ < 5 \\ u^+ = -3,05 + 5 \ln y^+ & 5 < y^+ < 30 \\ u^+ = 5,5 + 2,5 \ln y^+ & y^+ > 30 \end{cases}$$

PROFLO
UNIVERSITARIO
DI
VELOCITÀ

Deflusso bifase

Terminologie

- G portata specifica totale
- G_e " " fase liquida
- G_g " " fase gassosa
- x titolo (FLOW QUALITY)

$$x = \frac{G_g}{G}$$

- v_g, v_e velocità superficiali

$$v_i = \frac{G_i}{\rho_i} \quad \text{velocità che avrebbe la fase se defluisse da sola}$$

- α grado di vuoto

$$\alpha = \frac{A_g}{A} \quad \text{velocità media nel tempo (se non viene nel tempo coincide con la fase in valle)}$$

- v_g, v_e velocità effective

$$v_g = \frac{v_g}{\alpha} \quad v_e = \frac{v_e}{1-\alpha}$$

utilizzate nei calcoli

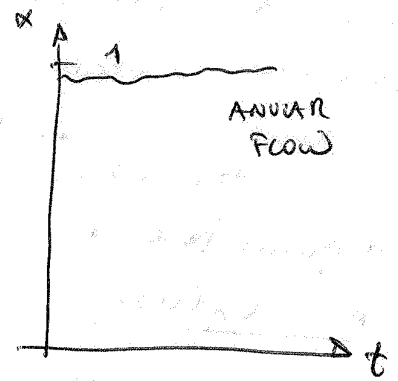
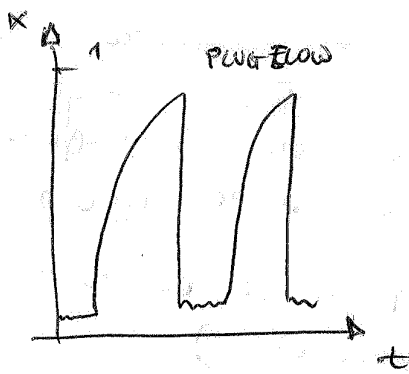
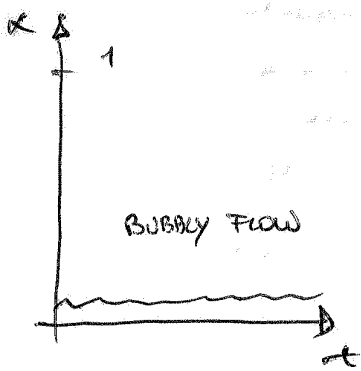
↳ velocità medie, prescinolando dall'andamento locale delle velocità

Per i deflussi in tubi orizzontali e come tener presente che le for. posse (o separe) tende verso e alto.

VEDI APPUNTI ...

Discorsi di tipo qualitativo...

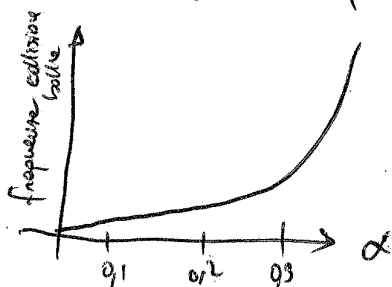
→ I regimi di deflusso sono stati individuati sulla base di osservazioni visive (anche ad alte velocità) in tubi trasparenti e utilizzando strumenti speciali (contometri e raggi γ → ottenes. finite del fascio dipende dalla disposizione delle for. e delle loro pres. in valle)



→ meccanismi di transizione (inf. caso deflusso verso l'alto tubo verticale)

• moto a bolle → moto a toppi

trans. messe in relazione con la frequenza di collisione delle bolle (funzione di α)
 due parti alla coalescenza delle bolle e quindi alle form. bolle di maggiore dimensioni. In particolare si nota che



In generale quindi si ha moto a bolle per $\alpha < 0,3$

Con l'appiattire si addiziona si può avere anche moto a toppi e $0,6 < \alpha < 0,8$ inalte alte G "risparmio" a bolle...

MAPPA BAERLER-SCOTT

- deflussi adiab. tubi orizzontali
- parametri

$\frac{G_g}{A}$ e $G_e \psi$ dove

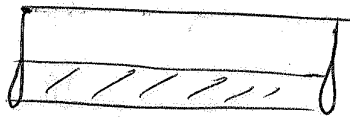
$$\lambda = \left(\frac{\rho_g \rho_e}{\rho_{air} \rho_{water}} \right)^{1/2} \quad \psi = \frac{\sigma_{water}}{\sigma} \left[\frac{\mu_e}{\mu_{water}} \left(\frac{\rho_{water}}{\rho_e} \right)^2 \right]^{1/3}$$

valore x essere come olio / gas per d < 5 cm.

MAPPE COMPLESSE DI TAITEL-DUCKLER. (3)

→ ~~modell~~ ^{note} stratificato (modello semplificato)

$\Delta P_g = \Delta P_e$
(condiz.)



→ modello x tubo interfaccia, condensa per cui si passa al "wavy flow" ... gruppi adimensionali ...

Cenni sui modelli del deflusso bifase e modello omogeneo

Ipotesi del modello ^{omogeneo} del deflusso bifase

- fasi ben miscelate
- $\mu_e = \mu_g$

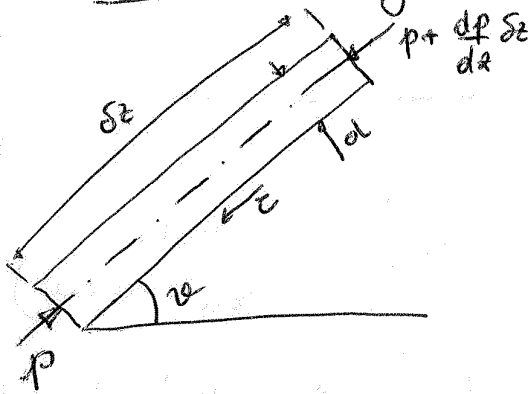
A questo proposito si definisce

$S = \frac{\mu_g}{\mu_e}$ SLIP RATIO

mod omog $S = 1$
mod a fasi separate $S \neq 1$

(in genere $S > 1$, ma pu alcuni casi si pu avere $S < 1$)

→ calcolo del gradiente di pressione



Bilancio di quantità di moto ;
con

$$P_a = P_e (1 - \alpha_a) + P_g \alpha_a \quad (\text{per sezione retta})$$

ovvero sostituendo α_a

$$\frac{1}{P_a} = \frac{x}{P_g} + \frac{(1-x)}{P_e}$$

e analogamente

$$\frac{1}{\mu_a} = \frac{x}{\mu_g} + \frac{(1-x)}{\mu_e}$$

ovvero in'espansione più recente e attuale è

u = velocità media sezione

$$u = \frac{1}{A} \int_A u dA$$

$$\mu_a = \mu_g \alpha_a + \mu_e (1 - \alpha_a) (1 + 2.5 \alpha_a)$$

Le forze agenti sono

- > f. pressione (pilot nella sezione)
- > f. peso, funzione di α
- > f. attrito

Per cui

$$\left[p - \left(p + \frac{dp}{dz} \delta z \right) \right] \frac{\pi d^2}{4} - \tau \pi d \delta z - \frac{\pi d^2}{4} \delta z g \rho \sin \alpha = \frac{d}{dz} \left(G \frac{\pi d^2}{4} u \right) \delta z$$

ovvero

$$\left(- \frac{dp}{dz} = \frac{4\tau}{d} + \rho g \sin \alpha + G^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)$$

- attrito - - elevazione - - accelerazione spaziale -