



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 249

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Frison

MATERIA : Topografia teoria + esercizi + riassunto
Prof. Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

GEODESIA:

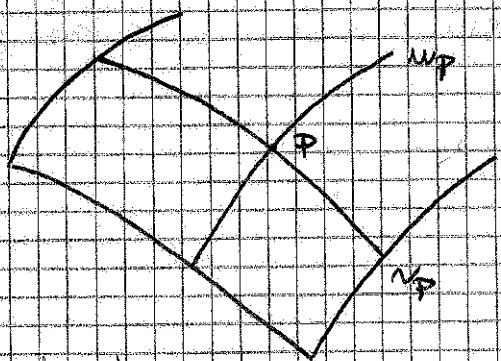
Luglio 2011

La superficie fisica terrestre per i manufatti costruiti dall'uomo ha una forma molto irregolare e discontinua e quindi non definibile analiticamente in modo esatto. È necessario sostituire la superficie fisica della Terra con una superficie di riferimento.

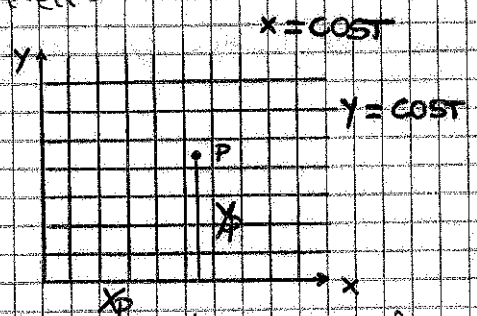
SUPERFICIE DI RIFERIMENTO IDEALE → **GEODE** superficie che in ogni punto è normale alla direzione della verticale e coinciderebbe con la superficie dei mari, opportunamente prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua avesse la stessa temperatura, la stessa densità e non esistessero le perturbazioni date alle correnti, ai venti e alle maree.

Ogni punto individuato sulla superficie di riferimento sarà univocamente determinato da una coppia di coordinate cumulative e dalla distanza tra il punto reale e la sua proiezione.

→ la distanza tra la superficie fisica terrestre e il geode è chiamata **QUOTA** ed è misurata lungo la verticale.



Coordinate cumulative



Coordinate cartografiche

$$\left. \begin{aligned} X &= X(u, v) \\ Y &= Y(u, v) \end{aligned} \right\} \text{ corrispondenza biunivoca tra le coordinate cumulative } (u, v) \text{ e una coppia di coordinate } (x, y)$$

La Geodesia (dal greco terra + matematica) è la scienza che studia certi aspetti finca e finca - matematici della terra e della spazio immediatamente circostante o oggi accessibile all'indagine diretta grazie ai dati rilevati dai satelliti artificiali.

• GEOIDE → Aspetto geostatico della geodesia: superf. algebrica piana ①

↳ Aspetto dinamico della geodesia: studia il campo gravitazionale terrestre. ②

• GEODESIA → GEODESIA CLASSICA: riguarda nella sua parte operativa, a una superf. di rif. di natura geostatica e dinamica. ①

↳ GEODESIA TRIDIMENSIONALE: tratta i problemi nello spazio fisico tridimensionale inteso il rasoio a qualsiasi superficie di riferimento. ②
(impiego di sistemi di riferimento intrinseci)

LA FORMA DELLA TERRA

La superficie effettiva della terra può essere approssimata con diversi criteri e finalità da tre diverse superfici:

1) Superficie ellissoidica: è una figura astratta, di comodo, introdotta unicamente come supporto matematico sul quale sviluppare analiticamente il rilievo della superficie effettiva.

2) Superficie dinamica teorica: è una ipotetica superficie di livello del campo gravitazionale che si ha nell'ipotesi che la terra sia un corpo continuo, omogeneo e di densità uniforme, animato esclusivamente da un moto di rotazione attorno al suo asse piano, con velocità angolare costante. Questa superficie è chiusa, liscia e priva di singolarità.

DEFINIZIONE DELLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO:

La meccanica studia il moto dei corpi materiali sotto l'azione delle forze applicate che sono essenzialmente di due tipi:

- 1) le forze gravitazionali che ubbidiscono alla legge di gravitazione di Newton, secondo la quale due particelle si attraggono reciprocamente con una forza proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza, queste forze sono dirette secondo la retta congiungente le particelle e sono indipendenti dalla presenza di altri corpi.
- 2) le forze elastiche che seguono la legge di Hooke.

→ CAMPO 1) CAMPO SCALARE. ES: consideriamo un ambiente e supponiamo che la temperatura sia uniforme in ogni suo punto. L'insieme dei valori della temperatura in funzione della posizione si chiama CAMPO SCALARE.

2) CAMPO VETORIALE. ES: consideriamo una regione nella quale un fluido sia in moto stazionario. In ogni punto dello spazio è possibile definire un vettore che rappresenta in direzione, verso e ampiezza la velocità della particella fluida che si trova nel punto considerato. In generale avremo vettori diversi nei diversi punti della regione; l'insieme di questi vettori descrive univocamente il moto del fluido e si chiama CAMPO DI VELOCITÀ.

→ Rappresentate linee di flusso (di un campo uniforme) sono una famiglia di rette parallele e il vettore ha la stessa ampiezza ovunque.

La condizione generale che deve essere soddisfatta affinché una forza sia conservativa ed esista una energia potenziale, è la seguente:
una forza risulta conservativa se il lavoro da essa compiuto su di

• Campo gravitazionale (\vec{g}) \rightarrow risultante di due forze:

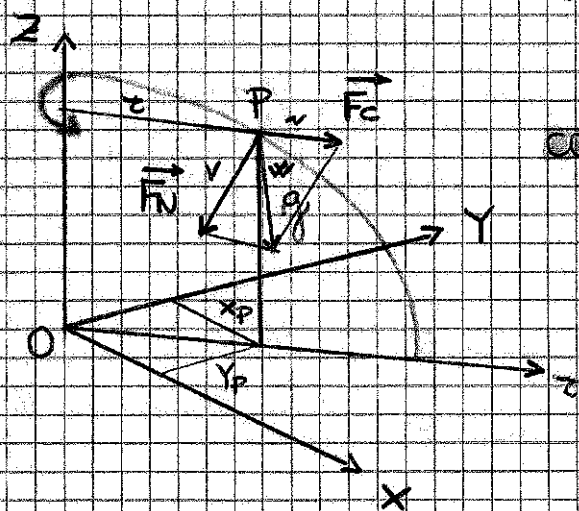
1) (\vec{F}_N) forza di attrazione newtoniana sulla massa m

\vec{F} è la risultante di tutte le forze elementari che ogni elemento di massa della terra esercita sull'unità di massa 1 kg in P

2) (\vec{F}_c) forza centrifuga sulla massa 1 kg in P data alla rotazione della terra intorno all'asse z , rotazione che avviene con velocità angolare $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, per cui l'accelerazione risulta pari a $\vec{c} = \omega^2 \vec{r}$

risulta pari a $\vec{c} = \omega^2 \vec{r}$

$r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \rightarrow$ è diretto radiale da normale all'asse z passante per P e orientato verso l'esterno della terra.



③ FORZE CONSERVATIVE

- forza centrifuga $\vec{F}_c \rightarrow$ potenziale w
- forza newtoniana $\vec{F}_N \rightarrow$ potenziale v
- forza gravitazionale $\vec{g} \rightarrow$ potenziale W

$W = w + v$ (SOMMA perché i potenziali sono funzioni scalari)

• Condensare un campo di forze situato in un punto P del campo di forze e rappresentarlo di potenziale di un tratto da lungo la direzione della forza di gravità \vec{g}

• variazioni del potenziale: $dW = \vec{g} \cdot d\vec{s}$

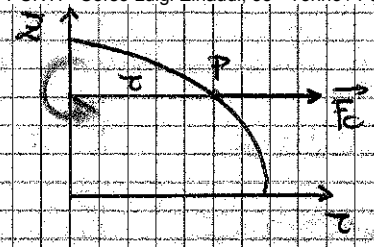
Il vettore campo risulta il gradiente del potenziale ed è diretto normalmente alla superficie equipotenziale e si indica con la notazione:

$\vec{g} = \text{grad } W$

Espressioni dei potenziali ① e ②

$\frac{\partial v}{\partial t} = \vec{F}_c$ ①

• Potenziale della forza centrifuga:



$dv = \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rightarrow v = \int \omega^2 r \cdot dr = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$

②. Potenziale relativo alla forza newtoniana:

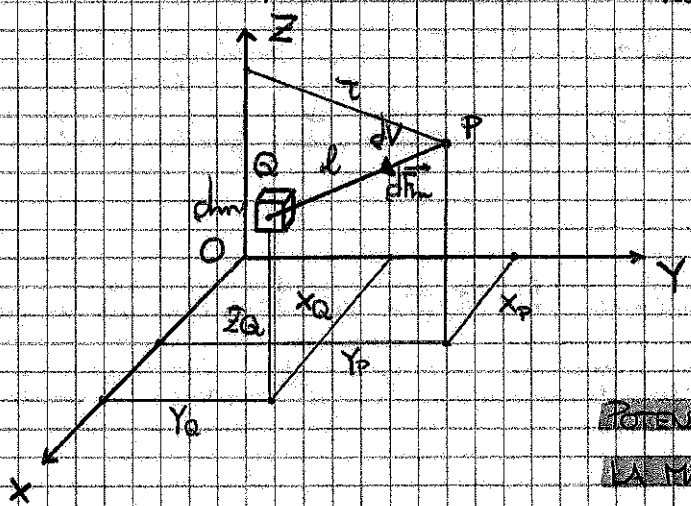
Consideriamo un elemento infinitesimo di massa dm posto in un punto $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$.

• S : densità della terra nel punto Q
 $dm = S \cdot dV_{dm}$

→ Questo elemento infinitesimo di massa dm produce su una massa m posta in $P(x_P, y_P, z_P)$ una forza di attrazione che segue la legge di gravitazione di Newton, il cui modulo, vale

$dF_v = G \cdot \frac{dm \cdot m}{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = G \cdot \frac{dm}{d^2}$) diretta da P verso Q.

• G : costante gravitazionale pari a $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$



POTENZIALE DOVUTO A TUTTA LA MASSA DELLA TERRA

$\frac{\partial dV}{\partial l} = dF_v$

→ $V(x, y, z) = G \iiint \frac{dm}{d}$

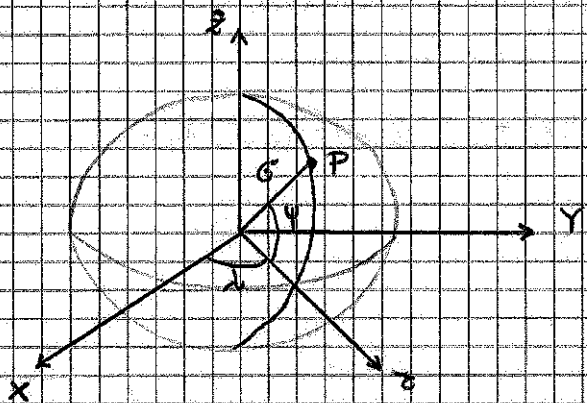
$dV = \int dF_v \cdot dl = \int \frac{G \cdot dm}{d^2} \cdot dl = \frac{G \cdot dm}{d}$

Il gradiente del potenziale U si indica con $\vec{\nabla}$ e viene definita

GRAVITÀ NORMALE

$$\vec{\nabla} = \text{grad } U \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \vec{\nabla}_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \vec{\nabla}_y \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \vec{\nabla}_z$$

La differenza tra il modulo dei due vettori \vec{g} (gravità) e $\vec{\nabla}$ (gravità normale) si chiama ANOMALIA DI GRAVITÀ \rightarrow è la grandezza più difficilmente misurata per il calcolo del geode.



$$\begin{cases} X = \sigma \cos \psi \cos \lambda \\ Y = \sigma \cos \psi \sin \lambda \\ Z = \sigma \sin \psi \end{cases}$$

a meno di termini dell'ordine di $1/\sigma^4$ ($\sigma = 6370 \text{ km}$ e $1/\sigma^4 = 6,07 \cdot 10^{-20}$), il potenziale V risulta espresso dalla seguente relazione approssimata:

$$V'(\sigma, \psi, \lambda) = \frac{GM}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{C - \frac{A+B}{2}}{M} (1 - 3\sin^2 \psi) + \frac{3}{4\sigma^2} \cdot \frac{B-A}{M} \cos^2 \psi \cdot \cos 2\lambda \right]$$

M massa totale della terra

A, B, C : momenti d'inerzia rispetto agli assi x, y, z (deducibili dalla meccanica celeste)

Bisogna una grande quantità di osservazioni dimostrarono che la terra ha una forma molto prossima a quella di un sferoide di rotazione, si può porre $A = B$ e ricordando che $\sigma^2 = x^2 + y^2 = \sigma^2 \cos^2 \psi$ si potrà scrivere quale espressione analitica approssimata del geode l'equazione

$$U = V' + v$$

$$U = \frac{GM}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{C-A}{M} (1 - 3\sin^2 \psi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2 \cos^2 \psi = \text{cost}$$

minore e di circa 35 km (errore del tutto accettabile):

$$c^2 = a^2 (1 - \epsilon)^2 = a^2 (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon) \quad \text{da cui } c = 6357126,7 \text{ [m]}$$

$$c^2 = a^2 (1 - \epsilon)^2 = a^2 (1 - 2\epsilon) \quad \text{da cui } c = 6357091,1 \text{ [m]}$$

con tale approssimazione l'equazione dell'ellissoide diventa:

$$x^2 + y^2 + z^2 \cdot (1 - 2\epsilon)^{-1} = a^2$$

Sviluppando in serie binomiale il coefficiente della z^2 , si ottiene:

$$(1 - 2\epsilon)^{-1} \approx (1 + 2\epsilon)$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots$$

con questa approssimazione l'eq. dell'ellissoide di rotazione nel riferimento piano, risulta:

$$G^2 = a^2 \left(1 - \epsilon \frac{z^2}{a^2} \right) \quad \left. \begin{array}{l} a \text{ e } G \text{ sono delle stesse} \\ \text{ordine di grandezza} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{z^2}{a^2} \approx \frac{z^2}{G^2} = \sin^2 \psi$$



$$G = a \cdot (1 - 2\epsilon \sin^2 \psi)^{1/2}$$



$$G = a \cdot (1 - \epsilon \sin^2 \psi)$$

che coincide con l'equazione della sferoide in rotazione piano.

QUINDI L'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE

COINCIDE CON LO SFEROIDE A MENO

IN TERMINI IN z^2

Considerazioni:

- 1) l'ellissoide di rotazione è una superficie adatta a rappresentare la forma della terra.
- 2) Il compito dei geodeti è quello di determinare il semiasse maggiore e il semiasse minore ovvero il semiasse maggiore e lo schiacciamento.

Valori \neq di a e ϵ :

- { Bessel
- { Hayford → ellissoide internazionale
- { WGS84 (il più utilizzato)

COORDINATE GEOGRAFICHE

Ellissoide di rotazione:

• a : semiasse equatoriale

• c : semiasse polare

- schiacciamento: $\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$

- prima eccentricità: $e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$

- seconda eccentricità: $e'^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$

Relazioni intercorrenti:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}$$

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

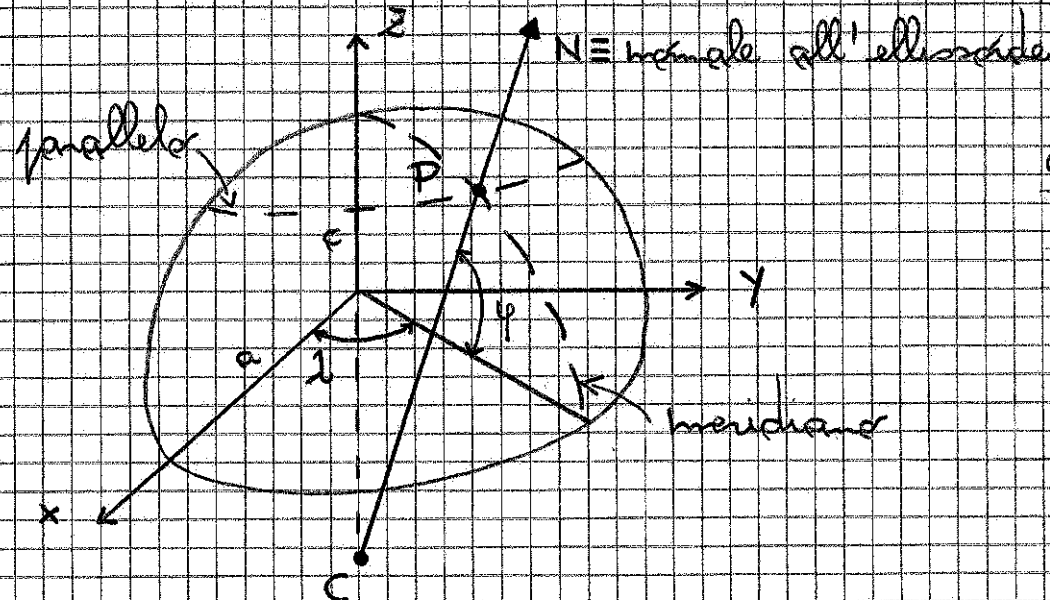
$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1 + e'^2}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - e^2} = 1 - \alpha$$

• meridiano \rightarrow generatrice

• ellipse di semiasse a - c \rightarrow ellipse meridiana



Consideriamo un punto P sull'ellissoide.

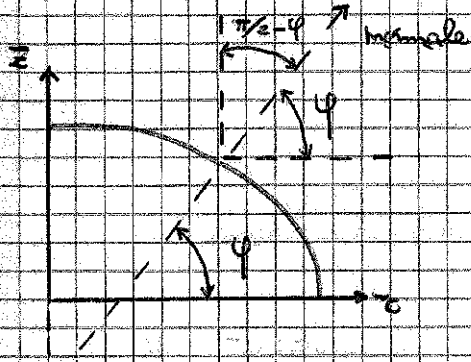
EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL'ELISSOIDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

eq. dell'ellissoide di rotazione nel sistema cartesiano generalizzato

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eq. dell'ellisse meridiana in un piano meridiano [x,z]



I coseni direttori della normale ad una curva di eq. $f(x, z) = 0$ sono proporzionali alle derivate parziali di questa funzione lungo le direzioni di riferimento

Quindi

$$\cos \varphi = k \frac{\partial f}{\partial x} = k \frac{2x}{a^2}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi = k \frac{\partial f}{\partial z} = k \frac{2z}{c^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{z}{x} \cdot \frac{a^2}{c^2} \rightarrow z = x \cdot \tan \varphi \cdot \frac{c^2}{a^2} = x \cdot \tan \varphi \cdot (1 - e^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 \cdot \tan^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2}{c^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{a^2}{c^2} x^2 \tan^2 \varphi (1 - e^2)^2 = a^2$$

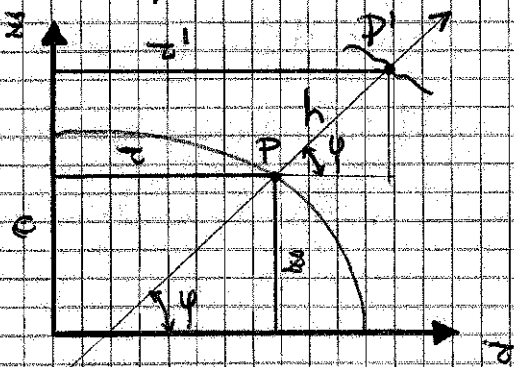
$$\left[\frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{1 - e^2} \right]$$

$$x^2 \left[1 + \frac{a^2}{c^2} \tan^2 \varphi (1 - e^2)^2 \right] = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{a^2}{c^2} \tan^2 \varphi (1 - e^2)^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi}_1}$$

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Se il punto P' di cui si vogliono calcolare le coordinate geocentriche, non giace sulla superficie di riferimento (ellissoide) ma sta sulla superficie terrestre ancora che, note le sue coordinate geografiche (λ, φ, h) , potremo calcolare le corrispondenti geocentriche.



$$r' = r + h \cos \varphi$$

$$z_{P'} = z + h \sin \varphi$$

$$\begin{cases} X_{P'} = r' \cos \lambda \\ Y_{P'} = r' \sin \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{P'} = (r + h \cos \varphi) \cos \lambda = \left(\frac{a}{W} + h \right) \cos \varphi \cdot \cos \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{P'} = (r + h \cos \varphi) \sin \lambda = \left(\frac{a}{W} + h \right) \cos \varphi \cdot \sin \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{P'} = (z + h \sin \varphi) = \left[\frac{a}{W} (1 - e^2) + h \right] \sin \varphi \end{cases}$$

RICORDA:

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{W} \cos \varphi$$

Parametri nello studio di una superficie:

1) CURVATURA (C) in un punto: $C = 1/\rho$

inverso del raggio di curvatura calcolato in quel punto

2) CURVATURA MEDIA (CM) della superficie in un punto:

media aritmetica delle curvature di tutte le sezioni normali per quel punto $CM = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} \right)$

3) CURVATURA TOTALE (CT) della superficie in un punto:

inverso del quadrato della media aritmetica di tutti i raggi di curvatura. $CT = \frac{1}{\rho^2 + N^2}$

Applicazione di queste definizioni ad alcune superfici particolari:

• piano superficie con curvatura totale ovunque nulla

• cilindro, cono superficie a curvatura totale ovunque nulla

• sfera superficie a curvatura totale costante

$CT = 1/R^2$ ($R = N = \rho =$ raggio della sfera)

• ellissoide di rotazione superficie a curvatura totale variabile

(e costante su ciascun parallelo). $CT = \frac{1}{\rho^2 + N^2}$

$$= - \frac{a \sin \varphi - a e^2 \sin^3 \varphi - a e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{W^3} = - \frac{a \sin \varphi - a e^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{W^3}$$

$$= - \frac{a(1-e^2) \sin \varphi}{W^3}$$

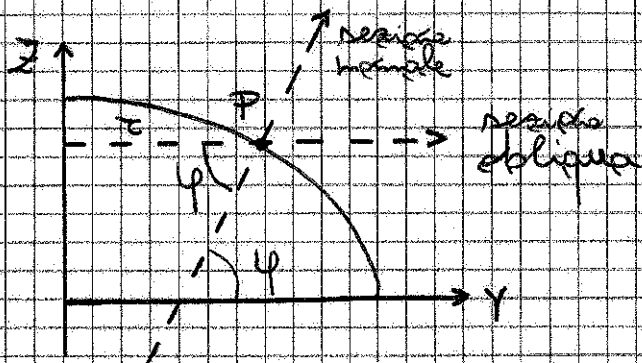
in modo analogo si ottiene: ② $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2) \cos \varphi}{W^3}$

Quindi:

$$r = \sqrt{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)^2 \sin^2 \varphi + a^2(1-e^2)^2 \cos^2 \varphi}{W^6}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$

Per trovare il valore del raggio di curvatura massimo N , occorre applicare al teorema di Meusnier che dice:

il raggio di curvatura in un punto P di una sezione obliqua (r) è uguale al raggio di curvatura della sezione normale (N) corrispondente al piano che contiene la tangente in P alla sezione obliqua moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dai piani delle due sezioni.



$$r = N \cos \varphi$$

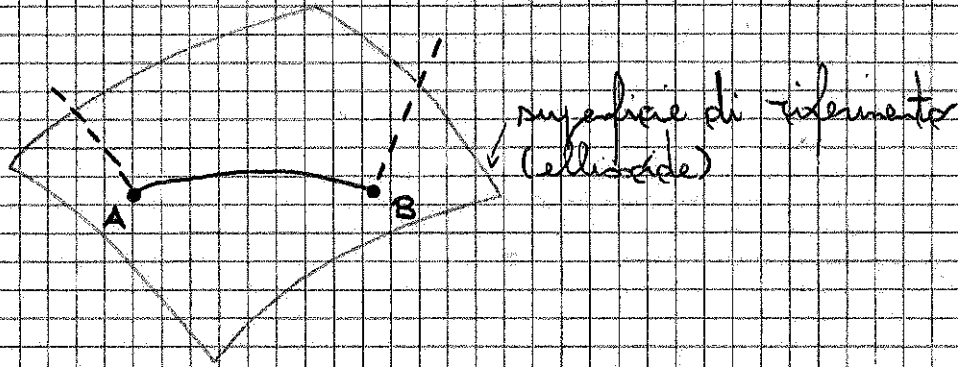
Risulta:

$$r = \frac{a \cos \varphi}{W}$$

$$N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a \cos \varphi}{W} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{a}{W}$$

$$N = \frac{a}{W}$$

SEZIONI NORMALI e GEODETICHE



L'unica della congiungente a due punti si avrà tracciando una linea particolare \rightarrow **GEOMETICA** linea appartenente alla superficie di rivoluzione che gode della proprietà di essere in ogni suo punto la normale alla linea coincidente con la normale alla superficie.

ES - Geodetica della sfera: la linea sarebbe un arco di cerchio massimo.

\rightarrow Superficie più complessa: ELLISSOIDE

1 un meridiano è contemporaneamente sia una sezione normale che una geodetica.

a) è una sezione normale perché il piano π, Z che lo definisce, contiene solo normali all'ellissoide;

b) è una geodetica perché in tutti i punti del meridiano, coincide con la normale all'ellissoide e la normale alla linea.

2 il parallelo non è né una sezione normale né una geodetica

a) in ciascun punto che definisce un parallelo, la normale alla superficie (ellissoide) non coincide con la normale alla linea, ma forma un angolo con la latitudine;

b) solo all'equatore le due normali coincidono e quindi l'equatore come il meridiano, sarà contemporaneamente sia una sezione normale che una geodetica.

\rightarrow Vedi figure \rightarrow

EQUAZIONI DELLE GEODETICHE (dalla definizione alle formule [eq. diff.])

superf. generica: $\Phi(X, Y, Z) = 0$

coseni direttori: $\frac{1}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \frac{1}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial Y}, \frac{1}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial Z}$ dove $N = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\right)^2}$

linea appartenente alla superficie.

eq. parametriche $\begin{cases} X = X(s) \\ Y = Y(s) \\ Z = Z(s) \end{cases} \rightarrow$ i coseni direttori valgono: $\frac{1}{K} \frac{d^2 X}{ds^2}, \frac{1}{K} \frac{d^2 Y}{ds^2}, \frac{1}{K} \frac{d^2 Z}{ds^2}$

Per imporre che tale linea sia da geodetica della superficie scelta, da

~~due normali definite dalle coordinate~~ \rightarrow Relazioni:

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial X}}{\frac{d^2 X}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial Y}}{\frac{d^2 Y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial Z}}{\frac{d^2 Z}{ds^2}}$$

1° eq. diff. $\frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{d^2 Y}{ds^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \frac{d^2 X}{ds^2} = 0$

$\Phi(X, Y, Z) = 0 \rightarrow$ sup. ellissoide di rotazione eq. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{1 - e^2}$$

$$X^2 + Y^2 + \frac{a^2}{c^2} Z^2 - a^2 = 0$$

$$X^2 + Y^2 - \left(a^2 - \frac{a^2}{c^2} Z^2\right) = 0$$

$$\Phi(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - \left(a^2 - \frac{Z^2}{1 - e^2}\right) = 0$$

A partire da questa equazione risulta: $\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 2X$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 2Y$

Sostituendo tali relazioni nella eq. diff. considerata si ottiene:

$$X \frac{d^2 Y}{ds^2} - Y \frac{d^2 X}{ds^2} = 0 \rightarrow \frac{d}{ds} \left(X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds} \right) = 0$$

integrando si ottiene: $X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds} = \text{cost.}$

Questo teorema è molto importante perché permette di definire con semplicità l'andamento delle linee geodetiche su una superficie di rotazione.

Ad esempio, se da un punto P esce una geodetica con asinuit $\alpha = 50^\circ$ (cioè si sviluppa in direzione Nord Est), l'asinuit creata una linea che al punto sulla geodetica si allontana da P , un quarto al raggio del parallelo corrispondente.

SVILUPPI DI PUISEUX - WEINGARTEN:

Consentono di determinare le coordinate X, Y, Z di un punto P appartenente ad una geodetica, in un riferimento euleriano $[O, XYZ]$ la cui origine appartiene alla geodetica considerata, in funzione dell'arco di geodetica s che unisce O e P e dell'asinuit α di tale geodetica nel punto O .

Per TERNA EULERIANA si intende una terna ortogonale contenuta ante l'asse Z

coincidente con la normale all'ellissoide in O ,

l'asse Y coincidente con la tangente al meridiano passante per O e

l'asse delle X coincidente con la tangente al parallelo in O .

Gli sviluppi di Puisseux - Weingarten servono a localizzare le distanze delle proprietà di curvatura della geodetica e a caratterizzare il grado di approssimazione raggiungibile, in relazione alla distanza, nella soluzione dei più importanti problemi di Geodesia operativa.

MISURE TOPOGRAFICHE. Incongruenze tra teoria e pratica.

- Il teodolite non è in grado di operare secondo la definizione data di geodetica, ma può individuare esclusivamente delle sezioni piane.
- Le misure topografiche equivalgono a misure eseguite sull'ellissoide fra sezioni oblique.

→ Le misure topografiche eseguibili nella realtà operativa, sono le seguenti:

1) DISTANZA FRA DUE PUNTI

Considerati due punti A e B sulla superficie terrestre, gli strumenti e i metodi di misura impiegati permettono di definire la lunghezza dell'arco di sezione normale che congiunge le proiezioni A' e B' sulla superficie di riferimento.

N.B. la sezione normale individuata tra i due punti non è unica.

2) ANGOLO AZIMUTALE

Considerati due punti A e B e un terzo punto S (punto di stazione del teodolite), l'angolo azimutale ASB, che si può misurare è l'angolo fra le sezioni normali SA e SB.

3) AZIMUT DI UN PUNTO

Considerati due punti A e B, l'azimut di B rispetto a A, misurabile con osservazioni astronomiche o con teodoliti geodetici, è l'angolo che la sezione normale AB forma con la tangente al meridiano in A diretta verso Nord.

N.B. Azimut in senso orario $[0, 2\pi]$

TEOREMI DELLA GEODESIA OPERATIVA

Ogni qualunque misura di azimut, angolo o distanza eseguita con
metodi e dispositivi di topografia più intensiva eseguita con riferi-
mento ad archi di geodesiche dell'ellissoide di riferimento



Consideriamo due punti sull'ellissoide P e Q , l'arco di sezione
normale N' che li congiunge avente azimut α' e l'arco s di geodesica
che li congiunge di azimut α .

Per archi di alcune centinaia di chilometri, trascurando termini
dell'ordine di $(s/N)^3$ su più dimensioni, utilizzando gli sviluppi
di Poincaré - Koenigs da seguente relazione:

$$\frac{N' - N}{N} = \frac{1}{360} \cdot \frac{N^2}{R^2} \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi$$

Per $s = 1000$ km, la quantità sopra riportata è dell'ordine di 10^{-6}
(circa 0,1 mm al chilometro). Poiché i metodi di misura utilizzati
non consentono di raggiungere precisioni superiori a $10^{-6} - 10^{-7}$ e
perfettamente giustificato ritenere che misure eseguite secondo archi
di sezione normale danno gli stessi risultati delle misure eseguite
secondo archi di geodesica.

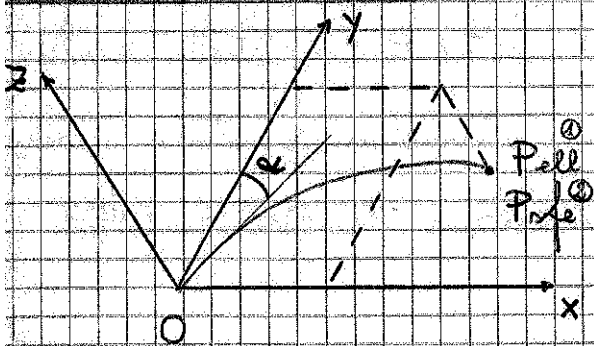
Per quanto riguarda la differenza tra i due azimut (il primo
sul geode e l'equivalente sull'ellissoide), sempre ricorrendo agli
sviluppi in serie di Poincaré - Koenigs, si può dimostrare che
vale la seguente relazione: $\alpha' - \alpha = \frac{s^2}{12NR^2} \frac{e^2}{1 - e^2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$

ESECUZIONE DEI CALCOLI SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

- Riduzione del problema con gli algoritmi propri della trigonometria ellissodica.
- 10^{-2} quantità piccola del primo ordine.
- archi di geodetica < 100 km: i calcoli eseguiti con gli algoritmi della trigonometria sferica risultano "praticamente uguali" a quelli che si otterrebbero usando la trigonometria ellissodica.
- archi di geodetica < 15 km: i risultati che si ottengono con la trigonometria piana sono "praticamente uguali" a quelli che si otterrebbero con la trigonometria ellissodica.

NB. Si definiscono "praticamente uguali" i risultati di due calcoli eseguiti con algoritmi diversi, tutte le volte che la differenza non è decisamente inferiore alle incertezze derivanti dalle misure.

CAMPO GEODETICO.



- ① la geodetica OPell sta sull'ellissoide.
- ② la geodetica OPsf sta sulla sfera.

Il sistema di riferimento locale, cioè la terna euleriana, non ha subito spostamenti a seguito della sostituzione dell'ellissoide con la "sfera locale" e quindi si possono calcolare le coordinate euleriane del nuovo punto Pofs con le stesse relazioni di Poincaré - Wengert.

② Gli scostamenti tra ellissoide e sfera locale diventa sensibile in braccio differente per la Z e per le coordinate planimetriche (X e Y).

→ a 15 km dall'origine lo scostamento Z è di 60 mm, mentre è praticamente nullo per la X e la Y .

→ a 100 km dall'origine, lo scostamento Z è superiore ai 2,6 m e quindi inaccettabile, mentre quello in X e Y è solo di 28 mm.



CAMPO GEODETICO quell'intervallo dell'origine locale O entro il quale sarà possibile approssimare l'ellissoide con una sfera tangente (sfera locale) e quindi risolvere tutti i problemi di calcolo semplicemente con la tangente sferica.

Naturalmente questo intervallo è differente per le coordinate planimetriche (X e Y) e per la Z ; nel primo caso sarà di 100 km e nel secondo caso di 15 km.

Il massimo delle differenze si ha per:

- $\varphi = 0$;
- $\alpha = 0$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Gli scostamenti tra sfera locale e piano tangente assumono valori diversi per la Z e per le coordinate planimetriche (X e Y).

→ a 100 km dall'origine lo scostamento Z è di 1 mm, mentre è nullo per la X e Y .

→ a 15 km dall'origine, lo scostamento Z è superiore ai 17,6 cm e quindi inaccettabile, mentre quello in X e Y è solo di mm.



Campo topografico: quell'intervallo dell'origine locale O entro il quale sarà possibile approssimare la sfera locale con un piano tangente e quindi risolvere tutti i problemi di calcolo con la tangente piano.

→ Questo intervallo è significativo solo per le coordinate planimetriche e vale 15 km.

→ Invece per quanto riguarda la Z , NON si può mai approssimare la sfera locale con il piano tangente perché l'errore che si commette è sempre maggiore della precisione strumentale e quindi per quanto riguarda l'altimetria NON è definibile un "campo topografico".

Errore massimo ammissibile $10^{-6} \rightarrow (l/R)^4 \leq 10^{-6}$ si può dedurre che i lati del triangolo sferico non devono eccedere i 200 km circa

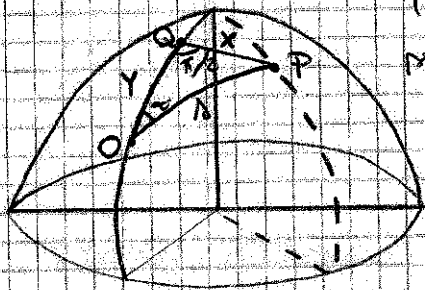
↓
Il teorema di Legendre può essere applicato a tutti i triangoli contenuti nel campo geodetico

$$\left(\frac{l}{R}\right)^4 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ da cui } l \approx 200 \text{ km}$$

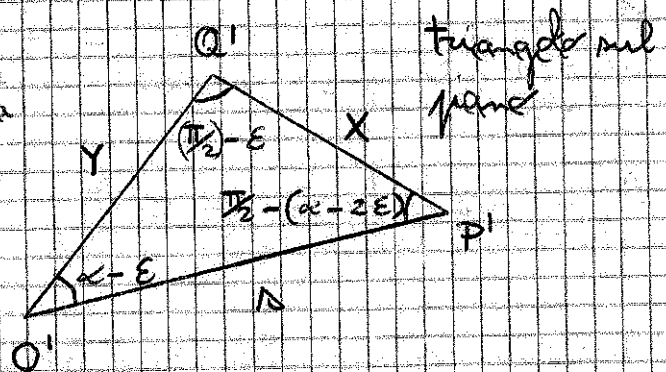
COORDINATE GEODETTICHE POLARI E RETTANGOLARI

Mentre le coordinate geografiche φ, λ (lat, long) definiscono la posizione assoluta di un punto P sull'ellissoide, i valori r (distanza piana) e α (azimut) definiscono la posizione relativa di P rispetto ad un altro punto O dell'ellissoide preso come origine, r e α sono quindi coordinate locali e vengono chiamate COORDINATE

COORDINATE POLARI



Triangolo sulla sfera ideale



Triangolo sul piano

Un'altra modo per definire la posizione relativa di P rispetto ad un altro punto dell'ellissoide è rappresentata dalle coordinate geodetiche rettangolari X e Y.

- O: origine del sistema di riferimento locale.
- X: coord. geodetica rettangolare \rightarrow l'asse di geodetica PQ.
- Y: coord. geodetica rettangolare \rightarrow l'asse di meridiana OQ.

$$3E = \frac{D^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2PN} \quad (\text{eccome spesso})$$

Per ricavare le relazioni inverse, si procede nel seguente modo:

supponendo:
$$\begin{cases} X = D \sin(\alpha - E) \\ Y = D \cos(\alpha - 2E) \end{cases}$$

$$X = D \sin(\alpha - E) = D(\sin \alpha \cos E - \cos \alpha \sin E)$$

$$Y = D \cos(\alpha - 2E) = D(\cos \alpha \cos 2E + \sin \alpha \sin 2E)$$

a meno di termini in E^2 :

$$\cos E \approx \cos 2E \approx 1$$

$$\sin E \approx E$$

$$\sin 2E \approx 2E$$

inoltre:

$$\begin{cases} X = D \sin \alpha - E D \cos \alpha \\ Y = D \cos \alpha + 2E D \sin \alpha \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} X = D \sin \alpha - E(Y - 2E D \sin \alpha) \\ D \cos \alpha = Y - 2E D \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} * \\ \uparrow \text{rettitudine} \end{matrix}$$

$$* X = D \sin \alpha - EY + 2E^2 D \sin \alpha = D \sin \alpha - EY \rightarrow D \sin \alpha = X + EY$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} D \sin \alpha = X + EY \\ Y = D \cos \alpha + 2E(X + E D \cos \alpha) = D \cos \alpha + 2EX + 2E^2 D \cos \alpha \end{cases} *$$

$$* Y = D \cos \alpha + 2EX \rightarrow D \cos \alpha = Y - 2EX$$

In definitiva quindi si avrà:

$$\begin{cases} D \sin \alpha = X + EY \\ D \cos \alpha = Y - 2EX \end{cases}$$

da cui si ricavano le seguenti relazioni che esprime il passaggio dalle coordinate geodetiche rettangolari a quelle planimetriche.

$$D = \sqrt{(X + EY)^2 + (Y - 2EX)^2}^{1/2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{X + EY}{Y - 2EX}$$

(eccome spesso) $3E = \frac{X \cdot Y}{2PN}$

DEFINIZIONI / FORMULE:

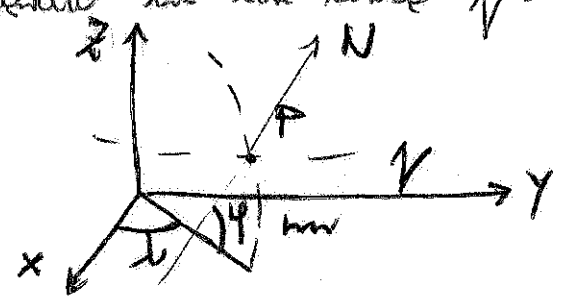
1) **GEOIDE**: superficie che in ogni punto è normale alla direzione della verticale e coinciderebbe con la superficie dei mari, opportunamente prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua avesse la stessa temperatura, la stessa densità e non esistessero le perturbazioni dovute alle correnti, ai venti e alle maree.

2) **LATITUDINE φ** del punto P : angolo acuto che la normale N forma con il piano equatoriale $[XY]$ con segno concorde all'asse Z .

3) **LONGITUDINE λ** del punto P : angolo diedro che il semipiano meridiano passante per P forma con un semipiano meridiano origine (\cong piano ZX) estato in un senso positivo.

= latitudine \rightarrow PARALLELI

= longitudine \rightarrow MERIDIANI



φ, λ : sistema di coordinate curvilinee superficiali

COORDINATE GEOGRAFICHE
ELLISSOIDICHE

4) **SVILUPPI DI PUISEUX-WEINGARTEN**: esprimere le coordinate euleriane (x, y, z) di un punto in funzione delle sue coordinate geodetiche (ρ, σ) (arco di geodetica) e α azimutale.

5) **GEODETICA**: linea appartenente alla superficie di riferimento che gode della proprietà di avere in ogni suo punto la normale alla linea coincidente con la normale alla superficie.

DIMOSTRAZIONI :

① EQ. PARAMETRICHE ELLISSOIDE :

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\cos \varphi = k \frac{\partial f}{\partial z} = k \frac{2z}{a^2}$$

$$\cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi = k \frac{\partial f}{\partial z} = k \frac{2z}{c^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{z} \frac{a^2}{c^2}$$

$$z = z \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{c^2}{a^2} = z \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (1 - e^2)$$

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{z^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2}{c^2} = 1$$

$$z^2 + \frac{a^2}{c^2} \cdot z^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2 = a^2$$

$$z^2 \cdot [1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2] = a^2$$

$$z^2 = \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi}_1}$$

$$z = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi}{w}$$

$$z = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (1 - e^2) = \frac{a \cdot \sin \varphi \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cdot \sin \varphi \cdot (1 - e^2)}{w}$$

$$x = z \cos \varphi ; y = z \sin \varphi$$

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi \cos \varphi}{w} \\ y = \frac{a \cos \varphi \sin \varphi}{w} \\ z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{w} \end{cases}$$

③ EQUAZIONI DELLE GEODETICHE:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - \left(a^2 - \frac{z^2}{1-e^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y$$

$$x \frac{d^2y}{ds^2} - y \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad \leftarrow \quad \frac{d}{ds} \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \text{cost}$$

$$x = x(s) = r \cos l \quad ; \quad y = y(s) = r \sin l$$

$$\frac{dx}{ds} = -r \sin l \frac{dl}{ds} + \cos l \frac{dr}{ds} = -y \frac{dl}{ds} + \cos l \frac{dr}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = r \cos l \frac{dl}{ds} + \sin l \frac{dr}{ds} = x \frac{dl}{ds} + \sin l \frac{dr}{ds}$$

$$x^2 \frac{dl}{ds} + x \sin l \frac{dr}{ds} + y^2 \frac{dl}{ds} - y \cos l \frac{dr}{ds} = \text{cost}$$

$$(x^2 + y^2) \frac{dl}{ds} + (x \sin l - y \cos l) \frac{dr}{ds} = \text{cost}$$

$$r^2 \frac{dl}{ds} + (r \cancel{\cos l} \sin l - r \cancel{\sin l} \cos l) \frac{dr}{ds} = \text{cost}$$

$$r^2 \frac{dl}{ds} = \text{cost}$$

④ COORDINATE GEODETICHE POLARI e RETTANGOLARI:

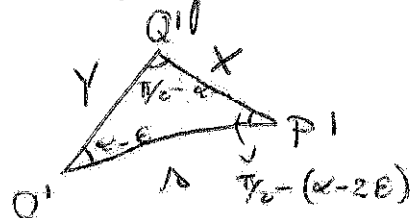
A Coordinate geografiche $\varphi, \lambda \rightarrow$ definiscono la posizione assoluta di un punto P sull'ellissoide.

B Coordinate geodetiche planari \rightarrow definiscono la posizione relativa di P rispetto ad un altro punto O dell'ellissoide preso come origine.
 (D): distanza planare
 (α): azimuth

C Coordinate geodetiche rettangolari X, Y

① CASO: Da coord. geod. planari a coord. geod. rettangolari:

$$\frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - 2\epsilon)\right]} = \frac{D}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}$$



$$\frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{D}{\cos \epsilon}$$

$$\cos \epsilon = 1 - \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) + \dots$$

transcurabile

$$\begin{cases} X = D \cdot \sin(\alpha - \epsilon) \\ Y = D \cdot \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases}$$

$$3\epsilon = \frac{D^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2PN}$$

Da coord. geod. rettangolari a coord. geod. planari:

② CASO: $\begin{cases} X = D \cdot \sin(\alpha - \epsilon) \\ Y = D \cdot \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases}$

RICORDA:

$$\begin{aligned} \cos \epsilon &\cong \cos 2\epsilon \cong 1 \\ \sin \epsilon &\cong \epsilon \\ \sin 2\epsilon &\cong 2\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X = D \cdot \sin(\alpha - \epsilon) = D \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \epsilon - \cos \alpha \cdot \sin \epsilon) \\ Y = D \cdot \cos(\alpha - 2\epsilon) = D \cdot (\cos \alpha \cdot \cos 2\epsilon + \sin \alpha \cdot \sin 2\epsilon) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = D \cdot \sin \alpha - \epsilon D \cos \alpha \\ Y = D \cos \alpha + 2\epsilon D \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} X = D \sin \alpha - \epsilon (Y - 2\epsilon D \sin \alpha) \\ Y - 2\epsilon D \sin \alpha = D \cos \alpha \end{cases}$$

$$X = D \sin \alpha - \epsilon Y + 2\epsilon^2 D \sin \alpha = D \sin \alpha - \epsilon Y \rightarrow \boxed{D \sin \alpha = X + \epsilon Y}$$

ELEMENTI DI CARTOGRAFIA:

• Punti della superficie dell'ellissoide / Punti sul piano della carta \rightarrow PROIEZIONE CARTOGRAFICA.

1) PROIEZIONI GEOMETRICHE

2) PROIEZIONI ANALITICHE

3) PROIEZIONI PROSPETTICHE: ottenute tramite la proiezione da un punto dello spazio (C) di una porzione della superficie di riferimento (ellissoide) su di un piano (piano della carta).

4) PROIEZIONI PER SVILUPPO: da superficie di riferimento (ellissoide) si proietta su una superficie ausiliaria (cono e cilindro) che, a sua volta, sarà sviluppabile sul piano.

• PROIEZIONE CONFORME & ISOGONICA: deformazione angolare nulla
[$\delta = 0$]

• PROIEZIONE EQUIVALENTE: deformazione superficiale pari all'unità.
[$m_0 = 1$]

• PROIEZIONE AFILATTICA: tutti i tipi di deformazioni (m_l, m_G, δ) mantenute nei limiti più piccoli possibili.

SÌ CARTE CONFORMI, CARTE EQUIVALENTI.

NO CARTE EQUIDISTANTI. [$m_l = 1$]

TIPOLOGIE DI CARTE: 1) Mercatore (1569)
2) Gauss \rightarrow cartografia scandinava

RICORDA: Proiezione stereografica piana (per latitudini $\pm 80^\circ$ a $\pm 90^\circ$)

ERRORE DI GRAFICISMO: 0,2 mm

2.2. DETERMINAZIONE ANALITICA DEI MODULI DI DEFORMAZIONE

Le funzioni che definiscono la rappresentazione dell'ellissoide sul piano cartografico sono del tipo:

$$\begin{cases} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad [2]$$

e passando ai differenziali totali:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad [3]$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \quad [4]$$

Per il modulo di deformazione lineare avremo:

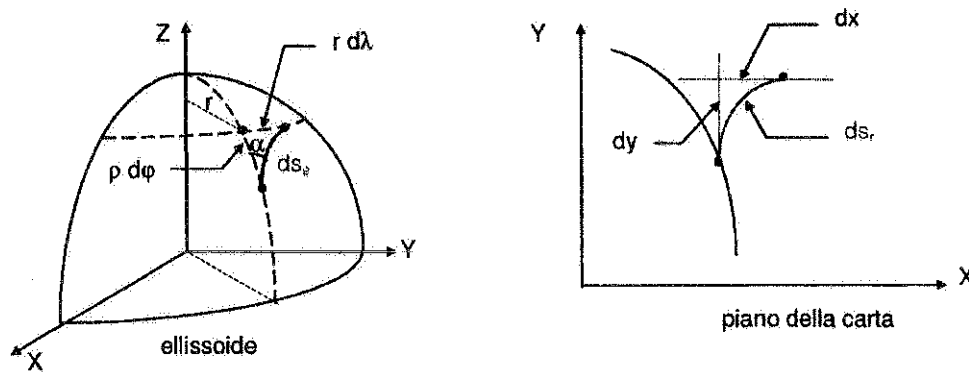


Fig. 2.6 - Elemento lineare infinitesimo e la sua trasformata

$$\begin{aligned} rd\lambda &= ds_r \sin \alpha & ds_r^2 &= dx^2 + dy^2 \\ \rho d\varphi &= ds_r \cos \alpha & & \end{aligned} \quad [5]$$

e quindi:

$$\begin{aligned} d^2x &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d^2\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 d^2\lambda + 2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\varphi d\lambda \\ d^2y &= \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d^2\varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 d^2\lambda + 2 \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\varphi d\lambda \end{aligned} \quad [6]$$

da cui le relazioni risultanti dal triangolo infinitesimo sul piano della rappresentazione sono:

$$d^2s_r = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right] d^2\varphi + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \right] d^2\lambda + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\varphi d\lambda \quad [7]$$

indicando con le lettere e, f, g le espressioni racchiuse tra parentesi quadra, avremo:

$$d^2s_r = e d^2\varphi + 2f d\varphi d\lambda + g d^2\lambda \quad [8]$$

$$dp = rd\lambda m_1 = rd\lambda \frac{\sqrt{g}}{r} = d\lambda \sqrt{g} \quad [14]$$

La superficie infinitesima $d\sigma_r$ sulla cartografia dalla [12] sarà quindi pari a:

$$d\sigma_r = dp \cdot dm \cdot \sin \omega = d\varphi d\lambda \sqrt{eg} \sin \omega$$

e quindi il modulo di deformazione areale:

$$m_\sigma = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e} = \frac{d\varphi d\lambda \sqrt{eg} \sin \omega}{\rho r d\varphi d\lambda} = \frac{\sqrt{eg}}{\rho r} \sin \omega \quad [15]$$

La **deformazione angolare** è stata definita come $\delta = \alpha' - \alpha$ e quindi esplicitando tali grandezze sul piano cartografico avremo:

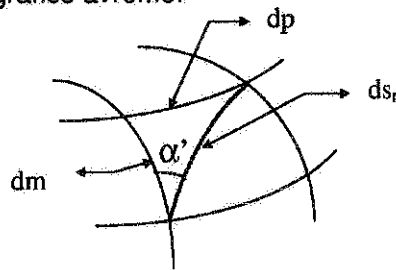


Fig. 2.9 - Trasformata di un elemento lineare infinitesimo sulla carta

$$\tan \alpha' = \frac{dp}{dm} = \frac{\sqrt{g} d\lambda}{\sqrt{e} d\varphi} = \sqrt{\frac{g}{e}} \frac{d\lambda}{d\varphi} \quad [16]$$

calcoliamo ora il termine $\frac{d\lambda}{d\varphi}$

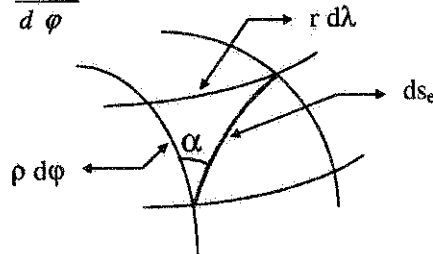


Fig. 2.10 - trasformata di un elemento lineare infinitesimo sull'ellissoide

Dalla Fig. 2.10 si ricavano le seguenti relazioni:

$$r d\lambda = ds_e \sin \alpha \quad \text{da cui} \quad d\lambda = \frac{ds_e \sin \alpha}{r}$$

$$\rho d\varphi = ds_e \cos \alpha \quad \text{da cui} \quad d\varphi = \frac{ds_e \cos \alpha}{\rho}$$

e quindi:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} \tan \alpha$$

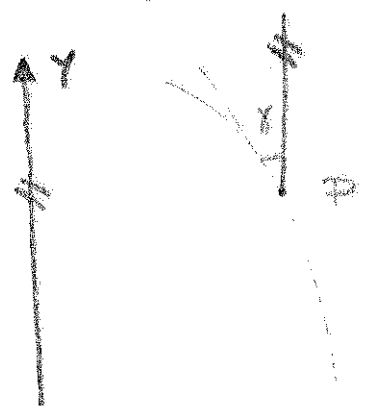
MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE NELLA CARTA DI GAUSS:

moduli lungo il parallelo, λ è la differenza di longitudine
 e φ è la latitudine

$$mbl = 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{2} \quad (\text{long. } \lambda; \text{ lat. } \varphi)$$

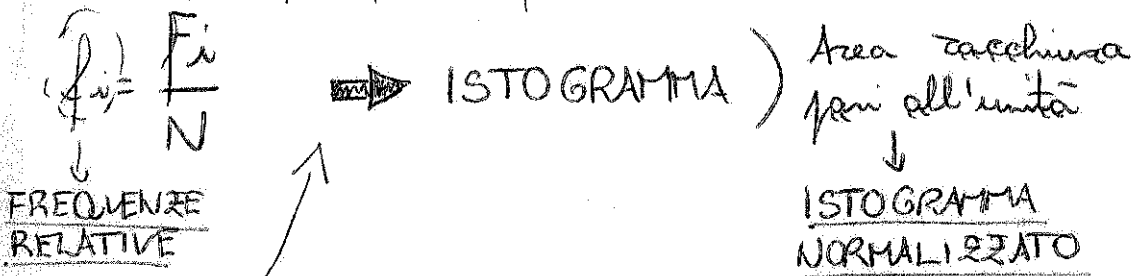
$$mbl = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} \quad (x)$$

CONVERGENZA θ DEL MERIDIANO NELLA CARTA DI GAUSS



Angolo formato tra la tangente del meridiano e la parallela all'asse Y.

$$X \begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_m \end{cases} \quad \sum_{i=1}^m f_i = 1$$



VARIABILE STATISTICA

• Funzione cumulativa di frequenza e funzione di distribuzione

$$C \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ G_1 = \frac{F_1}{N} & G_2 = \frac{F_1 + F_2}{N} & \dots & G_m = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_m}{N} \end{cases}$$

) Doppia necessaria in corrispondenza biunivoca

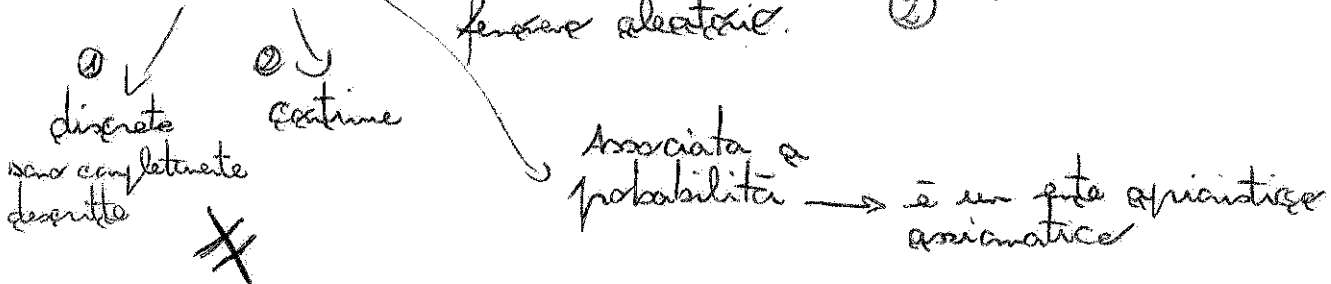
• Diagramma cumulativo delle frequenze e diagramma di distribuzione: è l'integramma della funzione cumulativa di frequenza.

- MODA: è quel valore argomentale per cui è massima la frequenza.
- MEDIANA: è quel valore argomentale che divide l'integramma in due parti uguali.

VARIABILE CASUALE: è la distribuzione che definisce un fenomeno aleatorio ①

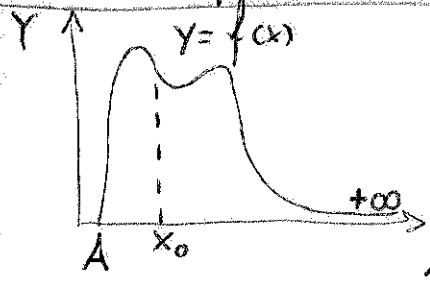
$$X \begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_m \end{cases} \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1$$

VARIABILE CASUALE: modello matematico di fenomeno di un fenomeno aleatorio. ②

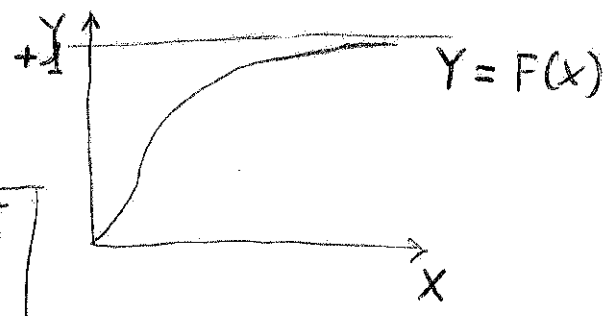


VARIABILE STATISTICA → associata alla frequenza → è un indice che misura e sintetizza i risultati di una indagine statistica.

- funzione di distribuzione $F(x)$
- densità di probabilità $y = f(x)$



VARIABILE CASUALE CONTINUA



DISTRIBUZIONE

VARIABILE STATISTICA e CASUALE A DUE DIMENSIONI:

② ATTRIBUTI

INDIVIDUI RAGGRUPPATI IN CLASSI



1) MEDIA: (della X)

$$m_1(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^d x_i f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i \sum_{k=1}^d f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i v_i$$

2) VALORE QUADRATICO MEDIO: (della X)

$$m_2(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^d x_i^2 f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i^2 \sum_{k=1}^d f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i^2 v_i$$

3) VARIANZA: (della X)

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^d (x_i - m_1(x))^2 f_{ik} = \sum_{i=1}^r (x_i - m_1(x))^2 \sum_{k=1}^d f_{ik} = \\ &= \sum_{i=1}^r (x_i - m_1(x))^2 v_i \end{aligned}$$

4) MOMENTO MISTO: $m_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^d x_i y_k f_{ik}$

5) COVARIANZA: momenti misti rispetto alle medie

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^d (x_i - m_1(x)) (y_k - m_1(y)) f_{ik}$$

Relazione:
 $\rightarrow \sigma_{xy} = m_{xy} - m_1(x) m_1(y)$

MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{matrice} \\ \text{quadrata} \\ \text{simmetrica} \end{array}$$

DISTRIBUZIONI: possono essere considerate come un MODELLO MATEMATICO. (6)

1) Bernoulli ($n \approx 1700$) \rightarrow DISTRIBUZIONE BINOMIALE: consente di prevedere come si distribuiscono i risultati di prove aleatorie ripetute eseguite su una popolazione caratterizzata da due soli valori angementali.

De Moivre

2) Laplace, Gauss (fine XVII sec) \rightarrow DISTRIBUZIONE NORMALE

3) S.D. Poisson (1837) \rightarrow DISTRIBUZIONE POISSONIANA

N.B. Scegliere il modello matematico che descrive meglio il fenomeno.

→ Nuova variabile: Z ("standardizzata")

$$Z = \frac{x - m}{\sigma} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma} \quad dx = \sigma dz$$

DISTRIBUZIONE STANDARDIZZATA: $\begin{cases} m = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$

$$P(a \leq Z \leq b) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(z) dz \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

L'integrale è indipendente dai parametri m e σ^2 .

↓
Sia da calcolare una volta per tutte.

$m - \sigma \leq x \leq m + \sigma$	$2 \cdot G(1)$
$m - 2\sigma \leq x \leq m + 2\sigma$	$2 \cdot G(2)$
$m - 3\sigma \leq x \leq m + 3\sigma$	$2 \cdot G(3)$

Perché
simmetrico

TEOREMI INERENTI LA DISTRIBUZIONE DI GAUSS:

- Teorema centrale della statistica e teorema fondamentale della convergenza statistica e teorema di Laplace - Chebyscheff - Hiyounoff:

[Qualunque siano le distribuzioni delle variabili indipendenti soggette ad alcune condizioni molto generali, la variabile somma è asintoticamente normale.]

Il teorema centrale della statistica dà una spiegazione del perché, in un gran numero di applicazioni, si trovano distribuzioni che sono almeno approssimativamente normali.

N.B. gli errori accidentali di misura, entro i limiti previsti dal teorema, possono essere considerati e trattati come una variabile casuale di tipo normale.

per	$\lambda = 2$	$n_m = 26x$	$f^* \geq 1 - \frac{1}{4} \geq 0,75$	75%
per	$\lambda = 3$	$n_m = 36x$	$f^* \geq 1 - \frac{1}{9} \geq 0,89$	89%

- Stima: valore numerico che verrà associato a m e σ .
- Stimatore: relazione analitica che consente di definire la stima.



Misurare direttamente una grandezza significa individuare il modello matematico (la distribuzione) che la rappresenta adeguatamente e stimare i parametri della popolazione (media e varianza).

Una buona stima deve essere:

- 1) consistente: $n \rightarrow \infty$, il campione utilizzato tende al valore teorico del parametro stimato.
- 2) non affetto da errori sistematici.
- 3) efficiente: varianza minima

La probabilità di uscita dell'intero campione X_1, X_2, \dots, X_m è massima quando è minimo l'esponente dell'esponentiale.

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 = \text{min}$$

che per $\sigma^2 = \text{COSTANTE}$ diventa

$$\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 = \text{min}$$

PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI.

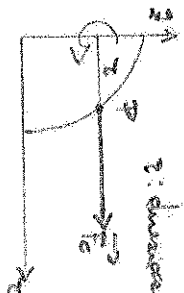
N.B.

Se la $f(x)$ è una distribuzione gaussiana, il principio di massima verosimiglianza conduce al principio dei minimi quadrati e la diretta applicazione di questo principio porta alla determinazione della stima più plausibile del parametro

media:
$$\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 = \text{min}$$

$\vec{E} = \vec{v}$
 $\vec{F}_M \rightarrow V$
 $\vec{g} \rightarrow W$

Velocità $\vec{g} = \text{grad } W$
 $\frac{\partial W}{\partial x} = \vec{g}_x$
 $\frac{\partial W}{\partial y} = \vec{g}_y$
 $\frac{\partial W}{\partial z} = \vec{g}_z$



$\frac{dv}{dt} = \vec{F}_0$
 $v = \int \omega^2 z \, dz = \frac{1}{2} \omega^2 z^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$
 $r^2 = (x^2 + y^2)$

Energia centrifuga: $\vec{F}_0 = m_0 \omega^2 z$ $v = \frac{1}{2} \omega^2 z^2$

Energia Newtoniana - $\vec{F}_M = G \iiint \frac{dm}{r^2}$ $V = G \iiint \frac{dm}{r}$

Energia di gravità \vec{g} W
 $W = V(x, y, z) + v(x, y) = \text{const.} - (V + v)$

la densità, equidensità del pozzo gravitazionale che genera \vec{g} di punto in punto fino all'infinito del livello medio del mare, in alcune ipotesi.

→ a q questa semplificazione da ottenere → somma per l'energia
 occorre trovare
 → equazione di Poisson $V(x, y, z) \rightarrow$ integrale
 cui scopo è cercare di trovare densità, dopo per mettere
 la densità potenziale con la \vec{g} e \vec{v} .

$dm = \rho \, dV$
 $d\vec{r} = G \frac{dm}{r^2}$



$\frac{\partial V}{\partial x} = d\vec{r}_x$
 $dV = \int d\vec{r}_x \, dx = \int G \frac{dm}{r^2} \, dx = G \frac{dm}{r}$
 $V(x, y, z) = G \iiint \frac{dm}{r}$

1 Sistema
 geocentrico:

• EQ. SFEROIDE:
 1 Grad. \vec{g} plan. SCHWARZSCHILD
 $g = a \cdot (1 - \cos^2 \psi) \rightarrow v = \frac{a \cdot g}{a \cdot \cos^2 \psi} = 4 - \frac{g}{a}$
 $(v^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = a \cdot (1 - \cos^2 \psi)^{1/2} \cdot \frac{a^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

a) Densità
 sferica

c) densità
 variabile

α^2

• EQ. ELLISSOIDE:
 2 Sistema geocentrico:
 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
 $g = a \cdot (1 - \alpha^2)$
 $g^2 = a^2 \cdot (1 - \alpha^2)^2 = a^2 \cdot (1 + \alpha^2 - 2\alpha^2)$
 $\alpha^2 = 4/300 \rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 \cdot (1 - 2\alpha)$
 $x^2 + y^2 + z^2 = (1 - 2\alpha)^{-2} = \alpha^2$
 2. Sott. - coord. ipoc. $\frac{g}{a} = \frac{g^2}{a^2} = \alpha^2 \cdot \psi$
 $g^2 = \alpha^2 \cdot (1 - 2\alpha)^2 \cdot \frac{a^2}{a^2}$
 $g = a \cdot (1 - 2\alpha)^{-1/2} \cdot \frac{a^2}{(1 - 2\alpha)^2}$
 $g = a \cdot (1 - 2\alpha)^{-5/2}$

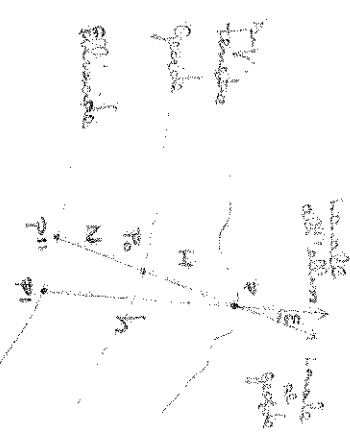
$W = V + v \rightarrow V = V' + T$ T: potenziale variabile $g \gg 3$
 $W = V' + v + T$

$W = U + T$ → U: potenziale variabile $(W + v)$

$\vec{r} = \text{grad } U$
 $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \vec{g}_x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \vec{g}_y \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \vec{g}_z \end{cases}$ GRAVITÀ
 variabile

$|\vec{g}| - |\vec{g}'| = \text{ANOMALIA DI GRAVITÀ}$

E densità variabile
 PPR-H. OUTFA
 PPR-H. ALTERAZIA ELLISSOIDICA
 ADVAZIAZIOE DEL
 h-H-H-N GEODE



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

A.A. 2010/2011

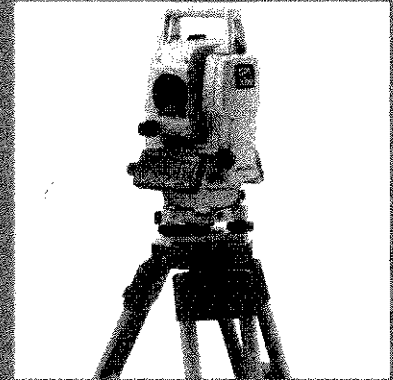
Corso di topografia I: 01IKWEV

Docente: Prof. A. Cina

Assistente: Ing. E. Agosto

Allievo: Frison Corrado

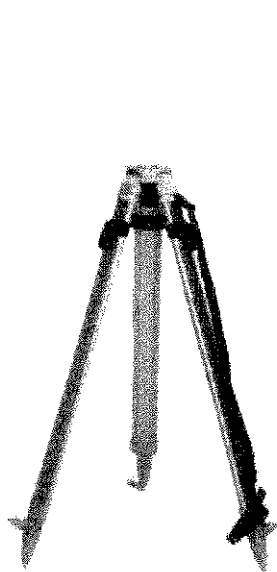
Matricola: 162456



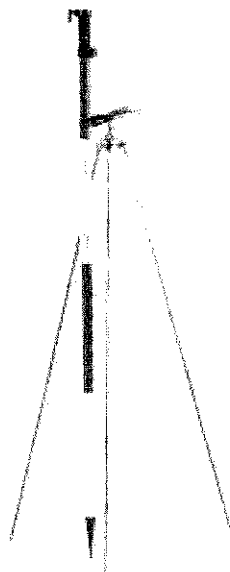
ESERCITAZIONE ESTERNA DI TOPOGRAFIA I

OGGETTO:

Rilievo di una poligonale chiusa con stazione totale.



Treppiedi in alluminio standard



Treppiede Modello o "Pizzo"



asta portaprisma estensibile fino 5mt



Prisma circolare

Giugno 2011

RILIEVO DI UNA POLIGONALE CHIUSA

II ESERCITAZIONE ESTERNA

Introduzione

La seconda esercitazione esterna consiste nell'operazione di rilevamento di una piazza con più punti di stazione, in modo da ottenere, ad esercitazione ultimata con tutti gli altri gruppi, una poligonale chiusa.

Con lo strumento sono stati collimati i seguenti punti:

- Punto indietro (punto I nel caso del gruppo).
- Punto avanti (punto H nel caso del gruppo).
- Punti adiacenti al punto di stazione (punto P) scelti a piacere.

Nell'operazione di misurazione un operatore è situato nel punto di stazione, allo strumento (fase di lettura), mentre l'altro varia continuamente la sua posizione con l'accessorio palina – prisma, in base ai punti da collimare.

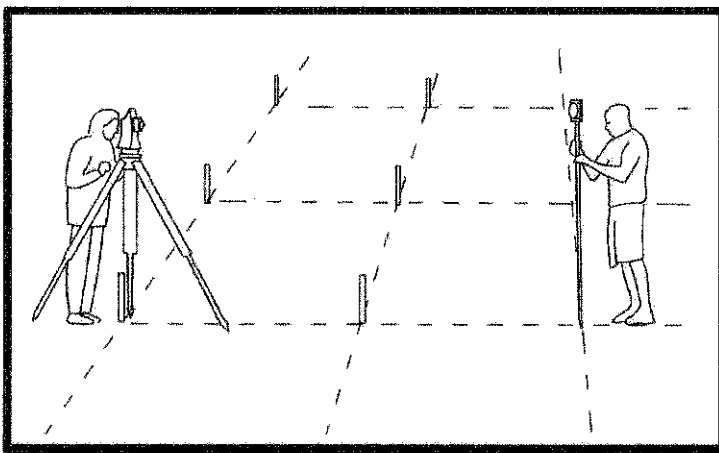


Figura 1 - 2: operatori in fase di misurazione con i relativi strumenti.

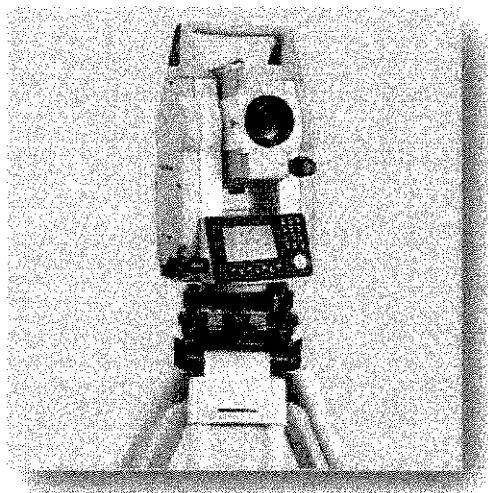


Figura 3: strumento impiegato nell'esercitazione.

Restituzione del rilievo planimetrico**Procedura:****1) Acquisizione delle coordinate e delle quote dei punti da file noto:**

- P (stazione)
- I e H (punti della poligonale)

fante_UTM_ETRF2000_U00_32 - Blocco note			
File	Modifica	Formato	Visualizza ?
B	4990735.092	394811.529	245.479
C	4990691.993	394799.520	245.259
D	4990675.739	394759.623	245.471
E	4990694.924	394720.447	246.461
F	4990648.104	394852.918	244.938
G	4990615.106	394895.837	244.307
H	4990670.029	394921.608	244.463
I	4990683.286	394869.592	244.853
L	4990755.046	394751.152	246.451
M	4990727.702	394735.972	246.606
P	4990686.689	394901.058	244.641
R	4990622.190	394866.981	244.601

Figura 6: documento:

"fante_UTM_ETRF2000_U00_32"

2) Restituzione dei dati rilevati:

- lettura al cerchio sinistro;
- lettura al cerchio destro;
- lettura distanza inclinata.

3) Correzione di Bessel:

- *Cerchio azimutale:*

$$az = \frac{(cs + cd) \pm 200}{2}$$

- *Cerchio zenitale:*

$$zen = \frac{(cs + 400 - cd)}{2}$$

4) Calcolo della correzione azimutale di stazione (cas):

- *Calcolo Δx :* differenza tra le coordinate Est del punto P e dei punti I e H
- *Calcolo Δy :* differenza tra le coordinate Nord del punto P e dei punti I e H
- *Calcolo dell'azimut K:* $K = \arctan\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$ [rad]
- *Calcolo dell'angolo di direzione teorico DIR* (razionalizzazione dell'azimut)
- *Calcolo del cas rispetto al punto I:*
 - $cas_1 = DIR - \text{azimutale}$ (0.2)

- Calcolo del modulo di deformazione lineare m :

$$m = 0,9996 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(Est - falsa\ origine)^2}{0,9996^2 \rho N} \right] \right\}$$

- falsa origine = 500000 [m]

- Calcolo della distanza cartografica:

$$d_c = m \cdot d_g \text{ [m]}$$

- Calcolo dell'angolo di direzione DIR:

$$DIR = lettura\ azimutale - cas$$

- Calcolo delle coordinate Est (x) e Nord (y):

$$Est = d_c \cdot \sin(DIR) + Est_{stazione}$$

$$Nord = d_c \cdot \cos(DIR) + Nord_{stazione}$$

6) Restituzione grafica del rilievo:

- Trasferimento delle coordinate calcolate tramite il foglio elettronico su un file blocco note di estensione ".txt".

Coordinate punti collimati - Blocco note		
File	Modifica	Formato Visualizza ?
1,	394904.153,	4990683.372
2,	394904.068,	4990680.538
3,	394903.681,	4990677.680
4,	394902.437,	4990672.087
5,	394901.197,	4990668.826
6,	394898.938,	4990669.190
7,	394900.873,	4990675.264
8,	394901.736,	4990681.534
9,	394901.655,	4990689.348
10,	394898.000,	4990702.441
11,	394892.316,	4990708.845
12,	394886.448,	4990714.210
13,	394894.685,	4990709.650
14,	394888.282,	4990715.684
15,	394874.432,	4990717.461
16,	394869.891,	4990717.803
17,	394864.665,	4990718.286
18,	394860.151,	4990718.751
19,	394868.837,	4990703.291
20,	394872.494,	4990702.028
21,	394878.170,	4990698.251
22,	394882.121,	4990692.948
23,	394883.890,	4990687.683
24,	394884.208,	4990682.048
25,	394883.020,	4990676.799
26,	394880.511,	4990672.083
27,	394876.571,	4990667.963
28,	394871.561,	4990665.117
29,	394868.200,	4990648.935
30,	394880.452,	4990649.791
31,	394882.282,	4990648.254
32,	394895.007,	4990658.441
33,	394894.398,	4990660.915
34,	394893.888,	4990663.320
35,	394893.315,	4990663.709
36,	394893.672,	4990664.237
37,	394894.223,	4990663.858
38,	394902.216,	4990679.884
39,	394902.204,	4990684.960
40,	394903.677,	4990685.331
41,	394907.650,	4990686.535

Figura 8: documento: "Coordinate punti collimati"

Allegato n° 1:

"fante_UTM_ETRF2000_U00_32"

B	4990735.092	394811.529	245.479
C	4990691.993	394799.520	245.259
D	4990675.739	394759.623	245.471
E	4990694.924	394720.447	246.461
F	4990648.104	394852.918	244.938
G	4990615.106	394895.837	244.307
H	4990670.029	394921.608	244.463
I	4990683.286	394869.592	244.853
L	4990755.046	394751.152	246.451
M	4990727.702	394735.972	246.606
P	4990686.689	394901.058	244.641
R	4990622.190	394866.981	244.601

Allegato n° 3:

"Coordinate punti collimati"

1, 394904.153, 4990683.372
2, 394904.068, 4990680.538
3, 394903.681, 4990677.680
4, 394902.437, 4990672.087
5, 394901.197, 4990668.826
6, 394898.938, 4990669.190
7, 394900.873, 4990675.264
8, 394901.736, 4990681.534
9, 394901.655, 4990689.348
10, 394898.000, 4990702.441
11, 394892.316, 4990708.845
12, 394886.448, 4990714.210
13, 394894.685, 4990709.650
14, 394888.282, 4990715.684
15, 394874.432, 4990717.461
16, 394869.891, 4990717.803
17, 394864.665, 4990718.286
18, 394860.151, 4990718.751
19, 394868.837, 4990703.291
20, 394872.494, 4990702.028
21, 394878.170, 4990698.251
22, 394882.121, 4990692.948
23, 394883.890, 4990687.683
24, 394884.208, 4990682.048
25, 394883.020, 4990676.799
26, 394880.511, 4990672.083
27, 394876.571, 4990667.963
28, 394871.561, 4990665.117
29, 394868.200, 4990648.935
30, 394880.452, 4990649.791
31, 394882.282, 4990648.254
32, 394895.007, 4990658.441
33, 394894.398, 4990660.915
34, 394893.888, 4990663.320
35, 394893.315, 4990663.709
36, 394893.672, 4990664.237
37, 394894.223, 4990663.858
38, 394902.216, 4990679.884
39, 394902.204, 4990684.960
40, 394903.677, 4990685.331
41, 394907.650, 4990686.535

INDICE DELL'ESERCITAZIONE

<u>Compensazione della rete di livellazione - Introduzione</u>	<u>3</u>
<u>Trattamento delle misure</u>	<u>7</u>
<u>Tabella n° 1 - Dati</u>	<u>9</u>
<u>Tabella n° 2 - Dati</u>	<u>10</u>
<u>CASO 1 - Compensazione non pesata</u>	<u>11</u>
<u>CASO 1 - Compensazione pesata</u>	<u>14</u>
<u>CASO 2 - Compensazione non pesata</u>	<u>18</u>
<u>CASO 2 - Compensazione pesata</u>	<u>21</u>

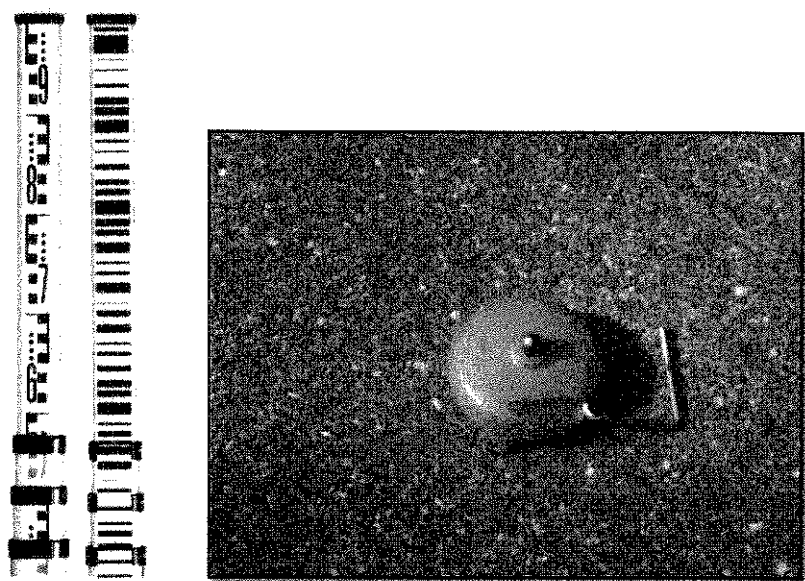


Figura 2 - 3: accessori utilizzati per la misurazione.

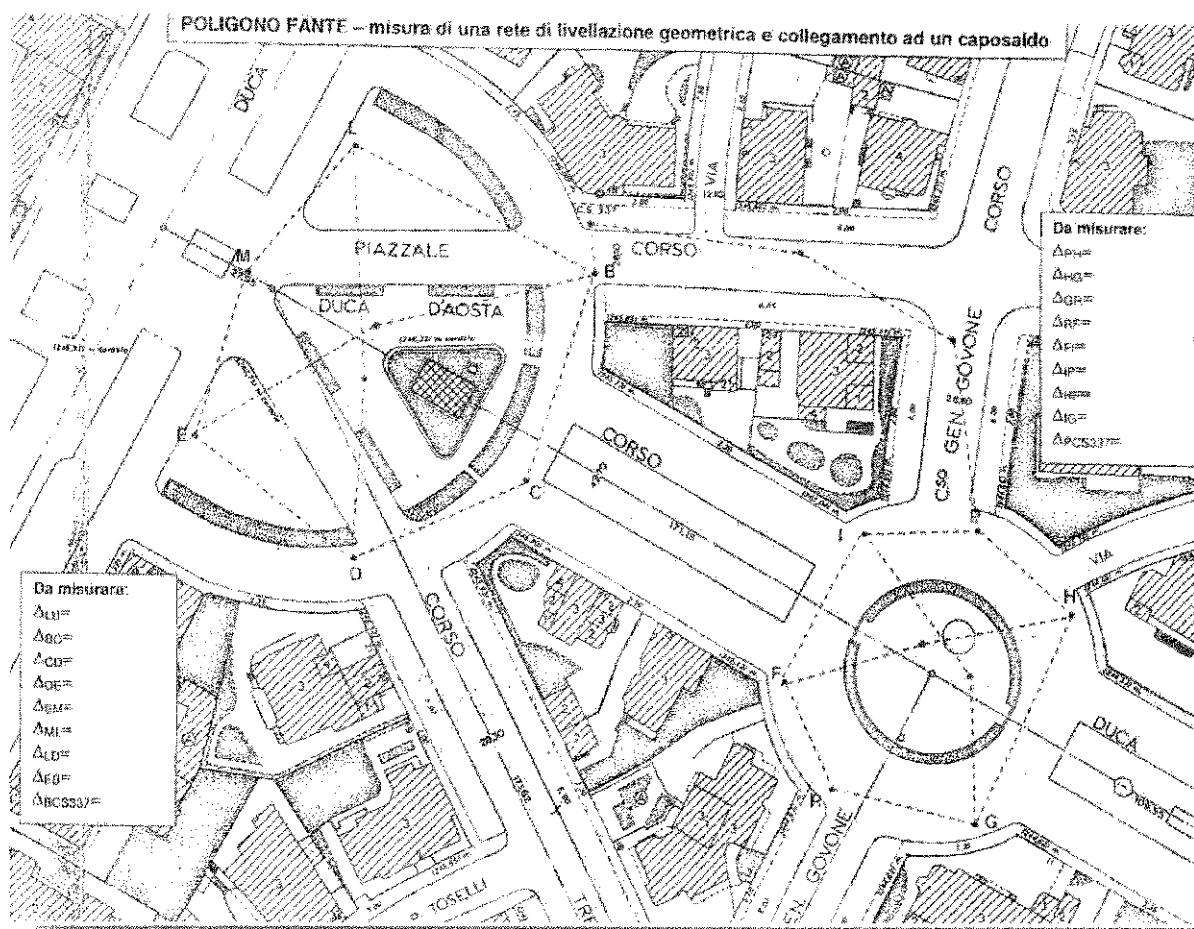


Figura 4: eidotipo della zona rilevata.

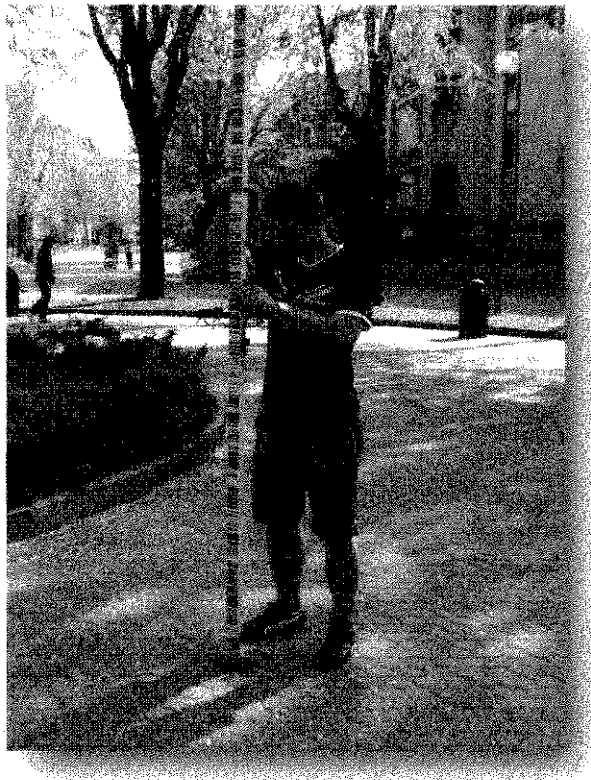


Figura 9 - 10: operatore che regge la stadia, "posizionata in bolla", per ottenere una lettura da parte dello strumento ottimale.

N.B. Nella figura di sinistra l'operatore poggia la stadia sul tripode, poiché la distanza tra i due capisaldi è maggiore di 60,00 [m] e occorre prendere un punto intermedio per effettuare la lettura.

N.B.

La matrice dei pesi P varia in base alla tipologia di compensazione che si intende effettuare:

- *Compensazione non pesata:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in cui P è la matrice identità.

- *Compensazione pesata:*

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

in cui P è la matrice diagonale costituita dai pesi dati dall'inverso della distanza fra i due punti.

Nelle pagine che seguono, sono riportati i dati raccolti nelle misurazioni in due tabelle riassuntive e i relativi calcoli sviluppati.