centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 245 DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Tortoreto

MATERIA : Modelli e Metodi Numerici riassunto, Prof. Canuto

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 178

FOGLIO 1/4

• CAPITOLO 1: FILO ELASTICO

MODELLO SEMPLICE

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = f$$

* DISCRETIZZAZIONE DIFFERENZE FINITE *

▲ DIRICHLET OMOGENEO $\boxed{u(0) = u(L) = 0}$

$$h = \frac{L}{N+1}$$

$$\boxed{+\mu/h^2 \left(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}\right) = f_j}$$ Discretizzazione Diff. Finite

$$\boxed{\underline{A} = \frac{\mu}{h^2}\,\text{tridiag}\left[-1, 2, -1\right]}$$ Matrice di Rigidezza.

$$\boxed{\text{Cond}_2(\underline{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$ Numero di condizionamento

▲ DIRICHLET NON OMOGENEO + NEUMANN $\begin{cases} u(0) = g_0 \quad u(L) = g_L \ (D) \\ \mu \frac{du}{dx}(0) = \gamma_0 \quad \mu \frac{du}{dx}(L) = \gamma_L \ (N) \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = f \\ u(0) = g_0 \quad \mu \frac{du}{dx}(L) = \gamma_L \end{cases}$$

1ª Riga x dirichlet Non omogeneo

$$\mu/h^2 \left(-u_0 + 2u_1 - u_2\right) = f_1$$

↳ Modifica del termine Noto → $f_1 + \frac{\mu g_0}{h^2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 178

$$V_h = \{ v_h : [0, L] \to \mathbb{R} \mid v_h \text{ è continua in } [0,L], \quad v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ per } j = 1, \dots N+1 \quad v_h(0) = 0 \quad v_h(L) = 0 \}$$

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ \int_0^L \mu \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx = \int_0^L f \cdot v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

DISCRETIZZIAMO

$$u_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \cdot \varphi_k(x)$$ (da 1 a N perché c'è dirichlet a capo e a coda)

Si sostituisce u_h in ↑

$$\sum u_k \underbrace{\int_0^L \mu \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx}_{a_{jk}} = \underbrace{\int_0^L f \cdot \varphi_j dx}_{f_j}$$

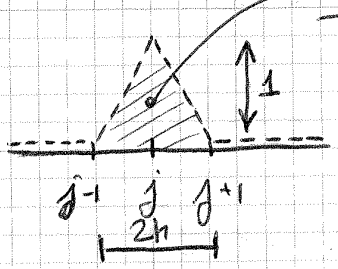
$$\underline{A} = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{N \times N} \qquad \bar{u} = (u_k) \in \mathbb{R}^N \qquad \bar{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^N$$

$$A = \frac{\mu}{h} \cdot \text{tridiag}[-1, 2, -1]$$ Matrice di Rigidezza.

Termine Noto

$$f_j = \int_0^L f \cdot \varphi_j dx$$

È l'area del trapezio moltiplicata per f



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 178

FOGLIO 2/4

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) + \gamma u = f \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

* DISCRETIZZAZIONE DIFFERENZE FINITE *

$h = L/N+1$

$$\boxed{\frac{\mu}{h^2}\left(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}\right) + \gamma_j u_j = f_j \qquad j = 1, \dots N}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^{(\mu)} &= \frac{\mu}{h^2} \cdot \text{tridiag}\,[-1, 2, -1] \\ A^{(\gamma)} &= \text{diag}\,(\gamma_j) \qquad j = 1, \dots N \end{aligned}}$$

* DISCRETIZZAZIONE ELEMENTI FINITI *

$$u_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k(x)$$

$$\boxed{\begin{cases} u_h \in V_h \\ \int_0^L \mu \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx}dx + \int_0^L \gamma \varphi_k \varphi_j dx = \int_0^L f \varphi_j dx \qquad j = 1, \dots N \end{cases}}$$

$$b_{jk} = \int_0^L \gamma \varphi_k \varphi_j dx \qquad 1 \le j \le N \qquad 1 \le k \le N$$

$$\boxed{B = \gamma h \,\text{tridiag}\,[1/6,\ 2/3,\ 1/6]}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 178

* DISCRETIZZAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

▲ DIRICHLET OMOGENEO $u = 0$ su $\partial\Omega$

$$V_h = \{ v_h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} : v_h \text{ è continua } \wedge v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T} \}$$

$$V_h = \{ v_h \in V_h : v_h = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

con $\bar{\Omega}$ Regione completa ($\Omega + \partial\Omega$)

$\mathcal{T}$ = Triangolazione completa

T = triangolo

$$u_h \in V_h$$

$$\int_\Omega \mu \cdot \nabla u_h \nabla v_h \, d\bar{x} = \int_\Omega f \cdot v_h \, d\bar{x} \qquad \forall v_h \in V_h$$

$$u_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k \quad \text{--- Sostituiamo}$$

$$\sum u_k \underbrace{\int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j \, d\bar{x}}_{a_{jk}} = \underbrace{\int f \cdot \nabla\varphi_j \, d\bar{x}}_{f_j}$$

$$\underline{A} = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{N \times N} \qquad \bar{u} = (u_k) \in \mathbb{R}^N \qquad \bar{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^N$$

$$a_{jk} = \int_\Omega \mu \cdot \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \, d\bar{x} = \bar{\mu}_T \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \cdot \text{Area}(T)$$

$$f_j = \int f \cdot \varphi_j \, d\bar{x} \Rightarrow f \cdot \frac{1}{3} \text{area}(T) \cdot 1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 178

• CAPITOLO 4/5 SISTEMI DINAMICI e DIFFUSIONE

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla(\mu \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega$$

=> Equazione delle onde

* DISCRETIZZAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI *

$$\begin{cases} u_h(t) \in V_h \\ \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} v_h \, d\bar{x} + \int_\Omega \mu \nabla u_h \nabla v_h \, d\bar{x} = \int f v_h \, d\bar{x} \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

$$u_h(\bar{x}, t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t) \cdot \varphi_k(x)$$ ↑ sostituiamo

$$\sum_{k=1}^{N} u_k'' \underbrace{\int_\Omega \rho \varphi_k \varphi_j \, d\bar{x}}_{b_{jk}} + \sum_{k=1}^{N} u_k \underbrace{\int_\Omega \mu \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j \, d\bar{x}}_{a_{jk}} = \underbrace{\int f \varphi_j \, d\bar{x}}$$

$$\bar{u}(t) = (u_k(t)) \quad 1 \le k \le N$$

$$\bar{u}'(t) = (u_k'(t)) \quad 1 \le k \le N$$

$$\bar{u}''(t) = (u_k''(t)) \quad 1 \le k \le N$$

$$\underline{A} = \left(a_{jk} = \int_\Omega^L \mu \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j \, d\bar{x} \right)$$

$$\underline{B} = \left(b_{jk} = \int_\Omega^L \rho \varphi_k \varphi_j \, d\bar{x} \right)$$

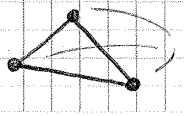
– MATRICI DI MASSA –

- Matrice di massa x 1 TRIANGOLO
  Tutti i nodi incogniti

$$B^{(T)} = \rho_T \cdot \text{AREA}(T) \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix}$$

- Matrice di massa x 1 TRIANGOLO
  Concentrata
  Tutti i nodi incogniti

$$\tilde{B}^{(T)} = \rho_T \cdot \text{AREA}(T) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$



INCOGNITI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 178

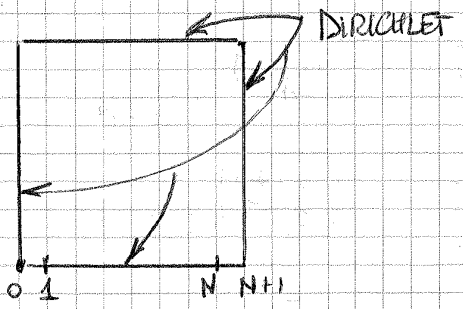
$u_{lm}(0) = u_{lm,0}$ condizione iniziale

Condizioni di DIRICHLET sui BORDI $\quad 1 \le l,m \le N$

$$\bar{u} = \bar{u}(t) = \left(u_j(t)\right)_{1 \le j \le N^2}$$

$$\bar{f} = \bar{f}(t) = \left(f_j(t)\right)_{1 \le j \le N^2}$$

$$\bar{u}_0 = \left(u_{j,0}\right)_{1 \le j \le N^2}$$



$$\boxed{\underline{B} = \text{diag}\left(\rho_j\right)_{1 \le j \le N^2}}$$

$$\boxed{\underline{A} = \text{tridiag}\left[C, D, C\right]}$$

$$\boxed{\underline{C} = -\frac{\mu}{h^2}\underline{I}}$$

$$\boxed{\underline{D} = \frac{\mu}{h^2}\,\text{tridiag}\left[-1, 4, -1\right]}$$

* MEDIANTE ELEMENTI FINITI *

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla(\mu \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ u = u_0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ \displaystyle\int_\Omega \rho \frac{\partial u_h}{\partial t} \cdot v_h \, d\bar{x} + \int_\Omega \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\bar{x} = \int_\Omega f v_h \, dx \qquad \forall\, v_h \in V_h \end{cases}$$

$$u_h(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t)\,\varphi_k(x)$$ ← da sostituire.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 178

FOGLIO 4/4

- METODO DI NEWMARK

$$\underline{\underline{B}}\left(\bar{u}^{k+1} - 2\bar{u}^{k} + \bar{u}^{k-1}\right) + \Delta t^2 \underline{\underline{A}}\left(\beta \bar{u}^{k+1} + (1-2\beta)\bar{u}^{k} + \beta \bar{u}^{k-1}\right) = \Delta t^2\left(\beta \bar{f}(t_{k+1}) + (1-2\beta)\bar{f}(t_k) + \beta \bar{f}(t_{k-1})\right) \qquad 2^\circ \text{ ORDINE}$$

- Stabilità Incondizionata $\beta \geq 1/4$
- Stabilità Condizionata $\beta < 1/4$
  - Condizione $\Delta t^2 \cdot \lambda_{max} < \dfrac{4}{1-4\beta}$

$\beta = 0$

$$\underline{\underline{B}}\left(\bar{u}^{k+1} - 2\bar{u}^{k} + \bar{u}^{k-1}\right) + \Delta t^2 \underline{\underline{A}}\, u^{k} = \bar{f}(t_k)$$

LEGGI DI CONSERVAZIONE - METODO AI VOLUMI FINITI

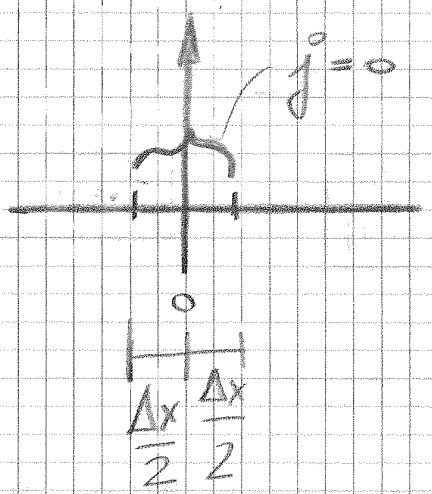
$\Delta x > 0$

$x_j = j\Delta x$ $\qquad V_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

$x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$

- MEDIA DI CELLA ESATTA

$$\bar{U}_j^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n)\, dx$$



$$\lambda = \Delta t / \Delta x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 178

Lista di comandi, parole chiave, funzioni, ..., usati nel corso

Creazione di matrici

linspace
logspace
zeros
ones
eye
diag
rand
randn
meshgrid
sparse
spdiags
speye
spzeros
spalloc

Comandi sulle matrici

abs
max, min
norm
cond, condest
sum
mean
diff, gradient
diag
triu, tril
length, size(A,1)
inv
det
rank
full
nnz
flipud, fliplr, rot90
eig
eigs
find
all
any
sort
unique

Esistenza delle variabili

who
whos
exists

Comandi per le differenze finite

numgrid
delsq

Comandi su sistemi lineari

\ (Gauss con pivoting)
lu
chol
pcg $u = (A, b, \text{precisione}, \text{nitermax})$
gmres
luinc
cholinc

Comandi grafici

- figure
- plot
stairs
- semilogx, semilogy,loglog
- grid
- xlabel, ylabel, title
- hold
- legend
surf, mesh, contour, waterfall
trisurf
- spy

Parole riservate e costrutti

function
if else end
switch case otherwise end
for end
while end
try catch end
return
nargin, nargout

Altre funzioni/parole chiave

fzero
fplot
quad, quad8, trapz
ode45, odexx
struct
cell

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 178

- meshgrid
  - $a=[1,5,6,9]$ $b=[11,12,13,14]$

$[A,B]=meshgrid(a,b) \rightarrow A=\begin{pmatrix}1&5&6&9\\1&5&6&9\\1&5&6&9\\1&5&6&9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}11&11&11&11\\12&12&12&12\\13&13&13&13\\14&14&14&14\end{pmatrix}$

- sparse
  - sparse(A) -> A matrice, restituisce una matrice senza zeri.

- spdiags
  - spdiags(A) -> $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}5&1&0\\0&6&2\end{pmatrix}$

- speye
  - speye(n,m) -> Genera una matrice sparsa con n,x m con 1 sulla diagonale principale.

- abs
  - abs(A) -> Vettore, matrice o numero -> Valore assoluto

- max
  - max(A) -> A matrice -> massimo di ogni colonna
    A vettore -> il massimo tra i valori.
  - max(A(:)) -> massimo matrice

- norm
  - norm(A) = norm(A,2) -> norma euclidea
  - norm(A,inf) = norma infinito

- Sum
  - sum(A) -> A matrice restituisce vettore riga con elementi pari alla somma degli elementi x colonna
    A vettore -> somma degli elementi di A.

- mean
  - mean(A) come sum ma fa la media.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 178

- rot90 (A) -> ruotare in senso antiorario

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- sort(A) -> ordina dal più piccolo (nella matrice ordina le colonne)
- unique -> ordina gli elementi dal più piccolo eliminando i doppi la matrice la trasforma in un vettore colonna, se gli passo io un vettore riga mi restituisce un vettore riga

- eig
  - eig(A) -> Autovalori di A per colonna
  - [B,C] = eig(A) -> B matrice di autovettori C matrice di autovalori

- format long -> + cifre decimali
- format short -> - cifre decimali
- format compact -> elimina le righe bianche

- v = [1,2,3] } vettori riga
  v = [1 2 3] }
  v = [1; 2; 3] -> Vettore colonna.
  v = 5:2:20 -> da 5 a 20 con passo 2

- fix -> butta la parte decimale
- ceil -> arrotonda x eccesso
- floor -> " + difetto
- round -> arrotonda all'intero + vicino

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 178

- polyval (polyfit(...), 1.) → valuta la y di x = 1

- Esempio ode 45

$y' = -y - 5e^{(-t)} \times \sin(5t)$

f = @(t,y) - y - 5exp(-t) * sin(5*t)

y(0) = 1 = CI

Δt = [0,5]

[T,Y] = ode45(f, Δt, 1)

- spdiags (v', 0, 4, 4)
  - 4, 4 → matrice 4×4 (SPARSA)
  - 0 → posizione della diagonale
  - v' → vettore che viene messo sulla diagonale

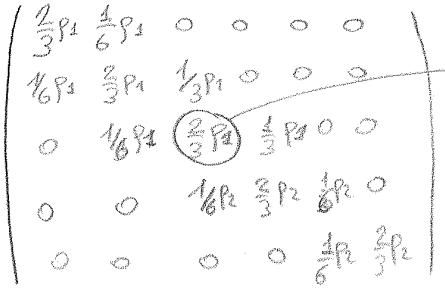
- spalloc (n, m, nmax)
  - n, m → matrice n×m (SPARSA)
  - nmax → numero massimo di elementi non nulli

- who → variabili
- whos → variabili + dettagli

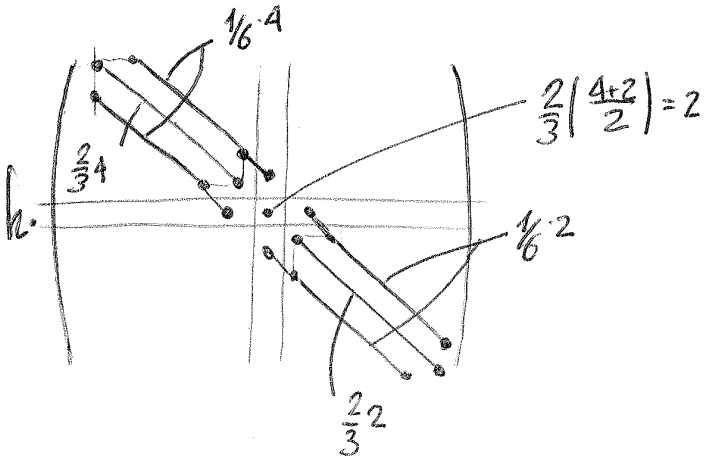
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 178

Matrice di massa = $B = \rho \cdot h \cdot \text{tridiag}\left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right]$



$\frac{2}{3}\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right) = \frac{2}{6}(4+2) = 2$



dimensioni $1-N \times 1-N$

Matrice A

$a_{jk} = 5\int_0^1 \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \quad j = 1, \dots N-1 \qquad k = 1, \dots N-1$

termine $\bar{g} \Rightarrow (g_j)_{1 \le j \le N-1} \qquad A = \frac{\mu}{h}\,\text{tridiag}[-1, 2, -1]$

$g_j = -2\int_0^1 5\frac{d\varphi_0}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx \qquad j = 1$

Non nullo solo in $j = 1$

$a_{1,0}$

$-3\int_0^1 5\frac{d\varphi_{N-1}}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx \qquad j = N-1$

a_{N-1}, a_N

A

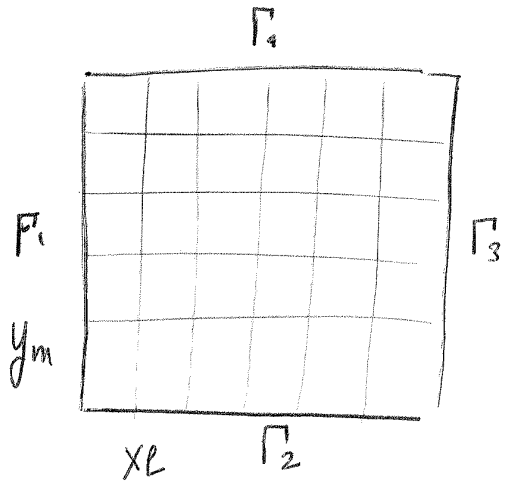
termine $\bar{u} \Rightarrow (u_j)_{1 \le j \le N-1}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 178

Es 3

$$\begin{cases} -\nabla(p\nabla w) = \lambda w \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha w = 0 \quad \text{su } \Gamma \\ w = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$



$$h = \frac{L}{N+1}$$

discretiz. diff. Finite

$$\frac{\mu}{h^2}\left(-w_{l,m-1} - w_{l-1,m} + 4w_{lm} - w_{l+1,m} - w_{l,m+1}\right) = \lambda_h \cdot w_{lm}$$

Per $m = 0$ → Prima Fila

$$\frac{w_{l,m+1} - w_{l,m-1}}{2h} = -2w_{lm} \rightarrow \text{condizione imposta per } m=0$$

$$\frac{w_{l-1} - w_{l+1}}{2h} = -2w_{l,0}$$] Sostituisco nell'equazione di $m=0$

$$\frac{\mu}{h^2}\left(-w_{l,0-1} - w_{l-1,0} + 4w_{l,0} - w_{l+1,0} - w_{l,1}\right) = \lambda_h \cdot w_{l,0}$$

$$-w_{l,1} + w_{l,-1} = -q w_{l,0} \cdot h \Rightarrow w_{l,-1} = w_{l,1} - q w_{l,0} \cdot h$$

$$\frac{\mu}{h^2}\left(-\underline{w_{l,1}} + \underline{q w_{l,0}} \cdot h - w_{l-1,0} + \underline{q w_{l,0}} - w_{l+1,0} - \underline{w_{l,1}}\right) = \lambda_h w_{l,0}$$

$$\frac{\mu}{h^2}\left(-2w_{l,1} + 4w_{l,0}(1+h) - w_{l-1,0} - w_{l+1,0}\right) = \lambda_h w_{l,0}$$

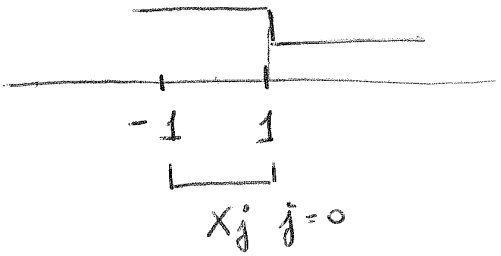
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 178

$$S_2 = \frac{2}{v_1} \frac{1}{\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)} = \frac{2}{4} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2-1}{4}}\right) = \frac{4}{2} = 2$$

$$t^* = \frac{2}{2} = 1$$

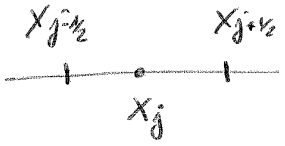
$$x_{j \pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$$



$$\Delta x = 2$$

$$\downarrow$$

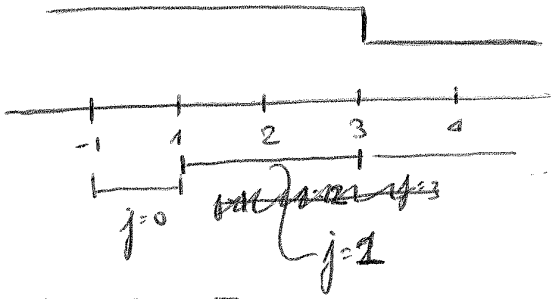
$$x_{j \pm 1/2} = (2j \pm 1)$$



$V \Rightarrow$ definizione celle $= [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = [2j-1, 2j+1]$

$V_0 = [-1, 1] \rightarrow j = 0$

$$u_0 = \begin{cases} 8 & \text{se } j \leq 0 \\ 2 & \text{se } j \geq 1 \end{cases}$$



$$v_0 = \begin{cases} 4 & \text{se } j \leq 1 \\ 2 & \text{se } j \geq 2 \end{cases}$$

$V_1 = [1, 3]$

$V_2 = [3, 5$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 178

ESAME 4-FEB-2010

ES 1

$[0,5]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = 0 \qquad \text{in } [0,5]$$ EQUAZIONE

$$u(0,t) = u(5,t) = 0$$ CONDIZ. BORDO (D)

$$u(x,0) = x(5-x) \quad \text{in } (0,5)$$
$$\partial u/\partial t\,(x,0) = 0 \quad \text{in } (0,5)$$ CONDIZ. INIZIALI

- Semidiscretiz. Elem. Finiti

$$h = \frac{5}{N+1}$$

$$V_h = \{ v_h \in [0,5] \to \mathbb{R} \mid v_h \text{ continua su } [0,5]$$
$$v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \; j=1,\dots N+1 \quad v_h(0) = v_h(5) = 0 \}$$

$$\begin{cases} u_h(x,t) \in V_h \\ \int_0^L \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} v_h\,dx + \int_0^L 4\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{dv_h}{dx}\,dx + \int_0^L 2u_h \cdot v_h = 0 \end{cases}$$

- $$u_h(x,t) = \sum_{K=1}^{N}{}' u_K(t)\varphi(x)$$

$$\sum_{K=1}^{N}{}' u_K'' \int_0^L \varphi_K(x)\varphi_j(x)\,dx + \sum_{K=1}^{N}{}' u_K \int_0^L \frac{d\varphi_K}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\,dx + \sum_{K=1}^{N}{}' u_K \int_0^L 2\varphi_K \cdot \varphi_j\,dx = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 178

$\beta \geq 1/4 \Rightarrow$ Metodo incondizionatam. stabile

$$B\left(u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}\right) + \Delta t^2 A\left(\frac{1}{4}u^{k+1} + \left(1 - 2\frac{1}{4}\right)u^k + \frac{1}{4}u^{k-1}\right) = 0$$

Es 2

$$\begin{cases} -\nabla(\nabla u) = f \\ u = g \quad \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad \text{su } \Gamma_N \end{cases} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= 2 - x + 3y \\ g &= 1 \\ \psi &= 3 \end{aligned}$$

$V_h = \{ v_h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} : v_h$ è continua e $v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T} \}$

$V_h = \{ v_h \in V_h : v_h(x_j) = g \ \forall x_j \in \Gamma_D \}$

$$-\int_\Omega \mu \nabla(\nabla u) \cdot v \, d\bar{x} = \int f \cdot v \, d\bar{x}$$

$$\downarrow$$

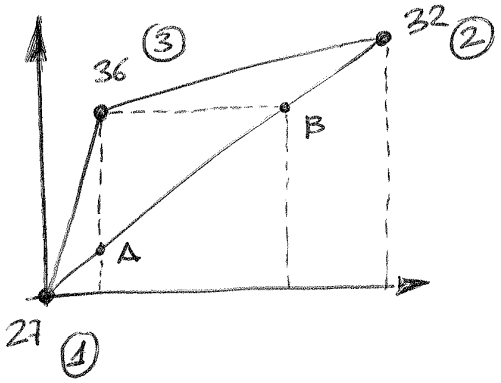
$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\bar{x} - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, ds = \int f \cdot v \, d\bar{x}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} u_h \in V_h(g) \\ \displaystyle\int_\Omega \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\bar{x} = \int_\Omega f \cdot v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n} \cdot v_h \, ds \qquad \forall v_h \in V_h(0) \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 178



Calcolo A, B.

$\nabla\varphi_1$ → calcolo φ in A e φ in B → poi $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$

$$\mu_T = 4 + 4 + 25h^2 + 16h^2 + 4 + h^2 + 9h^2 = \frac{12}{3} + \frac{51h^2}{3} = 4 + 17h^2$$

$$\mu_T = 4 + 17h^2$$

$$B = \rho_T \cdot AREAT \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{\rho_T AREAT}{12} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rho_T \cdot \frac{11h^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{11h^2}{96} \rho_T \rightarrow \rho_T = \frac{96}{11}$$

Es 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u_j^0 = \begin{cases} 2 & j \leq 5 \\ 1 & j \geq 6 \end{cases}$$

$$\left[u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_j^n - u_{j-1}^n \right) \right.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 178

$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$ $\quad \frac{\Delta x}{2} \leq \frac{\Delta x}{1/3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 3$ OK CFL ok

ESAME 13-SETT 2010

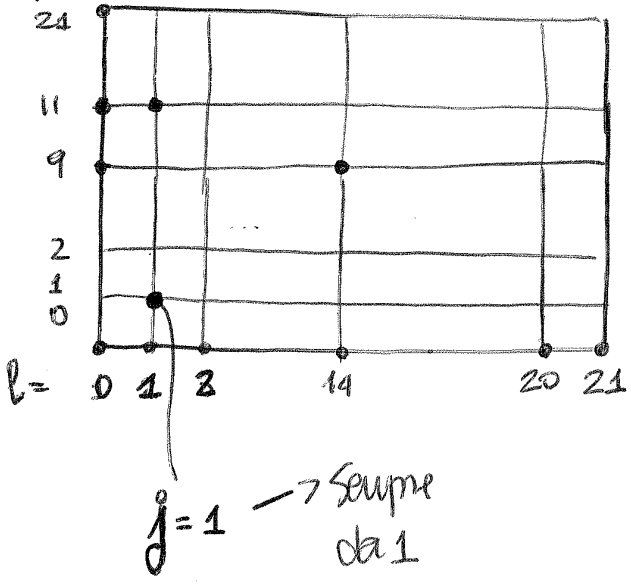
Es 1

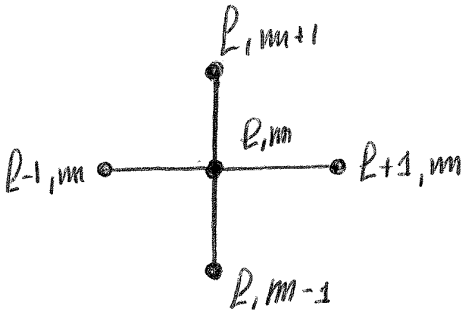
$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

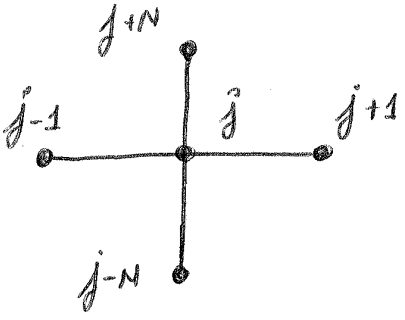
$\frac{L}{N+1} = h$

$\begin{pmatrix} 0 \leq l \leq 1+N \\ 0 \leq m \leq N+1 \end{pmatrix}$

$N = 20$







Nodo $X_{14}\, y_9$ Nodo INTERNO FORTE $\quad l = 14 \quad m = 9$

$$\frac{1}{h^2}\left(-5\,u_{l,m-1} - 1\,u_{l-1,m} + 4\cdot 3\,u_{l,m} - 1\,u_{l+1,m} - 5\,u_{l,m+1}\right) = f_{lm}$$

Nodo $X_1\, y_{14} = 20 \times 10 + 1 = 201 \Rightarrow$ Numerazione j

$\|$

X_{201}

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 178

Es 3

$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ Eq. di

$u = 0$ su $\partial\Omega$ Condiz. AL BORDO

$u = u_0$ su Ω Cond. INIZIALI $t = 0$

$V_h = \{ v_h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} : v_h \text{ continua su } \bar{T} \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T} \}$

$V_h = \{ v_h \in V_h : v_h = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, d\bar{x} + \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\bar{x} = \int_\Omega f \cdot v_h \, d\bar{x} & \forall v_h \in V_h(0) \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

$$u_h(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t) \varphi_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{N} u_k' \int_\Omega \varphi_k \varphi_j \, d\bar{x} + \sum_{k=1}^{N} u_k \int_\Omega \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \, d\bar{x} = \int_\Omega f \varphi_j \, d\bar{x}$$

$\underline{A} = (a_{jk})_{1 \le j,k \le N}$ $\quad \underline{A} = \frac{4}{h} \cdot \text{tridiag}[-1, 2, -1]$

$\underline{B} = (b_{jk})_{1 \le j,k \le N}$ $\quad \underline{B} = \frac{h}{6} \text{tridiag}[1/6; 2/3; 1/6]$

dimensione $\underline{N}$

$\bar{u} = (u_j(t))_{1 \le j \le N}$ $\quad \bar{u}_0 = (0, \dots 0)_{1 \le j \le N}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 178

$$a_{11} = 4h^2 \cdot \left(\frac{1}{4h}, -\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{1}{4h}, -\frac{1}{2h}\right) = 4h^2\left(\frac{1}{16h^2} + \frac{1}{4h^2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{4h^2}{4h^2}\left(\frac{1}{4}+1\right) = 5/4} \quad \frac{\cancel{4h^2}(4+1)}{\cancel{16h^2}_{4}} = \frac{5}{4}$$

$$B \Rightarrow \text{area}(T) \cdot \rho_T \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix} \quad \text{ok.} \qquad \frac{4}{12}\,\frac{1}{3}$$

Es 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - 6\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{|a|} \Rightarrow \frac{10^{-2}}{3} \quad \frac{10^{-2}}{6} \Rightarrow \boxed{\Delta t^* \le \frac{10^{-2}}{6}}$$

$$\Delta t = \frac{10^{-2}}{6} \qquad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{6}$$

SEG. 2 METODO UPWIND.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \qquad u_j^0 = \begin{cases} 0 & j \le 3 \\ 2 & j \ge 4 \end{cases}$$

$$u_j^1 = u_j^0 + \underbrace{\lambda \cdot a}_{\frac{1}{6}\cdot(-6)}\left(u_{j+1}^0 - u_j^0\right) \Rightarrow$$

se $j = 3 \rightarrow u_1^1 = 0 + (2-0) = 2$

se $j = 2 \rightarrow u_1^1 = 0 + (0-0) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 178

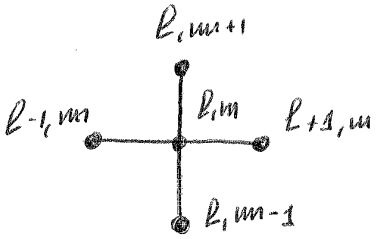
ESAME 30-giu-2010

ES 1

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla(\nabla u) = 0 & \text{EQUAZIONE} \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega & \text{Condizione al Bordo} \\ u(t=0) = u_0 \quad \text{in } \Omega & \text{Condizione iniziale} \end{cases}$$

$\rho = 1 + x + 2y \qquad u_0 = xy(L-x)(L-y)$

a) Semidiscretizzazione nello spazio



$0 \le l, m \le N+1$

$$\rho_{l,m}\, \dot{u}_{l,m} - \frac{\mu}{h^2}\left(-u_{l,m-1} - u_{l-1,m} + 4u_{lm} - u_{l+1,m} - u_{l,m+1}\right) = f_{lm}$$

$$u_{0,lm} = x_l\, y_m (L - x_l)(L - y_m)$$

Matrice di massa

$B = \text{diag}(\rho_j) \qquad 1 \le j \le N^2$

Matrice di Rigidezza

$A = \text{tridiag}[C\ D\ C] \rightarrow C = -\frac{1}{h^2} I \qquad D = \text{tridiag}\left[-\frac{1}{h^2}, \frac{4}{h^2}, -\frac{1}{h^2}\right]$

EI

$$(B + \Delta t A)\, u^{k+1} = B u^k + \Delta t \cdot f(t_{k+1})$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 178

$j = 1$

$$-\frac{3}{h^2}\left(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}\right) + 5u_j = f_j$$

u_{j-1} → NOTO

$$-\frac{3}{h^2}\cdot 1 + \frac{6}{h^2}u_1 + \frac{3u_2}{h^2} + 5u_1 = f_1$$

$$\frac{6}{h^2}u_1 + \frac{3}{h^2}u_2 + 5u_1 = f_1 + \frac{3}{h^2}$$

$$\left(\frac{6}{h^2}+5\right)u_1 + \frac{3}{h^2}u_2 = f_1 + \frac{3}{h^2}$$

$$\underline{A} = \text{tridiag}\left[-\frac{3}{h^2},\ \frac{6}{h^2}+5,\ -\frac{3}{h^2};\quad -\frac{6}{h^2},\ +\left(\frac{6}{h^2}+5\right)\right]$$

Ordine N

Es 3

Matrice di Rigidezza A

$$a_{jjc} = \int \mu \cdot \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j d\bar{x} = \mu_T \cdot \text{AREA}(T) \cdot \nabla\varphi_{jk} \nabla\varphi_j$$

$$\text{Area} = \begin{vmatrix} -h-2h & h-0 \\ 0-2h & -h-0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} -3h & h \\ -2h & -h \end{vmatrix} \frac{1}{2} = \frac{3h^2+2h^2}{2}$$

$$A_{\text{rea}}(T) = \frac{5}{2}h^2 \qquad \mu_T = \frac{1,1+1,3+1,5}{3} = 1,3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 178

$j=0 \Rightarrow u_0^1 = 0$

$j=-1 \Rightarrow u_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$j=-2 \Rightarrow u_{-2}^1 = 0$

$j=1 \Rightarrow u_1^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$j=2 \Rightarrow u_2^1 = 0$

$$u_j^1 = \begin{cases} +\frac{1}{3} & j=-1 \\ \frac{5}{3} & j=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

↓

Calcolo per $t = 2\Delta t$.

⋮

ESAME 15-GEN-2009

Es 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } [0,2)$$

$u(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 5u(2,t)$ Condizioni Al bordo

$u(x,0) = u_0(x)$

$V_h = \{ v_h : [0,2] \to \mathbb{R} \mid v_h \text{ continua in } [0,2],$
$v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ per } j = 1, \dots N \quad v_h(0) = 0 \}$

$$\int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, dx - 3\int_0^L \frac{\partial^2 u_h}{\partial x} v_h \, dx = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, dx + \int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial v_h}{\partial x} dx - 3\frac{\partial u_h}{\partial x} v_h \Big|_0^L = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 178

$$B^{-1} = \frac{1}{h}\,\text{diag}\left[\frac{6}{5}, 1 \text{ —— } 1, 2\right]$$

$$B^{-1}\cdot A = \frac{3}{h}\,\text{tridiag}\left[-\frac{6}{5}\frac{1}{h}, \frac{12}{5}\frac{1}{h}\ ;\ -\frac{1}{h}, \frac{2}{h}-\frac{1}{h}\ ;\ -\frac{2}{h}+\frac{2}{h}(1-5h)\right]$$

(1^a RIGA)

$$= 30\,\text{tridiag}\left[-\frac{60}{5}, \frac{120}{5}\ ;\ -\frac{1}{h}, \frac{2}{h}, -\frac{1}{h}\ ;\ -10\cdot 2 + 10\right]$$

$$= 30\,\text{tridiag}\left[+\frac{120}{5}, \frac{60}{5}\ ;\ \frac{-1,2,-1}{h\ h\ h}\ ;\ -10\cdot 2 + 10\right]$$

$$= 30\,\text{tridiag}\left[\frac{120}{5}, -\frac{60}{5}\ ;\ -\frac{1,2,-1}{h\ h\ h}\ ;\ -10\cdot 2 + 10\right]$$

$$= 300\,\text{tridiag}\left[\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\ ;\ -\frac{1}{h}\ \frac{2}{h}\ -\frac{1}{h}\ ;\ -2+1\right]$$

$$(2\cdot 10)\cdot\left(1-\frac{5}{10}\right) = 20\left(\frac{5}{10_2}\right) = 10$$

$$B^{-1}A = 300\,\text{tridiag}\left[\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\ ;\ -1\ \ 2\ \ -1\ ,\ -2,\ +1\right]$$

$$C_1 = \left|X - \frac{12}{5}\right| \le \frac{6}{5} \Rightarrow \begin{cases} X - \frac{12}{5} \le \frac{6}{5} \\ -X + \frac{12}{5} \le \frac{6}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} X \le \frac{18}{5} \\ X \ge \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$C_2 = |X-2| \le 2 \qquad \begin{cases} X \le 4 \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$C_3 = |X-1| \le 2 \qquad \begin{cases} X \le 3 \\ X \ge -1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 178

Es 3

$$\begin{cases} -\mu \cdot \nabla_{\mu}(\nabla u) = f \\ u = 0 \end{cases}$$

$a_{12,13}$, $a_{13,14}$, $a_{13,17}$, $a_{13,54}$ $a_{14,18}$, $a_{12,18}$, $a_{12,19}$, $a_{12,14}$

$a_{13,18}$ $a_{13,19}$ $a_{17,19}$ $a_{13,13}$

Es 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \Delta x = \frac{3}{10} \qquad u_j^0 = \begin{cases} 4 & 2 \le j \le 12 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{a} = \frac{3/10}{6/2} = \frac{1}{20} \Rightarrow \Delta t^* = \frac{1}{20}$$

$u_j^0 \to u_j^{t^*}$ $t^* = \Delta t^* \Rightarrow$ $3 \le j \le 13$

$$u_j^1 = u_{j-1}^0 \Rightarrow u_j^1 = \begin{cases} 4 & 2 \le j-1 \le 12 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 178

$$\underline{A} = \frac{5}{h}\,\text{tridiag}\left[1; -1.; -1, 2, -1\right] + 10h\,\text{tridiag}\left[\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}; \tfrac{1}{6}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{6}\right]$$

ORDINE N

$$\underline{A} = 5\,\text{tridiag}\left[\left(\frac{1}{h}+\frac{2}{3}h\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{3}h\right); \left(\frac{1}{h}+\frac{1}{3}h\right)\cdot\left(\frac{2}{h}+\frac{4}{3}h\right), \left(\frac{1}{h}+\frac{1}{3}h\right)\right]$$

$$\underline{B} = h\,\text{tridiag}\left[\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6}; \tfrac{1}{6}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{6}\right]$$

$$\bar{f} = \left(\int_0^1 f\cdot\varphi_j\,dx - g'(t)\,b_{jN} - 10g(t)\,b_{jN} - 5\,u(t)\cdot\varphi_j(0)\right)_{0\le j\le N-1}$$

$$\bar{u} = \left(u_j(t)\right)_{0\le j\le N-1}$$

$$\bar{u}_0 = \left(u_0(x_j)\right)_{0\le j\le N-1}$$

$$\left(\underline{B} + \frac{\Delta t}{2}\underline{A}\right)\cdot\bar{u}^{k+1} = \left(\underline{B} - \frac{\Delta t}{2}\underline{A}\right)\bar{u}^{k} + \frac{\Delta t}{2}\left(\bar{f}(t_k) + \bar{f}(t_{k+1})\right)$$

$\underline{C}$

$A = \ldots\ldots$ $\quad h = \frac{1}{N} = \frac{1}{100}$ → SOSTITUISCO AD A

$C_1 =$ |X- diagonale| ≤ Somma del modulo degli elementi non diagonali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 178

$\Delta t = \frac{5}{4}\Delta x$

CFL -> $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$? -> $\frac{5}{4} \leq \frac{1}{3}$ NO

$\Delta t / \Delta x = \lambda = \frac{5}{4}$

$u_1^2 = u_1^1 - a\lambda\left(u_2^1 - u_1^1\right)$

$u_2^0 = \frac{2}{3}\Delta x \rightarrow u_2^1 = \frac{2}{3}\Delta x + \frac{5}{4}\cdot 3\left(\frac{3}{4}\Delta x - \frac{2}{3}\Delta x\right)$

$u_2^1 = \frac{2}{3}\Delta x + \frac{45}{16}\Delta x - \frac{30}{12}\Delta x = \Delta x\left(\frac{2}{3} + \frac{15}{16} - \frac{15}{8}\right)$

$u_2^1 = \frac{32+135-120}{48} = \frac{47}{48}\Delta x$

$= \frac{5}{4}\Delta x + 3\cdot\frac{5}{4}\left(\frac{47}{48} - \frac{9}{8}\right)\Delta x = \frac{9}{8} + \frac{15}{4}\left(\frac{47-54}{48}\right) = \left(\frac{9}{8} - \frac{105}{192}\right)\Delta x$

$= \frac{216-105}{192}\Delta x \quad \frac{111}{192} \quad \frac{37}{64}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 178

$A = \frac{1}{h}\,\text{tridiag}[-1,\ 2,\ -1]$ ordine N

$\bar{u} = (u_k(t))_{1 \le k \le N}$

$\bar{u}_0 = (u_0(x_j))_{1 \le j \le N}$

NEWMARK

$\beta = 0$ $\quad \tilde{B}(\bar{u}^{k+1} - 2\bar{u}^k + \bar{u}^{k-1}) + \Delta t^2 A \bar{u}^k = \bar{f}(t_k)$

↓ Calcolo di u^{k+1}

$\beta = 0$ $(< 1/4) \Rightarrow$ stabilità condizionata

$$\boxed{\Delta t^2 \lambda_{max} < 4}$$

ES 2

$$\begin{cases} -\Delta u + \bar{a} \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

$\bar{a} = (3, -2)$

$$\left(\int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla\varphi_k \, d\bar{x} + \bar{a} \int_\Omega \nabla\varphi_k \varphi_j \, d\Omega \right) = a_{jk}$$

$a_{jk} = \dots$ $\quad a_{jk}^{(\mu)} = \frac{\mu}{\dots} \cdot \text{area}(T) \cdot \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j$

$a_{jk}^{(\bar{a})} = \bar{a} \cdot \nabla\varphi_k \cdot \frac{1}{3} \text{area}(T) \cdot 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 178

$A = 4 + 2(N+1) = 4 + 2(7+1) = 20$

$C = 8 + 1(N+1) = 16$

$B = 1 + 5(N+1) = 1 + 5(8) = 41$

$$\frac{u_{20}}{h^2}\left(-u_{12} - u_{19} + 4u_{20} - u_{21} - u_{28}\right) = f_{20} \quad \Big] A$$

$$\frac{u_{16}}{h^2}\left(-u_8 - u_{15} + 4u_{16} - u_{16}^N - u_{24}\right) = f_{16}$$

$$\frac{u_{16}^N - u_{15}}{2h} = 0 \Rightarrow u_{16}^N = u_{15}$$

$$\frac{u_{16}}{h^2}\left(-u_8 - 2u_{15} + 4u_{16} - u_{15} - u_{24}\right) = f_{16} \quad \Big] C$$

$$\frac{u_{41}}{h}\left(-u_{33}(-3) + 4u_{41} - u_{42} - u_{49}\right) = f_{41} \quad \Big] B$$

Es 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \Delta x = 5/100$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\lambda \cdot a\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}(\lambda a)^2\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

$$u_8^{n+1} = -\frac{1}{5} = -1 - \frac{1}{2}\lambda\cdot(-6)(4-4) + \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot 36\left(4 + 2 + 4\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5} = -1 + \frac{1}{2}\cdot 36 \cdot 10^5 \cdot \lambda^2 \sqrt{\left(4 - \frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{36\cdot 5}} = \sqrt{\frac{4}{225}} = \frac{2}{15}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 178

$\bar{q} = (q_j)_{0 \le j \le N} \rightarrow q_j = \int_0^L f \cdot \varphi_j dx - \psi \cdot \varphi_j(0)$

$\bar{u} = (u_j(t))_{0 \le j \le N}$.

$\bar{u}_0 = u_0(x_j)_{0 \le j \le N}$

Eulero Implicito

$(\underline{B} + \Delta t \underline{A}) u^{k+1} = \underline{B} u^k + \Delta t \cdot f(t_{k+1})$

Incondizionatamente stabile

$\underline{A} = \frac{6}{h} \text{tridiag}\left[+1, -1; -1, 2, -1\right]$

$\underline{B} = \rho \cdot h \cdot \text{tridiag}\left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right]$

$\underline{C} = \underline{B} + \Delta t \cdot \underline{A}$

Es 2

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$N_T = \frac{19+18+11}{64 \cdot 3} = \frac{1}{4}$

$\text{AREA}_T = \det\begin{pmatrix} 5h-3h & -h-0 \\ 0-3h & -4h-0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} 2h & -h \\ -3h & -4h \end{vmatrix} \frac{1}{2}$

$= \frac{-8h^2+3h^2}{2} = \frac{15}{2} h^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 178

Es 3

$b_{5,7}$ $b_{5,4}$ $b_{4,6}$ $b_{6,7}$ $b_{5,5}$ $b_{4,4}$ $b_{6,6}$ $b_{7,7}$

$b_{11,11}$

$b_{4,7}$

$b_{5,6}$

Es 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 9\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\Delta x = 3 \cdot 10^{-2}$$

$$u_j^0 = u_j^0 = 7 + j/6$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2}\lambda a\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}\left(u_4^0 + u_2^0\right) - \frac{1}{2}\lambda a\left(u_4^0 - u_2^0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(7 + \frac{4}{6} + 7 + \frac{2}{6}\right) - \frac{1}{2}\lambda \cdot 9\left(\cancel{7} + \frac{4}{6} - \cancel{7} - \frac{2}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{84 + \cancel{4} + 2}{\cancel{6}} - \lambda\frac{1}{\cancel{2}}\,\overset{3}{\cancel{9}}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_2}\right) = \frac{15}{2} - \lambda\frac{3}{2} = 7 + \frac{2}{5}$$

$$\lambda = \left(\frac{15}{2} - 7 - \frac{2}{5}\right)\frac{2}{3} = \frac{75 - 70 - 4}{\cancel{10}\,5} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{15}}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 178

$$\sum_{k=1}^{N} u_k' \cdot b_{jk} + \underbrace{10\cos 5t\, b_{j0}} + \sum_{k=1}^{N} u_k \cdot a_{jk} + \underbrace{2\sin 5t \cdot a_{j0}} = 0$$

Solo per prima riga $\neq 0$!!

$$\int_0^L \varphi_0 \cdot \varphi_j \, dx \qquad j = 1$$

EI

$$\underbrace{(\underline{B} + \Delta t\, \underline{A})\, \bar{u}^{k+1} = \underline{B}\, \bar{u}^k} + \cancel{\Delta t \cdot \bar{f}(t_{k+1})} \qquad \Delta t\, \bar{q}$$

Metodo incondizionatamente stabile Δt qualunque.

Es 2

$$\begin{cases} -\nabla(\nabla u) + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\sigma = 12 + xy^2$$

$$\sigma_T = \frac{12 + (-2h)(h)^2 + 12 + h \cdot h^2 + 12}{3} = 12 - \frac{1}{3}h^3$$

$$\text{AREA}_{(T)} = \begin{vmatrix} -2h - 2h & h \\ h - 2h & h \end{vmatrix} \frac{1}{2} = \frac{-4h^2 + h^2}{2} = +\frac{3}{2}h^2$$

$$\cancel{\int_0 \mu \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx} \qquad a_{jk} = \int \mu \cdot \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \, dx = \mu_T \cdot \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j \cdot \text{AREA}(T)$$

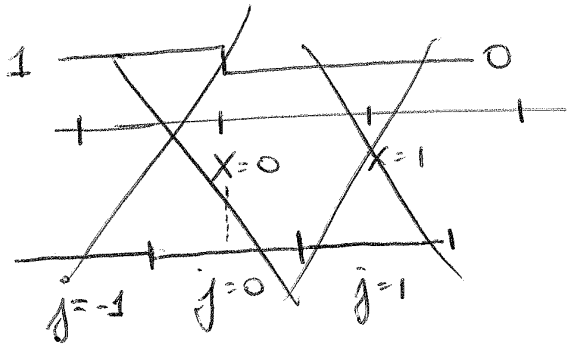
$$a_{jk}^{(\sigma)} = \int \sigma\, \varphi_k \cdot \varphi_j \, dx = \sigma_T \cdot \cancel{\tfrac{1}{3}\,\text{AREA}(T)}\ B$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 178

Es 4

$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0$



$V_0 = (X_{-1/2}, X_{+1/2})$

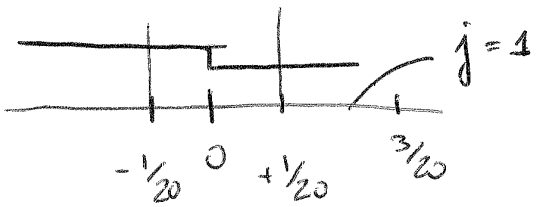
~~$X_{j+1/2} = (0 + \frac{1}{2})\frac{1}{10}$~~

$u_0 = \begin{cases} 1 & j \geq 1 \\ 1/2 & j = 0 \\ 0 & j \leq -1 \end{cases}$

$X_j = j\Delta x$

$V_0 = \left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(j + \frac{1}{2}\Delta x\right)\right]$

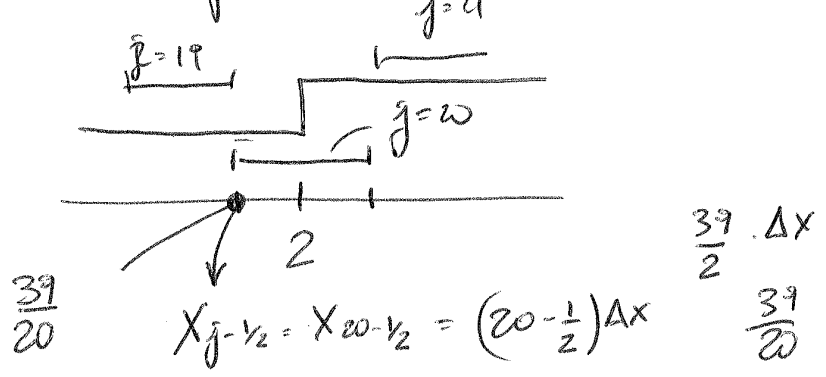
$j=0$



$V_1 = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10}, \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10}\right]$

$= \frac{1}{20}, \frac{3}{20}$

$X = 2 \Rightarrow X_j = j\Delta x \Rightarrow j = 20$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 178

ESAME 19-DIC-2006

Es 2

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\mu\left(\frac{du}{dx}\right) = f \\ u(0)=2 \quad u(1)=-3 \end{cases} \qquad \mu(x)=1+2x \qquad f(x)=1 \qquad h=1/N$$

$V_h = \{ v_h : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tale che } v_h \text{ è continua, } v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ per } j=1,\dots N \quad v(0)=0 \quad v(1)=0 \}$

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx}\mu \frac{du_h}{dx} \cdot v_h \, dx = \int_0^1 f \cdot v_h \, dx$$

$$u_h(x) = 2\cdot\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \varphi(x) + -3\varphi_N(x)$$

$$+\int \mu \frac{du_h}{dx}\cdot\frac{dv_h}{dx}dx = \int f v_h dx$$

($v_h(0)=v_h(1)=0$ quindi l'altro termine nell'integrale per parti è nullo)

$$\downarrow$$

$$2\int_0^1 \mu \frac{d\varphi_0}{dx}\cdot\frac{d\varphi_i}{dx}dx - 3\int_0^1 \mu \frac{d\varphi_N}{dx}\frac{d\varphi_i(x)}{dx}dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} u_k \cdot \int_0^1 \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\cdot\frac{d\varphi_i}{dx}dx = \int_0^1 f v_h dx$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} u_k \int_0^1 \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\cdot\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \int_0^1 f v_h dx + 3\int_0^1 \mu \frac{d\varphi_N}{dx}\frac{d\varphi_i}{dx}dx - 2\int_0^1 \mu \frac{d\varphi_0}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 178

- $k = j-1$

$$a_{jk} = -\frac{1}{h^2}\left(x_j + x_j^2 - x_{j-1} - x_{j-1}^2\right) = -\frac{1}{h^2}\left(h + h\left(x_j + x_{j+1}\right)\right)$$

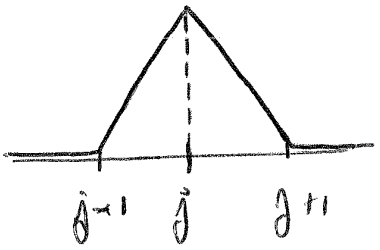
$$= -\frac{1}{h^2}\left(h + h\left(jh + (j-1)h\right)\right) = -\frac{1}{h}\left(1 + (2j-1)h\right)$$

$$a_{jk} = -\frac{1}{h}\left(1 + h(2j-1)\right) = -\left(\frac{1}{h} + (2j-1)\right)$$

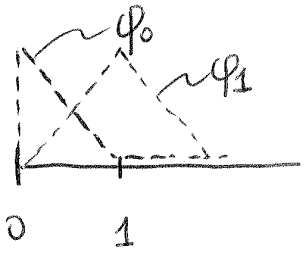
- $k = j$

$$a_{jj} = \frac{1}{h} + (2j+1) + \frac{1}{h} + (2j-1) = \frac{2}{h} + 4j$$

$$f_j = \int_0^1 f\varphi_j\,dx = 1 \cdot 1 \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx = h$$



1ª riga (1)

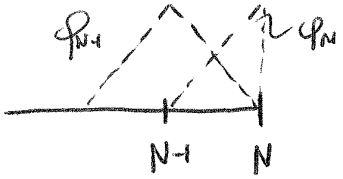


$$-2\int \mu \frac{d\varphi_0}{dx}\cdot\frac{d\varphi_1}{dx}\,dx = -2\left(-\left(\frac{1}{h} + \left(2\cdot 1 - 1\right)\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{h} + 1\right)$$

Termine noto tot. $= h + \frac{2}{h} + 2$

Ultima riga (N-1



$$3\int \mu \frac{d\varphi_N}{dx}\cdot\frac{d\varphi_{N-1}}{dx}\,dx = -3\left(\frac{1}{h} + 2(N-1) + 1\right)$$

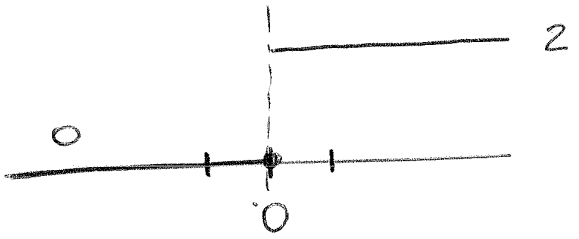
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 178

TEMA ESAME 10 GEN - 2007

ES 3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \text{condiz. iniziale} \\ u_0(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$



$$U_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,0)\,dx$$

$$U_j^0 = u_j^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}\cdot\dfrac{\Delta x}{2} & j = 0 \\ \dfrac{1}{\Delta x}\cdot 2\cdot\Delta x & j > 0 \\ \dfrac{1}{\Delta x}\cdot 0\cdot\Delta x & j < 0 \end{cases} \Rightarrow u_j^0 = \begin{cases} 2 & j > 0 \\ 1 & j = 0 \\ 0 & j < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Delta t = 1/10}$ $\boxed{\Delta x = 1/20}$ $\Rightarrow \lambda = \Delta t/\Delta x = 2$

Soluzione esatta $u_0\left(x - \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{velocità}} t\right) = \begin{cases} 0 & x - \frac{1}{a}t \le 0 \\ 2 & x - \frac{1}{a}t > 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \le \frac{1}{a}t \\ 2 & x > -\frac{1}{a}t \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 178

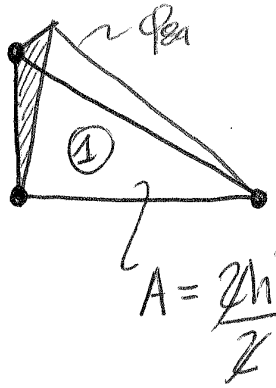
Es 4

$$\begin{cases} -\nabla(\mu\nabla u) = f \\ u = 0 \quad \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

$$-\int_\Omega \nabla(\mu\nabla u)v\,d\bar{x} = \int_\Omega f\cdot v\,d\bar{x}$$

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h\,d\bar{x} = \int_\Omega f\cdot v_h\,dx + \int_{\Gamma_N} \psi v_h\,ds \\ V_h \in \{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h|T} \in \mathbb{P}_1(T)\ \forall T \in \mathcal{T} \ \text{e}\ v_h = 0 \text{ su } \Gamma_1 \text{ e } \Gamma_2 \} \end{cases}$$

$$f_{84} = \int_\Omega f\varphi_j\,d\bar{x} + \int_{\Gamma_N} \psi\varphi_j\,ds \Rightarrow \int_\Omega f\cdot\varphi_{84}\,d\bar{x} + \int_{\Gamma_N} \psi\cdot\varphi_{84}\,ds$$



$$-6\int_\Omega \varphi_{84}\,d\bar{x} = -6\left(\underbrace{\frac{1}{3}h^2\cdot 1}_{\text{Vol. } \varphi_{84}}\right) = -2h^2$$

$$3\int_{\Gamma_N} \varphi_{84}\,ds = 3\cdot 1\cdot\frac{h}{2} = \frac{3}{2}h$$

AREA TRIANGOLO TRATTEGGIATO

$\frac{3}{2}h - 2h^2$ 1° TRIANG.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 178

Es 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1-3x \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) \quad \text{BORDO} \quad h = \dfrac{L}{N} \\ u(x,0) = x(x-L)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{u_j' + \frac{5}{h^2}\left(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}\right) = f_j}$$

Ordine $N-1$

$$A = \frac{5}{h^2}\cdot \text{tndiag}[-1, 2, -1]$$

$$\bar{f} = (f_j)_{1\le j\le N-1} = (1-3x_j)_{1\le j\le N-1}$$

$$\bar{u} = (u_j)_{1\le j\le N-1}$$

$$\bar{u}_0 = (u_0(x_j))_{1\le j\le N-1} = (x_j(x_j-L)^2)_{1\le j\le N-1}$$

- Autovalori applico G.G.

Matrice di massa $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$$B = \rho\cdot \text{diag}[1,\dots,1] = \underline{I}$$

matrice identità

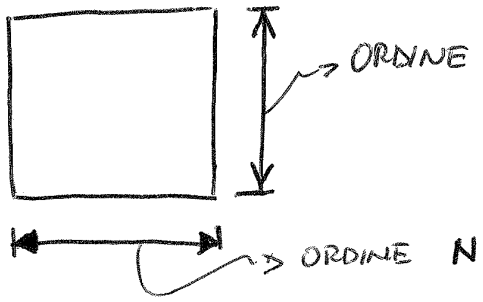
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 178

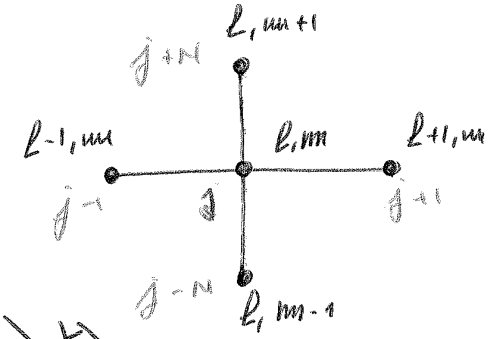
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 178

ESAME 7-FEB-2007

$$\begin{cases} -\nabla u \cdot \nabla u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \qquad u = 3$$

$$h = \frac{L}{N+1} = \frac{1}{N+1}$$





$$\frac{u}{h^2}\left(-u_{l,m-1} - u_{l,m} + 4u_{l,m} - u_{l+1,m} - u_{l,m+1} = f_{l,m}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 \le l \le N \\ 1 \le m \le 2N+1 \end{array}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{l+1,m} - 2u_{lm} + u_{l+1,m}}{h^2}$$

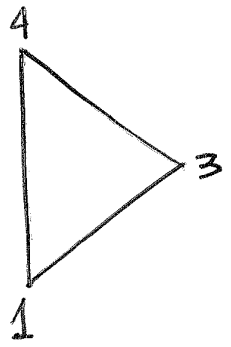
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{lm-1} - 2u_{lm} + u_{l,m+1}}{(h/2)^2} = \frac{2u_{l,m-1} - 8u_{l,m} + 2u_{l,m+1}}{h^2}$$

eq. algebrica

$$\frac{u}{h^2}\left(-u_{l-1,m} - 2u_{l,m-1} + 10u_{l,m} - 2u_{l,m+1} - u_{l+1,m}\right) = f(x_l, y_m)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 178



$$\nabla\varphi_1 = \left(-\frac{1}{2h}, -\frac{1}{h}\right) \qquad A(T_1) = \frac{h^2}{2}$$

$$\nabla\varphi_3 = \left(\frac{1}{h}, 0\right)$$

$$\nabla\varphi_4 = \left(-\frac{1}{2h}, +\frac{1}{h}\right)$$

$$a_{11} = \left(\frac{1}{4h^2} + \frac{1}{h^2}\right)\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{1+4}{4h^2}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{5}{8}$$

$$a_{33} = \left(\frac{1}{h}, 0\right)\left(\frac{1}{h}, 0\right)\frac{h^2}{2} = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{44} = \left(\frac{1}{4h^2} + \frac{1}{h^2}\right)\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{5}{8}$$

$$a_{13} = -\frac{1}{2h^2}\cdot\frac{h^2}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_{34} = -\frac{1}{2h^2}\cdot\frac{h^2}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_{14} = \left(\frac{1}{4h^2} - \frac{1}{h^2}\right)\frac{h^2}{2} = \frac{1-4}{4h^2}\cdot\frac{h^2}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$A^{(\mu)} = \begin{pmatrix} 7/8 & -1/4 & -1/4 & -3/8 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -3/8 & 0 & -1/4 & 5/8 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 178

$$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{\Delta t}{\Delta x} =$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a} \Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{|a|} = \lambda \leq \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{9} \quad \underline{\text{NO}}$$

Es 4

$$\begin{cases} -\nabla(\nabla u) = f \\ u = 0 \text{ su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma_N \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{33}, & a_{3,1} & a_{3,13}, & a_{3,12} & a_{3,5} & a_{3,9} & a_{3,2} & a_{3,1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22} \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{55} \dots \end{bmatrix}$$

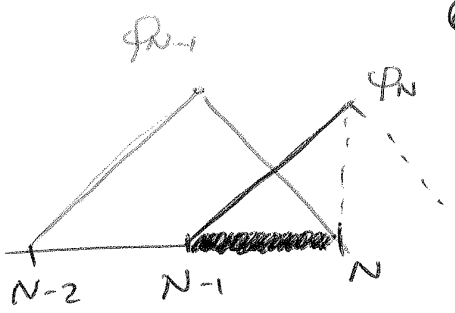
$$\begin{bmatrix} a_{11,11} & a_{11,9} \end{bmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 178

$$\tilde{\bar{B}} = \rho \cdot h \cdot \text{diag}\left[\frac{5}{6}, 1, \dots, 1, \frac{5}{6}\right]$$

$$\bar{A} = \text{Tridiag}\left[-1, 2, -1\right] \cdot \frac{\mu}{h}$$



L'elemento δa_{Nj} è non nullo solo per $j = N-1$ dove

Gradiente appoggi $\rightarrow -\frac{5}{h}$ per $j = N-1$

$$f = \left(0, \dots, \frac{5}{h}\right)$$

↑ Posizione N-1

$(1 \longrightarrow N-1)$ dimensione $N-1$

$$\bar{u}_0 = \left(\delta x_{j=1}, \dots \delta x_{j=N-1}\right)$$

$$\left(\tilde{\bar{B}} + \frac{\Delta t}{2}\bar{A}\right)\bar{u}^{n+1} = \left(\tilde{\bar{B}} - \frac{\Delta t}{2}\bar{A}\right)\bar{u}^{n} + \frac{\Delta T}{2}\left(f(\tau_n) + f(\tau_{n+1})\right)$$

Es 2

AREA (T_1) =

AREA (T_2) =

AREA (T_3) =

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{area}(T)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 178

$$a_{57,57} = \text{area}(T_1)\cdot\mu_T\cdot\nabla\varphi_{57(1)}\cdot\nabla\varphi_{57(1)} + \text{area}(T_2)\,\mu_T\,\nabla\varphi_{57(2)}\cdot\nabla\varphi_{57(2)}$$
$$+ \text{area}(T_3)\cdot\mu_T\cdot\nabla\varphi_{57(3)}\cdot\nabla\varphi_{57(3)} + \left[2\cdot\frac{\partial\varphi_{57(1)}}{\partial x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\text{Area}(T_1) + \right.$$
$$\left. + 2\cdot\frac{\partial\varphi_{57(2)}}{\partial x}\cdot\frac{1}{3}\text{Area}(T_2) + 2\frac{\partial\varphi_{57(3)}}{\partial x}\cdot\frac{1}{3}\Delta\text{rea}(T_3)\right]$$

$$= \text{area}(T)\left[\mu_T\left(\nabla\varphi^2_{57(1)} + \nabla\varphi^2_{57(2)} + \nabla\varphi^2_{57(3)}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial\varphi_{57(1)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_{57(2)}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{57(3)}}{\partial x}\right)\right]$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{h^2}{2} \quad 1 \quad \frac{2}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad +\frac{1}{h} \quad 0 \quad -\frac{1}{h}$$

$$= \frac{h^2}{2}\left(\frac{4}{h^2}\right) = 2$$

$$a_{57,37}u_{37} + a_{57,38}\cdot u_{38} + a_{57,58}u_{58} + a_{57,57}u_{57} + a_{57,58}\cdot u_{58} = f_{57}.$$

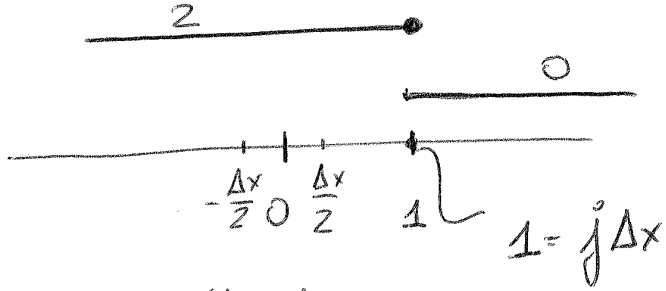
$$\vdots$$

Es 4

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 8\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad u_0(x) = \begin{cases} 2 & x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$V = [x_{j-1/2},\ x_{j+1/2}]$$

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,t_k)\,dx$$



$$x_{j\pm1/2} = \left(j \pm \tfrac{1}{2}\right)\Delta x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 178

- Se $j = 9$

$$u_9^1 = u_9^0 - 8 \cdot \frac{1}{10}\left(u_9^0 - u_8^0\right) = 2$$

- Se $j = 10$

$$u_{10}^1 = u_{10}^0 - 8/10\left(u_{10}^0 - u_9^0\right) = 1 - \frac{8}{10}(1-2) = 1 + \frac{8}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

- Se $j = 11$

$$u_{11}^1 = u_{11}^0 - 8/10\left(u_{11}^0 - u_{10}^0\right) = 0 - \frac{8}{10}(0-1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$u_j^1 = \begin{cases} 2 & \text{se } j \leq 9 \\ 9/5 & \text{se } j = 10 \\ \frac{4}{5} & \text{se } j \geq 11 \\ 0 & \text{se } j \geq 12 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 178

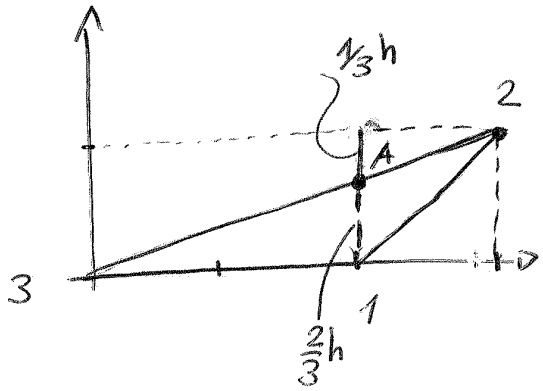
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 178

$$\left(\underline{B} + \frac{\Delta t}{2}\underline{A}\right)\bar{u}^{k+1} = \left(\underline{B} - \frac{\Delta t}{2}\underline{A}\right)\bar{u}^{k} + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_k) + f(t_{k+1})\right)$$

Metodo incondizionatamente STABILE

Es 2

$$-\nabla(\nabla u) + \bar{b}\nabla u = f \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



~~$\nabla\varphi_1$~~ =

$3h : h = h : x \rightarrow x = \frac{1}{3}h$

$$\nabla\varphi_1 = \left(\frac{1}{2h}, \frac{-1}{2/3\,h}\right) = \left(\frac{1}{2h}, -\frac{3}{2h}\right)$$

$$\nabla\varphi_2 = \left(0, +\frac{2/3}{2/3\,h}\right) = \left(0, \frac{1}{h}\right)$$

$$\overline{32} = \sqrt{(3h)^2 + (h)^2} = \sqrt{9h^2 + h^2} = \sqrt{10h^2} = h\sqrt{10}$$

$$\overline{2A} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}h\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9} + 1\right)h^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}h$$

$$1 : \sqrt{10}h = x : \sqrt{\frac{10}{9}}h \rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{in } A = \frac{2}{3}$$

$$\nabla\varphi_3 = \left(-\frac{1}{2h}, \frac{1/3}{2/3\,h}\right) = \left(-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right)$$

$$\text{AREA}(T) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3h-0 & h-0 \\ 2h-0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2h\cdot h}{2} = h^2$$

$$a_{jk} = \int \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \, dx + b\int \nabla\varphi_k \cdot \varphi_j \, dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 178

(T1)

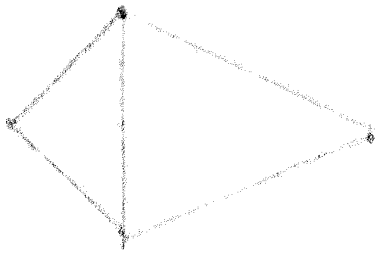
- Se $j=4 \rightarrow u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(2+1) + \frac{2}{5}(2-1) = \frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{15+4}{10} = \frac{19}{10}$
- Se $j=5 \rightarrow u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(2+3) + \frac{2}{5}(2-3) = +\frac{5}{2} - \frac{2}{5} = \frac{25-4}{10} = +\frac{21}{10}$
- Se $j=6 \Rightarrow u_j^{n+1} = 2$

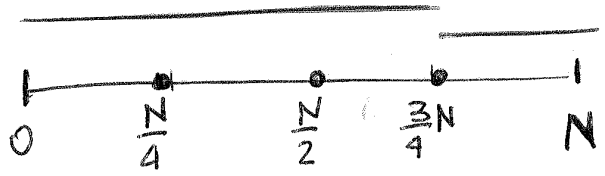
$$u_j^{n+1} = \begin{cases} 0 & j \le 2 \\ \frac{19}{5} & j = 3 \\ \frac{19}{10} & j = 4 \\ +\frac{21}{10} & j = 5 \\ 2 & j \ge 6 \end{cases}$$

ESAME 26-GEN-2006

Es 1

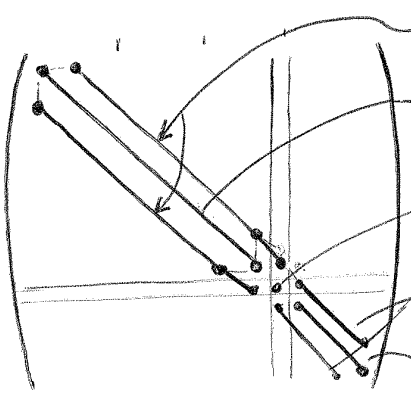
$h = \frac{L}{N}$ $\quad \rho(x) = \begin{cases} 2,4 & x < \frac{3}{4} \\ 1,6 & x > \frac{3}{4} \end{cases}$





$B = \rho \cdot h \cdot \text{tridiag}\left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right]$

$B = h$



$\frac{1}{6} \cdot 2,4 = 0,4$

$\frac{2}{3} \cdot 2,4 = 1,6$

$\left(0,4 + \frac{16}{60}\right) : 2 = 1,33$

$\frac{1}{6} \cdot 1,6 = \frac{16}{60}$

$\frac{1}{3} \cdot 1,6 = \frac{32}{30}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 178

$a_{12} = (0,5)\left(\frac{1}{4h}, -\frac{1}{2h}\right)\frac{1}{3}2h^2 = -\frac{5}{3}h$

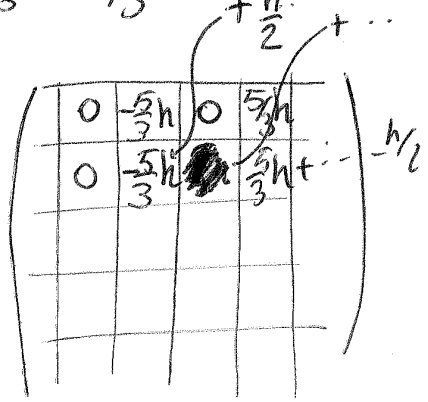
$a_{33} = -\frac{5}{3}h$

$a_{21} = a_{31} = 0$

$a_{13} = a_{23} = 5/3\,h$

$$A(T_1) = \begin{pmatrix} 0 & -5/3\,h & 5/3\,h \\ 0 & -5/3\,h & 5/3\,h \\ 0 & -5/3\,h & 5/3\,h \end{pmatrix}$$

$A_{TOT} =$



on

Es 3

$T61 \rightarrow \begin{bmatrix} a_{10,10} & a_{10,9} & a_{10,30} \\ a_{30,30} & a_{30,9} \\ a_{9,9} \end{bmatrix}$

$T_{56} \rightarrow a_{12,12} \quad a_{12,13} \quad a_{13,13}$

Es 4

$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad u_j^n = \begin{cases} 4 & j \le 5 \\ 3 & j \ge 6 \end{cases}$

$\Delta x = 1,2 \cdot 10^{-2} \qquad \Delta t = 4 \cdot 10^{-3}$

$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{4}{10^3}\cdot\frac{10^2}{1,2} = \frac{1}{12}\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{3}}$

$\underline{a = -3}$

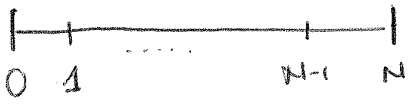
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 178

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 178

ESAME 22-GIU-2006

ES 1

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx} - 3\frac{du}{dx} = f \\ \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

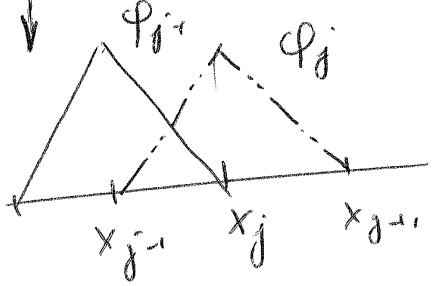


V_h: $\{ v_h \in [0,1] \to \mathbb{R} \mid v_h$ è continua in $[0,1]$, $v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_j$ per $j = 1, \dots N$ $v_h(1) = 0 \}$

$$\int_0^L \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx}dx - \underbrace{\frac{du_h}{dx}v_h\Big|_0^L}_{=0} - 3\int_0^L \frac{du_h}{dx}v_h dx = \int_0^L f v_h dx$$

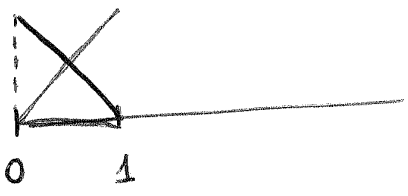
$[1, -1; 1, 2, -1]$

$$a_{jk}^{(1)} = \frac{1}{h}\,\text{tridiag}[-1, 2, -1]$$



$$a_{j,j-1}^{(2)} = -3\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d\varphi_k}{dx}\varphi_j dx$$

$\frac{d\varphi_k}{dx}$: $-\frac{1}{h}$; φ_j: $\frac{h}{2}$



$$a_{j,j-1} = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = 3/2$$

$$a_{jk}^{(2)} = -3\,\text{tridiag}\left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right] \to -3\,\text{tridiag}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right]$$

$a_{op}^{(2)} =$

$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$-1/2$	0	

OK

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 178