



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 242

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Tortoreto

MATERIA : Meccanica dei Fluidi, teoria + esercizi
Prof. Sordo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

MECCANICA DEI FLUIDI

Sebastiano. sordo @ politecno.it

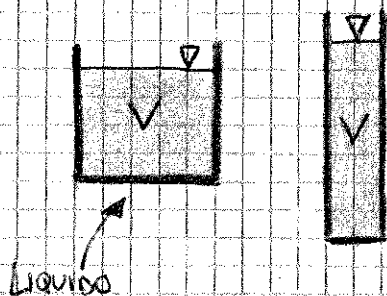
D. CITRINI & NOSEDA IDRAULICA
Ambrosiana

La meccanica dei fluidi è la scienza che studia i fluidi in quiete e in moto

FLUIDO: Un fluido è un corpo materiale che a causa della mobilità delle particelle che lo compongono può subire delle variazioni di forma rilevanti e permanenti sotto l'effetto di forze di minima entità

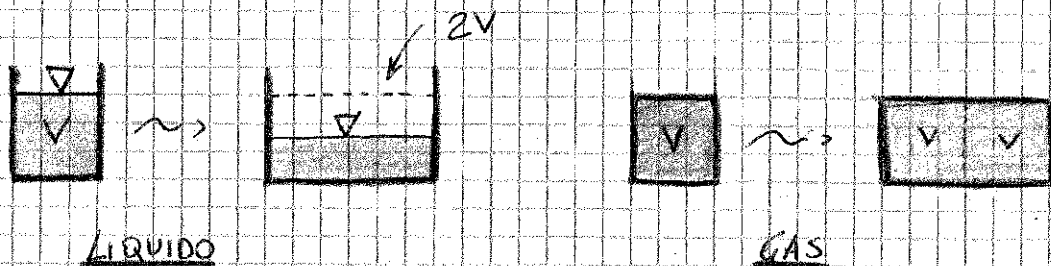
PARTICELLA: È la minima entità costituita di vici propria costituita da un insieme di molecole che si permette di parlare di CONTINUITÀ DEL FLUIDO

Il concetto di particella ci permette di parlare di continuità del fluido perché tra molecole c'è spazio e quindi non continuità



Per alterare anche in minima quantità la forma di un solido devo applicare un sistema di forze finite arrivando nel campo PLASTICO.

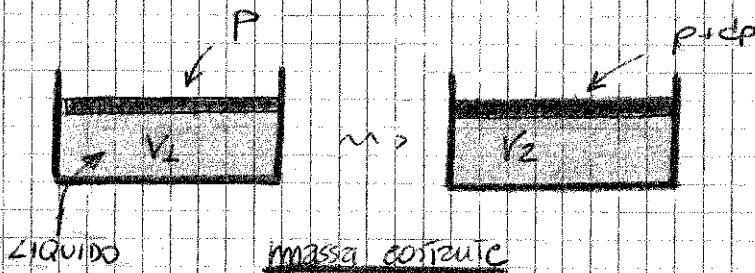
I FLUIDI sono LIQUIDI e GAS, e la loro differenza è che il LIQUIDO è poco comprimibile mentre i GAS sono molto COMPRIBILI



Il Gas occupa tutto il volume a sua disposizione

COMPRESSIBILITÀ LIQUIDI

MODULO DI ELASTICITÀ A COMPRESSIONE CUBICA $\rightarrow E$



$$dV = V_2 - V_1 < 0$$

$$dV = -\frac{1}{E} V dp$$

$$E = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} = [N/m^2] \rightarrow \text{Indipendente dalla pressione, dipende dalla temperatura}$$

$E_{H_2O} (0^\circ C)$	$= 1,96 \cdot 10^9 N/m^2$
$E_{H_2O} (10^\circ C)$	$= 2 \cdot 10^9 N/m^2$
$E_{H_2O} (20^\circ C)$	$= 2,18 \cdot 10^9 N/m^2$
$E_{H_2O} (30^\circ C)$	$= 2,23 \cdot 10^9 N/m^2$

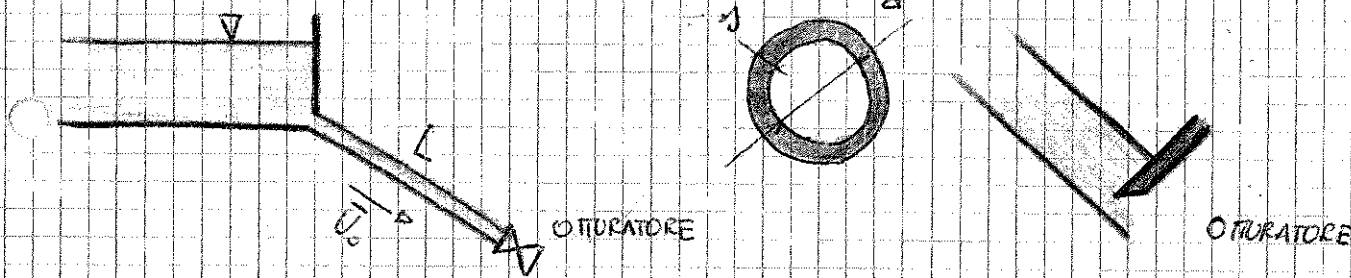
differenziamo

$$PV = \text{cost} \rightarrow P \cdot dV + V \cdot dP = 0 \rightarrow P \cdot dV = -V \cdot dP \rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{E} dP \rightarrow \frac{dP}{E} = \frac{dP}{P} \rightarrow E = P \cdot \frac{dP}{dP}$$

$$E = -V \cdot \frac{dP}{dV} \quad E = P \cdot \frac{dP}{dP}$$

COLPO D'ARIETE



Chiudendo istantaneamente la paratia solo la massa vicina si ferma istantaneamente, poi nasce una PERTURBAZIONE che si propaga con velocità c ed arretra tutto il resto del fluido

$$c = \frac{\sqrt{E/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{ED}{Es}}} \approx 1050 \text{ m/s}$$

VELOCITÀ DI ARRESTO FLUIDO

Se $E = \infty$ allora $c = \infty$
 ovvero la massa si arresta istantaneamente ed avviene delle SOVRAPRESSIONI INFINITE
 (Non pensio come un liquido incompressibile)

Considerando il liquido incompressibile ma condotta dilatibile avremo sempre una velocità c elevatissima.

DENSITÀ $\rho(P, \theta)$

La densità ρ dipende da PRESSIONE e TEMPERATURA $\rho = \rho(\theta, P)$

Se il fenomeno è ISOTERMICO e ρ non dipende da P , allora $\rho = \text{cost}$

Se il fenomeno è sempre ISOTERMICO ma vogliamo tener conto di P

$$E = \rho \frac{dP}{d\rho} \rightarrow d\rho = \frac{\rho}{E} dP \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E} \quad \text{Integriamo}$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{E} \int_{P_0}^P dP \rightarrow \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{E} (P - P_0)$$

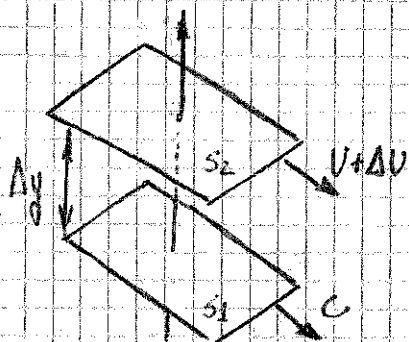
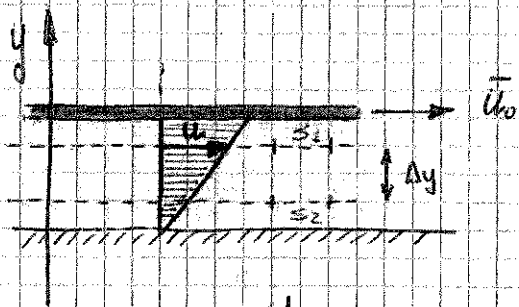
$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{E} (P - P_0) \rightarrow \rho = \rho_0 e^{\frac{P - P_0}{E}} \quad (\rho = \rho(P) \text{ a } T \text{ cost})$$

DENSITÀ FUNZIONE DI P

VISCOSITÀ o ATTRITO INTERNO DI UN FLUIDO

Se il fluido è in quiete, le particelle si scambiano solo azioni normali. Se il fluido è in movimento ci sono anche TENSIONI TANGENZIALI che producono il nome di VISCOSITÀ o ATTRITO INTERNO.

La VISCOSITÀ viene espressa da un parametro che prende il nome di COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ.



Il moto indicato avviene per scorrimento di lammine piane consideriamo 2 lammine distanti Δy e consideriamo 2 superfici S_1 e S_2 tra loro parallele.

S_2 è più veloce di S_1 quindi tende a TRASCINARLA mentre S_1 tende a frenare S_2 e allora si esercitano una forza F .

$$F = \mu G \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

μ = COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ DINAMICA

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{F/L^2}{\frac{v}{L} \cdot \frac{1}{L}} = \frac{FL}{L^2} = \left[\frac{N \cdot s}{m^2} \right]$$

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

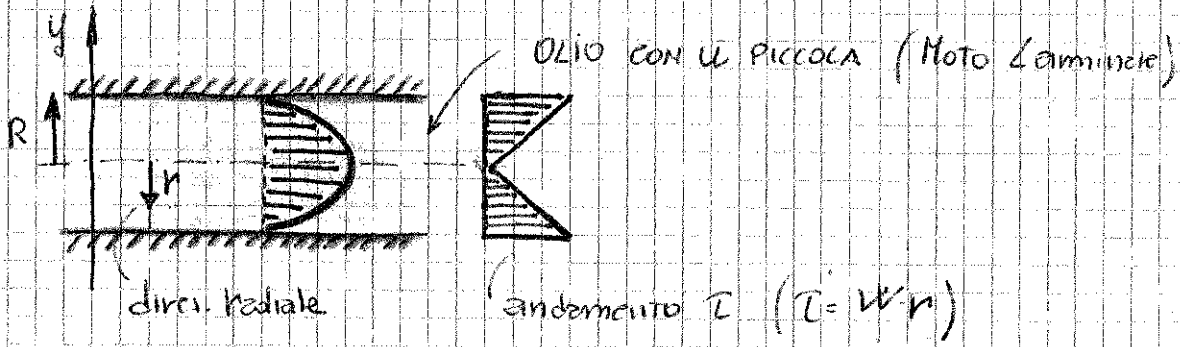
ν = COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ CINEMATICA

$$[L] = \frac{m^2}{s}$$

$$[\mu] = \frac{MLT}{T^2 L^2} = \frac{M}{TL}$$

$$[\nu] = \frac{ML^3}{TL^2 M} = \frac{L^2}{T} = \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

FLUIDO NEWTONIANO IN CONDOTTO



$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \rightarrow W r = \mu \frac{du}{dy} \rightarrow \frac{W}{\mu} r = \frac{du}{dy} \rightarrow W r = \frac{du}{dy}$$

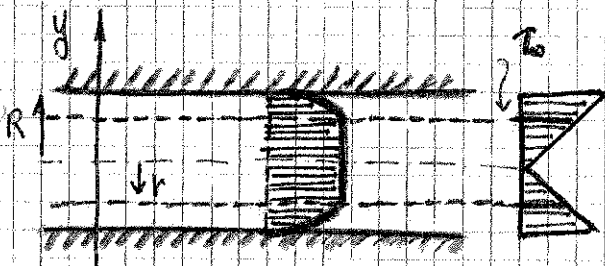
$$W r dy = du \quad y = R - r \quad dy = -dr \Rightarrow -W r dr = du$$

$$u = -\frac{W}{2} r^2 + C_{ost} \rightarrow r = R \quad u = 0 \rightarrow C = \frac{W}{2} R^2$$

$$u = \frac{W}{2} (R^2 - r^2) \rightarrow \text{Andamento della Velocità PARABOLICO}$$

$$u_{max} \rightarrow r = 0 \rightarrow u_{max} = \frac{W}{2} R^2$$

FLUIDO ALLA BINGHAM IN CONDOTTO



$$\tau < \tau_0 \rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \quad (\text{Vel costante})$$

Si muove come corpo rigido (a τ non viscoso a sfiorare i filamenti fluidi)

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \frac{du}{dy} \quad W r = \tau_0 + \mu_p \frac{du}{dy} \quad \frac{W}{\mu_p} r = \frac{\tau_0}{\mu_p} + \frac{du}{dy}$$

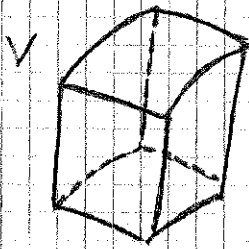
$$A = \frac{W}{\mu_p} \quad B = \frac{\tau_0}{\mu_p} \Rightarrow A r - B = \frac{du}{dy} \rightarrow (A r - B) dy = du$$

$$\frac{du}{dy} = -dr \Rightarrow B dr - A r dr = du \Rightarrow U = B r - \frac{A}{2} r^2 + C_{ost}$$

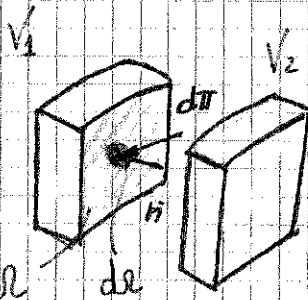
$$u = 0 \quad r = R \Rightarrow 0 = B R - \frac{A}{2} R^2 + C_{ost} \Rightarrow U = \frac{A}{2} (R^2 - r^2) - B (R - r)$$

SPORZI NEI SISTEMI CONTINUI

Introduciamo le FORZE DI MASSA e le FORZE DI SUPERFICIE



Isolando un Volume di Fluido, le FORZE DI SUPERFICIE sono quelle trattenute attorno le Faccie. Le FORZE DI MASSA sono ad esempio la Forza Peso.



Immaginando di dividere il Volume in 2 parti trovando che alla superficie si applica un sistema di forze. Considero una superficie elementare 'dS'. Quelle aree trattenute sono forze infinitesime 'dT' (Nella direzione di 'dS')

$$\frac{dT}{dS} = \vec{\phi} = \text{SPORZO DI TAGGIO} \quad [N/m^2]$$

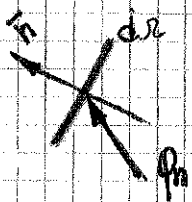
ϕ dipende dalla POSIZIONE DEL PUNTO e dipende dall'ORIENTAMENTO della Faccia (dS). Per individuare la direzione di dS (e la sua Normale)

$\vec{\phi}_n \rightarrow$ SPORZO UNITARIO (dipendente dalla normale)



$$dT = \vec{\phi}_n dS \quad T = \int_S \vec{\phi}_n dS \quad (\text{Azione totale che } V_2 \text{ trattenuta } V_1 \text{ attraverso } S)$$

La Somma delle Forze infinitesime si Riduce ad una FORZA ORIZZONTALE, una VERTICALE ed eventualmente ad una COPPIA



ϕ_n in genere non è normale, avrà una componente normale e una tangenziale. La COMPONENTE NORMALE di ϕ_n è positiva se di COMPRESSIONE

RELAZIONI DI CAUCHY

$$\begin{matrix} \bar{\varphi}_x & \varphi_{xx} & \varphi_{yx} & \varphi_{zx} \\ \bar{\varphi}_y & \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{zy} \\ \bar{\varphi}_z & \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi_{xy} = \varphi_{yx} \\ \varphi_{xz} = \varphi_{zx} \\ \varphi_{yz} = \varphi_{zy} \end{matrix} \right.$$

φ_n dipende da $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, dipende quindi da 9 componenti ovvero da 3 componenti e 6 sforzi di taglio. In realtà le RELAZIONI DI SIMMETRIA DI CAUCHY, Abbiano quindi 3 di componenti e 3 di sforzi che dato che il tensore è simmetrico

$$\varphi_{nx} = \varphi_{xx} \cos \hat{n}_x + \varphi_{xy} \cos \hat{n}_y + \varphi_{xz} \cos \hat{n}_z$$

Se ipotizziamo che il fluido è in quiete, le forze tangenziali sono nulle

$$\varphi_{nx} = \varphi_{xx} \cos \hat{n}_x \quad \text{in} > \varphi_{xx} = \varphi_x$$

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi_{nx} = \varphi_{xx} \cos \hat{n}_x \\ \varphi_{ny} = \varphi_{yy} \cos \hat{n}_y \\ \varphi_{nz} = \varphi_{zz} \cos \hat{n}_z \end{matrix} \right.$$

PER UN FLUIDO IN QUIETE

Se non ci sono forze tangenziali φ_n è normale alla superficie

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi_{nx} = \varphi_n \cos \hat{n}_x \\ \varphi_{ny} = \varphi_n \cos \hat{n}_y \\ \varphi_{nz} = \varphi_n \cos \hat{n}_z \end{matrix} \right. \quad \text{in} > \text{sostituiamo}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi_n \cos \hat{n}_x = \varphi_{xx} \cos \hat{n}_x \\ \varphi_n \cos \hat{n}_y = \varphi_{yy} \cos \hat{n}_y \\ \varphi_n \cos \hat{n}_z = \varphi_{zz} \cos \hat{n}_z \end{matrix} \right. \quad \left(\begin{matrix} \varphi_{xx} = \varphi_x \\ \varphi_{yy} = \varphi_y \\ \varphi_{zz} = \varphi_z \end{matrix} \right)$$

DEFINIZIONE DI PRESSIONE IN PT

$$\varphi_n = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z$$

Allora lo sforzo φ_n in un punto in quiete dipende solo dal punto e non dalla geometria del piano $\rightarrow \varphi_n = \text{PRESSIONE NEL PUNTO}$ che è il modulo dello sforzo φ_n che agisce su una generica geometria

$$\bar{\varphi}_n = p \cdot \hat{n}$$

$\left\{ \begin{aligned} &\phi = \phi(x, y, z) \quad \text{grad } \phi \times \vec{n} = d\phi/dn \quad (\text{dall'analisi}) \\ &\vec{R} = -\frac{\rho}{g} \vec{k} \quad \uparrow \vec{k} \\ &\rho \vec{R} \times \vec{m} \quad \downarrow \vec{m} \quad \text{grad } \rho \times \vec{m} \\ &\rho (-g \vec{k}) \times \vec{m} = \frac{d\rho}{dm} \quad \rho g = d\rho/dm \quad \frac{d\rho}{dm} = \gamma > 0 \end{aligned} \right.$

La pressione cresce dall'alto verso il basso!

Dalle cose precedenti possiamo scrivere

$\left\{ \begin{aligned} \rho X dx &= \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \\ \rho Y dy &= \frac{\partial \rho}{\partial y} dy \quad \text{ms} \\ \rho Z dz &= \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \end{aligned} \right. \quad \rho (X dx + Y dy + Z dz) = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz$

$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \rightarrow$ differenziale esatto della pressione = $d\rho$

$\rho (X dx + Y dy + Z dz) = d\rho$ Allora anche il 1° membro è un differenziale esatto.

IPOTESI \leftarrow FLUIDO INCOMPRESSIBILE
 FLUIDO OMOGENEO
 TEMPERATURA UNIFORME ρ (indipendente da T e p) = cost

$X dx + Y dy + Z dz \rightarrow$ differenziale Esatto \rightarrow Esiste una funzione potenziale

$v = v(x, y, z) \rightarrow X = \frac{\partial v}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial v}{\partial z}$

$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) = d\rho \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot dv = d\rho$
 $dv = \frac{d\rho}{\rho}$

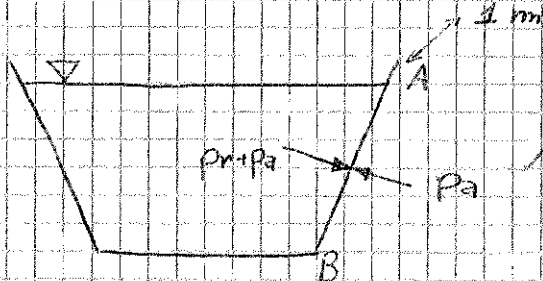
$$z + \frac{p}{\gamma} = h \quad \Rightarrow \quad z + \frac{p - p_a}{\gamma} = h - \frac{p_a}{\gamma}$$

$$p/\gamma = h - z$$

$$h - \frac{p_a}{\gamma} = h_r \quad \Rightarrow \quad z + \frac{p_r}{\gamma} = h_r$$

$$p - p_a = p_r$$

↓
PRESSIONE RELATIVA
ALL'ARIA



∴ L'azione Globale è solo quella del fluido

pressione relativa

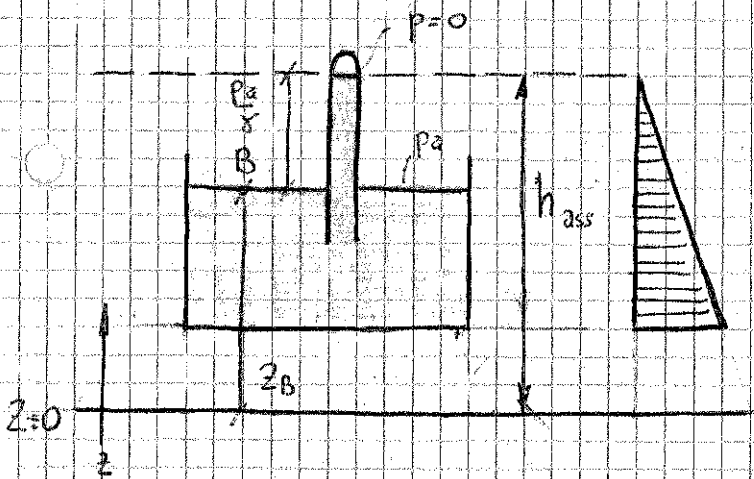
$$z + \frac{p}{\gamma} = h \quad \text{caso piezometrico Relativo}$$

Per pressioni Relative

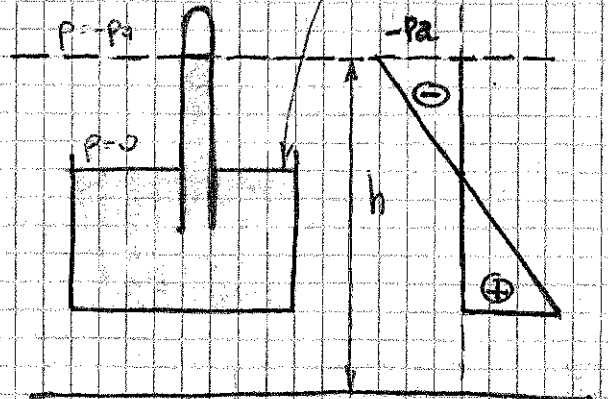
$$z + \frac{p_{ass}}{\gamma} = h_{ass} \quad \left(\frac{p_a}{\gamma} \right)_{H_2O} = 10,33 \text{ mca}$$

Quindi la p sul pelo libero è nulla!

PRESSIONE ASSOLUTA

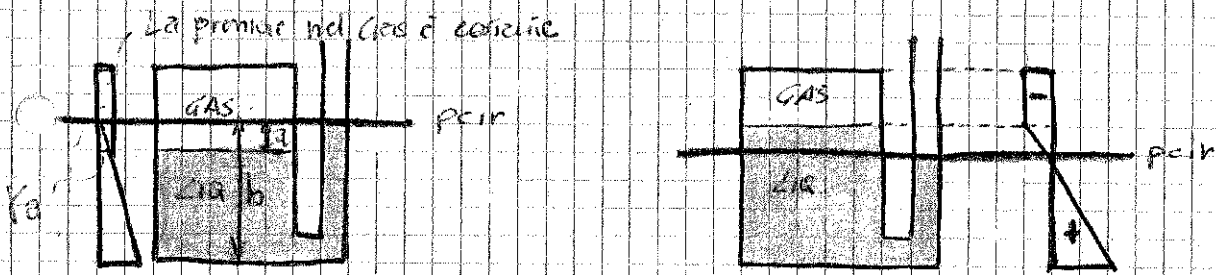


PRESSIONE RELATIVA



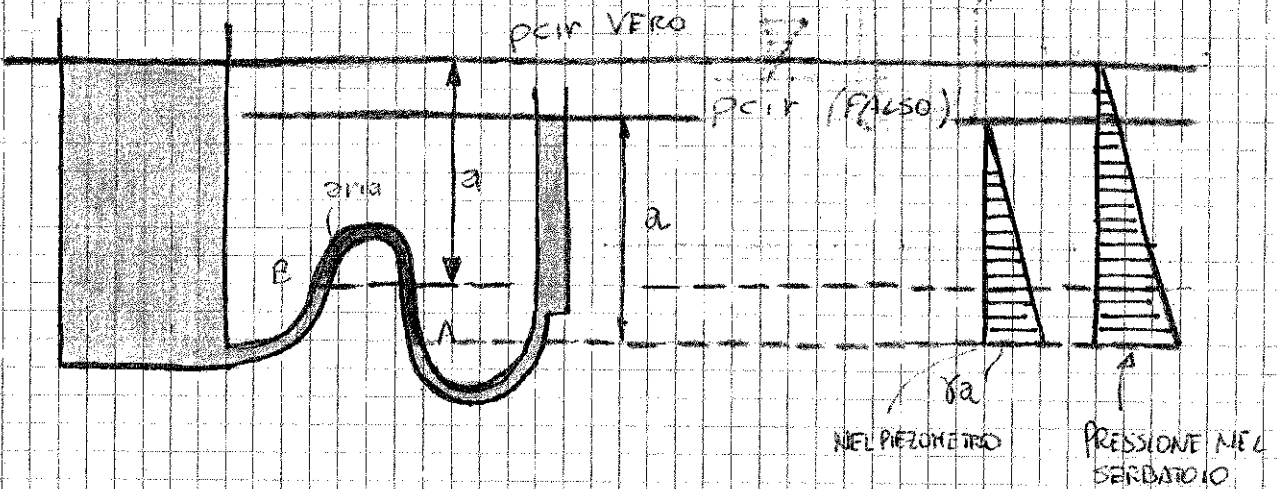
La pressione relativa $p - p_a$

ESEMPI



PRESENZA DI SACCHE D'ARIA

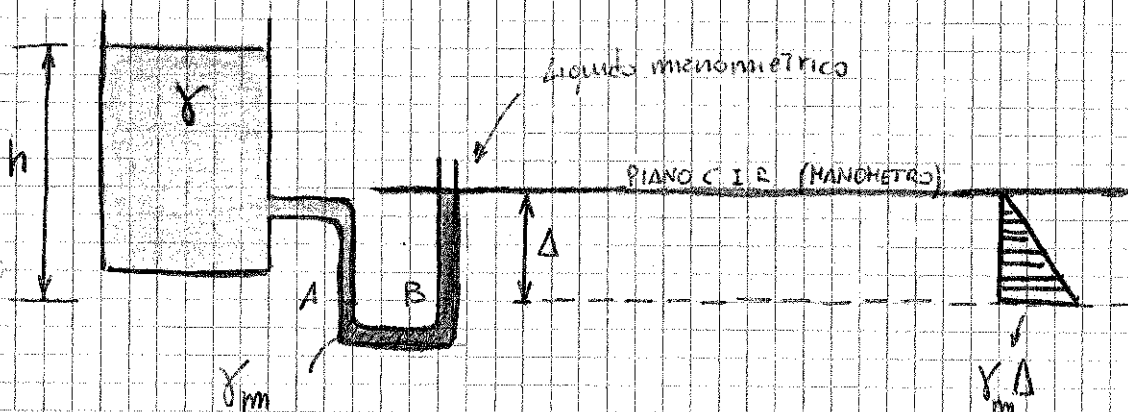
Solitamente il piezometro viene realizzato all'interno del serbatoio, bisogna però stare attenti che non ci siano sacche d'aria all'interno del tubo.



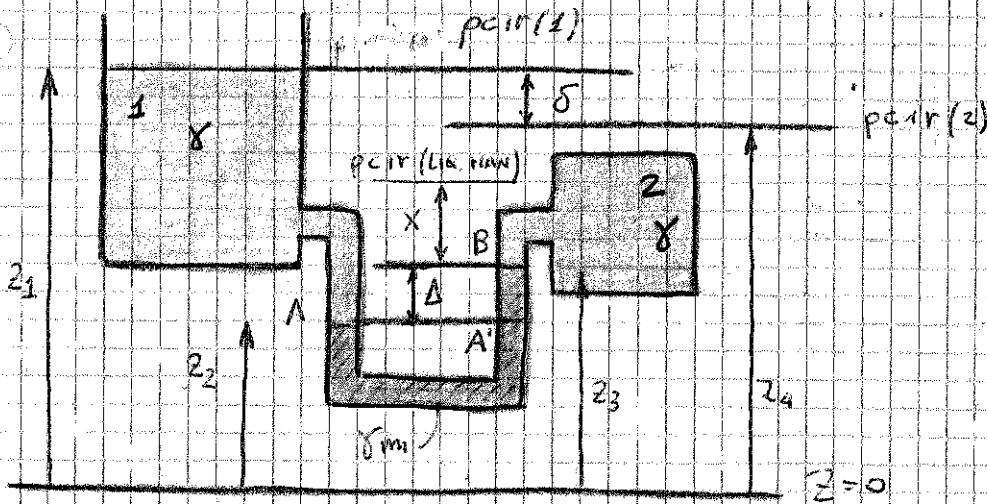
$P_A = \gamma \cdot a$ → pressione sacca d'aria costante, allora

$P_B = P_A$ sapendo che la pressione in B è $\gamma \cdot a$ perché nella sacca c'è aria rimane costante, allora il piano carichi idrostatici relativi (che si trova a $p=0$) si troverà ad una quota a sopra al punto B.

MANOMETRO A LIQUIDO



MANOMETRO DIFFERENZIALE



$P_A = P_{A'}$ $P_A = \gamma(z_1 - z_2)$
 $P_B = \gamma(z_4 - z_3)$ Rispetto a 2

$P_B = \gamma_m X \rightarrow \gamma_m X = \gamma(z_4 - z_3) \rightarrow X = \frac{\gamma}{\gamma_m} (z_4 - z_3)$

$P_{A'} = \gamma_m (X + \Delta) \rightarrow \gamma_m \left(\frac{\gamma}{\gamma_m} (z_4 - z_3) + \Delta \right)$

$P_{A'} = \gamma(z_4 - z_3) + \gamma_m \Delta$

La pressione in A' è la pressione in B più la colonna di γ_m alta Δ
 Vale il principio di sovrapposizione degli effetti

$P_A = P_{A'} \quad \gamma(z_1 + z_2) = \gamma(z_4 - z_3) + \gamma_m \Delta$

$\gamma z_1 - \gamma z_2 = \gamma z_4 - \gamma z_3 + \gamma_m \Delta$

$\gamma(z_1 + z_4) = -\gamma(z_3 - z_2) + \gamma_m \Delta$

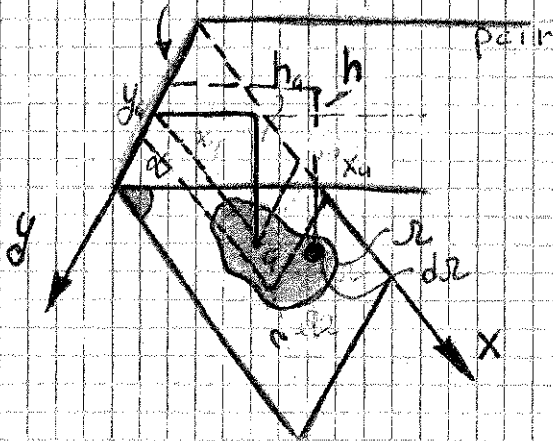
$\gamma \delta = -\gamma \Delta + \gamma_m \Delta \rightarrow \delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$

Se $\gamma_m < \gamma \rightarrow$ Aumenta il $\Delta \rightarrow$ tubo rovesciato

SPINTE SU SUPERFICIE PIANE

Supponiamo di avere un piano inclinato di un certo angolo rispetto al piano dei corredi orizzontali, tale piano di superficie Σ è bagnato il fluido, vogliamo quindi valutare la SPINTA DEL FLUIDO SUL PIANO

LINEA DI SPONDA



Possiamo considerare l'azione sulla superficie dA da sopra o da sotto

$$d\vec{S} = p \cdot dA \vec{n} = \text{SPINTA ELEMENTARE (del liquido)}$$

$$\vec{S} = \int_{\Sigma} p \cdot dA \vec{n} = \text{SPINTA SU } \Sigma$$

$$h = r \sin \alpha \quad p = \gamma \cdot h \quad \Rightarrow \quad \vec{S} = \int_{\Sigma} \gamma h dA \vec{n} = \int_{\Sigma} \gamma r \sin \alpha dA \vec{n}$$

$$\vec{S} = \gamma \sin \alpha \int_{\Sigma} r dA \vec{n}$$

L > MOMENTO STATICO SUPERFICIE
RISPETTO A LINEA DI SPONDA (M)

$$\vec{S} = \gamma \sin \alpha \cdot M \vec{n}$$

$$L > M = r \cdot X_G \quad \Rightarrow \quad \vec{S} = \gamma \sin \alpha \cdot r \cdot X_G \cdot \vec{n}$$

In modulo $\rightarrow S = \gamma \sin \alpha \cdot r \cdot X_G = \gamma \underbrace{h \cdot r}_{p \cdot r}$

$$\vec{S} = p \cdot r \cdot \vec{n} \quad S = p \cdot r$$

La spinta su superficie piana è un vettore normale alla sup. che ha come modulo il prodotto tra pressione in Baricentro per l'area.

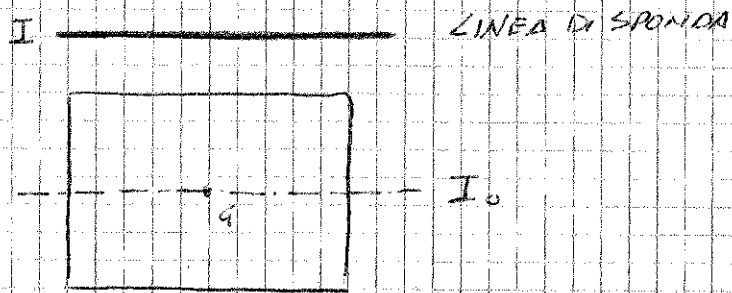
Il centro di spinta è sempre più distante dal Baricentro rispetto alla LINEA DI SPONDA

$$I = I_0 + X_a^2 L$$

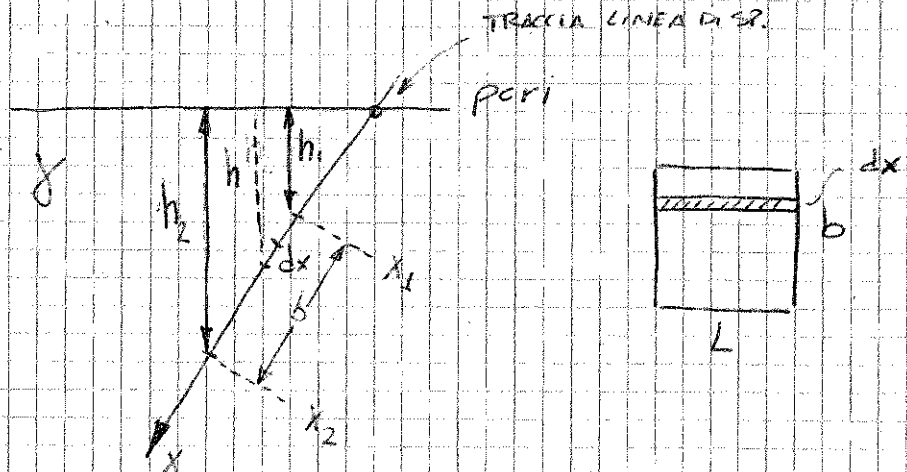
$$X_c = \frac{I_0 + X_a^2 L}{M}$$

$$= \frac{I_0}{M} + \frac{X_a^2 L}{M}$$

L, $X_c = X_a + \frac{I_0}{M L} \rightarrow X_c$ sempre più lontano di X_a



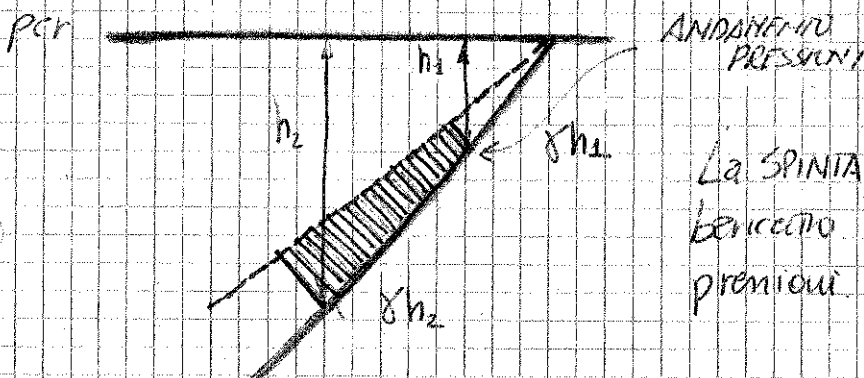
ESEMPIO



$$dS = \rho g x L = \gamma h L dx \quad S = \int_{x_1}^{x_2} \gamma h L dx = \gamma L \int_{x_1}^{x_2} h dx$$

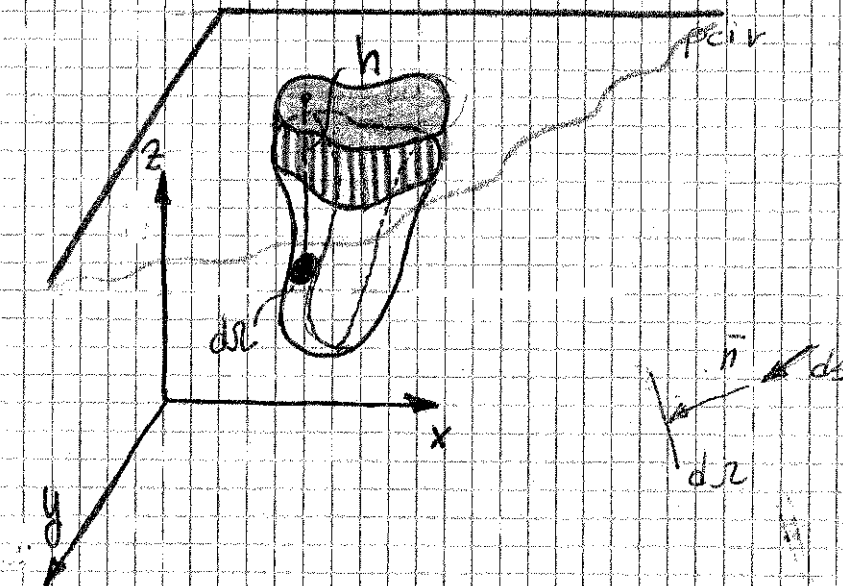
$$h = x \sin \alpha \quad x = h / \sin \alpha \quad dx = \frac{dh}{\sin \alpha}$$

$$S = \frac{\gamma L}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} h dh \quad S = \frac{\gamma L}{2 \sin \alpha} (h_2^2 - h_1^2)$$



La SPINTA è applicata nel baricentro del diagramma dell'andamento pressioni

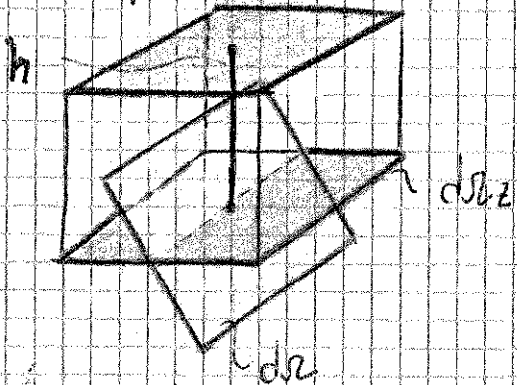
SPINTE SU SUPERFICIE CURVE



$$d\vec{s} = p dz \vec{n} = \gamma h dz \vec{n}$$

$$\begin{cases} ds_x = p \cos \hat{n}_x dz & dz \cos \hat{n}_x = dz_x \\ ds_y = p \cos \hat{n}_y dz & dz \cos \hat{n}_y = dz_y \\ ds_z = p \cos \hat{n}_z dz & dz \cos \hat{n}_z = dz_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} ds_x = p dx \\ ds_y = p dy \\ ds_z = p dz \end{cases} \text{ ins. } ds_z = p dz = \gamma h dz$$



$$dW = ds_z \cdot h \text{ (Volume)}$$

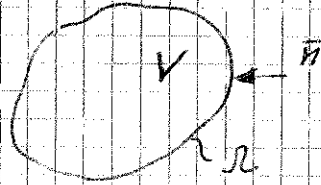
$$S_z = \gamma W \text{ Volume}$$

Facendo il ragionamento di dz ottengo che la S_z è il peso del Volume della superficie fino al piano dei centri idrostatici del

SUPERFICIE CURVA CON CONTORNO SUL PIANO

Questo lei sup curva ha un contorno sul piano si semplifica il tutto con l'Equazione Globale di Equilibrio Statico

$$\vec{p}\vec{R} = \text{grad } p$$



Considerando un Volume V con una superficie S, integriamo l'equazione sul volume

$$\int_V \vec{p}\vec{R} dV = \int_V \text{grad } p dV$$

$$\left(\int_V \vec{p} dV = - \int_S p \vec{n} dS \right)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dV = 0$$

Equivalente ad un integrale del sup

$$- \int_S p \left(\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \right) dS = - \int_S p \vec{n} dS$$

$$\int_V \text{grad } p dV = - \int_S p \vec{n} dS = + \vec{F}_c \quad \text{FORTE AL CONTORNO TRASMESSA DALL'ESTERNO VERSO L'INTERNO (DOWUTE A PRESSIONE)}$$

Nel campo DELLA GRAVITA' $\vec{R} = -g\vec{n}$



$$\int_V \vec{p}\vec{R} dV = \int_V p(-g\vec{n}) dV = \int_V \gamma(-\vec{n}) dV$$

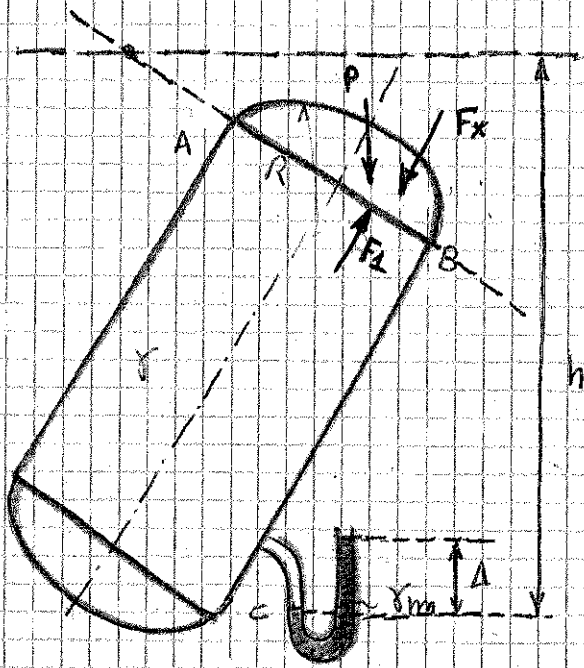
Peso del fluido

$$\vec{P} = -\vec{F}_c \quad \text{ma} \quad \vec{P} + \vec{F}_c = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE IS. STATICO

si fanno equilibrio dei Forze Peso e le Forze di equazione per il campo di Gravità

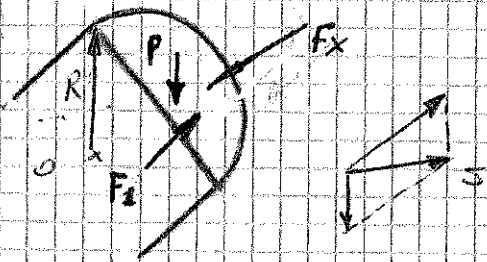
ESEMPIO 2



pcir

Considero un arbitrario elemento Δ della curva AB di altezza Δ e centro di spinta su AB

$$P_c = \gamma_{im} \Delta = \gamma h \Delta \rightarrow h = \frac{\gamma_{im} \Delta}{\gamma}$$

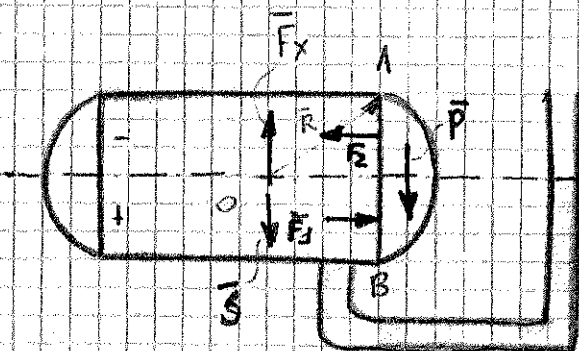


$$\vec{P} + \vec{F}_z + \vec{F}_x = 0$$

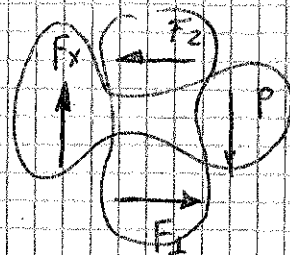
$$\vec{S} = -\vec{F}_x = \vec{P} + \vec{F}_z$$

La spinta S è la somma delle spinte ELEMENTARI che sono (RADIALI) allora la spinta dovrà passare per il punto O , quindi posso scomporre F_x e P per la risultante passare per il punto O , Non devo quindi calcolare il punto di applicazione di P e di F_z .

ESEMPIO 3



pcir



$F_o = \gamma h a R = 0$ perché $h_a = 0$ Ma l'azione totale non è nulla

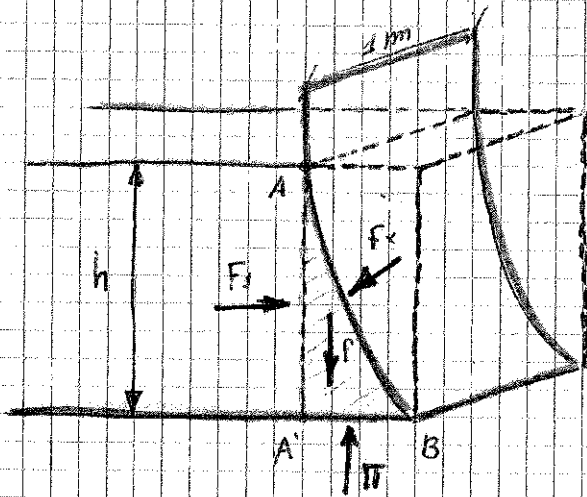
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad m.s. \quad \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_x = 0$$

Azione celotta sui fluidi

Somma nulla ma devo un momento

Allora anche $\vec{P} + \vec{F}_x$ devono dare un momento uguale e contrario

ESEMPIO 2



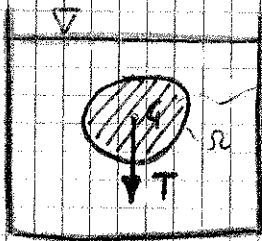
$\vec{O}R = F_2$
 $\vec{O}V_{ERT} = \vec{\Pi} - P$

$\vec{P} + \vec{F}_2 + \vec{F}_x + \vec{\Pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_x = \vec{P} + \vec{F}_2 + \vec{\Pi}$

$\Pi = \gamma \cdot h \cdot A'B$ \Rightarrow Peso del Parallelepipedo

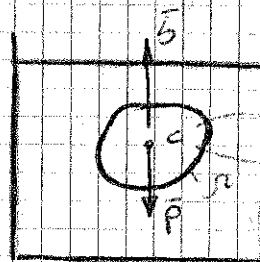
\hookrightarrow Allora la Spinta Verificata equivale al Volume di liquido fittizio che è al disopra della superficie fino al piano dei carichi idrostatici RELATIVI

SPINTE SU CORPI IMMERSI



CORPO

\Rightarrow



LIQUIDO

CENTRO DI CARENA

Per calcolare la Spinta sul corpo, calcoliamo la Spinta sul liquido, che ha un BASTACENIRO C (Centro di carena) Non sempre coincidente con G, il corpo può non essere omogeneo

$\vec{P} + \vec{F}_c = 0 \quad \vec{F}_c = \vec{S} = -\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \text{Spinta Equivale al Peso del Liquido spostato}$

EQUILIBRIO RELATIVO

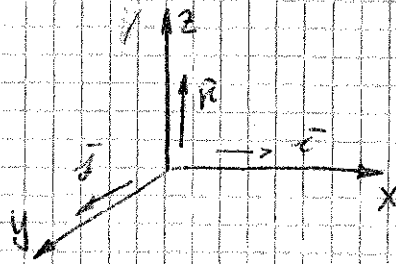
Il fluido può essere soggetto anche ad un campo di forze d'inerzia dovuto al TRASCINAMENTO del serbatoio che lo contiene.

$\rho \vec{R} = \text{grad } P \quad \Rightarrow \quad R$ è la somma del campo di gravità e dell'azione di TRASCINAMENTO \vec{A} se $-\vec{A}$ è l'accelerazione del carrello

$$\vec{R} = -g\vec{k} + \vec{A} \quad \Rightarrow \quad -g\vec{k} - \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \rho(-g\vec{k} + \vec{A}) = \text{grad } P$$

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

X, Y, Z componenti di R



$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp$$

se ρ è costante (Liq. Incompressibile ed omogeneo)
 $Xdx + Ydy + Zdz \rightarrow$ differenziale esatto

Con il solo campo della gravità \rightarrow il potenziale è solo $-gz$

$$V = \text{POTENZIALE CAMPO GRAVITÀ} = -gz$$

$$V' = \text{POTENZIALE ACCELERAZIONE}$$

\hookrightarrow Allora POTENZIALE DI $\vec{A} = -V''$

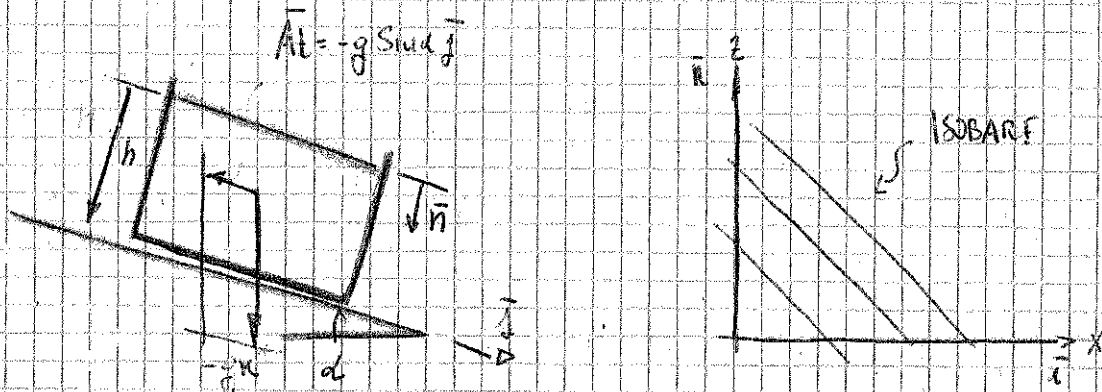
$$Xdx + Ydy + Zdz = d(-gz - V'') \quad \Rightarrow \quad \rho d(-gz - V'') = dp$$

$$-d(\rho gz + \rho V'') - dp = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\rho z + \rho V'') + p = 0$$

$$X d\left(z + \frac{\rho}{\rho} V''\right) + \frac{\rho}{\rho} = 0 \quad d\left(z + \frac{\rho}{\rho} V'' + \frac{\rho}{\rho}\right) = 0$$

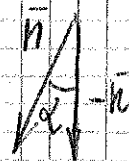
$$z + \frac{V''}{g} + \frac{\rho}{\rho} = \text{cost}$$

DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI CASO ESAMINATO



vedremo come varia la pressione lungo una direzione h

$$z + x \tan \alpha = \text{costante}$$



$$\vec{R} = -g \vec{r} - g \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{R} \times \vec{n} = \text{grad} p \times \vec{n}$$

$$\text{grad} p \times \vec{n} = dp/dh$$

$$p(-g \vec{r} - g \sin \alpha \vec{j}) \times \vec{n} \quad \vec{j} \times \vec{n} = 0 \quad -\vec{r} \times \vec{n} = \cos \alpha$$

$$p(-g \vec{r} - g \sin \alpha \vec{j}) \times \vec{n} = p g \cos \alpha = \gamma \cos \alpha$$

$$p \vec{R} \times \vec{n} = \text{grad} p \times \vec{n} \implies \gamma \cos \alpha = dp/dh$$

$$p = \gamma h \cos \alpha + \text{cost} \quad h=0 \quad p=0 \implies \text{cost} = 0$$

$p = \gamma h \cos \alpha \implies$ La pressione varia linearmente lungo h

Se $\alpha = 90^\circ \implies$ la pressione è ovunque nulla!

la conclusione fa n più vedere anche in un altro modo



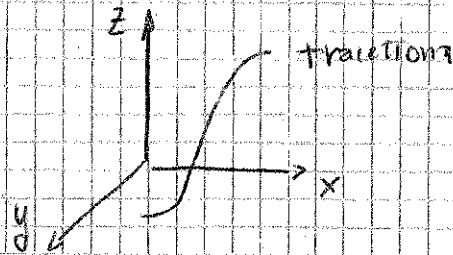
CINEMATICA DEI FLUIDI

Quando studio il moto di un fluido posso utilizzare 2 metodi: METODO LAGRANGIANO e METODO EULERIANO.

METODO LAGRANGIANO

Con il METODO LAGRANGIANO voglio individuare le equazioni parametriche che descrivono la traiettoria di una particella

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} u = dx/dt \\ v = dy/dt \\ w = dz/dt \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Il numero di particelle è 10^3 quindi non posso avere 10^3 sistemi di equazioni

METODO EULERIANO

Eulero individua in un punto geometrico le componenti della velocità, non individuando quindi le traiettorie

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

C'è un legame fra le Relazioni

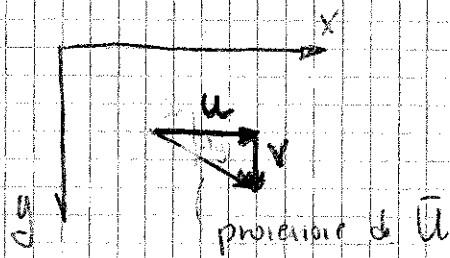
$$\begin{cases} dx = u dt & x_0 \\ dy = v dt & y_0 \\ dz = w dt & z_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Integrando posso ottenere le traiettorie}$$

↑
Costanti di integrazione.

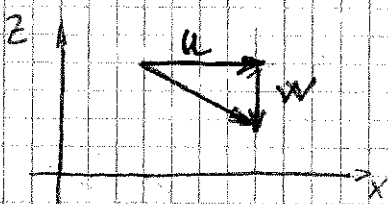
Consideriamo il segmento ds con la velocità \vec{U} tangente

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

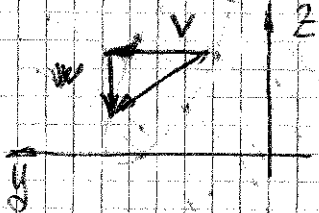
$$ds \rightarrow dx, dy, dz$$



$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$



$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w}$$



$$\frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{m.}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \\ \frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} \end{cases}$$

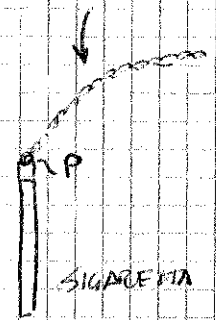
SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI PER LE LINEE DI FLUSSO

LINEE DI EMISSIONE O DI FUMO

Se considero un punto P della massa fluida e considero tutte le particelle che passano in t_0 per quel punto, queste particelle descrivono una curva. Il luogo dei punti di tutte le linee di particelle passate per un determinato punto sono dette linee di fumo.

Una LINEA DI FUMO fa curva lungo dei punti occupati dalle particelle che sono passate da un certo punto P .

LINEA DI EMISSIONE



Se la sezione è TRASVERSALE o RETTA, allora il vettore velocità \vec{u} è diretto secondo la normale e quindi $|\vec{u}| \equiv |u_n|$

$$Q = \int_{\sigma} u_n d\sigma \quad \text{PORTATA IN SEZIONE RETTA}$$

$$u_{\text{m}} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} u_n d\sigma = \frac{Q}{\sigma} \quad \text{VELOCITÀ MEDIA}$$

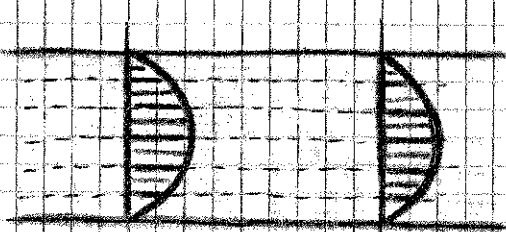
MOTO PERMANENTE

Un moto è permanente quando le grandezze cinematiche non variano nel tempo pur cambiando da punto a punto.

MOTO UNIFORME

Il moto uniforme è un particolare moto permanente e si ha quando il vettore velocità non varia nel tempo e non varia nello spazio (MECCANICA CLASSICA). Nella meccanica dei fluidi il moto è UNIFORME quando la velocità non cambia nel tempo ma rimane costante lungo le singole traiettorie (può cambiare tra una traiettoria all'altra).

Es. MOTO LAMINARE (UNIFORME)



Condotta a sezione costante e Rettilinea e $Q = \text{costante}$

Il moto laminare esemplificato è UNIFORME perché il diagramma delle velocità si ripete in tutte le sezioni. Attraverso l'asse Rettilinea rimanendo costante le direzioni delle velocità.

DERIVATA EULERIANA

Derivata di una grandezza che varia nel tempo e nello spazio

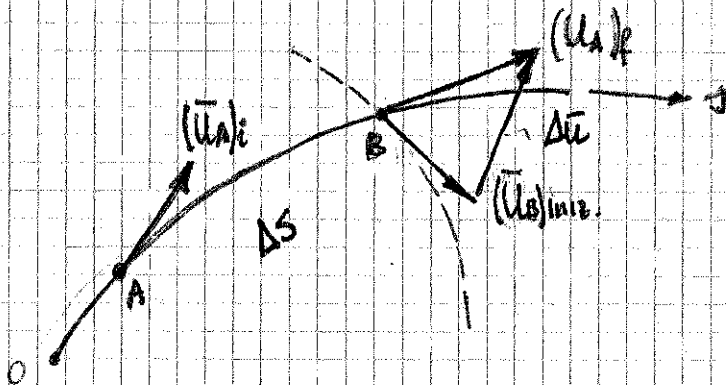
$$\varphi = \varphi(t, x, y, z) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} u + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$A = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \text{Accelerazione come derivata euleriana}$$

Accelerazione con Ascissa curvilinea

La scrittura dell'accelerazione risulta più compatta se introduciamo l'ASCISSA CURVILINEA



Quando la particella è in A, in B c'è un'altra particella con un'altra traiettoria. Nel tempo Δt finito la particella in A, arriva in B che avrà una velocità $(u_B)_f$

Allora la u_f si può scrivere come: $u_f = (u_B)_i + \Delta u$ $\hookrightarrow u > u_B$

$$\bar{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(u_B)_f - (u_A)_i}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(u_B)_i - (u_A)_i + \Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(u_B)_i - (u_A)_i}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{A} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(u_B)_i - (u_A)_i}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow A = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \quad \hookrightarrow u$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Se esce della massa in più di quella che entra, allora nel volume ci sarà una riduzione della DENSITA' !!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{div} \vec{u}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA'}$$

Ricordavo il modulo di elasticità a compressione cubica $\epsilon = \rho \cdot \frac{d\rho}{d\rho}$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\epsilon} \frac{d\rho}{dt} \quad \text{m}, \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho}{\epsilon} \frac{D\rho}{Dt} \quad \text{EQUAZIONE DI STATO}$$

↓ legge alla particella

FLUIDO INCOMPRESSIBILE \rightarrow Plus Vena nella trazione

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{m}, \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \text{div} \vec{u} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \quad \text{FLUIDO INCOMPRESSIBILE}$$

$$\begin{cases} \rho = \text{cost} \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \quad \text{FLUIDO INCOMPRESSIBILE \& HOMOGENEO}$$

FORZE DI MASSA
FORZE AL CONTO RNO

$$\rho \bar{R} dx dy dz + \bar{F}_x dy dz - \left(\bar{F}_x + \frac{\partial \bar{F}_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \\
 + \bar{F}_y dz dx - \left(\bar{F}_y + \frac{\partial \bar{F}_y}{\partial y} dy \right) dz dx + \bar{F}_z dx dy - \left(\bar{F}_z + \frac{\partial \bar{F}_z}{\partial z} dz \right) dx dy = 0 \\
 = \rho \bar{A} dx dy dz = dm \bar{A}$$

$$\rho \bar{R} dx dy dz = \frac{\partial \bar{F}_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \bar{F}_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \bar{F}_z}{\partial z} dx dy dz + \rho \bar{A} dx dy dz$$

$$\rho (\bar{R} - \bar{A}) = \frac{\partial \bar{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{F}_z}{\partial z} \quad \text{EQUAZIONE DI EQUILIBRIO}$$

$$\bar{R} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{A} = \frac{D\bar{u}}{Dt} = \left(\frac{Du}{Dt} \right) \bar{i} + \left(\frac{Dv}{Dt} \right) \bar{j} + \left(\frac{Dw}{Dt} \right) \bar{k} \quad (u = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k})$$

Proiettato su Relatione sui tre assi

$$\begin{cases}
 \rho \left(x - \frac{Du}{Dt} \right) = \frac{\partial \varphi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{zx}}{\partial z} \\
 \rho \left(y - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{zy}}{\partial z} \\
 \rho \left(z - \frac{Dw}{Dt} \right) = \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{zz}}{\partial z}
 \end{cases}$$

6 componenti tangenziali
 3 componenti normali

$\varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz} \rightarrow$ COMPONENTI NORMALI

$\varphi_{xy} = \varphi_{yx}; \varphi_{xz} = \varphi_{zx}, \varphi_{yz} = \varphi_{zy} \rightarrow$ COMPONENTI TANG. CON CONDIZIONE DI CAUCHY

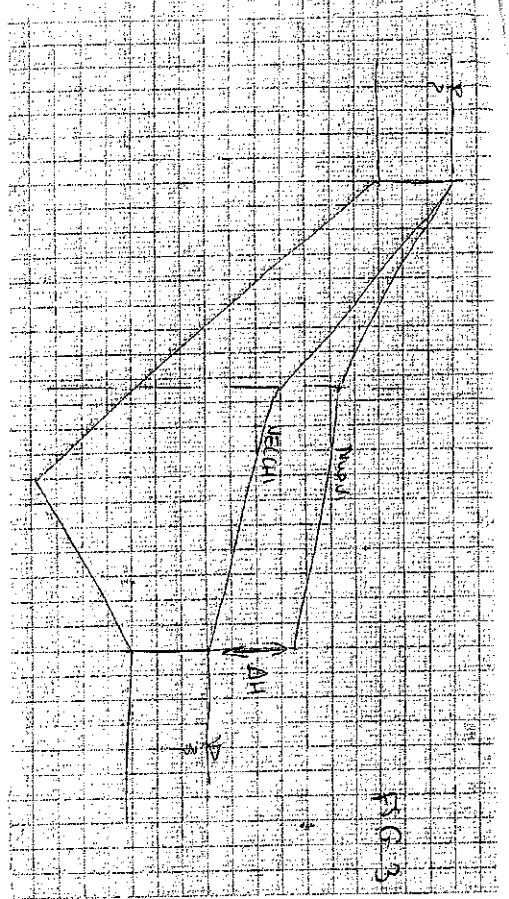


FIG. 3

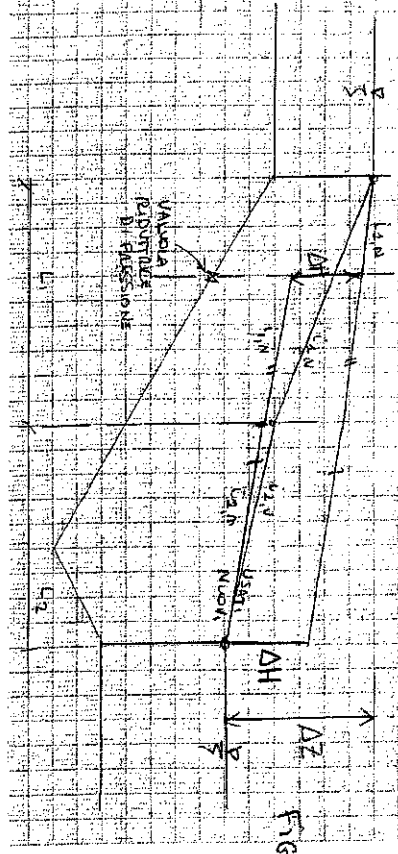


FIG. 4

ESERCIZIO 2

Senza impianto di sollevamento nel tratto 2, la piezometrica finirebbe al di sotto del pelo libero del serbatoio B. La piezometrica deve essere sollevata di una quantità (prevalenza della pompa ΔH_p) pari alla differenza di quota fra il livello nel serbatoio B e la quota della piezometrica nel punto finale del tratto 2 in caso di assenza di pompa

$$\Delta H_p = i_1 l_1 + i_2 l_2 = \beta' \frac{Q_A^2}{D_1^5} l_1 + \beta' \frac{Q_B^2}{D_2^5} l_2$$

L'equazione contiene 2 incognite, ΔH_p e Q_A . Serve un'equazione aggiuntiva. Nel par-

corso 1-3 si può scrivere

$$Y = i_1 l_1 + i_3 l_3 = \beta' \frac{Q_A^2}{D_1^5} l_1 + \beta' \frac{Q_A^2}{D_3^5} l_3$$

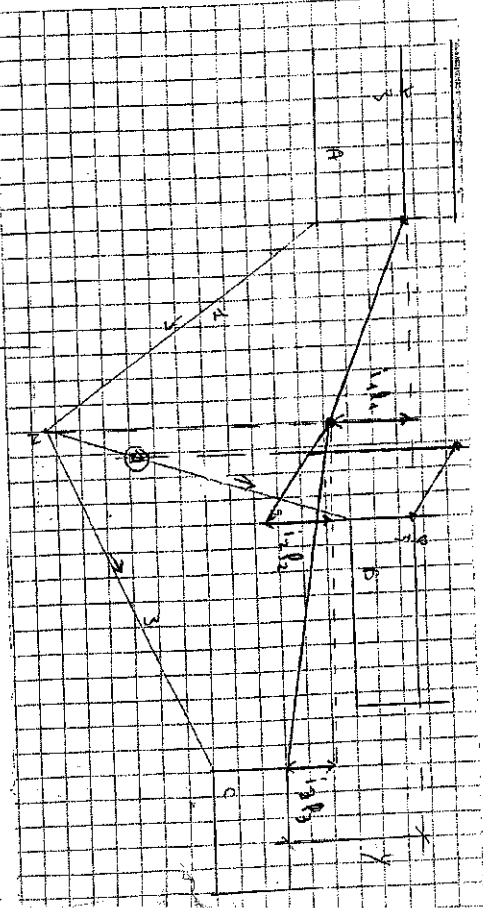
ma così si introduce una terza incognita Q_C . Serve una terza equazione

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

Ora sono disponibili 3 equazioni in 3 incognite, quindi il sistema è risolvibile $\rightarrow Q_C = 0.1$

$$m^3; Q_A = 0.135 \frac{m^3}{s}; \Delta H_p = 4.78 \text{ m.}$$

La potenza di una pompa si calcola come $P = \frac{\gamma \Delta H_p Q_B}{\eta} = 2447 \text{ W} \approx 2.45 \text{ kW}$



$$-\int_V \rho \bar{A} dv = -\int_V \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dv - \int_V \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dv - \int_V \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dv - \int_V \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dv \quad (3)$$

• $-\int_V \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dv = \text{FORZE D'INERZIA LOCALE} = 0$ se $\bar{u} = \text{cost}$

↓
MOTO PERMANENTE

$$0 - \int_V \rho u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \int_V \rho \left(\frac{\partial u \bar{u}}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dv \quad \frac{\partial u \bar{u}}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

$$0 - \int_V \rho v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \int_V \rho \left(\frac{\partial v \bar{u}}{\partial y} - \bar{u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dv$$

$$0 - \int_V \rho w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \int_V \rho \left(\frac{\partial w \bar{u}}{\partial z} - \bar{u} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dv$$

Annuncio membro a membro

$$\underbrace{-\int_V \rho u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \int_V \rho v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \int_V \rho w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_B = B = \text{div } \bar{u}$$

$$= -\int_V \rho \frac{\partial u \bar{u}}{\partial x} - \int_V \rho \frac{\partial v \bar{u}}{\partial y} - \int_V \rho \frac{\partial w \bar{u}}{\partial z} + \int_V \rho \bar{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\int_V \rho \frac{\partial u \bar{u}}{\partial x} dv = - \left(- \int_{\Sigma} \bar{u} u \cos \hat{n}_x d\sigma \right) \quad C$$

$$\int_V \rho \frac{\partial v \bar{u}}{\partial y} dv = - \left(- \int_{\Sigma} \bar{u} v \cos \hat{n}_y d\sigma \right)$$

$$\int_V \rho \frac{\partial w \bar{u}}{\partial z} dv = - \left(- \int_{\Sigma} \bar{u} w \cos \hat{n}_z d\sigma \right)$$

$$C = \int_{\Sigma} \rho \bar{u} \left(u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z \right) d\sigma$$

Un \bar{u} : componente di \bar{u} lungo la normale

$$\rho \int_{\Omega} \bar{u} u_n d\Omega = \rho \int_{\Omega_1} \bar{u} u_n d\Omega + \rho \int_{\Omega_2} \bar{u} u_n d\Omega + \rho \int_{\Omega_3} \bar{u} u_n d\Omega \quad (*)$$

$$\rho \int_{\Omega_3} \bar{u} u_n d\Omega = 0$$

Fluido reale u sulla parete = 0 $u_n = 0$ $\bar{u} = 0$

Fluido perfetto $u_n \neq 0$ La velocità è vda tangente (lungo la parete Ω_3)

$$\rho \int_{\Omega} \bar{u} u_n d\Omega = \rho \int_{\Omega_1} \bar{u} u_n d\Omega + \rho \int_{\Omega_2} \bar{u} u_n d\Omega$$

su Ω_1 $u_n > 0$ (\bar{u} e u_n concordi)
 su Ω_2 $u_n < 0$ (\bar{u} e u_n discordi)

$u_n d\Omega = dQ \rightarrow$ Portata infinitesimale

$$\rho \int_{\Omega} \bar{u} u_n d\Omega = \underbrace{\rho \int_{\Omega_1} \bar{u} dQ}_{\bar{M}_1} - \underbrace{\rho \int_{\Omega_2} \bar{u} dQ}_{\bar{M}_2} \rightarrow \text{sono delle forze}$$

\bar{M}_1 e \bar{M}_2 sono delle forze o anche delle quantità di moto sul tempo (PORTATE DI QUANTITÀ DI MOTO)

$\bar{M}_1 =$ Quantità di moto entrante e uscente (In realtà è una portata di quantità di moto)

$\bar{M}_2 =$ Quantità di moto USCENTE

$$\bar{P} + \bar{J}_e + \bar{I} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0$$

DINAMICA DEI FLUIDI PERFETTI

Nei fluidi perfetti gli sforzi tangenziali sono nulli

$$\varphi_{xy} = \varphi_{yx} = 0 \quad \varphi_{xz} = \varphi_{zx} = 0 \quad \varphi_{yz} = \varphi_{zy} = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \varphi_x = p \\ \varphi_{yy} = \varphi_y = p \\ \varphi_{zz} = \varphi_z = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{\varphi}_x = p \bar{i} \\ \bar{\varphi}_y = p \bar{j} \\ \bar{\varphi}_z = p \bar{k} \end{cases}$$

$$\rho(\bar{R} - \bar{A}) = \frac{\partial \bar{\varphi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial z} \Rightarrow \rho(\bar{R} - \bar{A}) = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k}}_{\text{grad } p}$$

$$\rho(\bar{R} - \bar{A}) = \text{grad } p$$

EQUAZIONE DI EULERO

$$\bar{R} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{A} = \frac{Du}{Dt}\bar{i} + \frac{Dv}{Dt}\bar{j} + \frac{Dw}{Dt}\bar{k}$$

$$\rho \left(x - \frac{Du}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

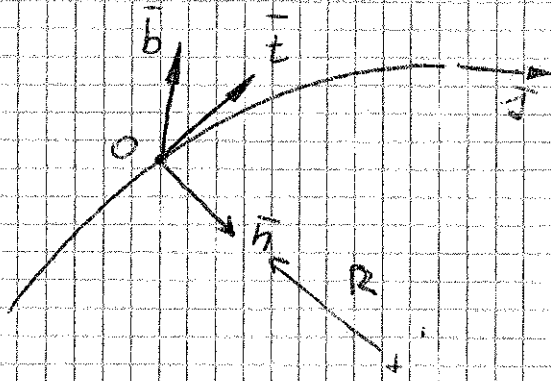
$$\rho \left(y - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \left(z - \frac{Dw}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\bar{P} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial c} + \bar{I} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial c} = \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c} \quad \text{Fluido perfetto} \Rightarrow \bar{\Phi}_n = p \bar{n}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial c} = \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c} = \int \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c} = \bar{F}_c$$



$$A = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s}$$

Se proiettiamo A lungo la tangente

$$\bar{A} \cdot \bar{t} = \frac{D\bar{u}}{Dt}$$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = - \frac{\bar{A}}{\rho}$$

Ricordando che
 $\text{grad}(y) \cdot \bar{t} = \frac{\partial y}{\partial s}$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \cdot \bar{t} = \frac{\partial \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial s} \rightsquigarrow$$

con considero l'accelerazione lungo la traiettoria

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \cdot \bar{n} = \frac{\partial \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial n}$$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \cdot \bar{b} = \frac{\partial \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial b}$$

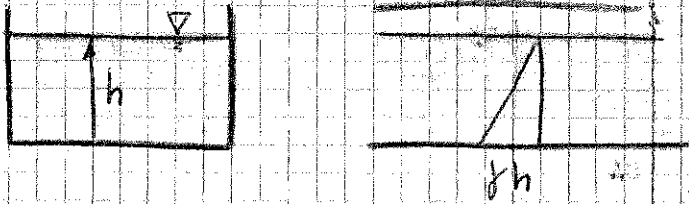
$$1) \left\{ \frac{\partial \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial u^2}{\partial s} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$2) \left\{ \frac{\partial \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial n} = - \frac{u^2}{\rho R} \right. \text{ Acc. centripeta}$$

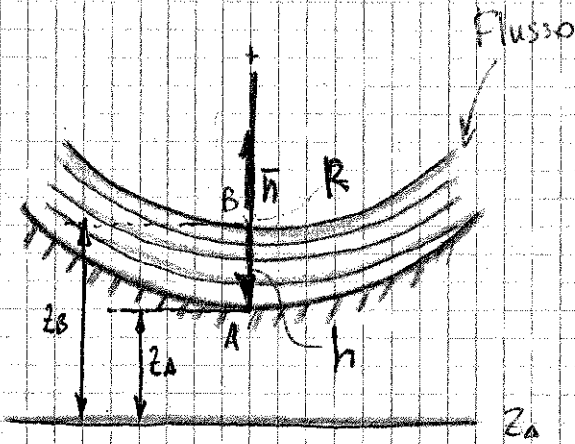
$$3) \left\{ \frac{\partial \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial b} = 0 \right. \text{ Non c'è accelerazione secondo } \bar{b} \text{ (binormale)}$$

moltiplicando
 separatamente \bar{A} per
 la direzione tangente
 indichiamo l'accelerazione
 radiale secondo
 tale direzione (secondo
 l'ascissa curvilinea)

Lo stesso accade in un canale



FLUSSO SU SUPERFICIE CURVA



In presenza di curvatura, nel caso curvato succede che la pressione aumenta in A

$$p_A > \gamma h$$

$$\frac{\partial(z + p/\gamma)}{\partial n} = -\frac{u^2}{gR}$$

$dn = -dR$ (discordi)

Integrando $\rightarrow z + p/\gamma \Big|_B^A = \int_B^A \frac{u^2}{gR} dR$

$(z_A + \frac{p_A}{\gamma}) - (z_B - \frac{p_B}{\gamma}) = \int_B^A \frac{u^2}{gR} dR$
 $\leftarrow 0 \text{ (Atmosfera)}$ $\rightarrow \frac{p_A}{\gamma} = h + \int_B^A \frac{u^2}{gR} dR$

$p_A = \gamma h + \gamma \int_B^A \frac{u^2}{gR} dR \rightarrow p_A = \gamma h + \underbrace{\int_B^A \frac{\rho u^2}{R} dR}_{> 0}$

Allora la curvatura fa sì che la pressione in A sia superiore a γh ovvero quella che si avrebbe senza curvatura.

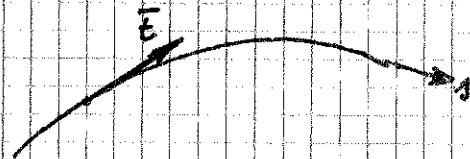
TEOREMA DI BERNOULLI

1) Fluido Perfetto \rightarrow Validità equazione di Eulero $\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \text{grad } p$

2) Fluido Nel campo della gravità $\rightarrow \vec{R} = \text{grad } (\rho g z)$

$$\rho \text{grad}(-gz) - \text{grad } p = \rho \vec{A}$$

3) Fluido Incompressibile $(D\rho/Dt) = 0$ (Lungo una traiettoria)



$$A_E = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s}$$

Proiettato su tangente $\rightarrow \rho \text{grad}(-gz) \cdot \vec{t} - \text{grad } p \cdot \vec{t} = \rho \vec{A} \cdot \vec{t}$

$$\rho \frac{\partial(-gz)}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} \right) \text{ lungo una traiettoria}$$

Lungo la traiettoria, posso porre p detto z altezza dato che è comune

$$-\frac{\partial(\rho g z)}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

4) Fluido Permanentemente $\rightarrow \partial u / \partial t = 0$

$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 \Rightarrow$ Lungo la traiettoria il termine non cambia e non è necessario che il fluido sia omogeneo

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{cost}$$

TRINOMIO DI BERNOULLI

SIGNIFICATO ENERGETICO

I termini del trinomio di Bernoulli possono essere visti come delle ENERGIE sull'UNITÀ DI PESO dato che

$$[ENERGIA] = N \cdot m \quad \rightarrow \quad [Z] = m = \frac{N \cdot m}{N} = m$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \text{ENERGIA SPECIFICA DI POSIZIONE} \\ P/\gamma &= \text{ENERGIA SPECIFICA DI PRESSIONE} \\ u^2/2g &= \text{ENERGIA SPECIFICA CINETICA} \end{aligned} \right\} Z + P/\gamma + u^2/2g = H$$

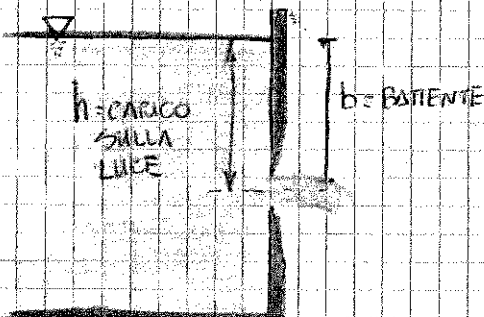
↓
ENERGIA SPECIFICA MECCANICA

FORONOMIA

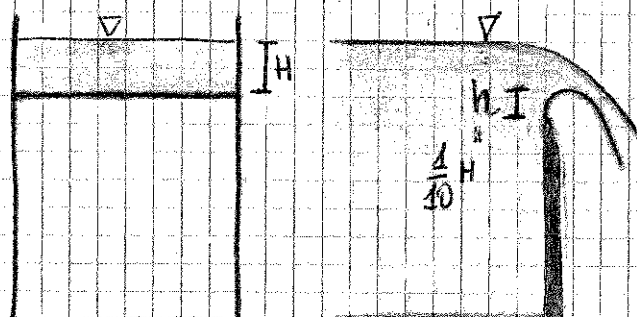
Un'applicazione del teorema di Bernoulli è la Foronomia ovvero lo studio del deflusso di un liquido da dei Fori (Luce) praticati sui serbatoi.

- LUCI**
- A BATTENTE** -> Quando il pelo libero è totalmente sopra la Luce
 - A STRAMAZZO** -> Quando il pelo libero non copre tutta la luce

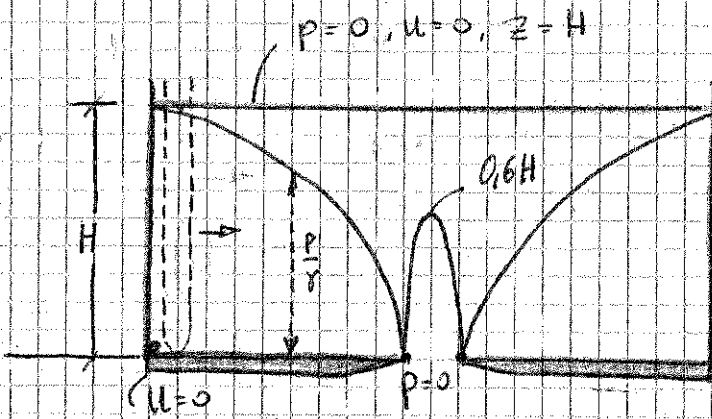
A BATTENTE



A STRAMAZZO BAZIN



L'innalzamento $h = \frac{1}{10} H$ è dovuto alla velocità del fluido che alla parete è diretta verso l'alto ↑ u



Piezometro

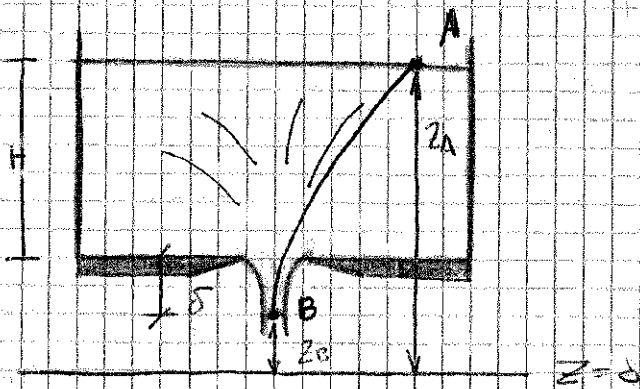
Consideriamo il piezometro che viene realizzato in modo da misurare l'altezza piezometrica corrispondente al fondo

(dove $z=0$) - visto alla parte laterale u è zero.

Quando il piezometro è pieno la parte laterale corrisponde ad H e diminuisce aumentando dalla luce.

In corrispondenza della luce si ha che l'altezza piezometrica ha il minimo nel centro (A causa della curvatura delle fibre).

$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost}$ All'inizio $u=0$ Arrivati al foro $u \uparrow$ (cresce) ed è dato che $\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost}$ \rightarrow $\frac{p}{\gamma}$ diminuisce fino a 0 ($p=0$) sul fondo. Al centro aumenta e spicciatamente ha un valor max di $0,6H$.



Consideriamo una qualunque parallela che segua una traiettoria AB. Le evoluzioni sul pelo libero solo di pressione = 0, velocità trascurabile. Tutto come visto nella sezione ristretta $p=0$.

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} \quad \text{ma } z_A - z_B = \frac{u_B^2}{2g}$$

$H + \delta$

$u_B = \sqrt{2g(H + \delta)}$ \rightarrow Tutti i punti della sezione hanno questa velocità

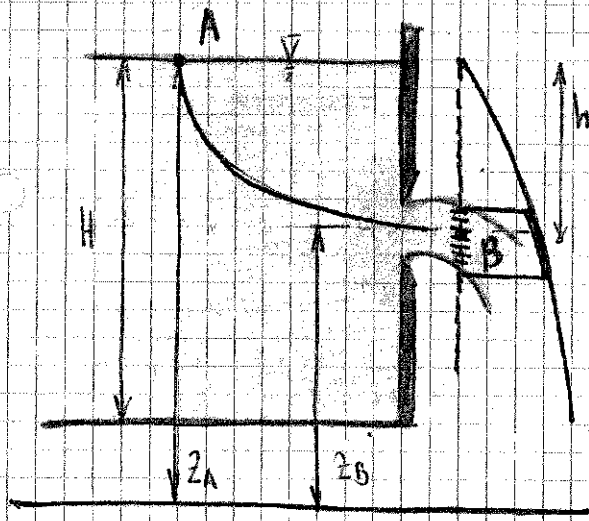
$U = \sqrt{2g_0(H + \delta)}$ VELOCITÀ FLUIDO SU SEZ CONTRASTA

SPINTA $\left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \bar{P} \quad (\text{STATICAMENTE}) \\ \bar{S} = \bar{P} - \bar{H}_2 \quad (\text{DINAMICAMENTE}) \end{array} \right.$

u. Il Foro scende il Fondo rispetto al caso statico

REAZIONE D'EFFLUSSO $\rightarrow \bar{S}_D - \bar{S}_S = -H_2$

ESEMPIO 2 - FORO LATERALE



Si dimostra che nella sezione contraria la pressione in tutti i punti è nulla, allora il livello piezometrico non è più costante perché varia con la quota $z + P/\rho = \text{cost}$ NO!!

$$z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$\leftarrow z=0 \quad \leftarrow z=0 \quad \leftarrow z=0$

$\frac{U_B^2}{2g} = z_A - z_B \rightarrow U_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$ \rightarrow La velocità ha un andamento parabolico lungo H

Se il diametro della luce è piccolo allora la velocità (che è un arco di parabola) può essere confusa con la tangente

$U_{\text{lim}} = \sqrt{2gh}$ $d \ll h$

$U = C_v \sqrt{2gh}$ $C_v \approx 0,97 \pm 0,01$ $C_d = 0,62$

$Q = C_c C_v \rho \sqrt{2gh} = m \rho \sqrt{2gh}$ $m \approx 0,6$

Fluido viscosissimo Perfetto $C_v = 1$

$$Q = C_c \cdot \rho \sqrt{2gh} \quad u = \sqrt{2gh}$$

$$\gamma h \rho = \rho Q u = \rho \cdot C_c \rho \sqrt{2gh} \sqrt{2gh}$$

$$\cancel{\gamma h \rho} = \cancel{\rho} C_c \rho \sqrt{2gh} \implies C_c = \frac{1}{2} \quad \text{Ricerca sperimentale}$$

Vieux $\approx 0,62$

Fluido Reale

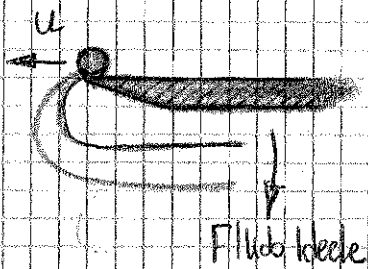
$$Q = C_v \cdot C_c \rho \sqrt{2gh} \quad u = C_v \sqrt{2gh}$$

$$\cancel{\gamma h \rho} = \cancel{\rho} C_c \rho C_v^2 \sqrt{2gh} \implies C_c = \frac{1}{2C_v^2}$$

$$C_v \leq 1 \implies C_c > \frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{1}{2C_v^2} \rho C_v \sqrt{2gh} = \frac{1}{2C_v} \rho \sqrt{2gh}$$

$Q_R > Q_{PERFETTO} \implies$ Perché fa bene scorrere nel fluido perfetto è più piccola di quella Reale



La particella del Fluido ideale va più veloce e allora deve girare più forte e quindi la sua curvatura è più stretta

Per ogni punto della superficie (sezione retta) possiamo scrivere l'equazione di Bernoulli

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \quad \rightarrow \text{Energia Specifica}$$

$$dW = \underbrace{\gamma dQ}_{L} \cdot dH \quad \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

$L \rightarrow$ Portata in peso

$$W = \int_Q \gamma dQ H$$

Sia il FLUIDO INCOMPRESSIBILE ED OMOGENEO $\gamma = \text{cost}$

$$W = \gamma \int dQ H = \gamma \int \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) u dQ$$

$$W = \underbrace{\gamma \int \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) u dQ}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\gamma \int \frac{u^2}{2g} dQ}_{\textcircled{2}}$$

$$\textcircled{1} \quad \gamma \int \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) u dQ$$

Se le traiettorie sono Rettilinee e Perpendic. il carico potenziale è costante

$$\gamma \int \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) u dQ = \gamma \cdot \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int u dQ = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q \quad \left. \begin{array}{l} \text{POTENZA} \\ \text{POTENZIALE} \end{array} \right\}$$

$$W_p = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q$$

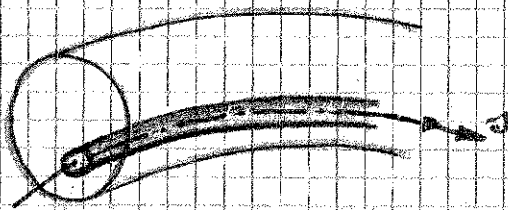
POTENZA POTENZIALE

- $\gamma = \text{cost}$
- Traiettorie rettilinee e \perp

TEOREMA DI BERNOULLI PER CORRENTE

Se la corrente è GRADUALMENTE VARIATA o LINEARE con traiettorie sensibilmente RETTILINEE e PARALLELE allora la potenza unitaria vale per tutte le sezioni

- 1- FLUIDO PERFETTO
- 2- INCOMPRESSIBILE ed OMOGENEO
- 3- MOTO PERMANENTE
- 4- CAMPO DELLA GRAVITA' (Condizioni Th. Bernoulli +)



Incompressibile ed omogeneo
Moto permanente

$$dW = \gamma Q dH = \text{cost}$$

cost
cost
cost

H

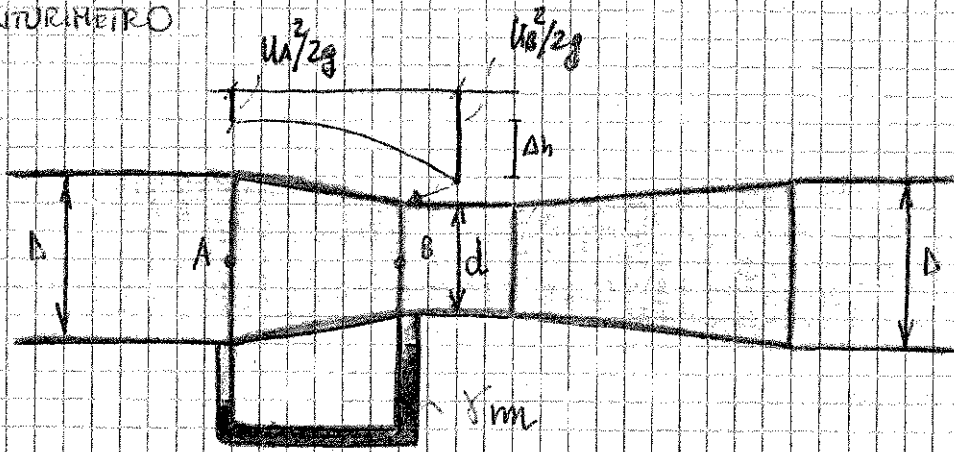
$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

Essendo la corrente la somma di tutti i tubi di fluido infinitesimi allora la potenza in tutte le sezioni della corrente è la stessa

$$W = \gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u_m^2}{2g} \alpha \right) = \text{cost} \Rightarrow z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u_m^2}{2g} \alpha = \text{cost}$$

Per una corrente in cui le traiettorie sono sensibilmente rettilinee e parallele il fluido è perfetto, incompressibile ed omogeneo con moto permanente e nel campo della gravità allora L'ENERGIA SPECIFICA MEDIA RIMANE COSTANTE nelle sezioni

VENTURIMETRO



$$\Delta h = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

Il Venturimetro viene usato nelle condotte per la misurazione della portata e funziona per l'azione del cerchio pitagorico che si forma in Europa Cuenca.

Nel TRATTO CONVERGENTE le particelle devono accelerare e la perdita di carico dovuta all'attrito è piccola nel TRATTO DIVERGENTE si hanno gli urti poiché le particelle rallentano allora il tubo div. si fa molto lungo.

Perché delle dimensioni!

$$Q = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2}} \rho_B \sqrt{2g \Delta h}$$

C_v = coefficiente di riduzione di portata (Perdite non nulle)

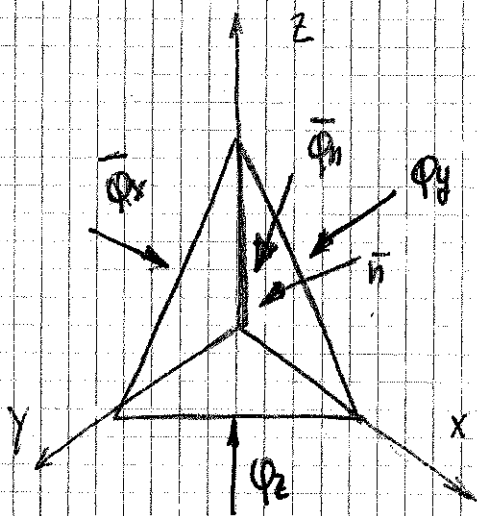
$$C_a = \text{Coeff. di Efflusso} = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2}}$$

C_v è funzione di $\frac{D_B}{D_A}$ e $Re = \frac{\rho \cdot u_{max} \cdot D}{\mu}$

se Re è piccolo $\rightarrow C_v$ dipende da Re ,

se Re è grande $\rightarrow C_v$ è costante $\left(\frac{D_B}{D_A}\right)$

FLUIDI REALI



$$\bar{\sigma}_n = \sigma_x \cos \hat{n}_x + \sigma_y \cos \hat{n}_y + \sigma_z \cos \hat{n}_z$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx} \cos \hat{n}_x + \sigma_{yx} \cos \hat{n}_y + \sigma_{zx} \cos \hat{n}_z \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy} \cos \hat{n}_x + \sigma_{yy} \cos \hat{n}_y + \sigma_{zy} \cos \hat{n}_z \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz} \cos \hat{n}_x + \sigma_{yz} \cos \hat{n}_y + \sigma_{zz} \cos \hat{n}_z \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Se il fluido è perfetto
o in quiete

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n = p$$

Nei Fluidi REALI, gli sforzi tangenziali non sono Nulli!

$$\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z \neq \sigma_n$$

Si dimostra che
di assi scelta

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \text{ non dipende dalla scelta}$$

Per un fluido Reale $\rightarrow p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ PRESSIONE DEL FLUIDO
REALE

Valore detto nel caso della sfera con questo valore di pressione.

ESTENSIONE ED. NAVIER AD UN VOLUME

L'equazione di Navier è puntuale, se la integrizzo su un volume V:

$$\int_V \bar{p} \bar{r} dv - \int_V \bar{p} \bar{a} dv = \int_V \bar{a} \bar{r} \cdot \bar{p} dv - \int_V \mu \Delta_2 \bar{u} dv$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{p}} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{I} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{-\bar{F}_c} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{*}$

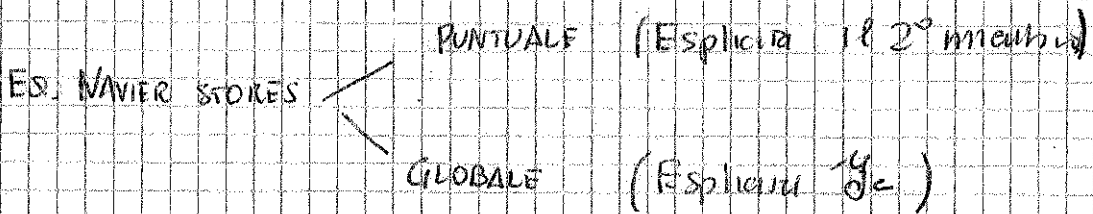
$$* - \int_V \mu \Delta_2 \bar{u} dv = - \mu \int_V \Delta_2 \bar{u} dv = - \mu \int_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dv$$

$$= \mu \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \text{eov} \hat{n}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \text{eov} \hat{n}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \text{eov} \hat{n}_z \right) d\Omega = \mu \int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega$$

$$\bar{p} + \bar{I} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 + \bar{F}_c = \mu \int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{p} dv = \bar{F}_c + \mu \int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega = \int_V \bar{q}_n d\Omega$$

Con NAVIER STORES posso quindi Esplicitare \bar{F}_c

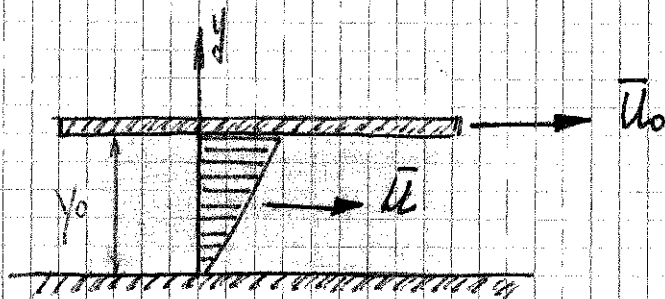


La PENDENZA MOTRICE è la perdita di carico su unità di lunghezza in valore assoluto

$$-\dot{c} = \frac{cc}{\gamma} \Delta_2 u \quad \rightarrow \quad \Delta_2 u = -\frac{\dot{c}}{\mu} i$$

ANDAMENTO DELLA VELOCITÀ PER MOTI LAMINARE

ESEMPIO 1



$\dot{c} = 0$ (Non ho perdita di carico perché l'energia è fornita dall'esterno)

$$\dot{c} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta_2 u = 0 \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \rightarrow \quad \text{Vince solo secondo } y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

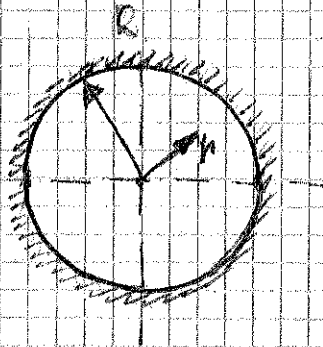
$$\frac{du}{dy} = A$$

$$u = Ay + B$$

$$\begin{cases} y=0 & u=0 \quad \rightarrow \quad B=0 \\ y=y_0 & u=u_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{u_0}{y_0} \end{cases}$$

$$u = \frac{u_0}{y_0} \cdot y \quad \rightarrow \quad \text{ANDAMENTO DELLA VELOCITÀ}$$

ESEMPIO 3: CONDOTTA CILINDRICA



Laplaceo in coordinate cilindriche

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = - \frac{\gamma}{\mu} i$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = - \frac{\gamma}{\mu} r i$$

$$r \frac{du}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\mu} r^2 + A$$

$$\frac{du}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\mu} r + \frac{A}{r} \Rightarrow u = - \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} r^2 + A \ln r + B$$

$A=0$ ($\ln 0 = \infty$ non valida su tutta la condotta)

$$u = - \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} r^2 + B$$

$$r=R \quad u=0 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} R^2$$

$$u = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} (R^2 - r^2)$$

Area elementare che fa il volume con il R zero $u = \frac{1}{2} w (R^2 - r^2)$

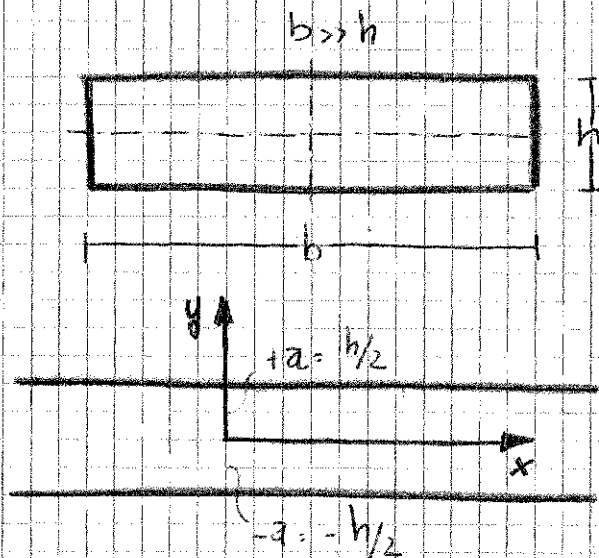
$$w = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\mu} i$$

$$U_{max} = \triangleright r=0 \quad \rightarrow \quad U_{max} = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} R^2$$

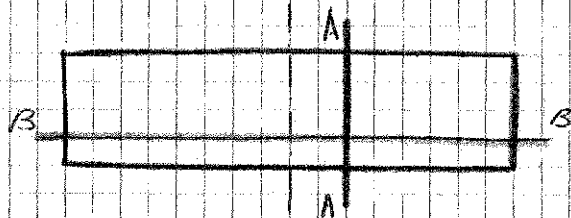
$$U_{med} = \frac{Q}{2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(\frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} i (R^2 - r^2) \right) dA \quad \text{Area elementare}$$

$$U_{med} = \frac{1}{8} \frac{\gamma}{\mu} R^2 \quad \rightarrow \quad U_{med} = \frac{1}{2} U_{max}$$

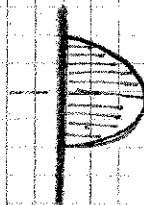
SEZIONE RETTANGOLARE LARGA



Velocità nelle sezioni



SEZ AA



SEZ BB



ANDAMENTO REALE
ANDAMENTO APPROSSIMATO

Se $b \gg h$ allora l'effetto di bordo viene nella sezione BB può essere approssimato a zero, quindi con una velocità costante lungo la sezione BB, allora u varia secondo solo per y

$$u = u(y) \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = - \frac{\gamma \cdot i'}{\mu} \quad (\text{LAPLACIANO})$$

$$\frac{du}{dy} = - \frac{\gamma \cdot i'}{\mu} y + A \quad \text{m}, \quad u = - \frac{\gamma \cdot i'}{\mu} \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

La u è simmetrica rispetto ad y quindi per u deve essere una funzione PARI quindi $A=0$

$$u = - \frac{\gamma \cdot i'}{\mu} \frac{y^2}{2} + B$$

Posso allora definire \bar{n} e Re considerando il Rapporto Ibruto e quindi per una sezione qualunque

$$\bar{n} = \frac{D \cdot i}{\frac{U_{lm}^2}{2g}} \rightarrow \bar{n} = \frac{4R \cdot i}{\frac{U_{lm}^2}{2g}} \quad Re = \frac{\rho U_{lm} 4R}{\mu}$$

Per sezione generica

$$R_{\square} = \frac{bh}{2(b+h)} \quad \text{in } \rightarrow \quad R_{\square} = \frac{h}{2} \quad \text{in } \rightarrow \quad 4R_{\square} = 2h$$

$\approx 0 \quad b \gg h$

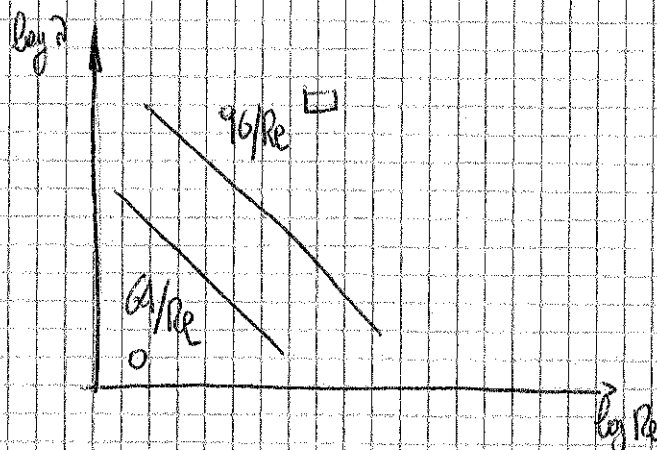
$$\bar{n} = \frac{2h \cdot i}{\frac{U_{lm}^2}{2g}} \quad Re = \frac{\rho U_{lm} \cdot 2h}{\mu}$$

Per sezione Rettangolare (cassa)

$$\bar{n} = \frac{2h \cdot \frac{12 \mu U_{lm}}{\gamma h^2} 2g}{U_{lm}^2} \quad \text{in } \rightarrow \quad \bar{n} = \frac{48 \mu \cdot 2}{\rho U_{lm} h \cdot 2} = \frac{96/\mu}{\rho U_{lm} \cdot \frac{2h}{4R}} \quad Re$$

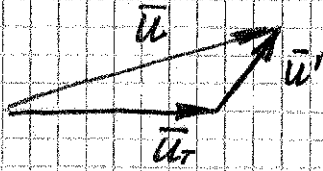
$$\bar{n}_{\square} = \frac{96}{Re} \quad \text{INDICE DI RESISTENZA SEZIONE } \square$$

$$\log \bar{n} = \log 96 - \log Re$$



Flusso TURBOLENTO

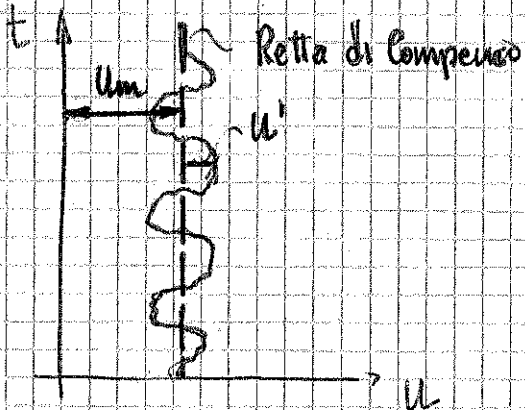
Consideriamo condizioni al contorno COSTANTI NEL TEMPO



$$\begin{cases} \vec{u}_{\text{med}} = \bar{u} \vec{i} + \bar{v} \vec{j} + \bar{w} \vec{k} \\ \vec{u}' = u' \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k} \\ \vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

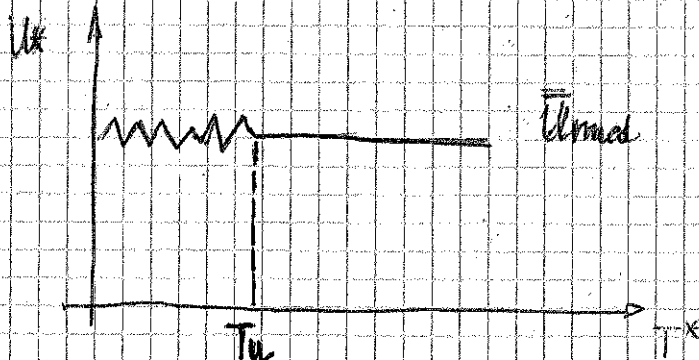
Analizziamo di seguito le misure per misure per il



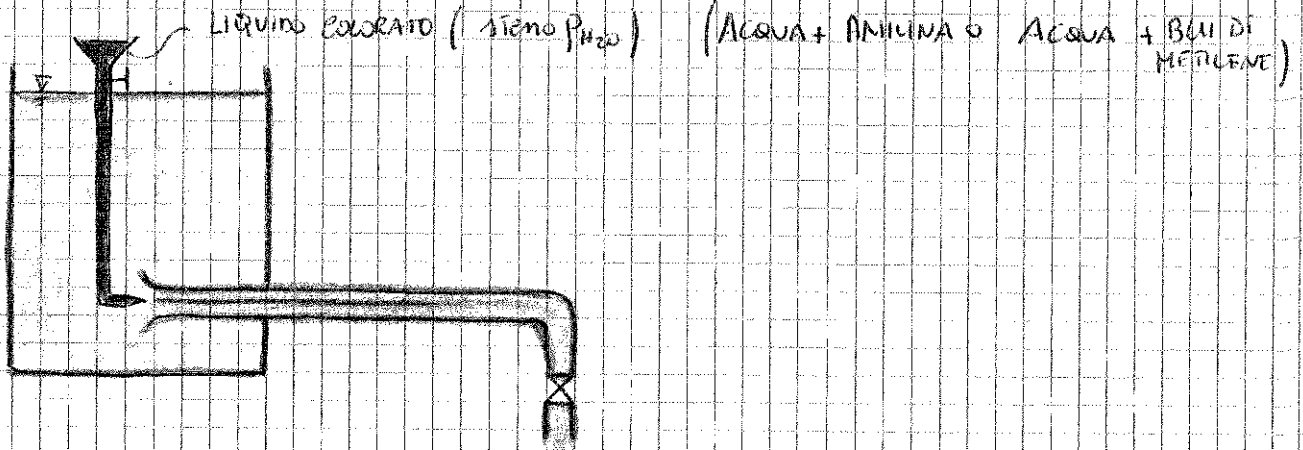
Consideriamo un intervallo T^* piccolo, e facciamo crescere

$$T^* \rightarrow \bar{u}_x^{\text{med}} = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} u dt$$

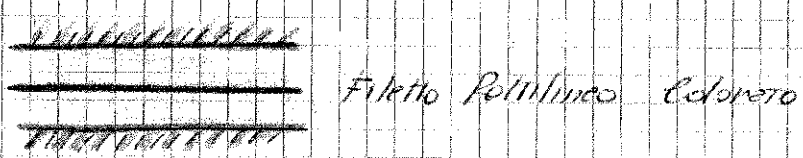
La media risulta quindi solo dopo un determinato tempo che dipende dal grado di turbolenza



ESPERIENZA DI REYNOLDS



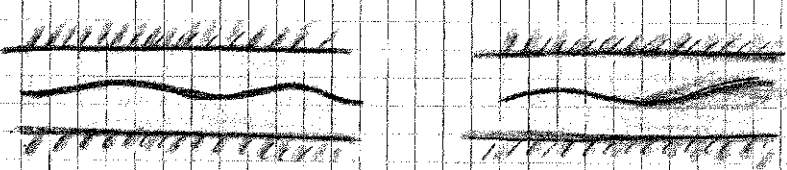
Piccola Apertura SARDAINISCA



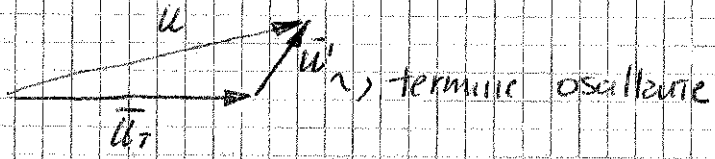
Non dire che non c'è rimescolamento tra le particelle, sono quasi in presenza di un MOTO LAMINARE REGOLARE

Se viene tappato il tubo l'acqua diventa tutta colorata e torna ad essere il filetto quando riapri il rubinetto

ALL'AUMENTARE DELLA VELOCITÀ



Se viene perturbata la velocità (tappo) e riapri il flume non torna allo stato precedente, quindi abbiamo un moto INSTABILE quindi siamo passati ad un moto TURBOLENTO



Dobbiamo trovare i termini rispetto al tempo T

$$\vec{F}_c = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_S p \vec{n} d\sigma = \int_S d\sigma \frac{1}{T} \int_0^T p \vec{n} dt \quad (p = \bar{p} + p')$$

$$= \int_S d\sigma \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p} + p') \vec{n} dt = \int_S d\sigma \left(\frac{1}{T} \int_0^T \bar{p} \vec{n} dt + \frac{1}{T} \int_0^T p' \vec{n} dt \right)$$

valore medio di p'
 \downarrow
 $\bar{p}' = 0$
 (nel tempo T è nullo)

$$\vec{F}_c = \int_S p \vec{n} d\sigma \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_c = \int_S \bar{p} \vec{n} d\sigma$$

$$-p \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv \rightarrow -p \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv = -p \int_V dv \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$(\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}') \quad \Rightarrow \quad -p \int_V dv \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial (\vec{u} + \vec{u}')}{\partial t} dt$$

$$= -p \int_V dv \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} dt \right)$$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \rightarrow$ il valore medio è finito nel tempo (moto Perm.)

$$= -p \int_V dv \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{u'(t) - u'(0)}{T} \quad \Rightarrow \quad -p \int_V dv \frac{u'(T) - u'(0)}{T}$$

MOTO PERMANENTE $\vec{I} = 0$

Somma di tanti vettori in
forma circolare quindi la
media è di fatto nulla

Se \vec{u}' fosse ripartimento ciclica allora $\vec{I} = 0$, in realtà \vec{u}' è casuale
e la somma di tanti vettori casuali in media è nulla.