NUMERO : 234

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Mondino

MATERIA : Elettrotecnica
Prof. Gilli

L'ELETTROTECNICA tratta lo studio dei sistemi elettrici:
- sistemi per l'energia: trasportano l'energia da un punto all'altro.
- sistemi per l'informazione: hanno come obiettivo il trattamento di segnali elettrici (l'interesse è per l'informazione)

Le cariche elettriche danno origine ad un campo elettromagnetico sede di fenomeni elettromagnetici.
Occorre introdurre:
a) Grandezze fisiche appropriate
b) Relazioni costitutive dei materiali
c) Equazioni di Maxwell

Le grandezze dipendono dal punto e dal tempo (x, t)

Si assume che i materiali siano ISOTROPI, di conseguenza i parametri sono quantità scalari.

La Teoria dei circuiti si occupa quindi di quei sistemi elettrici che, attraverso opportuni modelli, ci permettono di non passare attraverso le equazioni di Maxwell.
Le equazioni di Maxwell vengono quindi sostituite dalle leggi di Kirchhoff (topologiche).

Il sistema elettrico viene così sostituito da elementi circuitali
→ il circuito elettrico è un modello che vale sotto opportune ipotesi

CORRENTE:
- è legata al movimento ordinato delle cariche

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

In condizioni stazionarie l'intensità attraverso una sezione di conduttore è indipendente dalla sezione scelta (conservazione della carica).

- la corrente si misura in AMPERE [A] $\quad 1A = \frac{1C}{1s}$
Il verso della corrente è scelto in maniera arbitraria.

$$Q(t) = \int_{-\infty} i(t)\, dt$$

TENSIONE:
Il campo elettrico compie lavoro sulle cariche in moto
In condizioni stazionarie il lavoro non dipende dal percorso (il campo elettrico è conservativo).

$$L_{a \to b} = \int_{\gamma} E \cdot t \, dl$$

La tensione si misura in VOLT [V]

La punta della freccia è rivolta verso il terminale a potenziale più alto.

• Immaginiamo un impianto elettrico di una città di dimensioni medie ($d \sim 10km$)

$f = 50Hz \qquad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 m = 6000 km$

Se chiamo d la dimensione dell'oggetto elettrico e λ la lunghezza d'onda:

$\frac{d}{\lambda} << 1 \quad \rightarrow$ il fenomeno elettrico è SPAZIALMENTE CONFINATO

• Immaginiamo un notebook con frequenza $f = 2{,}2 GHz$:

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2{,}2 \cdot 10^9} = 1{,}3 \cdot 10^{-1} \approx 13 cm$

dimensione chip $\sim$ mm $\qquad \frac{d}{\lambda} \sim \frac{10^{-3}}{13 \cdot 10^{-2}} << 1 \qquad \frac{1 mm}{13 cm}$

• Immaginiamo un'antenna con frequenza $f = 10 GHz$

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{-2} \sim 3 cm$

dimensione antenna $\sim$ m $\qquad \frac{d}{\lambda} \not\ll 1$

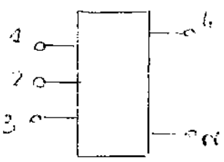
Se le dimensioni dell'oggetto elettrico in considerazione (d) sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda (λ), cioè se $\boxed{\frac{d}{\lambda} << 1}$, allora si dice che abbiamo un fenomeno elettromagnetico spazialmente confinato.

=> le leggi dell'elettromagnetismo, cioè le equazioni di Maxwell, si semplificano.

↓

<u>TEORIA DEI CIRCUITI A PARAMETRI CONCENTRATI</u> (quella che studieremo)

Oggetto elettrico: =(MULTIPOLO)



Un oggetto elettrico può essere modellizzato come una "scatola" con dei terminali (=POLI)

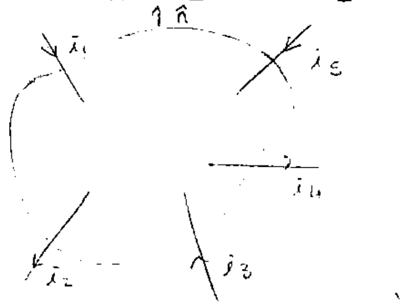
(I più comuni hanno 2 terminali)

È possibile collegare i terminali dei multipoli:
un circuito elettrico (rete elettrica) è una struttura costituita dalla connessione arbitraria di due o più multipoli.

Se due connessioni si toccano si disegna un pallino al centro (nodo), se invece non si toccano si disegnano così:

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI: (KCL) → current law, → Kirchhoff

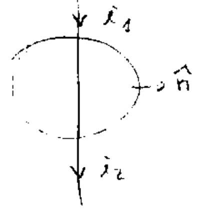
Data una superficie chiusa che interetta alcuni terminali di una rete elettrica e definito un versore $\hat{n}$ normale alla superficie, la somma (algebrica) delle correnti nei terminali intercettati dalla superficie, assumendo con segno ⊕ quelle concordi con il versore normale $\hat{n}$ e con segno ⊖ quelle discordi, è uguale a 0.



$$-i_1(t)+i_2(t)-i_3(t)+i_4(t)-i_5(t)=0$$

- Scrivere la legge di Kirchhoff ai nodi equivale a considerare un caso particolare (il nodo è una superficie).

- Dalla legge di Kirchhoff si deduce che se ho un filo la corrente che entra è uguale a quella che esce:

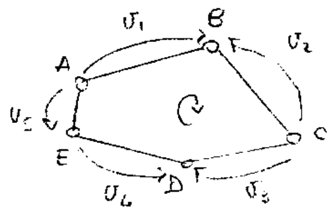


$$-i_1+i_2=0 \rightarrow i_1=i_2$$

Le leggi di Kirchhoff possono essere applicate solo nell'ambito della teoria dei circuiti, quindi per esempio nel caso di un'antenna non valgono.

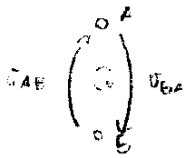
LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI: (KVL) → Kirchhoff, → law, → voltage

Dato un insieme di terminali e definiti il poligono che li connette e un suo verso di percorrenza, la somma (algebrica) delle tensioni definite sui lati del poligono, assumendo con segno ⊕ quelle concordi con il verso di percorrenza e con segno ⊖ quelle discordi, è uguale a 0.



→ concorde → discorde

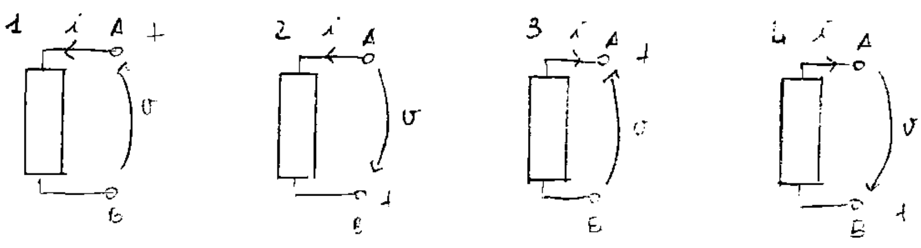
$$+v_1(t)-v_2(t)+v_3(t)-v_4(t)-v_5(t)=0$$



CASO PARTICOLARE:

$$v_{AB}+v_{BA}=0 \rightarrow v_{AB}=-v_{BA}$$

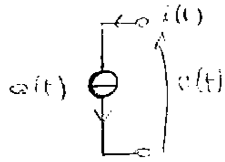
MULTIPOLO CON 2 TERMINALI: si chiama BIPOLO



Il caso 1 e il caso 4 sono equivalenti, così come il 2 e il 3.

$1 \sim 4$ $2 \sim 3$

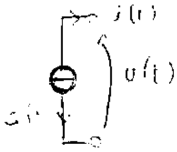
- GENERATORE IDEALE DI CORRENTE:



$i(t) = a(t) \quad \forall v(t)$

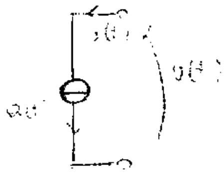
(verso concorde)

è stato introdotto per dualità (quando è stato introdotto non esistevano oggetti che dessero corrente costante indipendentemente dalla tensione).



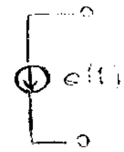
$i(t) = -a(t) \quad \forall v(t)$ (verso discorde)

Se $\underline{a(t) = 0} \Rightarrow i(t) = 0 \quad \forall v(t)$ CIRCUITO APERTO

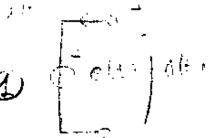


$p(t) = v \cdot i = v(t) \cdot a(t) \gtrless 0$

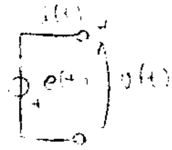
Simbolo IEEE



Per quanto riguarda il generatore ideale di tensione:

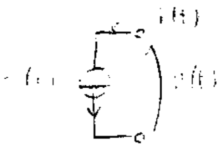
① 

$v(t) = e(t) \quad \forall i(t)$

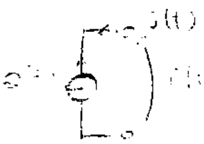
② 

$v(t) = -e(t) \quad \forall i(t)$

Per quanto riguarda il generatore ideale di corrente:

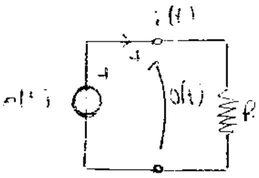


$i(t) = a(t) \quad \forall v(t)$ ①

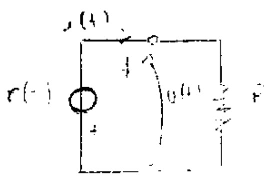


$i(t) = -a(t) \quad \forall v(t)$ ②

CIRCUITI FONDAMENTALI ([illegible])



$\begin{cases} v(t) = e(t) \\ v(t) = R \cdot i(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{i(t) = \dfrac{e(t)}{R}}$



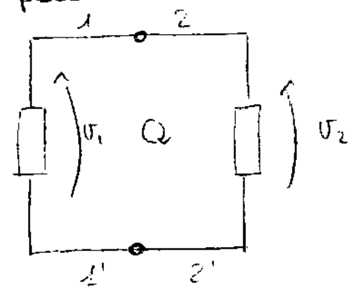
$\begin{cases} v(t) = -e(t) \\ v(t) = R\, i(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{i(t) = -\dfrac{e(t)}{R}}$

CONNESSIONI PARALLELO DI BIPOLI:

Due bipoli si dicono connessi in parallelo se hanno entrambi i terminali in comune.

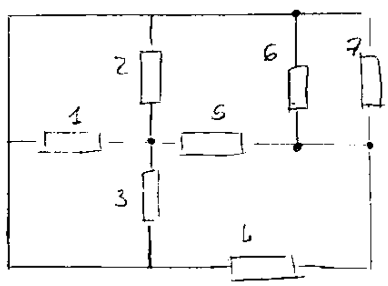
Convergono a un nodo — Sono connessi mediante dei cortocircuiti

2 possibilità dei terminali in comune



$v_1 = v_2$

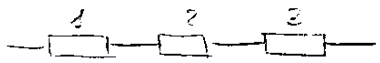
Quali bipoli sono connessi in parallelo?



1 e 2
1 e 3 => 1, 2, 3 sono in parallelo

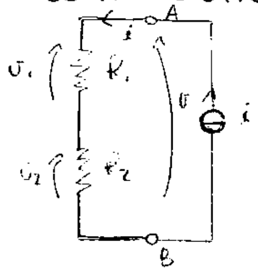
6 e 7 e 4 sono in parallelo

CONNESSIONE SERIE DI PIÙ BIPOLI:



Per estensione, se il bipolo 1 è in serie al bipolo 2 e il bipolo 2 è in serie al bipolo 3 si dice che 1 e 3 sono in serie.

CONNESSIONE SERIE DI RESISTORI:



Immaginiamo di applicare un generatore di corrente i

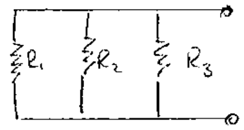
$v(t) = v_1 + v_2 = (R_1 + R_2) \cdot i(t)$

$R_{eq} = R_1 + R_2 \triangleq$ resistenza equivalente

$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \triangleq$ conduttanza equivalente

$= \frac{1}{R_1+R_2} = \frac{1}{\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 G_2}{G_1+G_2}$

CONNESSIONE PARALLELO DI PIÙ RESISTORI:



$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$$

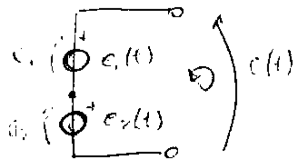
$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1+G_2+\dots+G_n} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots+\frac{1}{R_n}}$$

Se $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$

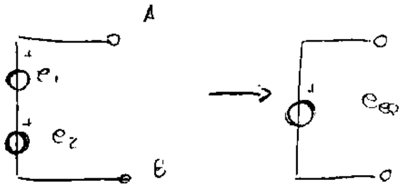
$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\dots+\frac{1}{R}}_{n}} = \frac{1}{\frac{n}{R}} = \frac{R}{n}$$

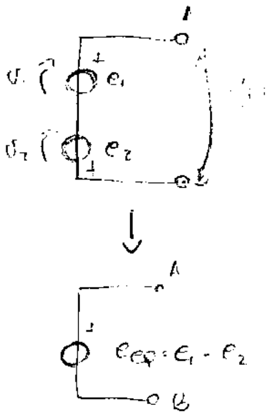
Osservazione: $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = R_1 // R_2$ $\qquad \frac{1}{R_1+R_2+\dots+R_n} = R_1 // R_2 // \dots // R_n$

CONNESSIONE SERIE DI GENERATORI DI TENSIONE:



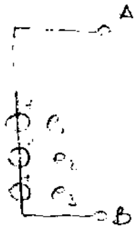
$$v(t) = v_1 + v_2 = e_1 + e_2$$





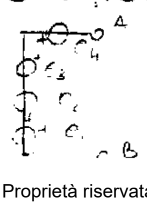
$$v = v_1 + v_2 \qquad v_1 = e_1 \qquad v_2 = -e_2 \qquad \longrightarrow v = e_1 - e_2$$

SERIE DI PIÙ GENERATORI DI TENSIONE:



La tensione equivalente tra A e B (+ convenzionale verso A) è data dalla somma algebrica delle tensioni di tutti i generatori assumendo con segno + quelli che hanno il + rivolto verso A e un - davanti a quelli rivolti dall'altra parte.

Esempio:

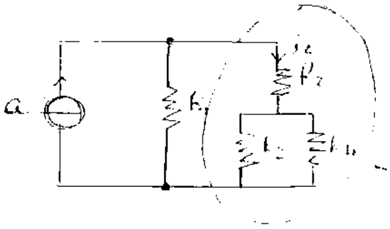


$$e_{eq} = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$$

Esempio: (partitore di corrente)

$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot a$

$i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot a$



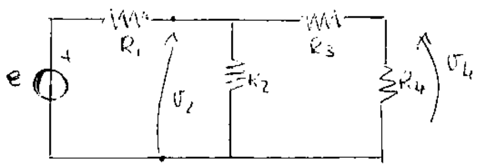
→ $(R_3 // R_4) + R_2$

i_2?

→ generatore di corrente in // a 2 resistori (posso applicare la regola del partitore di corrente)

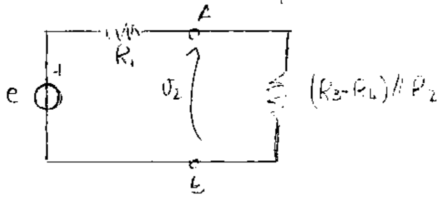
$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + [R_2 + (R_3 // R_4)]}\cdot a$$

Rete a scala:



v_4?

Utilizzando il partitore di tensione posso subito calcolarmi v_2



$$v_2 = \frac{R_2 // (R_3+R_4)}{[R_2 // (R_3+R_4)] + R_1}\cdot e$$

(introduco una grandezza ausiliaria, v_2, ricavo e poi calcolo v_4)

$$v_4 = \frac{R_4}{R_4+R_3}\cdot \frac{R_2 // (R_3+R_4)}{R_2 // (R_3+R_4) + R_1}\cdot e$$

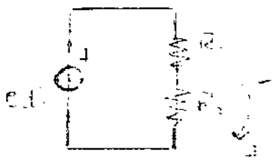
↓

applico 2 volte il partitore di tensione

Ripasso:

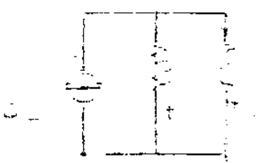
Partitore di tensione:

$$v_2 = e(t)\,\frac{R_2}{R_2+R_1}$$

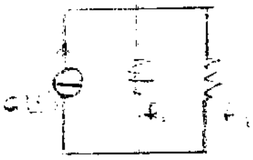


$$v_2 = -e(t)\,\frac{R_2}{R_2+R_1}$$

Partitore di corrente:

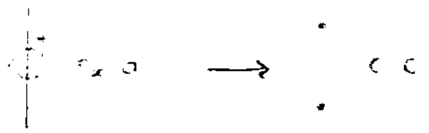


$$i_2 = a(t)\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

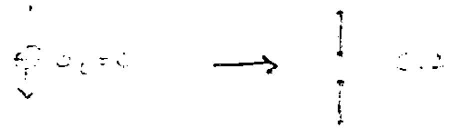


$$i_2 = -a(t)\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

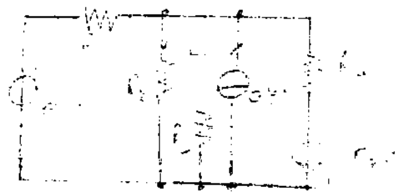
Annullare un generatore di tensione significa sostituirlo con un corto circuito:



Annullare un generatore di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto:

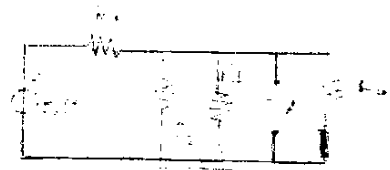


Esercizio:



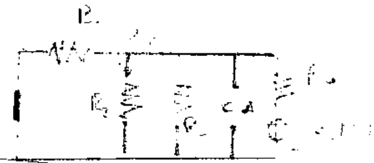
$$i_2(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \beta a(t)$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{i_2(t)}{e_1(t)}\right|_{\substack{e_2=0\\ a=0}} \longrightarrow$$



$$i_2' = i_2\Big|_{\substack{e_2=0\\ a=0}} = e_1(t)\cdot \frac{1}{R_1+R_2\parallel R_3\parallel R_4}\cdot\frac{R_3\parallel R_4}{R_3\parallel R_4+R_2} = \alpha_1$$

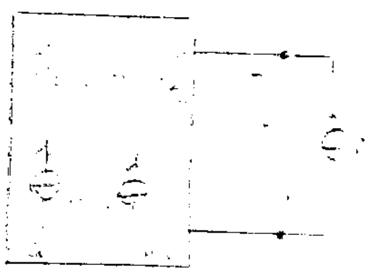
$$\alpha_2 = \left.\frac{i_2(t)}{e_2(t)}\right|_{\substack{e_1=0\\ a=0}} \longrightarrow$$



$$i_2'' = i_2\Big|_{\substack{e_1=0\\ a=0}} = e_2(t)\cdot \frac{1}{R_1\parallel R_2\parallel R_3+R_4}\cdot\frac{R_1\parallel R_3}{R_2+R_1\parallel R_3} = \alpha_2$$

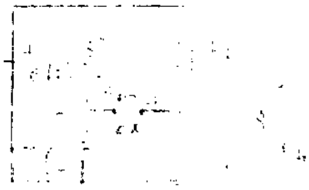
$$\beta = \left.\frac{i_2(t)}{a(t)}\right|_{e_1=e_2=0} \longrightarrow$$

$$i_2''' = i_2\Big|_{e_1=e_2=0} = a(t)\cdot\frac{R_1\parallel R_3\parallel R_4}{R_1\parallel R_3\parallel R_4+R_2} = \beta$$



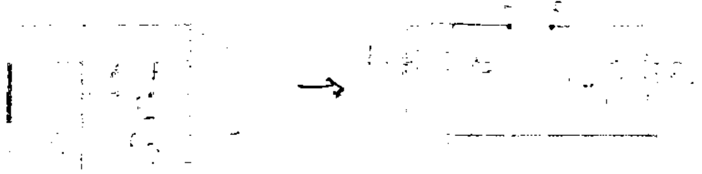
$\phi^+_{e_1}, \dots, \phi^+_{e_N}$

$a_1, \dots, a_M + i$

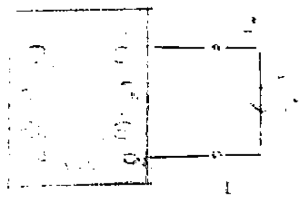


$$v_{TH} = v_3 - v_4 = e(t)\cdot\frac{R_3}{R_3+R_1} - e(t)\cdot\frac{R_4}{R_4+R_2}$$

$$R_{TH} = R_1 // R_3 + R_2 // R_4$$



TEOREMA DI NORTON



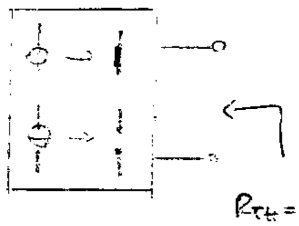
$$i(t) = \underbrace{\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n + \delta_1 a_1 + \dots + \delta_M a_M}_{i_N(t)} + \varepsilon v(t)$$

N ≙ Norton

$$i_N(t) = i(t)\Big|_{v(t)=0}$$

CORRENTE DI CORTOCIRCUITO (corrente di Norton)

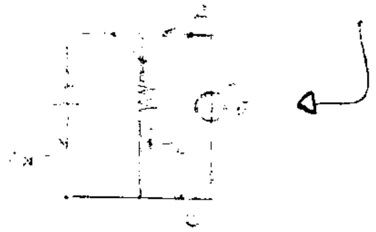
$$\varepsilon = \frac{i(t)}{v(t)}\Bigg|_{\substack{e_i=0\\ a_j=0}} = G_N \longrightarrow$$

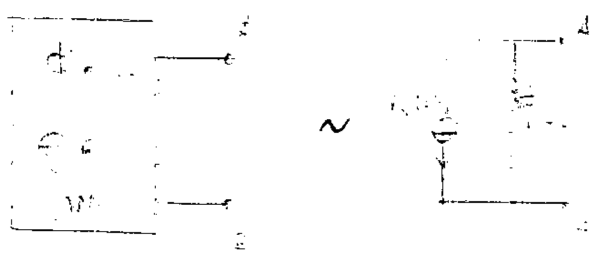


$$G_N = \frac{1}{R_{TH}}$$

$$R_{TH} = \frac{1}{G_N}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = i_N(t) + \frac{1}{R_{TH}} v(t)}$$





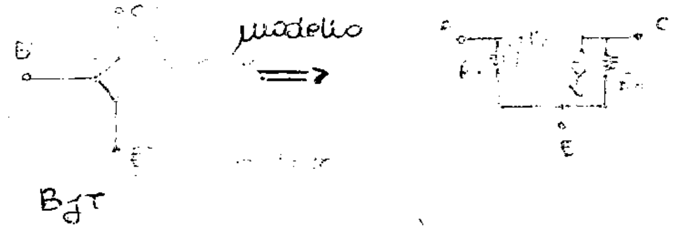
- Bipolo equivalente di Norton
- Circuito equivalente di Norton
- Bipolo/circuito equivalente //

I 4 terminali A, B, C, D sono organizzati in 2 coppie, ciascuna coppia è chiamata PORTA.

=> questo quadripolo viene chiamato anche 2 PORTE (doppio bipolo)

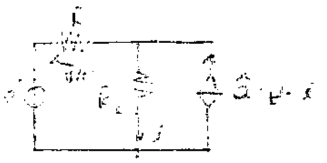
Quindi i generatori dipendenti sono dei casi particolari di doppi bipoli

Esempio: transistor bipolare



• Analisi di circuiti con generatori dipendenti:

↳ METODO DEL PILOTA: 1. calcolo grandezza pilota considerando il generatore dipendente come se fosse indipendente.



v?

Metodo del pilota: PASSO 1

(ho 2 generatori quindi posso utilizzare la sovrapposizione degli effetti)

$$i = i|_e + i|_{\hat{a}} = \frac{e}{R_1+R_2} + \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot \hat{a}$$

$$\boxed{i = \frac{e}{R_1+R_2} + \frac{R_1\beta}{R_1+R_2}\, i}$$ → l'incognita è la grandezza pilota

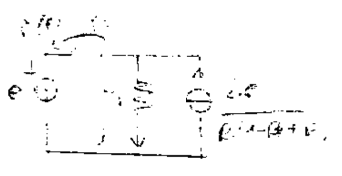
2. risolvo l'equazione che ha come incognita il pilota

PASSO 2:

$$i = \frac{e}{R_1(1-\beta)+R_2}$$

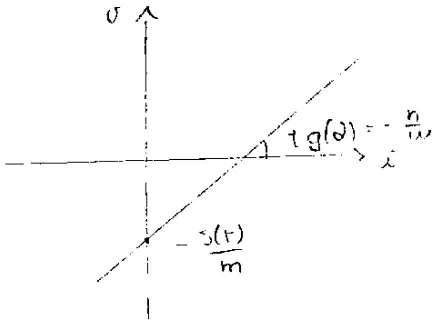
3. determino la grandezza richiesta

PASSO 3:

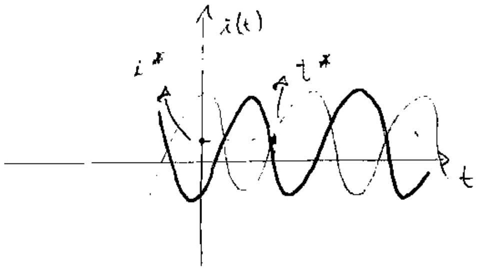


$$v(t) = e - R_2\,\frac{e}{R_1(1-\beta)+R_2}$$

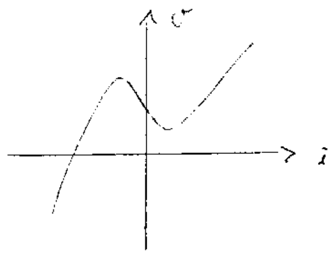
BIPOLO LINEARE (AFFINE) INVARIABILE NEL TEMPO:
↳ non passa per l'origine



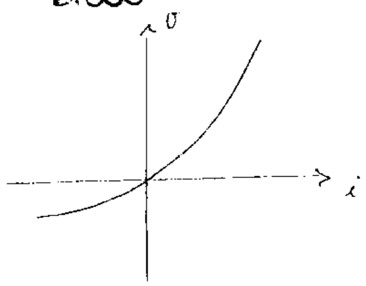
Si dice che è invariabile nel tempo perché m, n sono costanti non dipendenti dal tempo.
Si dicono inoltre "senza memoria" (adinamici).



Lampada a fluorescenza:

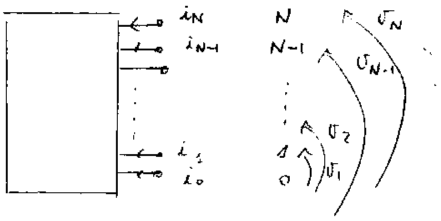


Diodo:



MULTIPOLI LINEARI (AFFINI) INVARIABILI NEL TEMPO SENZA MEMORIA:

$N+1$ poli:



$i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_{N-1} + i_N = 0$

Per determinare le tensioni considero:
- i_0 corrente dipendente
- $i_1, i_2, \dots, i_{N-1}, i_N$ indipendenti

Vettore delle correnti: $i(t) = (i_1, i_2, \dots, i_{N-1}, i_N)^T$

Vettore delle tensioni: $v(t) = (v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N)^T$

L'insieme di tutte le tensioni rispetto a i_0 prese con la convenzione di utilizzatore.

$\underline{\underline{M}}\, v(t) + \underline{\underline{N}}\, i(t) + s(t) = 0$ → relazione costitutiva $(N+1)$ poli

$\underbrace{\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{N}}}_{\text{matrici}} \in \mathbb{R}^{N,N}$ $\underbrace{v, i, s}_{\text{funzioni}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se $\det(\underline{\underline{M}}) \neq 0$ (invertibile) $\Rightarrow v(t) = -\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{N}}\, i(t) - \underline{\underline{M}}^{-1} s(t)$

non è lineare

IV) RAPPRESENTAZIONE IBRIDA INVERSA:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Se } \det(H) \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{H}}' = \underline{\underline{H}}^{-1}$$

$\underline{\underline{H}}'$ = matrice ibrida inversa

V) RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE MATRICE DI TRASMISSIONE:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

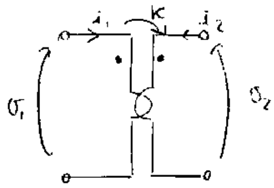
$\underline{\underline{T}}$ = matrice di trasmissione

VI) MATRICE DI TRASMISSIONE INVERSA:

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \qquad \text{Se } \det(T') \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$\underline{\underline{T}}'$

TRASFORMATORE IDEALE:



$$\begin{cases} v_1 = k v_2 \\ i_1 = -\frac{1}{k} i_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\underline{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/k \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{N}}} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}}_{\underline{i}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{S}} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Ammette la rappresentazione ibrida

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/k \\ 1/k & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}'} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{T}}} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{T}}'} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

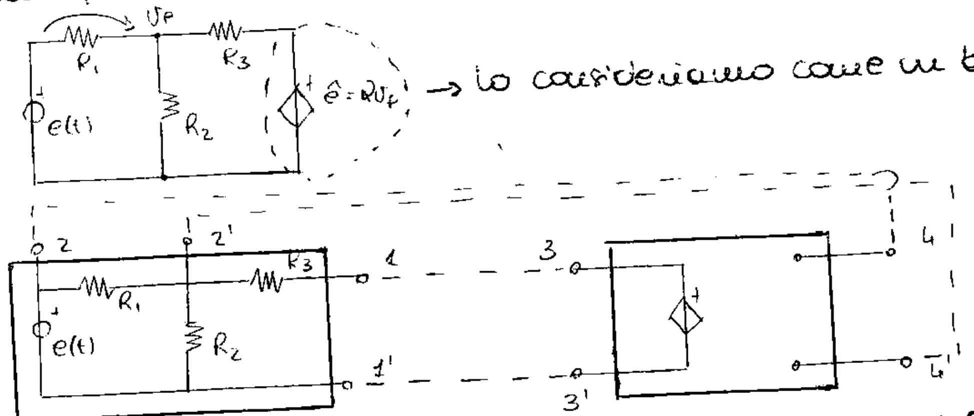
$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + \underbrace{\frac{v_1}{k}}_{v_2} \underbrace{- k i_1}_{i_2} = 0$$

Il trasformatore ideale trasforma le tensioni, ma non dissipa potenza.

Generatore di tensione pilotato in tensione:

$\hat{e} = \alpha v_p$

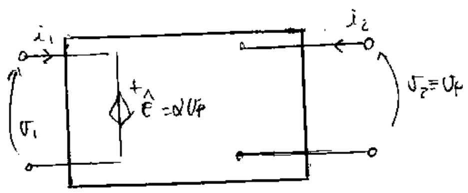
Esempio:



→ lo consideriamo come un bipolo

Si tratta di 2 bipoli: immaginiamo di connetterli.
Il circuito di partenza può essere considerato come la connessione dei 2 doppi bipoli

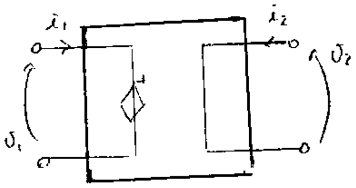
Consideriamo il generatore pilotato:



$$\begin{cases} v_1 = \alpha v_2 \\ i_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un doppio bipolo che ammette la matrice H.
Questo discorso è estensibile a tutti i generatori.

Generatore di tensione pilotato in corrente:

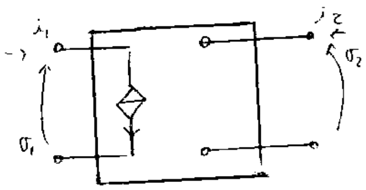


$v_1 = r_m \cdot i_2$

$v_2 = 0$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & r_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generatore di corrente pilotato in tensione:



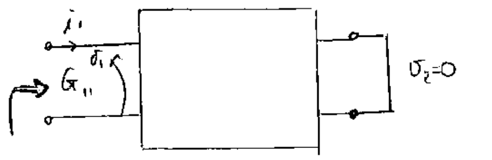
$$\begin{cases} i_1 = g_m v_2 \\ i_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{G}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & g_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

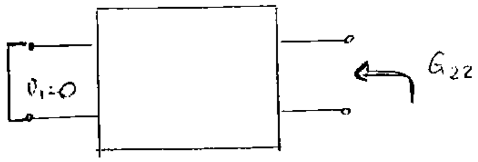
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$ → lo stesso vale per G (conduttanza)

$\underline{\underline{G}}$

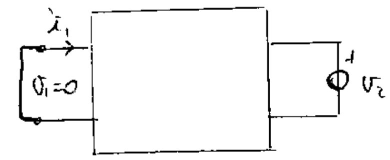
$$G_{11} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2=0}$$



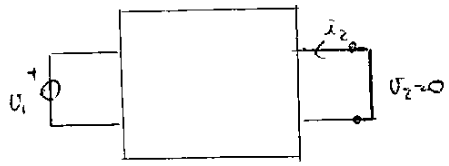
$$G_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{v_1=0}$$



$$G_{12} = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0}$$



$$G_{21} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0}$$



(partitore)

xk $i_1 = -v_2 \cdot \frac{R_1//R_2}{R_1//R_2+R_3} \cdot \frac{1}{R_1}$

$$G_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2//R_3} \qquad G_{12} = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0} = -\frac{R_1//R_2}{R_1//R_2+R_3} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_1//R_3 + R_1//R_2} \qquad G_{21} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0} = -\frac{R_2//R_3}{R_1+R_2//R_3} \cdot \frac{1}{R_3}$$

xk $i_2 = -v_1 \cdot \frac{R_2//R_3}{R_1+R_2//R_3}$

G_{12} e G_{21} non sono però uguali!

Facendo dei calcoli si scopre che sono uguali (infatti DEVONO risultare =

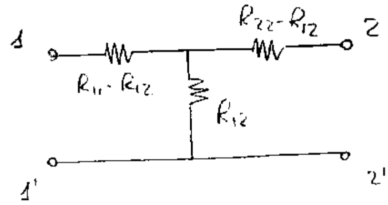
$$G_{12} = \frac{-\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} + R_3} \cdot \frac{1}{R_1} = \boxed{\frac{-R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_3 R_1 + R_3 R_2}}$$

(moltiplico num. e denom. per (R_1+R_2)).

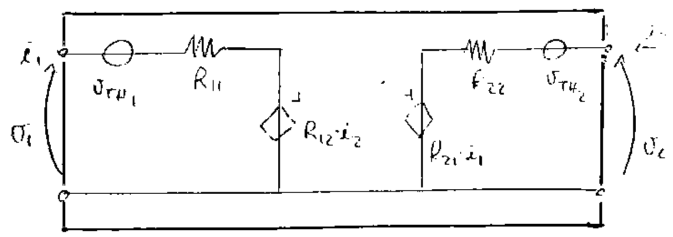
$$G_{21} = -\frac{\frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}} \cdot \frac{1}{R_3} = \boxed{\frac{-R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2}}$$

(moltiplico num. e denom. per (R_2+R_3))

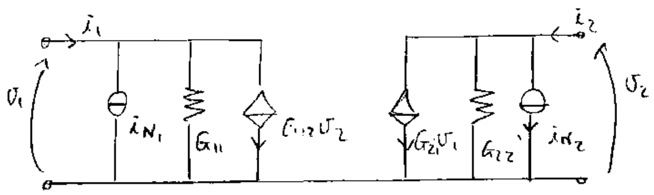
$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \qquad R_{12} = R_{21}$$ (matrice $\underline{\underline{R}}$ simmetrica)



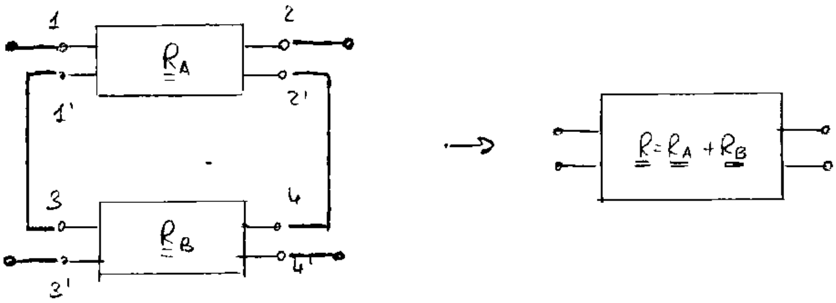
→ circuito equivalente



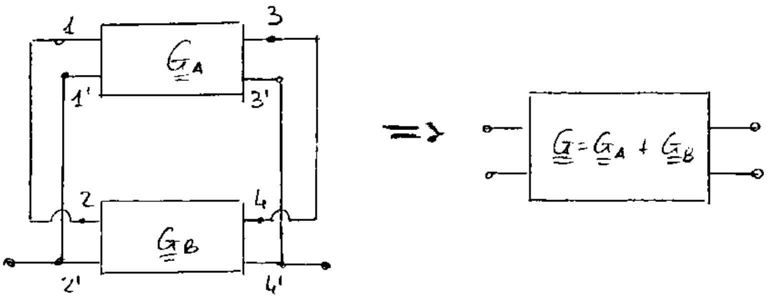
$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \qquad G_{12} \neq G_{21}$$



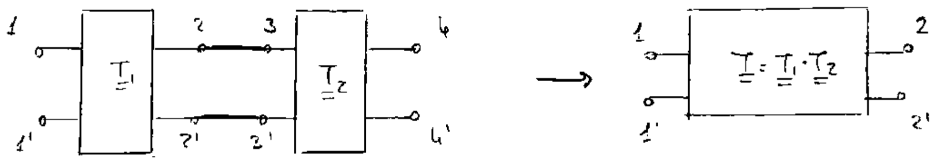
CONNESSIONI SERIE:



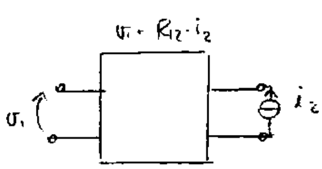
CONNESSIONE PARALLELO:

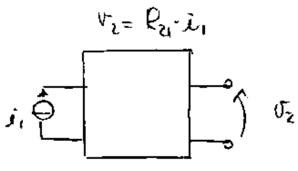


CONNESSIONE IN CASCATA:



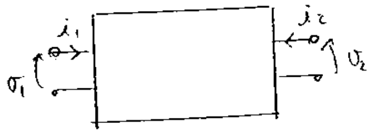
RECIPROCITA':





Dato un generico multipolo (multiporta), se per ogni coppia di vettori $(\underline{v}', \underline{i}')$ $(\underline{v}'', \underline{i}'')$ che soddisfa la relazione costitutiva del

TEOREMA DI RECIPROCITÀ: un multipolo (porta) costituito dalla connessione di multipoli (porte) reciproci è <u>RECIPROCO</u>.



$$p(t) = (v_1 v_2)^T \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{v}^T \cdot \underline{i}$$

Condizioni di passività: $\forall (\underline{v}, \underline{i})$ che soddisfa la relazione costitutiva $p(t) > 0$

$\exists \underline{\underline{R}}$ $\quad \underline{v} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{i}$ $\quad \underline{v}^T \underline{i} = (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{i})^T \cdot \underline{i} = \underline{i}^T \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{i} = \underline{i}^T \underline{\underline{R}} \cdot \underline{i}$

$p(t) = \underline{i}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{i} > 0$ (forma quadratica)

$\underline{\underline{R}} > 0$ (matrice definita positiva)

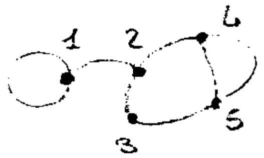
$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{R}} > 0 \qquad R_{11} > 0 \quad R_{22} > 0$$

$$R_{11} R_{22} - R_{12}^2 > 0$$

Se la matrice $\underline{\underline{R}}$ non è simmetrica bisogna suddividerla in una parte simmetrica e una antisimmetrica.

TEORIA DEI GRAFI

<u>Grafo</u>: un insieme di vertici (NODI) e di archi (LATI)



5 vertici
7 archi

$G \subseteq V \times V$

V: insieme dei vertici

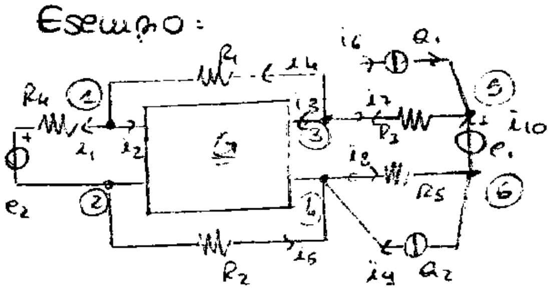
$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

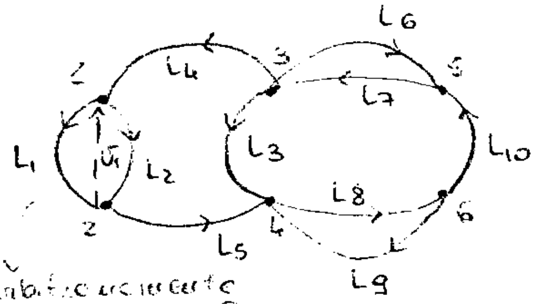
Un grafo è un sottoinsieme di coppie di vertici (quelli che hanno un arco in comune)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_5			X	X	
v_4		X			X
v_3		X			X
v_2	X		X	X	
v_1		X			

Grafo orientato: insieme di vertici e archi orientati (verso che indica il vertice di partenza e quello di arrivo)

Esempio:





fisso arbitrariamente il verso delle correnti

- Ho ottenuto un grafo a 6 nodi e 10 lati.
- Non ho informazioni riguardo alla natura dei bipoli, ho solo informazioni topologiche.

Costruisco la matrice di incidenza:

$$\underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{array}{c} \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{+1} & \cancel{+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

KCL ai nodi 1-6:

(1) $i_1 + i_2 - i_4 = 0$

(2) $-i_1 - i_2 + i_5 = 0$

(3) $i_3 + i_4 + i_6 - i_7 = 0$

(4) $-i_3 - i_5 - i_9 + i_8 = 0$

(5) $-i_6 + i_7 - i_{10} = 0$

(6) $-i_8 + i_9 + i_{10} = 0$

$\underline{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_9, i_{10})^T$ $\qquad \boxed{\underline{\underline{\tilde{A}}} \cdot \underline{i} = 0}$

N nodi ($N=6$), L lati ($L=10$)

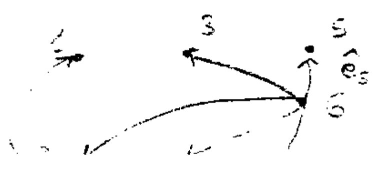
Matrice di incidenza ridotta $\underline{\underline{A}}$ ($N-1$ righe, L colonne)

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = 0$ $\quad N-1$ KCL indipendenti

Quando abbiamo N nodi, supponiamo di prendere un nodo di riferimento corrispondente alla riga eliminata della matrice $\underline{\underline{\tilde{A}}}$.

Definiamo il vettore $\hat{e}$:

$\underline{\hat{e}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{N-1})^T$ il vettore contenente le tensioni fra i rimanenti $N-1$ nodi e il nodo di riferimento scelto (convenzionalmente positive sugli $N-1$ nodi)



→ nel caso grafico ne è una rappresentazione delle tensioni

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & G_{11} & G_{12} & & & & \\ 0 & G_{21} & G_{22} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_4 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -R_1 & & \\ & & & & -R_2 & \\ & & & & & 1 \\ & & \vdots & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e_2 \\ \\ \\ \\ \\ -a_1 \\ \vdots \\ e_1 \end{pmatrix} = 0$$

$N-1$ KCL $\Rightarrow$ $\underline{A} \cdot \underline{i} = 0$

L KVL $\Rightarrow$ $\underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \hat{e}$

$\underline{\underline{\tilde{M}}} \cdot \underline{v} + \underline{\underline{\tilde{N}}} \cdot \underline{i} + \underline{\hat{S}} = 0$

$\underline{\underline{\tilde{M}}}, \underline{\underline{\tilde{N}}}$ $L \times L$

$\underline{v}, \underline{i}, \underline{\hat{S}}$ L niple

Dato un qualsiasi circuito composto da multipoli (porta) lineari (affini) invariabili nel tempo e senza memoria

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A}}$ matrice d'incidenza ridotta

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} \;L\; & \;L\; & N-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} N-1 \\ L \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{A}}^T \\ \underline{\underline{\tilde{M}}} & \underline{\underline{\tilde{N}}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{i} \\ \underline{\hat{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ -\underline{\hat{S}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} L \\ L \\ N-1 \end{array} \Bigg\} \; 2L+N-1 \end{array}$$

$\to$ matrice di zeri

$\underline{\underline{T}}$

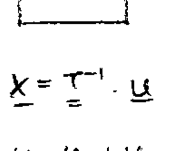
$\underline{\underline{T}}$ = tableau sparso (ha molti zeri)

$\_$ = vettore

$=$ = matrice

$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{i} \\ \underline{\hat{e}} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ -\underline{\hat{S}} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} = \underline{u}$

Un circuito si dice risolubile se $\exists\, \underline{\underline{T}}^{-1} \Rightarrow \det(\underline{\underline{T}}) \neq 0$



$e_1 \neq e_2$ $\quad \det(\underline{\underline{T}}) = 0$ $\to$ circuito impossibile

$\underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{u}$

$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$

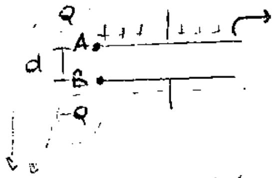
$\underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1} (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{u}_1 + \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{u}_2$ (sovrapposizione degli effetti)

$$\boxed{i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau}$$

Condizione iniziale

L'induttore e' un elemento "con memoria" → tiene conto della condizione iniziale.

CONDENSATORE LINEARE:



→ facce piane // costituite da materiale conduttore (area = A, distanza = d)

carica accumulata sulle armature → si genera un campo elettrico

$$\int \underline{D}\, n\, dS = Q \qquad \underline{D} = \varepsilon \underline{E}$$

ε = parametro che caratterizza il materiale

$$\Downarrow$$

$$|D| \cdot A = Q \quad \Rightarrow \quad |E| = \frac{Q}{\varepsilon A}$$

$$v = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = \frac{Q\, d}{\varepsilon \cdot A}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{d}{\varepsilon A} \cdot q(t)}$$

→ NEI CONDENSATORI: la tensione e' proporzionale alla carica!

$C^{-1} = \frac{d}{\varepsilon A}$ = capacita' del condensatore

$$\boxed{q(t) = C \cdot v(t)}$$ → relazione carica-tensione

Ci interessa la relazione tra corrente e tensione:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{C\, dv(t)}{dt}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{1}{C} \cdot q(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau}$$

$$\rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\, d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

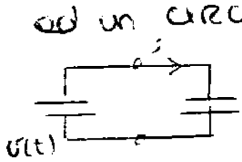
$$= \frac{q(t_0)}{C} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

$$= \boxed{v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau}$$

condizione iniziale

Proprieta' condensatore:

1- Un condensatore alimentato da una tensione COSTANTE equivale ad un CIRCUITO APERTO.



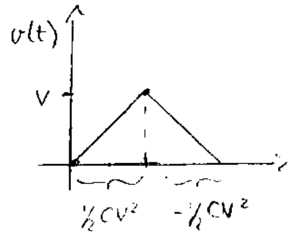
$$v(t) = V = \text{cost.} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = 0, \ \forall V \Rightarrow i(t) = 0, \ \forall V$$

CIRCUITO APERTO

$$= C\int_{v(t_0)}^{v(t_1)} v\,dv = C\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} \Rightarrow \underbrace{w(t_0,t_1)}_{} = \frac{1}{2}C\left[v^2(t_1) - v^2(t_0)\right]$$

energia assorbita dal condensatore (dipende solo dal valore finale e da quello iniziale della tensione).

$\boxed{w(t) = \frac{1}{2}C v(t)}$ → RELAZIONE ENERGIA DEL CONDENSATORE



energia immagazzinata

energia ceduta

Un bipolo e' passivo se non rilascia più energia di quanta accumulata in precedenza

↓

il CONDENSATORE e' un BIPOLO PASSIVO ($v(t) \geq 0$)

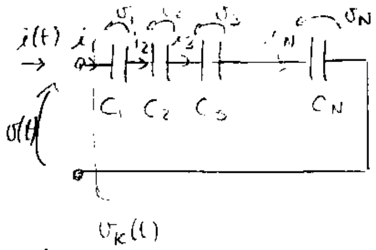
3 – l'induttore non dissipa energia, ma può immagazzinarla

$$w(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\cdot i(t)\,dt = L\int_{i(t_0)}^{i(t_1)} i\,di = L\left[\frac{i^2}{2}\right]_{i(t_0)}^{i(t_1)}$$

$$w(t_0,t_1) = \frac{1}{2}L\left[i^2(t) - i^2(t_0)\right] = w_n(t_1) - w_n(t_0)$$

immagazzinata

CONNESSIONE SERIE DI CONDENSATORI



$$v_K(t) = v_K(t_0) + \frac{1}{C_K}\int_{t_0}^{t} i_K(\tau)\,d\tau$$

$v_K(t)$

Vincolo connessione: $i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i_N = i$

KVL: $v = v_1 + v_2 + \dots + v_N$

$$v(t) = v_1(t_0) + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau +$$

$$+ v_2(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau + \dots +$$

$$+ v_N(t_0) + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

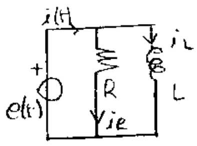
$$= v(t_0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau \Rightarrow C_{eq}$$

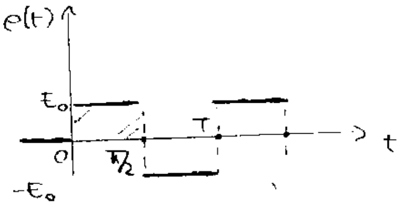
CIRCUITI DINAMICI DI ORDINE 1:

- Si definisce circuito del primo ordine un circuito in cui è presente un solo elemento dinamico (un condensatore o un induttore).

  → funzionamento descritto da un'equazione differenziale del primo ordine.

Esempio:





$E = 1V$

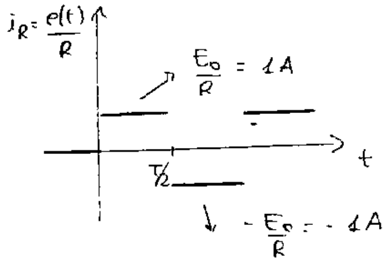
$T = 1s$

$R = 1\Omega$

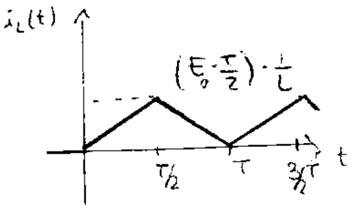
$L = 2H$ (Henry)

La variabile di stato è i_L, si vuole calcolare $i(t)$:
(la corrente è continua per la presenza di una tensione discontinua)

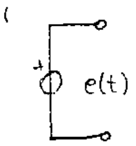
$i(t) = i_R(t) + i_L(t)$ $\qquad i_R = \dfrac{e(t)}{R}$

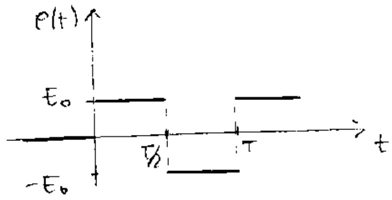


$$i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e(\tau)\,d\tau = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} e(\tau)\,d\tau$$

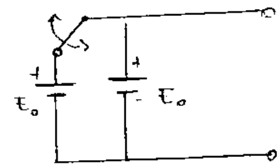


Osservazione:





⇒



interruttori per modellare i salti nelle forme d'onda che descrivono i generatori indipendenti

Se $e(t)$ è costante $\forall t \in (-\infty, +\infty)$ ⇒ INDUTTORE ⇒ CORTO CIRCUITO

CIRCUITO RC →
CIRCUITO RL →

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{1}{\tau}x_{eq}(t)}$$

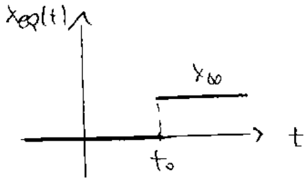
$\tau = R_{eq}C$

$\tau = G_{eq}L = \frac{L}{R_{eq}}$

$x(t)$ indica la variabile di stato

Per il momento consideriamo gli ingressi costanti (x_{eq} e' costante nel tempo) → costante a tratti (x effetto degli interruttori).

$x_{eq} = x_\infty$ **COSTANTE**



$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau} \quad , t > t_0$$

$\dot{x} = -\frac{x}{\tau}$ (risolvo eq omogenea associata)

$\boxed{x = Ke^{-t/\tau}}$ → integrale omogenea

$x_{om}(t) = Ke^{-\lambda t}$

$\dot{x}_{om}(t) = -\lambda Ke^{-\lambda t}$ ⇒ $-\lambda Ke^{-\lambda t} = -\frac{Ke^{-\lambda t}}{\tau}$ ⇒ $\lambda = \frac{1}{\tau}$

integrale particolare: $x = x_\infty$ (ha la stessa forma dell'ingresso)

$x_p(t) = X = \text{cost.}$

$\dot{x}_p(t) = 0$

⇒ sostituisco $x_p(t)$ in $\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau}$

↳ $0 = \frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau}$ ⇒ $\boxed{x = x_\infty}$

↓

la soluzione particolare coincide con il termine noto.

integrale generale: somma tra integrale dell'omogenea associata e integrale particolare.

↓

$x = Ke^{-t/\tau} + x_\infty$ $\qquad$ x_∞ noto, τ noto

Condizione iniziale: $x(t_0) = Ke^{-t_0/\tau} + x_\infty$ ⇒ $K = [x(t_0) - x_\infty]e^{t_0/\tau}$

$$\boxed{x(t) = [x(t_0) - x_\infty]e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_\infty}$$

Soluzione circuito RC o RL con ingressi costanti x_∞!!

$x(t)$ ↓ VARIABILE DI STATO

$x(t_0)$ ↓ valore iniziale

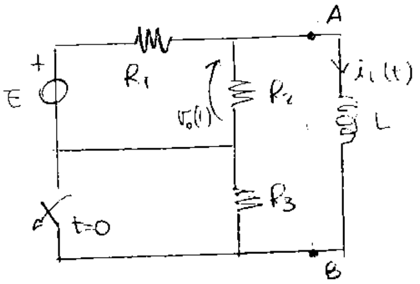
τ ↓ costante di tempo

x_∞ → valore finale
RC: V_{eq} (tensione a vuoto)
RL: J_{eq} (corrente di corto circuito)

$\underline{\tau > 0}$, se $t \to +\infty$ ⇒ $x(t) = x_\infty$ costante

CIRCUITI RC, RL CON INGRESSI COSTANTI:

Esempio:



$v_0(t)$? $(t \geq 0)$

$E = 10V$
$R_1 = 6\Omega$
$R_2 = 3\Omega$
$R_3 = 2\Omega$
$L = 4H$

$$i_L(t) = [\,i_L(0^+) - i_L(\infty)]\cdot e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

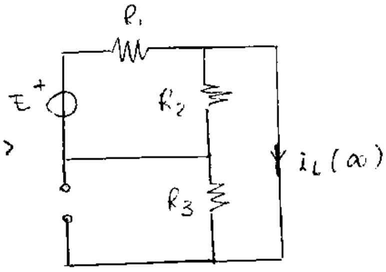
- Calcolo τ:

$\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$ (per calcolare R_{eq} tutti i generatori devono essere spenti, l'interruttore rimane aperto perché si considera all'istante $t=0$)

$$\tau = \frac{L}{(R_1 /\!/ R_2) + R_3} = \frac{L}{4\Omega} = \frac{4H}{4\Omega} = 1s$$

- Calcolo $i_L(\infty)$:

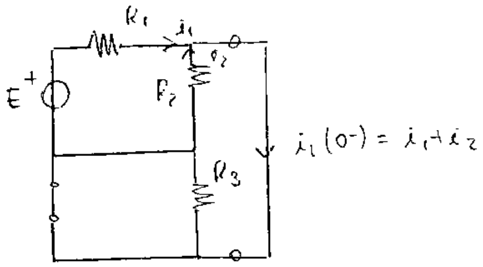
L si comporta come un <u>corto circuito</u> =>



$$i_L(\infty) = \frac{1}{R_3}\cdot\frac{R_2 /\!/ R_3}{R_2 /\!/ R_3 + R_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6/5}{6/5+6}\cdot 10 = \frac{5}{6}\ A$$

- Calcolo $i_L(0^+)$: (calcolo condizione iniziale)

-> guardo il circuito all'istante $t=0^-$: l'interruttore è ancora chiuso e l'induttore si comporta come un corto circuito.



$i_2 = 0$ perché la tensione ai capi di R_2 è uguale a 0!

$$i_L(0^-) = i_1 = \frac{E}{R_1} = 5/3\ A$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \tfrac{2}{2}\,5/3 - 5/6 = \frac{10}{6} - 5/6 = 5/6$$

$$i_L(t) = 5/6\ e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

$$= \boxed{5/6\ e^{-t/\tau} + 5/6} \quad (t \geq 0)$$

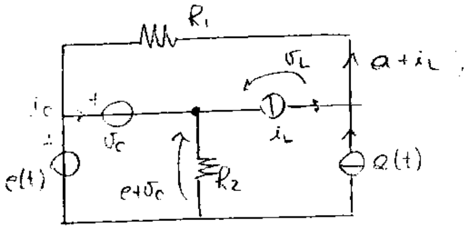
Il VETTORE DI STATO CONIUGATO contiene le variabili coniugate al vettore di stato:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} i_C \\ v_L \end{pmatrix}$$

① Sostituiamo agli elementi dinamici dei generatori corrispondenti:

$v_C \rightarrow$ ⏀ v_C

$i_L \rightarrow$ ⏀ i_L



② Calcolo $\hat{x}$:

$$\underbrace{i_C}_{\hat{x}} = i_L + \frac{v_C + e}{R_2} = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

equazione costitutiva del condensatore

$$\underbrace{v_L}_{\hat{x}} = -v_C - R_1(a+i_L) = L\frac{d\,i_L(t)}{dt}$$

equazione costitutiva dell'induttore

③ Scrittura esplicita del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{CR_2}\cdot v_C + \dfrac{1}{C}\cdot i_L + \dfrac{1}{CR_2}\cdot e(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} = -\dfrac{1}{L}v_C - \dfrac{R_1}{L}\cdot i_L - \dfrac{R_1}{L}\cdot a(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$ EQUAZIONE DI STATO

④ Scrittura dell'equazione di stato in forma matriciale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{CR_2} & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} e(t) \\ a(t) \end{pmatrix}}_{\underline{u}(t)}$$

_ = vettore

= = matrice

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)}$$

$\rightarrow$ equazione che regola i circuiti dinamici con più di un ingresso. (EQUAZIONE GENERALE)

equazione lineare, a coefficienti costanti, non autonoma

$$x(t) = \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}t}\left[x(0^+)\right]}_{\text{evoluzione libera } (\underline{u}(t)=0)} + \underbrace{\int_{0^+}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-t')}\cdot\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t')dt'}_{\text{evoluzione forzata } (\underline{x}(0^+)=0)}$$

Reti di multipoli lineari (affini) invarianti nel tempo senza memoria.

$$\Downarrow$$

GRAFO $\underline{\underline{A}}$

N nodi L lati

$\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_L)^T$

$\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_L)^T$

$\hat{\underline{e}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{N-1})^T$

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = 0 & \text{KCL} \\ \underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \hat{\underline{e}} & \text{KVL} \\ \underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} + \underline{\underline{N}} \cdot \underline{i} + \underline{S} = 0 & \text{Relazione costitutiva} \end{cases}$$

Teorema di Tellegen:
Detto $\underline{i}'$ un generico vettore di correnti che soddisfa le KCL ($\underline{\underline{A}} \cdot \underline{i}' = 0$) e $\underline{v}''$ un vettore di tensioni che soddisfa le KVL ($\underline{v}'' = \underline{\underline{A}}^T \cdot \hat{\underline{e}}''$)

$$\Downarrow$$

$$(\underline{v}'')^T \cdot \underline{i}' = 0$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}}^T \cdot \hat{\underline{e}}'')}_{\text{KVL}}{}^T \cdot \underline{i}' = (\hat{\underline{e}}'')^T \cdot \overbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{i}'}^{=0} = 0$$

Da questo teorema deriva il principio di conservazione delle potenze:
se $\underline{i}' = \underline{i}$ $\underline{v}' = \underline{v}$ e $(\underline{v}, \underline{i})$ soddisfano anche le relazioni costitutive

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{v}^T \cdot \underline{i} = 0}$$

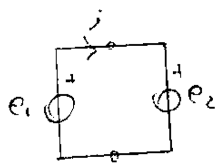
$v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + \dots + v_L i_L = 0$

→ Teorema di conservazione delle potenza

Tutta la teoria dei circuiti e' riconducibile a $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} = \underline{u}$

$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \qquad \underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{u}_1 + \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{u}_2$

Un circuito e' risolubile $\iff \det \underline{\underline{T}} \neq 0$



$e_1 \neq e_2$ viola KVL (impossibile)

$e_1 = e_2$ (indeterminato)

- In entrambi i casi $\det \underline{\underline{T}} = 0$!
- Il modello corretto implica la presenza di una resistenza nel circuito

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 150

$\underline{i} = -\underline{\underline{N}}^{-1}\cdot \underline{\underline{M}}\cdot \underline{v} = -\underline{\underline{N}}^{-1}\cdot \underline{s}(t) = \underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{v} + \underline{i}_n$ $\qquad$ $\underline{\underline{G}}_n = -\underline{\underline{N}}^{-1}\cdot \underline{\underline{M}}$

$\underline{i}_n = -\underline{\underline{N}}^{-1}\cdot \underline{s}(t)$

$\underline{\underline{A}}\cdot \underline{i} = 0$ KCL

$\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{v} + \underline{i}_n\right) = 0$; $\underline{\underline{A}}\cdot \underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{A}}^T \hat{\underline{e}} + \underline{\underline{A}}\cdot \underline{i}_n = 0$

$$\boxed{\left(\underline{\underline{A}}\cdot \underline{\underline{G}}_n \underline{\underline{A}}^T\right)\hat{\underline{e}} = -\underline{\underline{A}}\cdot \underline{i}_n} \longrightarrow \tilde{\underline{\underline{G}}}\cdot \hat{\underline{e}} = \tilde{\underline{i}}$$

$\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{n-1})^T$

→ Metodo dei Nodi

Se la rete e' composta da bipoli, $\underline{\underline{G}}_n$ e' diagonale e i_n e' un vettore generatore di correnti.

$$\underline{\underline{G}}_n = \begin{pmatrix} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_L \end{pmatrix} \qquad i_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \end{pmatrix}$$

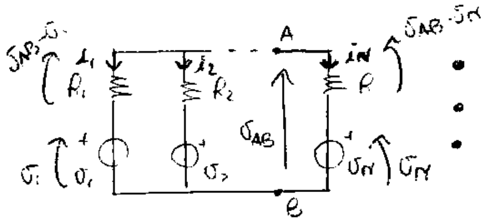
$\tilde{\underline{\underline{G}}}_{KK}$ = somma di tutte le conduttanze che afferiscono al nodo K.

$\tilde{\underline{\underline{G}}}_{Kl}$ = − somma delle conduttanze poste tra il nodo K e il nodo l.

$\tilde{\underline{i}} = -\underline{\underline{A}}\cdot \underline{i}_n$

$\tilde{i}_K$ = somma delle correnti dovute ai generatori di corrente entranti nel nodo K.

TEOREMA DI MILLMAN:



- n rami
- rami costituiti dalla serie v_i, R_i
- tutti i rami in parallelo

$$\boxed{v_{AB} = \frac{\sum_{K=1}^{n} \frac{v_K}{R_K}}{\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{R_K}}}$$

(formula per trovare v_{AB})

Dimostrazione:

KCL al nodo A: $\sum_{K=1}^{N} i_K = 0$

$i_K = \frac{v_{AB} - v_K}{R_K}$; $K = 1, 2, \dots, N$

$\sum_{K=1}^{n}\left(v_{AB}\cdot \frac{1}{R_K} - \frac{v_K}{R_K}\right) = 0$; $\sum_{K=1}^{n} v_{AB}\cdot \frac{1}{R_K} = \sum_{K=1}^{n} \frac{v_K}{R_K}$

FASORE: numero complesso associato ad una sinusoide di ampiezza A e fase θ.

$$V = A e^{j\theta} \in \mathbb{C}$$

Segnale periodico:

$$\exists T \quad f(t) = f(t+T) \quad \forall t$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega_0 t) + F_n' \sin(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

↳ SERIE DI FOURIER

$$\underbrace{v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \theta)}_{\text{DOMINIO DEL TEMPO}} \xrightarrow{F} \underbrace{V = V_M e^{j\theta}}_{\text{DOMINIO DEI FASORI}} \qquad j = i = \sqrt{-1}$$

$$F\left(c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)\right) = c_1 F(v_1) + c_2 F(v_2)$$ → lineare

$$v_1 = V_{1M} \cos(\omega t + \theta_1)$$

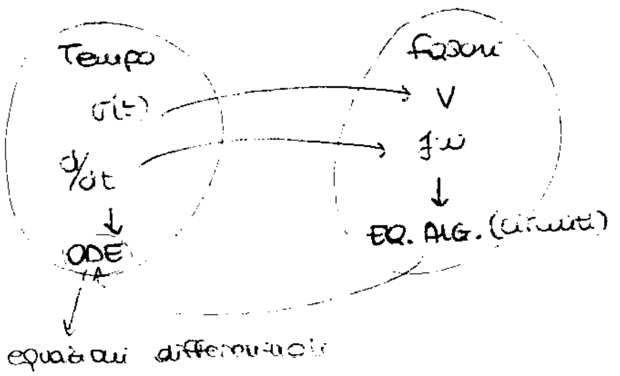
$$v_2 = V_{2M} \cos(\omega t + \theta_2)$$

Dominio del tempo: Dominio dei fasori:

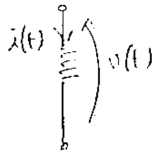
$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) \xrightarrow{F} V = V_M e^{j\theta}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \longrightarrow j\omega V$$

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow j\omega$$ → un operatore differenziale diventa un operatore algebrico



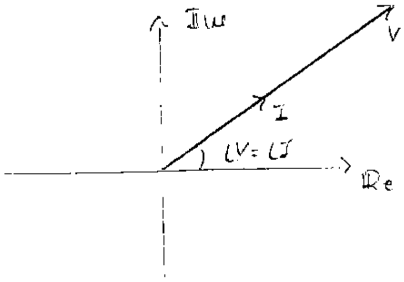
RESISTORE:



$v(t) = R \cdot i(t)$ → Fasori $\mathcal{F}(v) = R \cdot \mathcal{F}(i)$

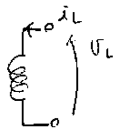
$$\boxed{V = R \cdot I}$$

$|V| = R \cdot |I|$ $\quad R>0 \quad$ $\angle V = \angle R + \angle I = \angle I$



→ tensione e corrente sono in fase (hanno la stessa fase)

INDUTTORE:

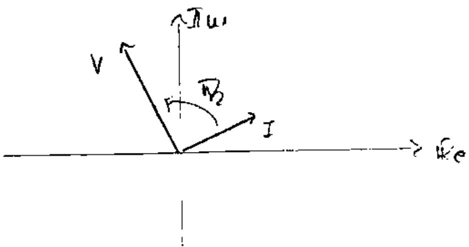


$v_L(t) = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt}$ $\qquad \mathcal{F}(v_L) = L\, \mathcal{F}\left(\dfrac{di_L}{dt}\right)$

$$V_L = L \cdot \mathcal{F}\left(\frac{di_L}{dt}\right) = L \cdot j\omega I_L$$

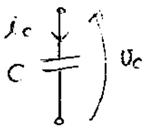
$\boxed{V_L = j\omega L \cdot I_L}$ → la relazione costitutiva nel dominio dei fasori è algebrica, non più differenziale

$|V_L| = \omega L\, |I_L|$ $\quad L>0 \quad$ $\angle V_L = \angle j\omega L + \angle I_L = \angle I_L + \frac{\pi}{2}$



→ la tensione è in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla corrente.

CONDENSATORE:

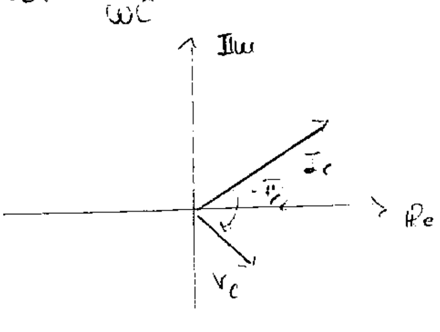


$i_c(t) = C \cdot \dfrac{dv_c}{dt}$ $\qquad \mathcal{F}(i_c) = C\, \mathcal{F}\left(\dfrac{dv_c}{dt}\right)$

$\boxed{I_c = C j\omega V_c}$; $\boxed{V_c = \dfrac{1}{j\omega C} \cdot I_c}$

la relazione costitutiva è di tipo algebrico

$|V_c| = \dfrac{1}{\omega C}\, |I_c|$ $\quad C>0 \quad$ $\angle V_c = \angle \dfrac{1}{j\omega C} + \angle I_c = -\frac{\pi}{2} + \angle I_c$



→ la tensione è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla corrente

$R_z = \dfrac{G_Y}{G_Y^2 + B^2} \qquad X = \dfrac{-B}{G_Y^2 + B^2}$

RESISTORE: $\quad V = R \cdot I \qquad Z = \dfrac{V}{I} = R \qquad Y = \dfrac{I}{V} = G = \dfrac{1}{R}$

Nel caso di un resistore l'impedenza coincide con la resistenza.

$Z = R \qquad R_z = R \qquad X = 0$

$Y = G \qquad G_Y = G \qquad B = 0$

INDUTTORE: $\quad V_L = j\omega L I_L \qquad Z_L = \dfrac{V_L}{I_L} = j\omega L \implies R_z = 0 \qquad X_L = \omega L$

$Z_L = j X_L \qquad X_L = \omega L$

$Y_L = \dfrac{I_L}{V_L} = \dfrac{1}{j\omega L} = j\left(-\dfrac{1}{\omega L}\right)$

$G_Y = 0 \qquad B_L = -\dfrac{1}{\omega L}$

$Y_L = j B_L \qquad B_L = \dfrac{-1}{\omega L}$

Tabella riassuntiva:

	Z	Y
R	$Z = R$	$Y = 1/R = G$
	$Z_L = j X_L$ $(X_L = \omega L)$	$Y_L = j B_L$ $\left(B_L = \frac{1}{\omega L}\right)$
	$Z_C = j X_C$ $\left(X_C = -\frac{1}{\omega C}\right)$	$Y_C = j B_C$ $(B_C = \omega C)$

CONDENSATORE: $\quad V_C = \dfrac{1}{j\omega C} \cdot I_C \qquad Z_C = \dfrac{V_C}{I_C} = \dfrac{1}{j\omega C} = j\left(\dfrac{-1}{\omega C}\right)$

$R_z = 0 \qquad X_C = \dfrac{-1}{\omega C}$

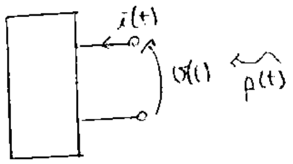
$Z_C = j X_C \qquad X_C = -1/\omega C$

$Y_C = \dfrac{I_C}{V_C} = j\omega C$

$G_Y = 0 \qquad B = \omega C$

$Y_C = j B_C \;; \quad B_C = \omega C$

Nel dominio dei fasori si possono applicare tutte le tecniche circuitali viste nel dominio del tempo per reti composte di multipoli lineari (affini) senza memoria e invarianti nel tempo, purché al concetto di resistenza (o conduttanza) si sostituisca quello di impedenza (o ammettenza).



$v(t) \longleftrightarrow V$ (fasore) $\qquad v(t) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$

$i(t) \longleftrightarrow I$ (fasore) $\qquad i(t) = |I| \cos(\omega t + \angle I)$

$$v(t) = \mathrm{Re}\left(V e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{|V| e^{j\angle V}}_{V} e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(|V| e^{j(\omega t + \angle V)}\right) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\left(I e^{j\omega t}\right)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \mathrm{Re}\left(V e^{j\omega t}\right) \cdot \mathrm{Re}\left(I e^{j\omega t}\right)$$

Sappiamo che: $z = x + jy = \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z)$

$z^* = x - jy = \mathrm{Re}(z) - j\,\mathrm{Im}(z)$ (coniugato)

$$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + z^*}{2}$$

Cosa significa fare il coniugato del prodotto di 2 numeri complessi?

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$\left(e^{j\phi}\right)^* = e^{-j\phi}$$

$$p(t) = \frac{\left(V e^{j\omega t}\right) + \left(V e^{j\omega t}\right)^*}{2} \cdot \frac{\left(I e^{j\omega t}\right) + \left(I e^{j\omega t}\right)^*}{2}$$

$$= \frac{\left(V e^{j\omega t}\right) + V^* \cdot \overbrace{\left(e^{j\omega t}\right)^*}^{e^{-j\omega t}}}{2} \cdot \frac{\left(I e^{j\omega t}\right) + I^* \cdot \overbrace{\left(e^{j\omega t}\right)^*}^{e^{-j\omega t}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{V I^* + V^* I}{2} + \frac{V I e^{2j\omega t} + V^* \cdot I^* \cdot e^{-2j\omega t}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{V \cdot I^* + (V \cdot I^*)^*}{2} + \frac{V \cdot I e^{2j\omega t} + (V \cdot I \cdot e^{2j\omega t})^*}{2} \right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \mathrm{Re}(V \cdot I^*) + \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(V I e^{2j\omega t}\right)}$$

$$V^* \cdot I = (V \cdot I^*)^* = V^* \cdot I$$

$$\left(V^* \cdot I^* e^{-2j\omega t}\right) = \left(V \cdot I \cdot e^{2j\omega t}\right)^*$$

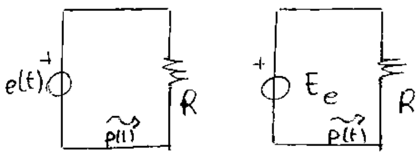
$V = |V| e^{j\angle V} \qquad I = |I| e^{j\angle I} \qquad I^* = |I| \cdot e^{-j\angle I}$

$$Q = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(|V| e^{j\angle V} |I| e^{-j\angle I}\right) = \frac{1}{2}|V||I|\,\mathrm{Im}\left[e^{j(\angle V - \angle I)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}|V||I| \sin(\angle V - \angle I) = \frac{1}{2}|V||I|\sin\varphi \qquad \varphi = \angle V - \angle I$$

Si misura in Volt-Ampere reattivi = <u>VAR</u>

Potenza complessa S
Potenza apparente A $\Rightarrow$ si misurano in Volt-Ampere = <u>VA</u>



$e(t)$ periodico $\qquad$ E_e costante

$\exists T \quad e(t+T) = e(t) \quad \forall t$

Qual è il valore del generatore costante E_e che eroga ad un resistore generico una potenza P pari al valor medio della potenza $p(t)$ erogata dal generatore periodico?

Il valore E_e si chiama VALORE EFFICACE di $e(t)$.

$$p(t) = \frac{e^2(t)}{R} \qquad \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^2(t)}{R}\,dt \qquad P = \frac{E_e^2}{R}$$

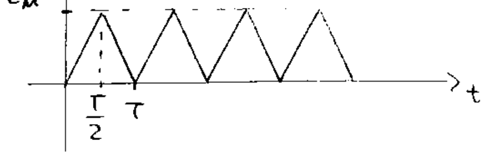
$$\frac{E_e^2}{\cancel{R}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^2(t)}{\cancel{R}}\,dt \quad ; \quad E_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt}$$

$e(t) \longleftrightarrow E$

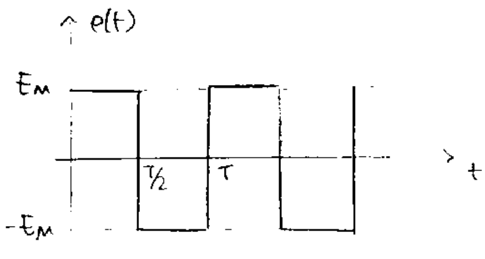
$e(t) = |E|\cos(\omega t + \angle E)$

$$E_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |E|^2\cos^2(\omega t + \angle E)\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |E|^2\,\frac{1+\cos[2(\omega t + \angle E)]}{2}\,dt} = \sqrt{\frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{|E|^2}{2}\cdot\cancel{T}} = \frac{|E|}{\sqrt{2}}$$



$e(t) = |E|\cos(\omega t + \angle E)$



$$E_e = \frac{|E|}{\sqrt{2}} = \frac{E_M}{\sqrt{2}}$$

$W_L(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$

valore medio dell'energia: $\langle W_L(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} L\, i^2(t)\,dt$

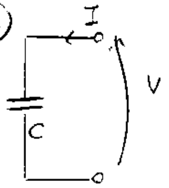
$$= \frac{1}{2} L \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}_{I_e}$$

$$= \frac{1}{2} L I_e^2$$

$Q_L = X_L I_e^2 = \omega L I_e^2$

$\frac{Q_L}{\langle W_L(t)\rangle} = \frac{\omega L I_e^2}{\frac{1}{2} L I_e^2} = 2\omega = \frac{4\pi}{T}$ $\qquad Q_L = \frac{4\pi}{T} \cdot \underbrace{\langle W_L(t)\rangle}_{\text{potenza media immagazzinata}}$

(3)



$V = j X_C \cdot I \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$

$\angle V - \angle I = -\frac{\pi}{2} \qquad \cos\varphi = 0 \qquad \sin\varphi = -1$

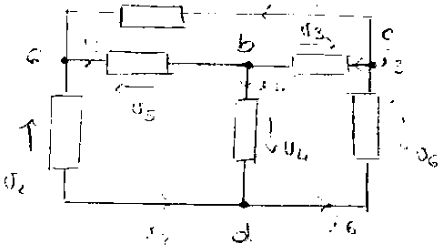
$P = \frac{1}{2}|V||I|\cos\varphi = 0$

$Q = \frac{1}{2}|V||I|\sin\varphi = -\frac{1}{2}|V||I|$ $\longrightarrow$ potenza reattiva negativa

$|V| = |X_C||I| = -X_C|I| \implies Q = \frac{1}{2} X_C |I|^2 = X_C I_e^2 \underline{< 0}$

$W_C = \frac{1}{2} C v^2(t) \qquad \langle W_C(t)\rangle = \frac{1}{2} C V_e^2$

$$\frac{Q_C}{\langle W_C(t)\rangle} = \frac{X_C I_e^2}{\frac{1}{2} C V_e^2} = \frac{2 X_C}{C X_C^2} = \frac{2}{C X_C} = \frac{2}{C\left(-\frac{1}{\omega C}\right)} = -2\omega = -\frac{4\pi}{T}$$



$v_4 = 7V$ $\quad i_3 = 6A$ $\quad v_1, v_2, v_3$?

$v_5 = 9V$ $\quad i_5 = 8A$ $\quad i_1, i_2, i_4$?

$v_6 = 8V$ $\quad i_6 = 7A$

LKC:

a) $i_1 - i_2 - i_5 = 0$ (considero positive correnti uscenti)

b) $i_5 - i_4 + i_3 = 0$ $\qquad i_4 = i_3 + i_5 = 6 + 8 = 14\,A$

c) $i_6 - i_1 - i_3 = 0$ $\qquad i_1 = i_6 - i_3 = 7 - 6 = 1\,A$

d) $i_2 + i_4 - i_6 = 0$ $\qquad i_2 = i_1 - i_5 = 1 - 8 = -7\,A$

LKT:

a-b-c-a $\qquad -v_1 + v_5 - v_3 = 0$ (considero positive quelle in senso orario)

a-b-d-a $\qquad v_2 - v_5 + v_4 = 0$

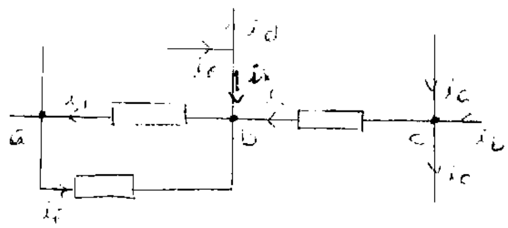
b-c-d-b $\qquad v_3 + v_6 - v_4 = 0$

La maglia esterna e' dipendente dalle altre quindi non mi serve! (ci sono 3 maglie indipendenti)

$v_2 = v_5 - v_4 = 9 - 7 = 2\,V$

$v_3 = v_4 - v_6 = 7 - 8 = -1\,V$

$v_1 = v_5 - v_3 = v_5 - v_4 + v_6 = 9 - 7 + 8 = 10\,V$



$i_a = 8A$ $\quad i_d = -6A$ $\quad i_1, i_2$?

$i_b = -2A$ $\quad i_e = 8A$

$i_c = 5A$ $\quad i_f = 10A$

a) $i_1 - i_f + ?$

b) $i_f - i_1 + i_2 + ?$

c) $i_a + i_b - i_c - i_2 = 0$

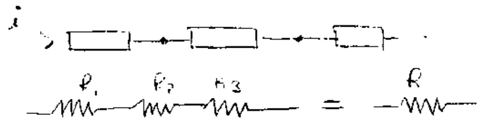
$i_e - i_d - i_x = 0$; $\quad i_x = i_e - i_d$

b) $i_f - i_1 + i_2 + i_e - i_d = 0$ $\qquad i_1 = i_f + i_2 + i_e - i_d = 10 + 1 + 8 + 6 = 25\,A$

c) $i_a + i_b - i_c - i_2 = 0$ $\qquad i_2 = i_a + i_b - i_c = 8 - 2 - 5 = 1\,A$

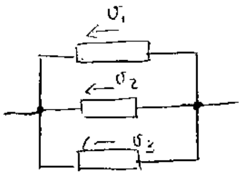
Resistenze equivalenti:

Def: bipoli connessi in serie: due o più bipoli sono connessi in serie se sono attraversati dalla stessa corrente

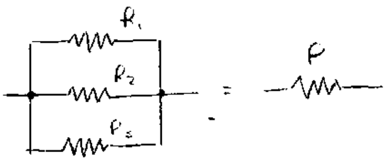


$R = R_1 + R_2 + R_3$ $\qquad$ $R = \sum_k R_k$

Def: bipoli connessi in parallelo: due o più bipoli sono connessi in parallelo se ai loro capi hanno la stessa tensione.



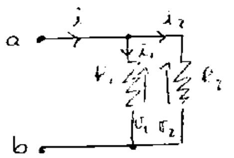
LKT: $-v_1 + v_2 = 0$; $v_1 = v_2$
$v_2 = v_3$ $\Rightarrow v_1 = v_3$



$G = G_1 + G_2 + G_3$ $\qquad$ $G = \frac{1}{R}$

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ $\qquad$ $\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$

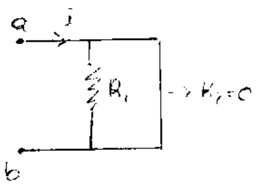
Se ho 2 resistenze: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

① 

R_{ab}? (resistenza equivalente)

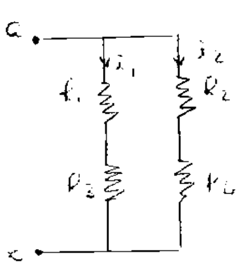
LKT: $v_1 = v_2$ (le tensioni sono uguali quindi le resistenze sono in //)

$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $\Rightarrow R_{ab} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

② 

Al posto di R_2 metto un corto circuito ($R_2 = 0$)

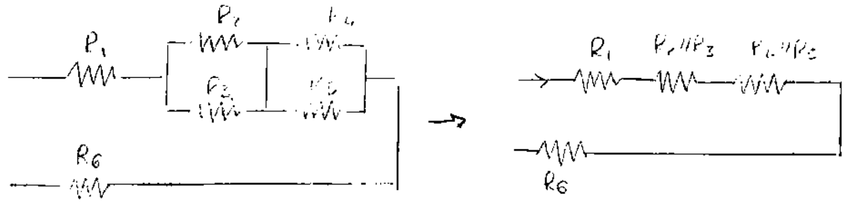
$R_{ab} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 \cdot 0}{R_1 + 0} = 0\,\Omega$

③ 

La corrente che passa per R_1 è la stessa che passa per R_3, nel ramo di destra succede la stessa cosa.

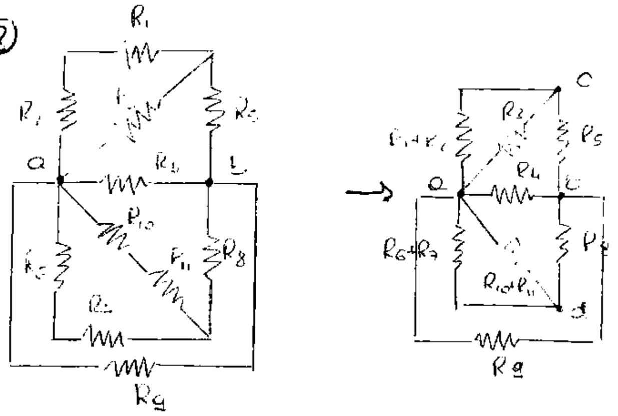
↓

le resistenze R_1 e R_3, R_2 e R_4 sono in serie

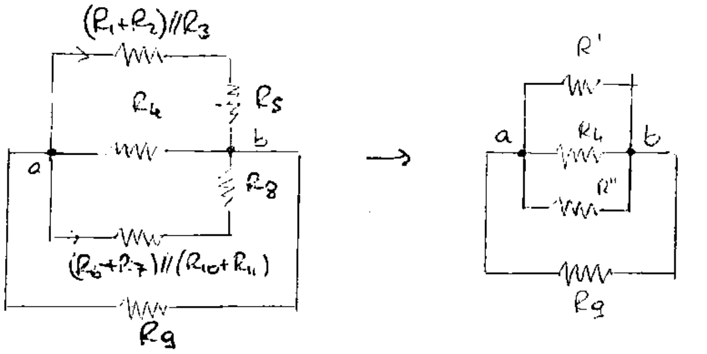


$$R_{ab} = R_1 + R_2 /\!/ R_3 + R_4 /\!/ R_5 + R_6$$

8



$R_1 + R_2$	a-c
R_3	a-c
$R_{10} + R_{11}$	a-d
$R_6 + R_7$	a-d

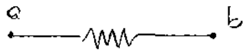


$$R' = (R_1+R_2) /\!/ R_3 + R_5$$

$$= \frac{(R_1+R_2) \cdot R_3}{R_1+R_2+R_3} + R_5$$

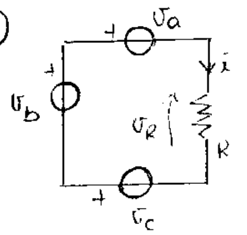
$$R'' = (R_6+R_7) /\!/ (R_{10}+R_{11}) + R_8$$

$$= \frac{(R_6+R_7)(R_{10}+R_{11})}{R_6+R_7+R_{10}+R_{11}} + R_8$$



$$R_{ab} = R' /\!/ R_4 /\!/ R'' /\!/ R_9$$

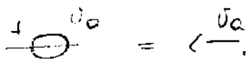
$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R_9}$$

① 

$v_a = 10\,V$ $R = 3\,\Omega$

$v_b = 12\,V$ v_R? i?

$v_c = -8\,V$

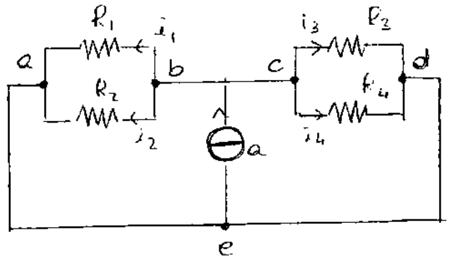


- Posso trovare v_R utilizzando L.K.T:

$-v_a + v_b + v_c - v_R = 0$; $v_R = -10+12-8 = -6\,V$

- Utilizzo la legge di Ohm:

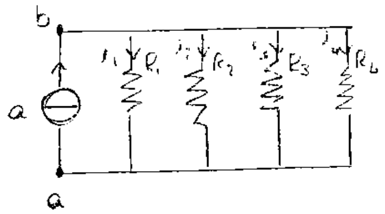
$v_R = R \cdot i$; $i = \frac{v_R}{R} = \frac{-6\,V}{3\,\Omega} = -2A$

② 

i_1, i_2, i_3, i_4?

$a \equiv d \equiv e$ $b \equiv c$

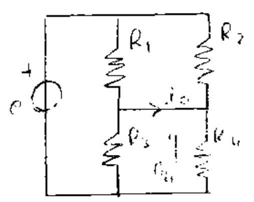
Posso ridisegnare il circuito in questo modo:

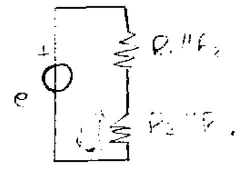


(devo collegare i bipoli alle stesse coppie di nodi)

$i_1 = i \cdot \frac{R_2 // R_3 // R_4}{R_1 + R_2 // R_3 // R_4}$ $R_2 // R_3 // R_4 = R'$ $\rightarrow$ $\frac{1}{R_2 // R_3 // R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R'}$

$i_2 = i \cdot \frac{R_1 // R_3 // R_4}{R_2 + R_1 // R_3 // R_4}$ ...

③ 

i_0? v_4? $\longrightarrow$ 

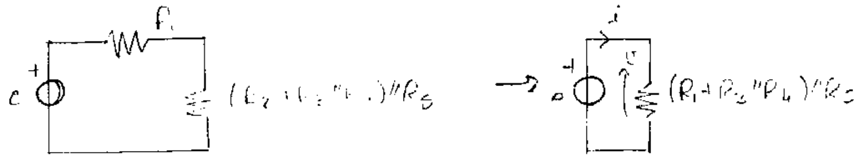
(in questo circuito i_0 non la vedo più)

v_4 e' la tensione ai capi sia di R_4 che di R_3 (perche' sono in //)

Posso calcolare v_4 con la regola del partitore di tensione:

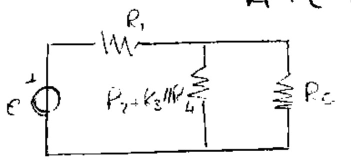
$v_4 = e \cdot \frac{R_3 // R_4}{R_3 // R_4 + R_1 // R_2}$ (il segno e' positivo perche' la corrente e' opposta alla tensione).

Metodo alternativo:

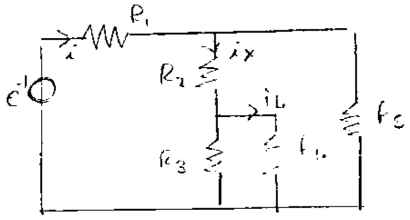


L.K.T.: $e - v = 0$; $v = e$

Ohm: $i = \dfrac{e}{R_1 + (R_2 + R_3 /\!/ R_4) /\!/ R_5}$



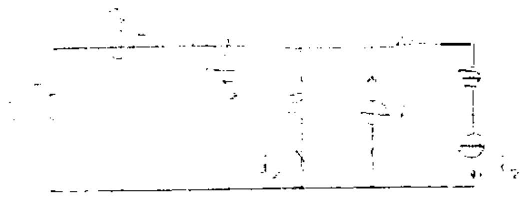
P.C.: $i_x = i \cdot \dfrac{R_5}{R_5 + R_2 + R_3 /\!/ R_4}$



P.C.: $i_4 = i_x \cdot \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}$

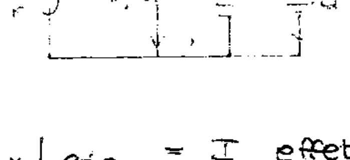
__Principio di sovrapposizione degli effetti:__

- In un circuito in cui sono presenti più sorgenti o generatori, tensioni e correnti vengono determinate considerando il contributo di ciascuna sorgente calcolato "spegnendo" tutte le altre.



$$v_x = v_x \Big|_{\substack{v_1 \neq 0 \\ v_2, i_1, i_2 = 0}} + v_x \Big|_{\substack{v_2 \neq 0 \\ v_1, i_1, i_2 = 0}} + \dots$$

- Un generatore di tensione "spento" si comporta come un corto circuito.
- Un generatore di corrente "spento" si comporta come un circuito aperto.

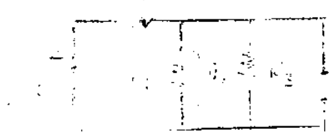
① 

i_x?

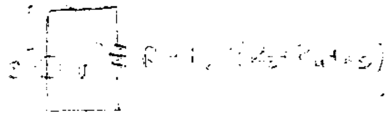
$e = 30V$
$a = 2A$

$R_1 = 24\,\Omega$
$R_2 = 20\,\Omega$
$R_3 = 80\,\Omega$

$i_x \Big|_{\substack{e \neq 0 \\ a = 0}}$ = __I effetto__



→ voglio trovare v_x

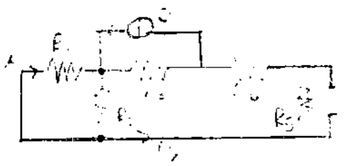


Trovo v con la legge di Kirchhoff:

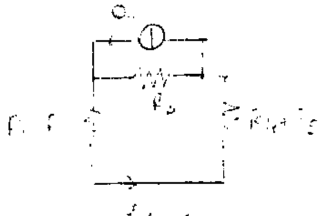
$$e - v = 0 \quad ; \quad v = e$$

Nota la tensione, uso la legge di Ohm: $i' = \frac{v}{R_1} = \frac{e}{R_1 + R_2 // (R_3 + R_4 + R_5)}$

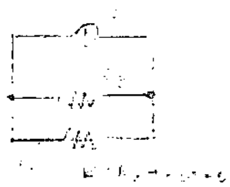
$$i \Big|_{\substack{e=0 \\ a_1 \neq 0 \\ a_2 = 0}} = \underline{\text{II effetto}}$$



Se trovo i_x posso trovare i con un partitore di corrente.



$R_1 // R_2$ e $R_4 + R_5$ sono in serie!



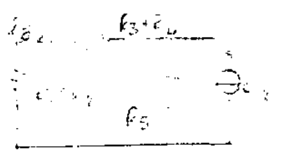
Con un partitore di corrente posso calcolare i:

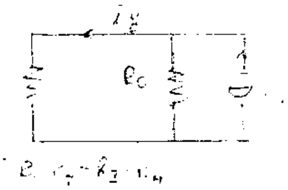
$$i_x = a_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 // R_2 + R_4 + R_5 + R_3}$$

$$i'' = -i_x \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i \Big|_{\substack{e=0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 \neq 0}} = \underline{\text{III effetto}}$$

Se trovo i_y, trovo i con un partitore di corrente.





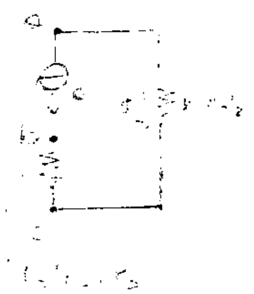
Partitore di corrente:

$$i_y = a_2 \cdot \frac{R_5}{R_1 // R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$$

Partitore di corrente:

$$i''' = -i_y \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$ (sequenza di partitori di corrente)

Risultato finale: $i = i' + i'' + i'''$

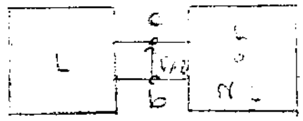


Per la legge di Ohm:

$v''' = R_1 // R_2 \cdot a$

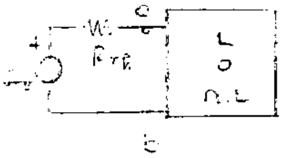
Risultato finale: $v = v' + v'' + v'''$

Thevenin e Norton: → SPENGO GENERATORI ... !!



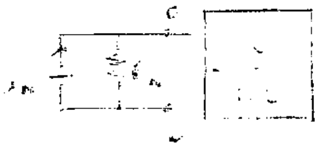
L = lineare (vale la legge di Ohm)

N.L = non lineare



Thevenin: $V_{TH} = V_{ab}$

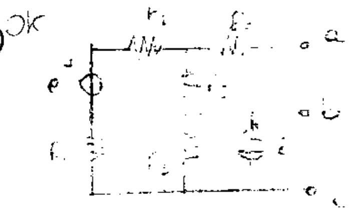
$R_{TH} = R_{ab}$



Norton: $R_N = R_{ab}$

$i_N = i_{ab} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{V_{ab}}{R_{ab}}$

① ok

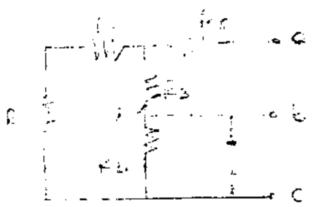


Thevenin ai nodi a, b

Norton ai nodi b, c

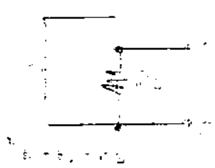
• R_{bc} ? (Ho trovato R_{bc} e V_{bc} ... circuito eq. di Thevenin ai nodi b, c)

Al posto del generatore di tensione vado a mettere un corto circuito:

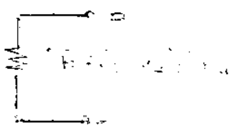


Al posto del generatore di corrente vado a mettere un circuito aperto.

R_1, R_2, R_3 sono in serie perché in R_5 non scorre corrente.



→

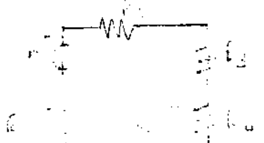


$R_{bc} = (R_1 + R_2 + R_3) // R_4$

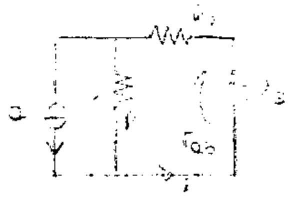
V_{bc} = è la tensione ai capi di R_4

Utilizzo il principio di sovrapposizione degli effetti:

$v_{bc} \Big|_{\substack{e \neq 0 \\ i = 0}}$



$v_{ab}\Big|_{\substack{e=0\\a\neq 0}}$



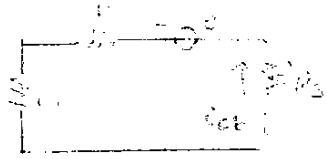
• Trovo i con un partitore di corrente:

$$i = a \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

• Trovo v_{ab} utilizzando la legge di Ohm:

$$v'_{ab} = -R_3 \cdot i = -a \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

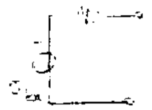
$v_{ab}\Big|_{\substack{e\neq 0\\a=0}}$



Partitore di tensione:

$$v''_{ab} = -e \cdot \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

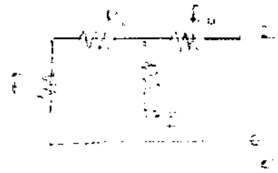
$$v_{ab} = v'_{ab} + v''_{ab} = -e \cdot \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} - a \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1+R_2+R_3} = -\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot (e + aR_1)$$

 → circuito di Thevenin

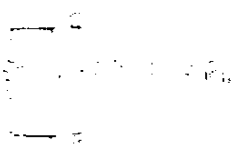
$R_N = R_{ab}$

$$i_N = \frac{v_{ab}}{R_{ab}} = \left[-\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot (e+aR_1)\right] : R_{ab}$$

• R_{ab}



• R_1 e R_2 sono in serie
• (R_1+R_2) è in parallelo con R_3
• R_4 è in serie con $(R_1+R_2)//R_3$

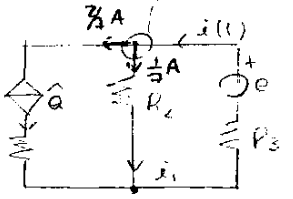
=> 

$$R_{ab} = (R_1+R_2)//R_3 + R_4$$

$$i = i' + i'' = \frac{V_{ab}}{R_{ab}+R_4} - \frac{e_2}{R_{ab}+R_4} = \frac{V_{ab}-e_2}{R_{ab}+R_4}$$

OK

(1)



→ applico legge di Kirchhoff ai nodi ... x calcolare $i(t)$

$\hat{a} = \beta i_1$, $\beta = 2$, $e = 1V$

$R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 1\Omega$

$i(t)$?

Metodo del pilota:

1- considero $\hat{a}$ indipendente per calcolare i_1 (pilota):

Utilizzo la sovrapposizione degli effetti perché sono presenti 2 generatori.

$$i_1 = i_1\Big|_{\hat{a}} + i_1\Big|_{e} = -\frac{R_3}{R_3+R_2}\cdot\beta i_1 + \frac{e}{R_2+R_3}$$

legge di Ohm (non uso la legge dei partitori)

"Spegnendo" $\hat{a}$ il circuito e' aperto, quindi R_2, R_3 ed e sono in serie.

2- risolvo l'equazione trovata:

$$i_1\left(1 + \frac{R_3}{R_3+R_2}\cdot\beta\right) = \frac{e}{R_2+R_3} \;;\quad i_1 = \frac{e}{R_2+R_3(1+\beta)} = \frac{1}{7}A$$

(ho trovato la grandezza pilota)

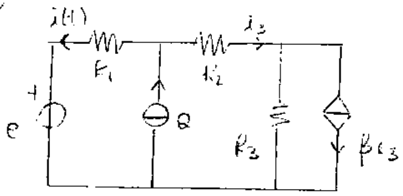
$$\hat{a} = \beta i_1 = \frac{2}{7}A$$

3- determino grandezza elettrica richiesta:

$$i(t) = i_1 + \beta i_1 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}A$$

OK

(2)



$i(t)$?

1- Utilizzando la sovrapposizione degli effetti, determino il pilota (i_3):

$$i_3 = i_3\Big|_e + i_3\Big|_a + i_3\Big|_{\beta i_3} = +\frac{e}{R_1+R_2+R_3} + \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}\cdot a + \frac{R_3}{R_3+R_2+R_1}\cdot\beta i_3$$

rimangono i circuiti aperti

legge di Ohm

2- Risolvo l'equazione per trovare i_3:

$$i_3 = \frac{e + R_1\cdot a + R_3\cdot\beta i_3}{R_1+R_2+R_3} = \frac{e + R_1\cdot a}{R_1+R_2+R_3(1-\beta)}$$

3- Calcolo $i(t)$:

$$i(t) = a - i_3 = a - \frac{e + R_1\cdot a}{R_1+R_2+R_3(1-\beta)}$$

• Calcolo v_p con il metodo del pilota:

v_x non è lo stesso di prima perché R_3 modificato il circuito!

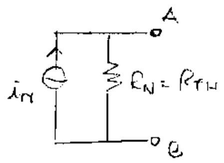
$$v_x = (R_1 // R_3)\cdot i_p - \frac{R_1}{R_1+R_3}\cdot \alpha v_x \quad ; \quad v_x = \frac{R_1 R_3 \cdot i_p}{R_1(1+\alpha)+R_3}$$

$$v_p = R_4 \cdot i_p + \hat{e} + v_x = R_4 i_p + \alpha v_x + v_x = R_4 \cdot i_p + (1+\alpha)\, v_x = R_4 i_p + (1+\alpha)\cdot \frac{R_1 R_3 \cdot i_p}{R_1(1+\alpha)+R_3}$$

$$v_p = \left\{R_4 + \left[R_1(1+\alpha) // R_3\right]\right\}\cdot i_p$$

$$R_{TH} = R_4 + \left[R_1(1+\alpha)//R_3\right] = \frac{v_p}{i_p}$$

(5) Sullo stesso esercizio di prima, determinare circuito equivalente di Norton:



• Calcolo i_N: (metodo del pilota)

$$v_x = a(R_1 // R_3 // R_4) - \frac{R_1}{R_1 + R_3//R_4}\cdot \alpha v_x$$

$$v_x = \frac{a(R_1//R_3//R_4)}{R_1(1+\alpha)+R_3//R_4}\cdot\left[R_1 + (R_3//R_4)\right]$$

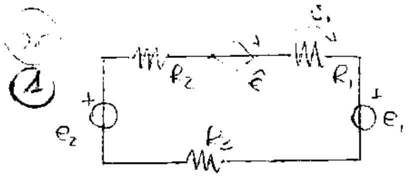
$$v_{R_4} = \hat{e} + v_x = (1+\alpha)v_x \quad \longrightarrow \quad i_N = -\frac{v_{R_4}}{R_4} = -\frac{(1+\alpha)}{R_4}\cdot v_x$$

Generatori pilotati:

$\hat{e} = \alpha v$ $\qquad$ $\hat{a} = \beta i$

$\hat{e} = r a$? $\qquad$ $\hat{a} = s v$?

(1)



$\hat{e} = \alpha v_1$

v_1 ?

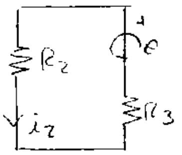
v_1' partitore di tensione (e_1)

$$v_1' = e_1 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

v_1'' partitore di tensione (e_2)

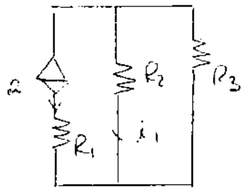
$$v_1'' = -e_2 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

v_1''' partitore di tensione $(\hat{e})$



Corrente erogata dal generatore:

$i_1' = \dfrac{e}{R_2+R_3}$



i_1'' Partitore di corrente

$i_1'' = -\hat{a} \cdot \dfrac{R_3}{R_2+R_3}$

R_1 e' in serie con $R_2 // R_3$ quindi non si tiene in considerazione!

$i_1 = i_1' + i_1'' = \dfrac{e}{R_2+R_3} - \hat{a}\,\dfrac{R_3}{R_2+R_3}$

$i_1 = \dfrac{e - \beta R_3 i_1}{R_2+R_3}$; $i_1(R_2+R_3) + \beta R_3 i_1 = e$

$i_1 = \dfrac{e}{R_2+R_3(1+\beta)}$ $\quad R_2+R_3(1+\beta) \neq 0$

i?

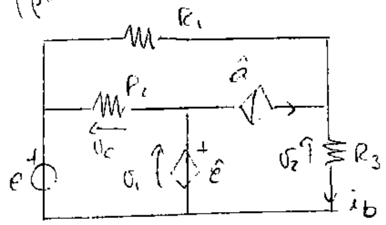
LKC al nodo a:

$i - i_1 - \hat{a} = 0$

$i = i_1 + \hat{a} = i_1 + \beta i_1 = (1+\beta)\dfrac{e}{R_2+R_3(1+\beta)}$

ok (ma ... bene)

6



$\hat{e} = r_m i_b$

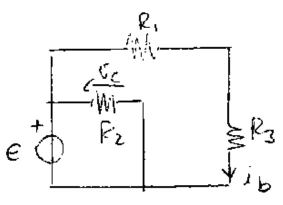
$\hat{a} = g_m v_c$

v_1, v_2?

- i_b, V_c pilota
- v_1, v_2 incognite

i_b, v_c?

I effetto:



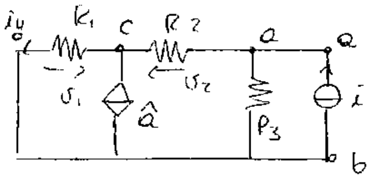
- v_c' LKT

$v_c' = e$

- i_b' legge di Ohm $\quad i_b' = \dfrac{e}{R_1+R_3} \rightarrow$ RICORDO!

Regola generale: ← guarda bene!!

1- Spegnere i generatori indipendenti
2- mettere un generatore di corrente incognito tra a e b
3- calcolare il pilota = pilota(i)
4- calcolare la tensione $v_{ab} = v_{ab}(i)$ } LKC, LKT, Ohm
5- $R_{TH} = \frac{v_{ab}(i)}{i}$

1/2) 

3) LKC al nodo a: $i_x = i_x(i)$

- $i + i_x - \frac{v_{ab}}{R_3} = 0$ $\frac{v_{ab}}{R_3}$ = corrente attraverso R_3

LKC al nodo c:

$\hat{a} - i_x - i_y = 0$ $i_y = \hat{a} - i_x = (\beta - 1) i_x$

LKT alla maglia esterna:

$-v_{ab} - v_2 + v_1 = 0$

$-v_{ab} - R_2 i_x + R_1 i_y = 0$; $v_{ab} = -R_2 i_x + R_1 (\beta - 1) i_x$

$v_{ab} = (R_1(\beta-1) - R_2)\, i_x$

$i + i_x - \frac{R_1(\beta-1) - R_2}{R_3} i_x = 0$

$(R_3 - R_1(\beta-1) + R_2)\, i_x = -i R_3$; $i_x = \frac{R_3}{R_1(\beta-1) - R_2 - R_3}$

LKT: maglia esterna

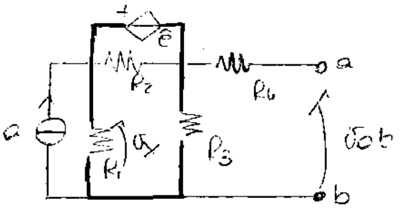
$$e + R_1 i_y - R_2 i_x - v_{ab} = 0$$

$$v_{ab} = e + R_1(\beta - 1) i_x - R_2 i_x$$

$$= e + [R_1(\beta-1) - R_2] i_x$$

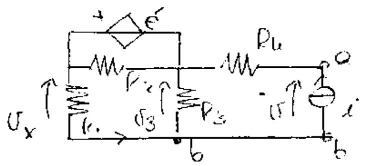
$$= e + [R_1(\beta-1) - R_2] \cdot \frac{v_{ab}}{R_3}$$

$$v_{ab} = \frac{e R_3}{R_3 + R_2 + R_1(1-\beta)}$$

② 

$\hat{e} = \alpha v_x$ Thevenin ai nodi a, b?

- Spegniamo la sorgente indipendente:



- Devo trovare il pilota, quindi v_x:

LKC: nodo b

$$-i + \frac{v_x}{R_1} + \frac{(\alpha+1)v_x}{R_3} \longrightarrow v_3 ?$$

LKT: $v_x + \hat{e} - v_3 = 0$

$v_x + \alpha v_x = v_3$; $v_3 = (\alpha + 1) v_x$

$\Downarrow$

$$-i + \frac{v_x}{R_1} + \frac{(\alpha+1)v_x}{R_3} = 0 \quad ; \quad [R_3 + (\alpha+1) R_1] v_x = R_1 R_3 i$$

$$v_x = \frac{R_1 R_3}{R_3 + (\alpha+1) R_1} \cdot i$$

LKT: maglia esterna

$$-v + R_4 \cdot i + \hat{e} + v_x = 0 \quad ; \quad -v + R_4 \cdot i + \alpha v_x + v_x = 0 \quad ; \quad v = R_4 \cdot i + (\alpha+1) v_x$$

$$v = R_4 \cdot i + \frac{(\alpha+1) R_1 R_3}{R_3 + (\alpha+1) R_1} \cdot i$$

$$R_{TH} = \frac{v}{i} = R_4 + \frac{(\alpha+1) R_1 R_3}{R_3 + (\alpha+1) R_1}$$

v_{ab} e' la tensione ai capi di R_3

LKC: nodo b

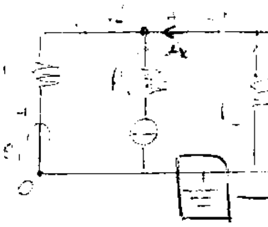
$$-a + \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{ab}}{R_3} = 0 \quad ; \quad v_x = R_1 \cdot a - \frac{v_{ab} R_1}{R_3}$$

Metodo dei nodi:

Identificare i nodi principali e sceglierne uno come riferimento.
Esprimere le correnti per mezzo dei potenziali di nodo.
Scriviamo la LKC a ciascun nodo, escluso quello di riferimento.

CASI PARTICOLARI:

quando c'è un generatore di tensione tra 2 nodi



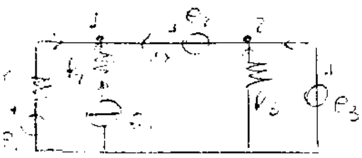
→ nodo di riferimento

→ metto una corrente incognita (i_x)
uso la tensione del generatore per trovare l'equazione aggiuntiva

$v_1 - v_2 = e_2$

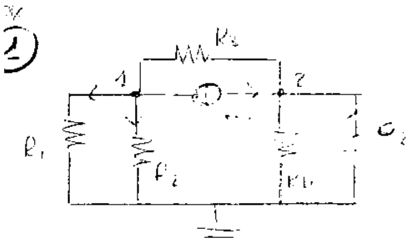
quando c'è un generatore di tensione tra un nodo e il nodo di riferimento.

↳ la tensione del nodo è fissata dal generatore



$v_2 = e_3$ (caso particolare del caso precedente)

1)



correnti uscenti → +
correnti entranti → −

nodo 1: $(v_0 = 0)$

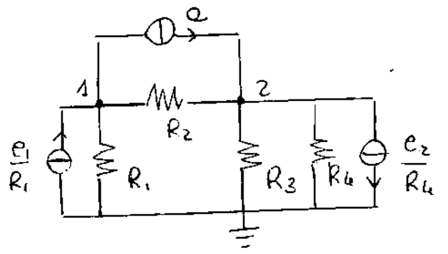
$$\frac{v_1 - v_0}{R_1} + \frac{v_1 - v_0}{R_2} + a_1 + \frac{v_1 - v_2}{R_3} = 0$$

nodo 2:

$$\frac{v_2 - v_1}{R_3} - a_1 + \frac{v_2 - v_0}{R_4} - a_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$G \cdot V = I$



nodo 1:

$$-\frac{e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + a = 0$$

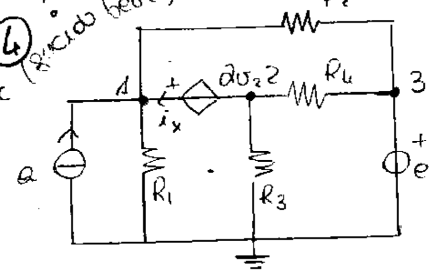
nodo 2:

$$\frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2}{R_4} + \frac{e_2}{R_4} - a + \frac{v_2 - v_1}{R_2} = 0$$

resistenza in comune ai 2 nodi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_1}{R_1} - a \\ a - \frac{e_2}{R_4} \end{pmatrix}$$

④ ? (piccolo bene) OK



Generatore dipendente:

v_2 è la grandezza pilota (tensione al nodo 2)

→ metto la corrente incognita nel ramo che contiene il generatore dipendente.

nodo 1:

$$-a + \frac{v_1}{R_1} - i_x + \frac{v_1 - v_3}{R_2} = 0$$

nodo 2:

$$i_x + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_3}{R_4} = 0$$

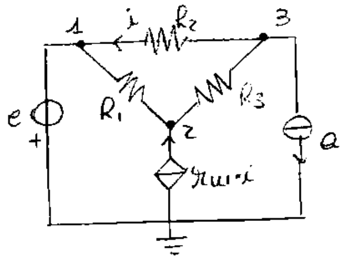
nodo 3:

$v_3 = e$!!! (perché c'è il generatore di tensione)

Equazione aggiuntiva: → forma matriciale

$$v_1 - v_2 = \alpha v_2 \implies v_1 = (\alpha + 1) v_2$$

⑤ OK Esame 9/03/2011



nodo 1:

$v_1 = -e$

nodo 2:

$$-r_m \cdot i + \frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0$$

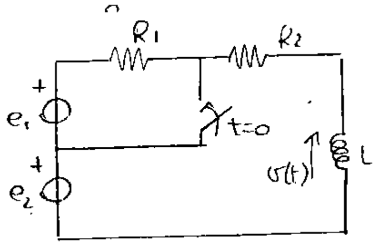
$$-r_m \cdot \frac{v_2 - v_1}{R_2}$$

nodo 3:

$$\frac{v_3 - v_1}{R_2} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} + a = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_2} & \\ 0 & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(\alpha+1) & 0 & 0 & i_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)



$v(t)$?

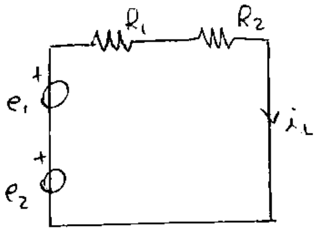
Al tempo $t=0$ l'interruttore si chiude

$$v_C(t) = [v_C(0) - v_C(+\infty)] \cdot e^{-t/\tau} + v_C(+\infty)$$

$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(+\infty)] \cdot e^{-t/\tau} + i_L(+\infty)$$

- Per prima cosa, trovo $i_L(t)$: (variabile di stato dell'induttore)
- studio il comportamento di regime: ($t<0$, $t \to +\infty$)

$t<0$:

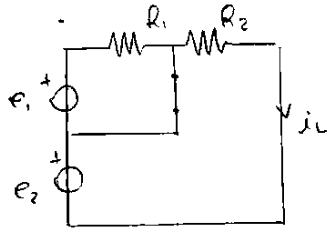


Per la legge di Ohm:

$$i_L(t<0) = \frac{e_1+e_2}{R_1+R_2}$$

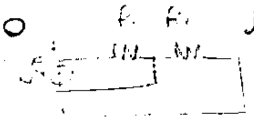
Fino a quando non tocco l'interruttore $i_L = \frac{e_1+e_2}{R_1+R_2}$

$t \to \infty$:



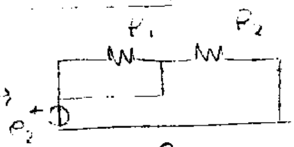
Utilizzo il principio di sovrapposizione degli effetti:

$i_L(+\infty)\Big|_{\substack{e_1 \neq 0 \\ e_2 = 0}} = 0$



$i_L = 0$ perche' c'e' il parallelo con il corto circuito.

$i_L(+\infty)\Big|_{\substack{e_1 = 0 \\ e_2 \neq 0}} \longrightarrow$

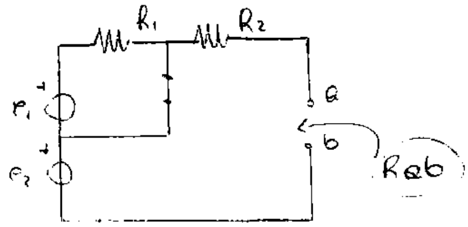


Legge di Ohm: $i_L(+\infty) = \frac{e_2}{R_2}$

Somma contributi: $i_L(+\infty) = i_L'(+\infty) + i_L''(+\infty) = \frac{e_2}{R_2}$

- Calcolo la costante di tempo τ:

$\tau = \frac{L}{R}$ (abbiamo un circuito con un induttore)



$R = R_{ab}$