NUMERO : 230

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Rubinetto

MATERIA : Analisi I, Prof. Tilli

04/10/2011 , I NUMERI REALI

Come rappresentare i numeri reali su una retta
1) Stabilire l'ORIGINE
2) Stabilire l'UNITÀ
3) Stabilire il verso (ORIENTAMENTO)

a) I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

b) I numeri Interi Relativi $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

c) I numeri Razionali $\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \dots\}$

- Si ottengono mediante la divisione in parti uguali del segmento Unità

> DEFINIZIONE 1: Il numero Razionale
>
> $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

⚠ la rappresentazione di un numero razionale non è unica, per convenzione, tuttavia si "riduce ai minimi termini" la frazione ["In gergo tecnico": p e q sono PRIMI FRA LORO]

d) I numeri IRRAZIONALI $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}, \pi, \dots\}$

> DIMOSTR/TEOREMA 1: I numeri irrazionali - ASSURDO
>
> Hp:
> $p, q \in \mathbb{Z}$
> $q \neq 0$
> p e q sono PRIMI FRA LORO (non hanno divisori comuni)
>
> Th:
> $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$
>
> Dim:
> Si suppone che $\frac{p^2}{q^2} = 2$
> $\Downarrow$
> $p^2 = 2q^2$
> $\Downarrow$
> p è un numero pari, ovvero $p = 2k$, per un certo $k \in \mathbb{Z}$
> $\Downarrow$
> $4k^2 = 2q^2 \rightarrow 2k^2 = q^2$
> $\Downarrow$
> q è un numero pari a sua volta.
> $\Downarrow$
> ASSURDO: infatti p e q sono primi fra loro c.v.d.

05/10/2011 (esercitazione) RICHIAMI SU INSIEMI, EQUAZIONI e DISEQUAZIONI

Simbologia

$p \Rightarrow q$ implica	$\Longleftrightarrow$ se e solo se	$a \vee b$: o a, o b, o entrambe
$a \wedge b$ a e b: entrambe	/ tale che	$\neg$: negazione

05/10/2011 (esercitazione) • RICHIAMI al liceo.

• DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

EQ. di II GRADO: Somma e Prodotto di x_1 e x_2

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Scomposizione di Somma di Cubi

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

PROPRIETÀ del Valore Assoluto

1. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

• Per gli Indici DISPARI → Nessun problema (si eleva solo)

• Per TUTTI gli Indici PARI si procede nello STESSO MODO.

1. $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\cap \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g^2(x))^2 \end{cases}$$

2. $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\cup \begin{cases} \cap \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \cap \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g^2(x))^2 \end{cases} \end{cases}$$

3. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

$$\cap \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \\ (f^2(x))^2 > (g(x))^2 \end{cases}$$

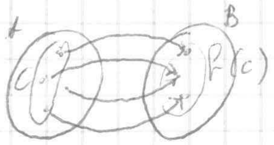
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 54

07/10/2011

esempi:

~~[illegible]~~ a) Controimmagine dell'immagine

$$f^{-1}(f(C)) \supseteq C$$



b) Immagine della Controimmagine

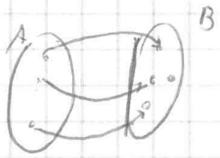
$$f(f^{-1}(D)) \supseteq D$$

11/10/2011 Funzioni Iniettive e Suriettive

a) funzione iniettiva

$f: A \to B$

DEFINIZIONE 10: Iniettiva
$\forall a, b \in A, \quad a \neq b \Rightarrow f(a)\ f(b)$

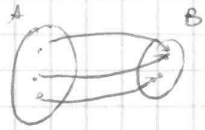


ogni punto dell'immagine $(y \in B)$ ha una sola controimmagine

b) funzione Suriettiva

$f\ A \to B$

DEFINIZIONE 11: SURIETTIVA
$Im(f) = B$



c) funzione Biunivoca, Bigettiva, Biettiva

$f\ A \to B$

quando è CONTEMPORANEAMENTE INIETTIVA e SURIETTIVA.

+ CENNI DI LOGICA

$p \Rightarrow q$ equivale a dire $\sim p \vee q$

Se piove porto l'ombrello

Non piove, ma posso portare comunque l'ombrello

$\sim(p \Rightarrow q) = \sim(\sim p \vee q) = \sim(\sim p) \wedge \sim q = p \wedge \sim q$: piove, ma Non devo portare l'ombrello

Tabella di verità

$p \Rightarrow q$

$\sim p \vee q$

p \ q	V	F
V	V	F
F	V	V

negare $p \Rightarrow q$ = invertire V con F:

$\sim(p \Rightarrow q)$

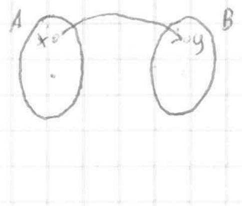
$p \wedge \sim q$

p \ q	V	F
V	F	V
F	F	F

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 54

21/10/2011

Dimostrazione 3 (continua)



considero un $y \in B$

dato che f è SURIETTIVA, tutte gli y possono avere una controimmagine in A

$\exists x \in A \,/\, f(x) = y$

il punto x è unico poiché la funzione è INIETTIVA

dunque CREO $g(y) = x$

$\Rightarrow f(g(y)) = y$

prendo $x \in A$

considero $z \in B \,/\, z = f(x)$

$g(z)$ è l'unica controimmagine (tramite f) del punto z

$\Rightarrow g(z) = x$

ma dato che $z = f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x$ c.v.d.

14/11/2011 GRAFICO di FUNZIONE, MAGGIORANTE, MINORANTE

DEFINIZIONE 13: Grafico di una funzione

Sia $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$

Il GRAFICO di f è il sottoinsieme del piano cartesiano:

$\{(x,y) \mid x \in A \wedge y = f(x)\}$

DEFINIZIONE 14: Piano Cartesiano

il piano cartesiano è l'insieme:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

DEFINIZIONI 15 e 16: Maggiorante e Minorante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e $M \in \mathbb{R}$, e $m \in \mathbb{R}$

M è il maggiorante dell'insieme A se

$\forall x \in A, \; x \leq M$

m è il minorante dell'insieme A se

$\forall x \in A, \; x \geq m$

7

18/10/2011 : LIMITI di SUCCESSIONI

DEFINIZIONE 20: Successione

Una Successione a_n è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

esempi di Successioni e di limiti

$a_n = \frac{1}{n}$ lim: tende a 0

$a_n = n^2$ lim: tende a $+\infty$

$a_n = (-1)^n$ NON AMMETTE LIMITE ⚠

$a_n = \sin(n)$ " " " ⚠

$a_n = \frac{n}{n+1}$ lim: tende a 1

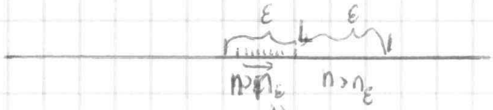
DEFINIZIONE 21: LIMITE $\lim_{n\to\infty} = L$ di una Successione

Sia a_n una successione e sia L un numero reale. Si dice che "a_n tende ad L"

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Se vale la seguente Condizione

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \; n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon : |a_n - L| < \varepsilon$$



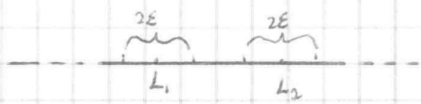
$(a_n - L < \varepsilon)$

Se n è $>$ di n_ε, allora $|a_n - L|$ è $< \varepsilon$

~~TEOREMA~~

DIMOSTRAZIONE 6: Teorema dell'UNICITÀ del LIMITE

Teorema: il limite L di una successione $\{a_n\}$ se esiste è Unico



pongo $\varepsilon < \frac{L_1 - L_2}{2}$

19/10/2011 FUNZIONI COMPOSTE, LIMITI (esercitazione)

DEFINIZIONE 22: FUNZIONE Composta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

PROPRIETÀ della FUNZIONE COMPOSTA

$(f \circ g) \neq g \circ f$ ⚠ NON VALE la PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$ Vale la Proprietà ASSOCIATIVA

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$$ ⚠

21/10/2011

+ L'ALGEBRA NEI LIMITI

se abbiamo: $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = L_b$

ecco le proprietà valide (e anche così)

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_a + L_b$ VERA SE:
- entrambi i limiti sono FINITI
- Un limite è finito, l'altro è INFINITO
- Entrambi SONO INFINITI con lo STESSO SEGNO

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_a \cdot L_b$ VERA SE:
- entrambi i limiti sono finiti
- entrambi i limiti sono infiniti
- Un limite è INFINITO, l'altro è FINITO MA $\neq 0$ /!\

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$ VERA SE:
- Entrambi Sono Finiti
- Uno è finito, l'altro infinito.

DEFINIZIONE 24/24 bis: il numero e

24) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

24 bis) considero $b_1 = 1 + \frac{1}{1!}$, $b_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$, $b_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$ ecc.

in generale: $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!}$

Allora: $\lim_{n\to+\infty} b_n = e$

- importante: $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

DEFINIZIONE 25: LIMITE FINITO

sia $x_0 \in \mathbb{R}$, e $f(x)$ una funzione definita (almeno) in un intervallo che contiene x_0, tranne eventualmente x_0

allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid \forall x, \; 0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

ovvero $x \neq x_0$

25/10/2011

DEFINIZIONE 26: LIMITE FINITO (che tende a infinito)

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall A \in \mathbb{R}, \; \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

26/10/2011
(esercitazione)

LIMITI NOTEVOLI ⚠

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \quad (a>0) \Rightarrow$ 3bis) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$

5) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \Rightarrow$ 5bis) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

FORMULE : DUPLICAZIONE SENO E COSENO

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

PROSTAFERESI:

$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \sin q \cos p$

$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q$

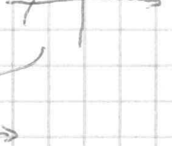
28/10/2011 Limiti e Discontinuità

+DISCONTINUITÀ

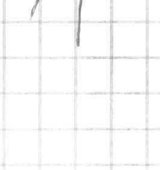
I) primo specie o eliminabile (ESTENSIONE PER CONTINUITÀ)

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x)$



II) SALTO: $\lim_{x\to x_0^-} \neq \lim_{x\to x_0^+} \neq \infty$



04/11/2011 FUNZIONI MONOTONE, 2 CARABINIERI, TEOREMA DEGLI ZERI

DEFINIZIONI 30 a/b/c/d/e FUNZIONI MONOTONE

Sia f definita su un intervallo I allora f si dice

a) Crescente su I se $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b) Strettamente Crescente su I se $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

c) Decrescente su I se $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

d) Strettamente Decrescente su I se $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

e) Monotona se è crescente e decrescente

DIMOSTRA/TEOREMA 7: Teorema su f crescente e decrescente

Sia $f:(a;b) \to \mathbb{R}$, una funzione MONOTONA

allora i due limiti $\lim_{x \to a^+}$ e $\lim_{x \to b^-}$ $\exists$, e sono rispettivamente

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf \{f(x) / x \in (a,b)\}$

$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup \{f(x) / x \in (a,b)\}$

se $f(x)$ è CRESCENTE, viceversa se $f(x)$ è Decrescente

DIMOSTRAZIONE 8: Teorema della DISCONTINUITÀ su f MONOTONA

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ MONOTONA. Allora in ogni punto $x_0 \in (a,b)$ f è CONTINUA in x_0, oppure f ha una discontinuità di tipo SALTO in x_0

DIMOSTRAZIONE:

prendo $x_0 \in (a,b)$. i due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ESISTONO perché f è Monotona sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b)

I limiti sono FINITI.

il n° $f(x_0)$ è un MAGGIORANTE dell'insieme $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ ed un ~~del~~ MINORANTE di $\{f(x) | x \in (x_0, b)\}$

dunque: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \{f(x) | x \in (a, x_0)\} \leq f(x_0)$

e: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \{f(x) | x \in (x_0, b)\} \geq f(x_0)$

24/11/2011

DIMOSTR/TEOREMA 10 a/b: Teorema della Permanenza del segno

sia f definita in un intorno I_{x_0} di x_0, tranne eventualmente in x_0

a) se $f(x) \geq l$, $\forall x \in I_{x_0}$ $x \neq x_0$

allora il limite $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste, ed $L \geq l$

b) se il limite $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed $L \geq l$, allora

$\exists$ un intorno I_{x_0} di x_0 dove $f(x) > l$.

08/11/2011: Permanenza del Segno e LANDAU

DIMOSTR/TEOREMA 11: Teorema dei VALori Intermedi

Sia I un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ continua.
Se $y_1 \neq y_2$ sono due valori assunti di f, allora QUALUNQUE valore y compreso fra y_1 e y_2 è ASSUNTO da f.

in simboli: se $f(x_1) = y_1 < f(x_2) = y_2$ allora $\forall y \in (y_1, y_2)$ $\exists x \in I \mid f(x) = y$

Dim

poniamo: $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, e supponiamo che $x_1 < x_2$

considero un qualunque y intermedio fra y_1 e y_2

applico il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y$ nell'I $[x_1, x_2]$,

considerato che g_1 e g_2 sono DISCORDI $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in [x_1, x_2] \mid g(x) = 0 \iff f(x) = y$

DEFINIZIONI 3 a/b: Simboli di LANDAU

Siano f e g due funzioni definite in un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = \pm\infty$), tranne eventualmente x_0.

a) $f \sim g$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

b) $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

15/11/2011

REGOLE DI DERIVAZIONE

$$\left(a f(x) + b g(x)\right)' = a f'(x) + b g'(x)$$

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) g(x) + g'(x) f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(x) \cdot g'(x)$$

18/11/2011

Alcune proprietà

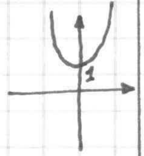
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

SENO/COSENO IPERBOLICI

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



la funzione f è derivabile in x_0 se

$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$: ed entrambe NON SONO ∞

$f'(x_0) = \infty$: Non è derivabile.

DERIVATE delle FUNZIONI ELEMENTARI

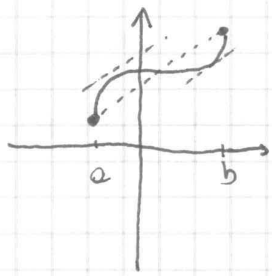
$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ *
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ o $1+\tan^2 x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\mathrm{Arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$

22/11/2011

DIMOSTR/TEOREMA 15: Teorema di LAGRANGE

se f è CONTINUA su $[a,b]$ e DERIVABILE in (a,b), allora
$\exists\ x_0 \in [a,b]$ / $\rightarrow$ $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ovvero l'm della retta passante per A e B



Dim

Considero la funzione: $g(x) = f(x) - \underbrace{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{la retta che congiunge A con B}}$

allora $g(a) = f(a) - \cancel{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}(\cancel{a-a})^{0} = f(a)$

$g(b) = f(b) - \cancel{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}(\cancel{b-a}) = f(a)$

dunque $g(b) = g(a) \Rightarrow$ VALE il teorema di ROLLE

$\exists\ x_0 \in (a,b)\ /\ g'(x_0) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{g'(x_0)}_{=0} = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c.v.d.

25/11/2011

DIMOSTR/TEOREMA 16: MONOTONIA e DERIVATA I

Se $f\ (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ è DERIVABILE,

a) se f è crescente, allora $f' \geq 0\ \forall x \in (a,b)$
b) se $f' \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, allora f è crescente su (a,b)
c) se $f' > 0\ \forall x \in (a,b)$, allora f è strettamente crescente su (a,b)

in simboli
f (crescente su (a,b) e derivabile $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
f strett. " " " " $\Leftarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dim.
1) punti b e c:
prendiamo 2 punti: $a < x_1 < x_2 < b$

e considero l'intervallo $[x_1, x_2] \subset (a,b)$

$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c)$, per un opportuno $c\ (x_1, x_2)$ [Th di Lagrange]

nel caso (b): $f' \geq 0 \rightarrow f'(c) \geq 0$ e quindi
$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{\underbrace{x_1-x}_{\text{sempre }+}} \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$ c.v.d. ← f è crescente

↓

25/11/2011

+ Derivate seconde, terze, quarte...

$f = e^x \quad f' = e^x \quad f'' = e^x \quad \dots \quad f^{(n)} = e^x$

$f(x) = e^{2x} \quad f'(x) = 2e^{2x} \quad f''(x) = 4e^{2x} \quad f'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$

$f(x) = x^n$ ↗ se $J \leq n \Rightarrow f^{(J)}(x) = n(n-1)\cdots(n-J+1)\, x^{n-J}$
↘ $\forall J > n \Rightarrow f^{(J)}(x) = 0$

+ Massimi e Minimi, Relativi ed Assoluti

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$

Si dice che x_0 è il "punto di ...":

a) "Minimo locale" per $f \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I'$ dove $I' \subset I$ è un opportuno intorno di x_0
b) "Massimo locale" per $f \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I'$ dove $I' \subset I$ è un opportuno intorno di x_0

c) "Minimo Assoluto" per $f \Leftrightarrow f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in I$
d) "Massimo Assoluto" per $f \Leftrightarrow f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in I$

DIMOSTR/~~TEOREMA~~ 19: Derivata SECONDA, massimi e Minimi

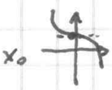
Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA e DERIVABILE due volte, con f'' CONTINUA

allora, i punti di Minimo e Massimo relativo vanno cercati fra quelli con $f'(x) = 0$ (FERMAT)

considero questi punti $x_0 \,/\, f'(x_0) = 0$

a) se $f''(x_0) > 0$, x_0 è un MINIMO relativo 

b) se $f''(x_0) < 0$, x_0 è un MASSIMO relativo 

c) se $f''(x_0) = 0$, NON SI HANNO informazioni riguardo x_0  

DIM:

a) se $f''(x_0) > 0$, allora, per il TEOREMA della PERMANENZA del SEGNO

$f''(x) > 0$ per tutto l'intorno di x_0, quindi $f'(x_0)$ è strettamente < 0 (considerando che $f'(x_0) = 0$) prima di x_0 e > 0 dopo $x_0 \Rightarrow f$ è ↘ prima di x_0 e ↗ dopo di x_0

29/11/2011

Teorema di DE L'HOPITAL

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad f$ e g derivabili attorno a x_0 (reale o $\pm\infty$), tranne eventualmente x_0

se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \quad (L = 0,\ L = \pm\infty)$

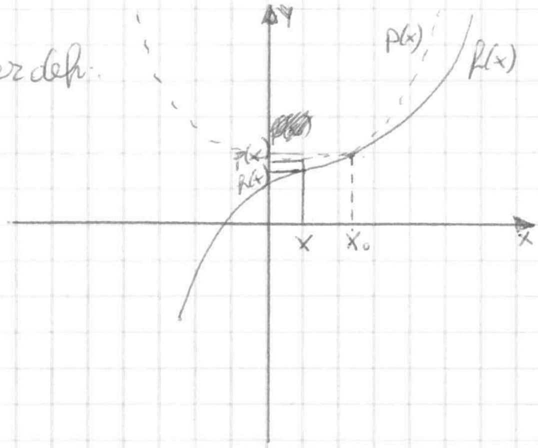
se esiste il $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, e coincidono.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 54

02/12/2011

SVILUPPI di TAYLOR e MCLAURIN

- ho una $f(x)$ ed un punto x_0, definita almeno nell'intorno di x_0, e voglio trovare un POLINOMIO $p(x)$ che approssimi la curva in quel punto



- l'errore deve essere $o((x-x_0)^k)$, ovvero per def.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-f(x)}{(x-x_0)^k} = 0$$

quindi l'errore è detto di ordine k.

CASO 0: $k=0$

l'errore deve essere $o((x-x_0)^0) \Rightarrow o(1)$

$$\lim_{x\to x_0} p(x)-f(x) = o((x-x_0)^k) = o(1) = 0$$

se f è continua $\Rightarrow$ basta $p(x_0)=f(x_0)$, e dunque basterà: $p(x_0)=f(x_0)$ come curva.

CASO 1: $k=1$

nel limite: $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-f(x)}{(x-x_0)} = \frac{+\infty}{-\infty}$, non va bene. APPLICO DEL'HOPITAL (se possibile)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p'(x)-f'(x)}{1} = 0$$ perché il limite valga 0 $\Rightarrow p'(x)=f'(x)$

CASO 2: $k=2$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-f(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{p'(x)-f'(x)}{2(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{p''(x)-f''(x)}{2} = 0$$

$\rightarrow p''(x)=f''(x)$.

02/12/2011

SOMMATORIA: $\sum_{i=0}^{k}$ DA A, ovvero una somma dal valore $i=0$, a k.

SVILUPPI DI TAYLOR-MCLAURIN NOTEVOLI $(X_0=0)$

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+o(x^k)$

$\log(1+x) = (0+)x-\frac{x^2}{2}+\dots+\underbrace{(-1)^{k-1}}_{\text{ovvero + se n dispari, - se n pari}}\frac{x^k}{k}+o(x^k)$

$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2m+2})$

$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$

$\sinh(x) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2m+2})$

$\cosh(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$

$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$

$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4+\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

$\tan(x) = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$

$\arcsin(x) = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

nota: $C^k(I)$: vuol dire che f è derivabile k volte, e $f^{(k)}$ è CONTINUA su I

$\Rightarrow C^0(I)$: continua su I ; $C^\infty(I)$: derivabile infinite volte.

TIPOLOGIA di ESERCIZI

a) L'ORDINE di INFINITESIMO rispetto a (x)

modo 1: SVILUPPO LA FUNZIONE con T/McL, finché

$\frac{P_k(x)}{x^k} \neq 0$, dunque $f(x)$ è un infinitesimo di ordine k rispetto a x

b) modo 2: SVILUPPO i fattori elementari della funzione, finché $\frac{h(x)}{(x^k)} \neq 0 \Rightarrow$ ~~moltiplicati~~ $\Rightarrow$ Torno alla f originale, sostituendo gli sviluppi individuati $\Rightarrow$ calcolo l'ordine di infinitesimo.

09/02/2011

INTEGRALI INDEFINITI

DEFINIZIONE 35: integrale INDEFINITO

Data una funzione $f(x)$, una qualunque funzione $F(x)$ derivabile, tale che $F'(x) = f(x)$, si chiama PRIMITIVA di $f(x)$.

La generica PRIMITIVA di $f(x)$ si indica $\int f(x)\,dx$, e si chiama INTEGRALE INDEFINITO di $f(x)$. Se $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$, allora

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

INTEGRALI INDEFINITI PRINCIPALI

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\int dx = \int 1\,dx = x + c$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

$$\int \sin(ax)\,dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + c$$

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int 0\,dx = c$$

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + c$$

$$\int \frac{1\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

RAZIONALI:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 54

13/12/2011

a.1): $\int \frac{1}{x^2+ax+b}$. 1: COMPLETO IL QUADRATO a denominatore
2: Risolvo.

a.2): $\int \frac{A}{Bx+C+D}$: 1: Tiro fuori A
2: raccolgo B a denominatore
3: Completo il quadrato
4: Risolvo

b) $\int \frac{Ax+B}{Cx^2+Dx+E}$ 1: Tiro fuori A e C in modo da avere sopra la derivata di quello che c'è sotto (⚠ $(x^2)'=2x$!!)
· Magari aggiungendo e togliendo qualcosa!
2: Risolvo come al solito.

Integrali in cui posso usare sin, cos, tan.

es. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$: con le Radici posso operare le sostituzioni $x=\sin t$, $x=\cos t$, ecc.
poi posso usare I COGNUGATI, o qualche simili
⚠ , Occhio alla derivata nella sostituzione

SOSTITUZIONI UTILI (⚠ FUNZIONI RAZIONALI)

se ho:	sostituisco con:
$\sqrt[p]{x-a}$	$t=\sqrt[p]{x-a} \rightarrow x=a+t^p$ $\rightarrow dx=pt^{p-1}\,dt$
e^{ax}	$t=e^{ax} \rightarrow x=\frac{1}{a}\ln t$ $\rightarrow dx=\frac{1}{at}\,dt$
$\sin x$, $\cos x$	$t=\tan\frac{x}{2}$ $\quad \sin x \ \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$ $x=2\arctan t$
$\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$	$t=\tan x$ $\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$ $dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt$ $\quad x=\arctan t)$

31

16/12/2011

DEFINIZIONE 36: INTEGRALE di REIMANN

data $f[a,b] \to \mathbb{R}$, considero I^- e I^+ come sopra.

SE $I^- = I^+$ e sono entrambi FINITI, si dice che f è INTEGRABILE su $[a,b]$ e si definisce

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} I^+ \; (= I^-)$$

Se $b<a$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

DIMOSTRA/TEOREMA 24: TEOREMI sugli INTEGRALI DEFINITI

- Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti su $[a,b]$ (ovvero se f ha un n° definito di discontinuità di TIPO SALTO su $[a,b]$), allora f è integrabile

$\Rightarrow$ Se $f[a,b]$ è MONOTONA, allora f è integrabile su $[a,b]$

DIMOSTRA/TEOREMA 24 b: altri TEOREMI sugli INTEGRALI DEFINITI

Siano f, g integrabili su $[a,b]$. Allora

1) la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ [con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$] è integrabile e

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

2) la funzione $|f(x)|$ è integrabile e

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| = \int_a^b |f|\,dx$$

3) Se $c \in [a,b]$, allora f è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) $$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

16/12/2011

applicaz. del th precedente

Sia $G(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di f su (a,b) (cioè G derivabile su (a,b) e $G' = f$)

per calcolare $\int_c^d f(t)\,dt$, con $a<c \leq d<b$

$$F(d) = \int_{x_0}^{d} f(t)\,dt \quad e \quad F(c) = \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt$$

$$F_d - F_c = \int_{x_0}^{d} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{d} f(t)\,dt + \int_{c}^{x_0} f(t)\,dt = \int_{c}^{d} f(t)\,dt$$

quindi

$$\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) \quad , \quad e \quad F(d) - F(c) = G(d) - G(c), \text{ poiché}$$

$$F(x) = G(x) + k$$

Se G è una qualunque primitiva di f su (a,b), allora

$$\int_c^d f(t)\,dt = G(d) - G(c)$$

⚠ CAMBIAMENTO di VARIABILE nei $\int$ DEFINITI

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

CAMBIO VAR

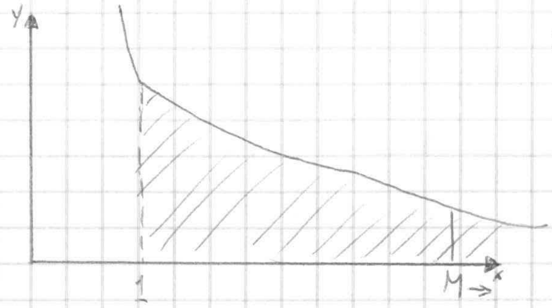
$t = g(x) \qquad x = g^{-1}(t)$

$dt = g'(x)\,dx$

NON PREOCCUPARSI dei SEGNI ($g'(x)$ aggiusta il segno: se crescente non cambia / se decrescente lo aggiusta).

10/01/2012

INTEGRALI IMPROPRI



1) INTERVALLI NON FINITI

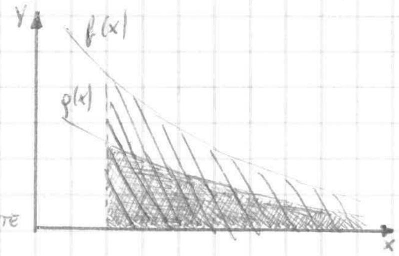
a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \overset{def}{=} \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to +\infty} (\ln M - \ln 1) = +\infty$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \overset{def}{=} \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \left(-\frac{1}{M} + 1\right) = 1$

l'area sottesa da questi intervalli può essere finita o infinita.

10/01/2012

+ I CRITERI per gli INTEGRALI IMPROPRI



1) CONFRONTO:

Se $f(x) \geq g(x) \geq 0$

a) se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è CONVERGENTE $\rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è CONVERGENTE

b) se $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è DIVERGENTE $\rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è DIVERGENTE

2) INDETERMINAZIONE

Se $f(x) \geq 0$ (oppure ≤ 0), allora QUALUNQUE suo integrale improprio è o CONVERGENTE oppure DIVERGENTE (non è MAI INDETERMINATO)

3) CONFRONTO ASINTOTICO

Se $f(x)$ e $g(x) \geq 0$ e $f(x) \sim g(x)$ $\left[\text{ovvero } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\right]$

allora i 2 integrali impropri $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ sono <u>entrambi</u> DIVERGENTI, o <u>entrambi</u> CONVERGENTI

13/01/2012 NUMERI COMPLESSI

DEFINIZIONE 38: NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso è una coppia ordinata di 2 numeri reali

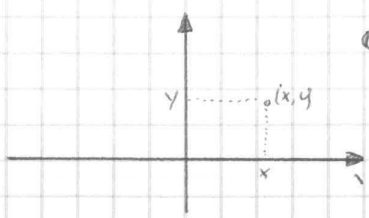
$(x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$

L'insieme di tutti i numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

• si può identificare $\mathbb{C}$ con il PIANO CARTESIANO

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 54

13/01/2012

dato il numero $w = x + yi$, posso definire le seguenti funzioni:

$x = Re(w)$ $\qquad\qquad$ $y = Im(w)$

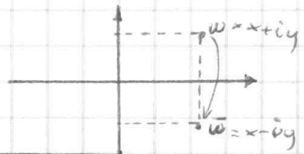
+ DIVISIONE FRA NUMERI COMPLESSI: metodo per ricordarle

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

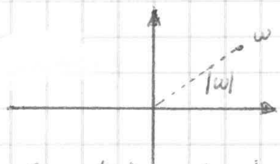
moltiplicando sopra e sotto per il coniugato del denominatore, ottengo una semplificazione dei calcoli

> DEFINIZIONE 41: Coniugato di un numero Complesso
>
> Per ogni numero complesso $w = x + iy$
>
> si chiama CONIUGATO di w e si indica con $\bar{w}$ il numero complesso
>
> $\bar{w} = x - iy$

la rappresentazione geometrica del coniugato:



> DEFINIZIONE 42: modulo di un numero complesso
>
> per ogni $w = x+iy$ si chiama "modulo di w" il numero REALE (non negativo):
>
> $$|w| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{w \cdot \bar{w}}$$



Geometricamente $|w|$ rappresenta la distanza di w dall'origine

- n.b: nel caso di un numero reale, cioè se $w = (x, 0)$

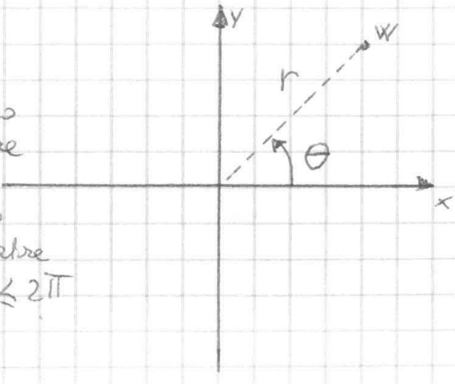
$$|w| = \sqrt{x^2} = |x|$$

- DIVISIONE USANDO I CONIUGATI e i moduli:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$$

quindi, dividere per z vuol dire moltiplicare per $\bar{z}$ e poi dividere per $|z|^2$

+ LE COORDINATE POLARI



per identificare un punto $w = (x, y)$ nel piano cartesiano (oppure $w = x + iy$), si possono usare le sue coordinate polari r e θ, dove $r \geq 0$ è la distanza di w dall'origine e θ è l'angolo formato da w misurato in senso antiorario a partire dalla semiretta reale positiva. quindi $0 \leq \theta \leq 2\pi$

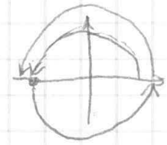
13/01/2012

$z = w^3$. quali ... i possibili risultati?

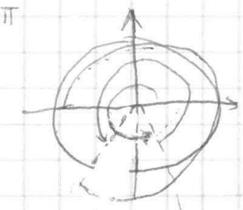
raggio $= 1$.

$\alpha + \alpha + \alpha = \theta$. il primo ad andare bene è $\alpha = \frac{\pi}{3}$

il secondo è $\alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}$



il terzo è $\alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{4}{3}\pi$



17/01/2012

SCRITTURA DI un numero $w \in C$ in COORDINATE POLARI
$w = R \cdot e^{i\theta}$

RADICE N-ESIMA

- Ogni numero $w \in C$ $(w \neq 0)$, ammette esattamente n radici n-esime distinte $(n = 2, 3, 4)$

+ COME TROVARE le n RADICI n-esime di $w \in \mathbb{C}$

1) Scrivo il numero w in COORDINATE POLARI, cioè

$w = R e^{i\theta}$ $\qquad R \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

dove $R = |w| = \sqrt{x^2+y^2}$

e $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ $\left[\text{in quanto } \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right]$

2) Trovo tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ | sono radici n-esime

$z^n = w$

3) Scrivo z in COORDINATE POLARI

$z = r \cdot e^{i\alpha}$ $\qquad r \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$

4) Scrivo chi è z^n:

$z^n = r^n \cdot e^{in\alpha}$

e lo pongo uguale a w.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 54

17/01/2012

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE 42: EQ. DIFFERENZIALE di ordine K

Si chiama equazione differenziale di ordine $K \geq 1$ una equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, e che coinvolge $y(x)$ e le sue derivate fino all'ordine k

esempi di equazioni differenziali del I° ORDINE

- $y' = \sin x$ (coincide con la ricerca della primitiva di $\sin x$)
- $y' = y$ (esempi di soluzioni: $y = e^x$, $y = 3e^x$, $y = -e^x$)
- $y' = y+1$ (esempi di soluzioni $y = -1$, $y = -1+e^x$)

esempi di equazioni differenziali del II ORDINE

- $y'' = 1 \Rightarrow y' = x + c \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + cx + k$
- $y'' = y$ (esempi di soluzione: $y = e^x$, $y = 0$, $y = e^{-x}$)
- $y'' = e^x y' + (\sin x)(y + \log x) + 1$
- $y'' = e^y \cdot x^2$

DEFINIZIONE 43: SOLUZIONE di un'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Si dice che "la funzione $y(x)$ risolve una data equazione differenziale di ordine k su un intervallo I"

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 1)\ y \text{ è una funzione derivabile almeno } k \text{ volte su } I \\ 2)\ \text{Inserendo } y(x) \text{ nella E.D, questa risulta verificata } \forall x \in I \end{cases}$$

es. $y' = \log(x)(y+1)$

se dico "$y(x) = -1$ è una soluzione su $I = \mathbb{R}$" $\rightarrow$ FALSO (ad es. per $x = -1$, il $\log x \nexists$)
se dico "$y(x) = -1$ è una soluzione su $I = (2,3)$" $\rightarrow$ VERO

20/01/2012

Equazioni DIFFERENZIALI
- LINEARI: se y ed ogni sua derivata compaiono nell'equazione moltiplicati per un coefficiente
  es. $2y'' - x \cdot y' + e^x y = 1 + x^2$
- NON LINEARI: es. $y'' + y \cdot y' + x = 0$, $y + e^y = 1$

20/01/2012

2) Se $g(y_0)$ è $\neq 0$, per il teorema della permanenza del segno, la g non sarà nulla anche in un certo intorno di y_0

quindi si divide per $g(y)$:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Sia ora $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ in un intorno di x_0 e $G(x)$ una primitiva di $\frac{1}{g}$ in un intorno di y_0. → Allora $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = \frac{1}{g}$, quindi

$$\left[G(y(x))\right]' = G'(y(x)) \cdot y'(x) = \underbrace{\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)}_{\text{la nostra eq. Diff.}} = F'(x)$$

quindi

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

per una certa costante C.

Ma dato che $G' \neq 0$ nell'intorno considerato, G è invertibile in questo intorno

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = G^{-1}(F(x) + C)}$$

RIASSUNTO

1) Trovo le SOLUZIONI COSTANTI (ovvero gli zeri di $g(y)$) $\Rightarrow y(x) = y_0$

2) Divido l'equazione per g ed integro, ottenendo $G(y) = F(x) + C$.

3) trovo che $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$

4) Risolvo eventuali problemi di Cauchy

es. $y' = -y^2 e^{2x}$ $\quad g = -y^2$, $f = e^{2x}$

1) zeri di g: $-y^2 = 0 \rightarrow y_0 = 0 \rightarrow y(x) = 0$ è una sol. costante, $\forall x$

2) $-\frac{y'}{y^2} = e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow y = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}e^{2x} + C}\right)$

L'eq. diff. ha soluzioni

$y(x) = 0$ e $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{2x} + C}$ con $C \in \mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 54

20/01/2011

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$

cioè $A'(x) = a(x)$

Moltiplico l'equazione per $e^{A(x)}$

$$e^A \cdot y' + e^A \cdot y \cdot a = e^A \cdot f$$

cioè

$$(e^A \cdot y)' = e^A f$$

$\Rightarrow$ INTEGRO, e trovo che

$$y \cdot e^A = \int e^A f(x)\,dx$$

quindi

$$y = e^{-A}\left[\int e^A f(x)\,dx + c\right]$$

RIASSUMENDO:

data la forma canonica $\quad y' + a(x)y = f(x)$

OCCORRENTE

- $A(x)$ primitiva di $a(x)$
- $B(x)$ primitiva di $e^{A(x)} f(x)$

e quindi risolvo così

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[B(x) + c\right], \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

esempio

$$y' + e^{x/2} y = 4e^{x/2} \qquad A = 2e^{x/2}$$

$$B = \int e^{2e^{x/2}} \cdot 4e^{x/2}\,dx = 4e^{2e^{x/2}}$$

$$y(x) = e^{-2e^{x/2}} \cdot \left(4e^{2e^{x/2}} + c\right) = 4 + ce^{-2e^{x/2}}$$

24/01/2012

+ EQUAZIONI LINEARI del II ORDINE

Funzione CANONICA

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$f(x)$: termine noto.

es. $y'' + y' - 6y = 4e^x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 54

24/01/2012

Sol. del problema di Cauchy

es.

$$\begin{cases} y''+y'-6y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$

la sol. generale sarà

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$$

impongo le condizioni $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 2C_1-3C_2=0 \end{cases}$

e trovo che $c_1=\frac{3}{5}$ e $c_2=\frac{2}{5}$

⚠ In tutti e tre i casi, le soluzioni saranno valide su TUTTO $\mathbb{R}$

CASO IMPORTANTE: $a=0$

$y''+yb=0 \qquad (b\neq 0)$

$\lambda^2=-b \quad \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{-b}$

quindi, a seconda se b sia > o < di zero, sto nel caso 1 o nel caso 3

b) CASO NON OMOGENEO

$$y''+ay'+by=f(x)$$

- Punto chiave: è sufficiente conoscere una soluzione $\bar{y}$ della eq. non omogenea, per conoscerle tutte
- Se y risolve l'OMOGENEA, $y+\bar{y}$ risolve la non omogenea

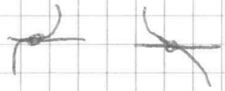
Eq. non omogenea

1) Trovo una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'eq non omogenea
2) Trovare la sol dell'eq. omogenea
3) Sol generale $y(x)=\bar{y}(x)+\underbrace{C_1\cdots+C_2\cdots}_{\text{sol dell'eq. omogenea}}$

27/01/2012

Si deve cercare la PRIMA DERIVATA NON NULLA, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, (se esiste!)

a) Se k è DISPARI, x_0 è un flesso a tg orizzontale



b) Se k è PARI, e $f^{(k)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un MINIMO RELATIVO

c) Se k è PARI, e $f^{(k)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un MASSIMO RELATIVO

Si può dimostrare facendo lo sviluppo di TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\dots}_{\text{tutte le derivate nulle} \Rightarrow \text{tutti zeri}} + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^k] \quad \text{per } x \to x_0$$

dunque $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ mi da la FORMA del GRAFICO.

se k è dispari, un lato sarà + Alto e l'altro + basso di $f(x_0)$.

+ CRITERIO della CONVERGENZA ASSOLUTA

. Dato l'INTEGRALE IMPROPRIO

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

SE l'integrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, allora CONVERGE ANCHE $\int_a^b f(x)\,dx$

es. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \cdot x}$ analizzo $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x} \cdot x}$. dato che $\frac{|\sin x|}{\sqrt{x} \cdot x}$ è sempre ≥ 0, lo CONFRONTO con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot x}$, che è sempre maggiore. questo è convergente $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x} \cdot x}$ converge $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \cdot x}$ converge x il crit. di CONVERGENZA ASSOLUTA.

+ TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA

Ogni POLINOMIO $P(z)$ a coefficienti COMPLESSI ha ESATTAMENTE n radici complesse

Se $p(z)$ ha Coefficienti REALI, allora le eventuali radici Non reali sono CONIUGATE a due a due

(cioè se $p(a+ib)=0$, allora anche $p(a-ib)=0$).

Fine

51