



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 229

DATA : 05/03/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Maggio

MATERIA : Idraulica, Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IDRAULICA

FLUIDO: corpo materiale costituito da ^{un insieme di} particelle tenute assieme da legami chimici. Tali particelle (immobili nei solidi) sono libere di muoversi, con delle limitazioni nei liquidi (nei gas il movimento è molto più libero).

A causa della mobilità delle particelle, un fluido può subire notevoli deformazioni, sotto effetto di modeste sollecitazioni, con il risultato che le deformazioni sono permanenti (non scompaiono al cessare della perturbazione che lo ha provocato) $\Rightarrow$ si contrappongono ai solidi che ritornano alla configurazione originale almeno entro i limiti elastici (le deformazioni in genere sono anche minori).

Conseguenza di ciò è che i fluidi si possono suddividere in base alle forze che tendono a modificare il loro volume:

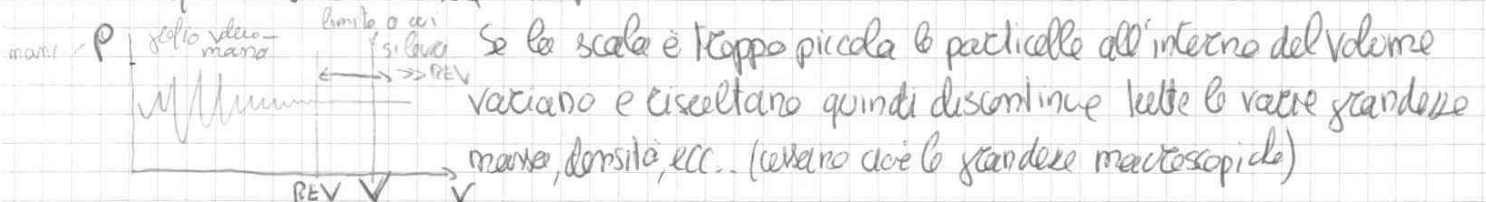
LIQUIDI: fluidi che oppongono grande resistenza alla variazione di volume $\Rightarrow$ assumono la forma del recipiente che li contiene ma hanno un volume proprio, e presentano una superficie libera a contatto con l'atmosfera soprastante.

GAS: fluidi che variano il proprio volume sotto effetto di forze di modesta entità (in condizioni normali) $\Rightarrow$ non hanno forma e volume proprio, ma occupano tutto il recipiente che li contiene.

In generale si ammette che i liquidi sono poco comprimibili e i gas molto comprimibili.

PARTICELLA FLUIDA: chiedersi le dimensioni delle particelle significa chiedersi la scala di lavoro.

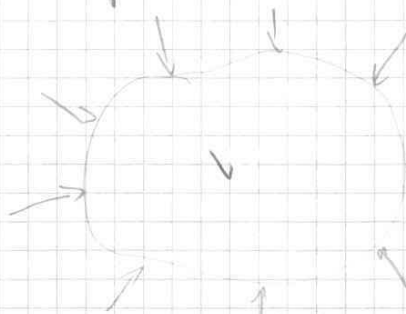
La scala nm è quella molecolare, ma si utilizza un volume elementare ^{representative} al di sotto del quale non si scende: REV.



Se scelgo invece un volume tale da contenere un numero elevatissimo di particelle tale cioè che il numero di particelle che entrano è pari al numero di particelle che escono: in un siffatto volume la massa si stabilizza e diventa una costante (per la legge di conservazione della massa). Tutte le grandezze lo considero applicate nel centro d'inerzia del volume. Con una tale assunzione tutte le grandezze variano in continuità $\Rightarrow$ si applica la meccanica del continuo.

FLUIDO BAROTROPICO: fluido la cui densità dipende solo dalla pressione
 $\rho = \rho(p)$ (nostro caso)

Comprimibilità



Volume V di fluido in equilibrio

Allo massa di fluido è applicata una pressione Δp sulla superficie del volume V → la pressione del fluido aumenta

L'applicazione della pressione tende a far comprimere le particelle di fluido: ciò implica una variazione di volume (il volume si riduce); più la pressione Δp è grande e più la massa fluida si comprime

$$\Delta V = - \frac{V \Delta p}{\epsilon}$$

La variazione di volume è proporzionale al volume iniziale e alla pressione applicata

Il segno "-" indica che se compriamo il volume diminuisce

ϵ = coefficiente che tiene conto del tipo di fluido, ha le dimensioni di una pressione $\frac{N}{m^2}$

↳ MODULO DI ELASTICITÀ A COMPRESSIONE CUBICA o

MODULO DI ELASTICITÀ DI VOLUME

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{\epsilon}$$

Il volume è diminuito ma la massa è sempre la stessa!

$m = \rho V$ dalla definizione di densità $m = \rho V = \text{cost}$ non cambia per masse o linee differenziali nulle!

Se la massa è costante la sua variazione è nulla: $dm = 0$

↳ legge di conservazione della massa

$$dm = d\rho V + \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

se sono all'infinitesimo posso confondermi Δ con d e moltiplicando $\frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{d\rho}{\epsilon}$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\epsilon} = \frac{d\rho}{\rho}}$$

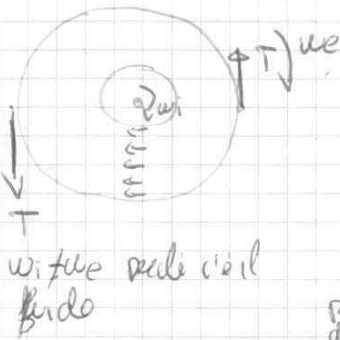
EQUAZIONE DI STATO PER I FLUIDI: lega pressione e densità

• caso di fluidi incompressibili $\rho = \rho(p, \theta) = \text{cost}$

$$\epsilon_{H_2O} = 2.03 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2}$$

solo applicando pressioni molto elevate e variazioni di densità molto piccole
 x l'acqua si ha $\epsilon \approx 1$ sulla scala 100

10 atm di pressione = 100 m di H_2O se il volume è $V = 1 m^3$ di quanto si riduce il volume dell'acqua?
 sostituendo si ricava che ΔV è molto piccolo → fluidi poco comprimibili (diversamente dall'aria)
 ⇒ Si parla praticamente di fluidi incompressibili perché anche bisogno di pressioni così elevate per ottenere variazioni di volume significative!



Per tenere fermo il cilindro deve applicare una coppia opposta al moto delle particelle

diff. velocità dei due cilindri

$$T = \mu R \frac{\Delta u}{\Delta r} \quad \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{r_2 - r_1}$$

*proprietà
al fluido*

*area
laterale del
cilindro*

T è proporzionale al

- tipo di fluido
- ω , di rotazione dei due cilindri
- area laterale del cilindro

inversamente proporzionale alla
differenza di raggi

T è determinata sperimentalmente

→ qui è data la differenza tra le velocità qui deve essere data la forza esterna

$\vec{n}$: versore normale (in idraulica il verso è positivo orientato perché l' H_2O non resiste a trazione ma solo a compressione)

μ = coefficiente di viscosità dinamica del fluido

$$\tau = \frac{T}{R} = \mu \frac{\Delta u}{\Delta r} \quad \text{tensione tangenziale}$$

Si può pensare all'infinitesimo perché la tensione varia da punto a punto

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad \text{se immagino che lo spazio sia infinitesimo} \rightarrow \text{significa lo spessore tra due strati di fluido}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} \quad \text{LEGE DI NEWTON} \quad \Leftrightarrow \tau = \mu \dot{\gamma}$$

dn indica che la tensione è normale al moto

$\frac{du}{dn}$ variazione delle velocità in direzione normale al moto

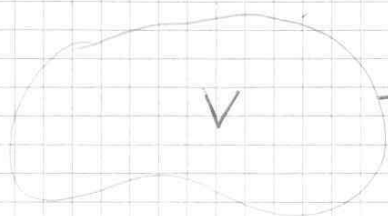
⇒ Gli sforzi tangenziali nascono perché c'è un campo di moto che varia in direzione trasversale

Fare muovere un fluido significa vincere l'attrito cioè questo è l'effetto della nascita delle tensioni tangenziali in virtù della variazione di velocità in direzione normale al moto

L'attrito è correlato alle dissipazioni di energia cioè dissipazione di calore che è energia non più recuperabile: vincere l'attrito vuol dire anche vincere le dissipazioni dovute per natura meccanica

⇒ Da ciò ne deriva l'importanza del coefficiente di viscosità

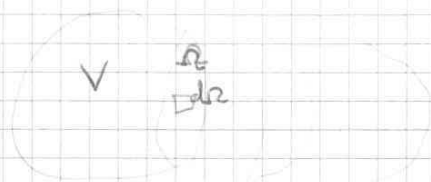
SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI



Ω Volume V di superficie $d\Omega$

Il volume è soggetto a forze di massa (es. forza peso) e forze di superficie $\rightarrow$ forze che l'esterno compie sul volume V ^{dovute al contatto} _{con superficie}

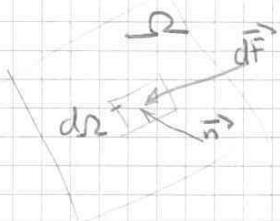
N.B. Importante stabilire il volume di riferimento su cui si opera e valutare le forze agenti su di esso



Si seziona il volume V di fluido con una superficie: ciascuna porzione non è più in equilibrio.

N.B. la superficie può essere esterna al fluido e quindi la più generica possibile

Per ripristinare l'equilibrio si deve considerare un sistema di forze distribuite in continuità sulla superficie di separazione affinché il corpo sezionato "non senta" la mancanza dell'altra parte



Ω area Ω

$d\Omega$ area elementare di normale $\vec{n}$

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{d\Omega}$$

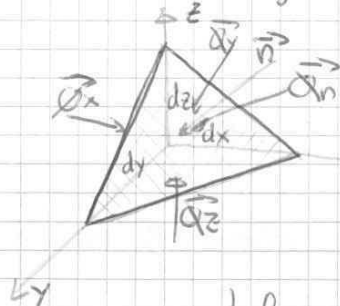
SFORZO ELEMENTARE

$$d\vec{F} = \vec{\sigma}_n d\Omega \Rightarrow \vec{F} = \int_{\Omega} \vec{\sigma}_n d\Omega \quad \text{SPINTA DEL FLUIDO (TOTALE)}$$

Calcolo la distribuzione delle forze

Nella meccanica dei fluidi le normali sono entranti nell'area in quanto gli sforzi di compressione sono considerati positivi (i fluidi non resistono a sforzi di trazione)

Lo sforzo dipende da $\vec{n}$ cioè dalla giacitura dell'area $d\Omega \rightarrow$ al variare della giacitura varia lo sforzo $\vec{\sigma}_n$



TETRAEDRO DI CAUCHY

Area $d\Omega$ (di giacitura generica) e le sue proiezioni sui piani coordinati. Le aree proiettate si ottengono moltiplicando l'area $d\Omega$ per i relativi coseni di direzione.

Le forze di massa agenti sul tetraedro sono dovute al campo gravitazionale

Il corpo è in equilibrio quindi la somma vettoriale delle forze è nulla!

- Esistono 3 piani detti PIANI PRINCIPALI tra le infinite possibili giaciture in cui le tensioni tangenziali sono nulle $\Rightarrow$ esistono solo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- La traccia del tensore è un'invariante: $\sum \sigma_i = \text{cost} = S$ non dipende dal sist. di riferimento
- Se le tensioni nulle non impediscono la giacitura, lo stato di tensione è isotropo

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \frac{S}{3} = p$$

PRESSIONE
in un punto

- indipendente dal sist. di riferimento
- indipendente dalla giacitura

$\Rightarrow$ la pressione è la componente normale del tensore degli sforzi $\Rightarrow$ la pressione è una quantità scalare!

L'incognita si riduce a essere solo la p !

La pressione è funzione del punto e in generale anche del tempo

$p = p(x, y, z, t)$ in particolare però se il fluido è fermo non la pressione è nota nel punto! $\leftarrow$ dipende dal tempo quindi $p = p(x, y, z)$

Da ciò ne deriva che le τ sono sempre nulle $\Leftarrow$

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} = 0 \quad \begin{cases} \mu = 0 \text{ condizione di fluido perfetto} \rightarrow \text{fisicamente impossibile} \\ \frac{du}{dn} = 0 \text{ il campo di moto in direzione normale non varia} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ STATICA DEI FLUIDI

STATICA

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ tensore degli sforzi nella statica dei fluidi

$\Downarrow$
è una particella elementare di dV e lo sforzo vale sempre $\vec{F} = \int \vec{\sigma} dV$

Un fluido è in quiete quando la posizione delle particelle fluide non varia rispetto al sistema di riferimento

$\rightarrow$ FLUIDI FERMI rispetto ad un sistema di riferimento fermo

$\rightarrow$ FLUIDI IN MOTO RELATIVO rispetto ad un sistema di riferimento in moto

Un fluido fermo quindi ammette solo sforzi di natura normale con stato tensionale isotropo che è descritto quindi da una sola grandezza scalare funzione unicamente del punto: la pressione (indipendente dalla direzione della superficie e dal tempo)

la pressione agisce sempre $\perp$ alla superficie

L'equazione di Eulero si può descrivere

$\rho \text{grad } U = \text{grad } p = \text{cost}$ una scelta superfici isobare $\text{grad } p$ è una costante
 Se $\text{grad } U$ è costante allora lo è anche $\text{grad } p$

⇒ Le superfici equipotenziali sono anche superfici isobare e sono piane (piani orizzontali)

Se il campo è conservativo le superfici sono anche isocore

Conseguenza di ciò è che p è funzione solo della quota $p = p(z)$ e non di x, y
 ⇒ $\text{grad } p = \frac{dp}{dz}$

2) Se il fluido è incompressibile, è necessario dare ammettere potenziale ⇒
 $p = \text{cost}$ posso portare dentro o fuori il simbolo di derivata p

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p \Rightarrow \vec{F} = \text{grad } \frac{p}{\rho} \quad \text{con } \frac{p}{\rho} = U \text{ potenziale del campo}$$

OSS. Le superfici equipotenziali sono anche superfici ad ugual densità ⇒
 i fluidi si stratificano (nel caso di fluidi a densità variabile)

Di solito il campo gravitazionale è quello di tipo terrestre

$$\vec{F} = \rho \text{grad } g(z) \rightarrow \text{questo rispetto al piano di} \\ \text{quella } z$$

$$\vec{F} = \text{forza specifica di massa} \quad [\vec{F}] = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho V} = \frac{F}{\rho}$$

forza di massa ρ massa, forza unitaria
 motricia ρ forza di coesione
 in grado scala g valore
 di accelerazione

L'asse z è in una direzione
 il campo $\vec{F}$ agisce in direzione opposta

Hipotesi Stevino

- 1) fluido fermo
- 2) " incompressibile
- 3) " soggetto a forze gravitazionali

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{grav}} = - \text{grad } (gz) \quad \text{grad } (gz) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = (0, 0, 1) \Rightarrow \vec{F} = -g \vec{u}_z$$

sostituendo:

$$\rho(-g \text{grad } z) = \text{grad } p$$

$$\text{grad } (p/g) + \text{grad } p = 0 \Rightarrow \text{grad } (gz + p) = 0 \Rightarrow \text{grad } (gz + p) = 0$$

$$gz + p = \text{cost} \Leftrightarrow z + \frac{p}{\rho} = \text{cost}$$

dimensione: pressioni

$$z + \frac{p}{\rho} = \text{cost}$$

EQUAZIONE DI STEVINO

legame tra pressione e quota del fluido

dimensione: lunghezze

$$h = z + \frac{p}{\rho} = \text{cost}$$

CARICO PIEZOMETRICO

→ è costante in tutta la massa fluida in quiete

quota geodetica:

altezza rispetto al piano

di riferimento $z=0$

altezza piezometrica

$h = z + \frac{p}{\rho}$ rappresenta una retta nel piano z
 la pressione varia linearmente! $p = p(z)$

⇒ I punti a palm (ascelte) hanno sempre pressione relativa nulla ⇒ immediata individuazione pcir

⇒ pcir luogo dei punti a pressione relativa nulla (palm a palm)

⇒ I punti in depressione sono punti (intermine di pressioni relative) che stanno al di sopra del pcir

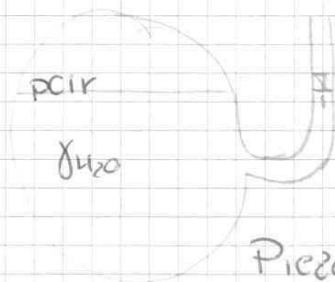


In un sistema chiuso (es. scatola piena di fluido) il pcir divide la parte del fluido in pressione da quella in depressione

• Se il fluido è in pressione, praticando un foro nel contenitore, il fluido fuoriesce

• Se il fluido è in depressione, se c'è un foro, entra dell'aria perché palm è superiore alla pressione del fluido (il fluido "tende" a tirarsi dietro la parete)

Strumenti di misura

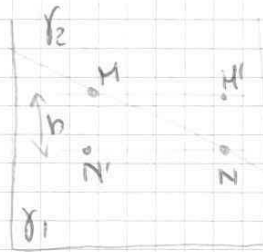


Nel tubo il fluido arriva al livello del pcir
⇒ si applica il principio dei vasi comunicanti

Piezometro → strumento che misura il carico idrostatico h

Recipiente con due fluidi non miscibili tra loro: dimostrazione che il piano è sempre orizzontale

Si procede per analogia:



M e N è alla superficie di separazione tra i due fluidi

Si tracciano le rispettive proiezioni fino ad arrivare alle verticali del punto

$$h_M = h_N$$

$$p_M + \gamma_2 h = p_{N'} + \gamma_2 h \Rightarrow p_M = p_{N'} + \gamma_2 h - \gamma_2 h + p_N$$

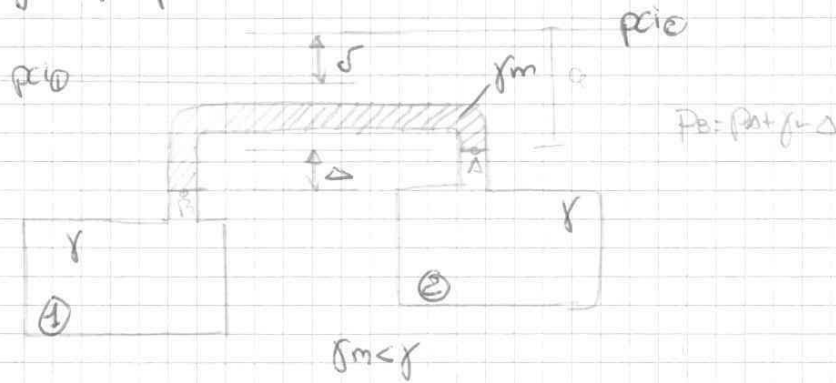
$$p_M = p_{N'} = p_N - \gamma_1 h$$

$$p_N = p_{N'} = p_M + \gamma_2 h \Rightarrow p_N = p_N - \gamma_1 h + \gamma_2 h \Rightarrow \gamma_1 h = \gamma_2 h \quad \text{vero se e solo se:}$$

• $\gamma_1 = \gamma_2$ i due fluidi sono uguali cioè sono fluido

• $h=0$ cioè M e N sono su un piano orizzontale

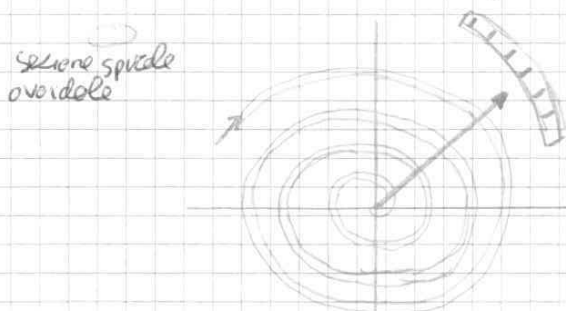
Se si rovescia il sistema il fluido manometrico deve essere più leggero cioè $\gamma_m < \gamma$ per la stabilità del sistema



Si usa un tipo o l'altro a seconda delle esigenze:

- Il primo è utile quando i due p.c.r. sono a grande distanza tra loro o il manometro permette di diminuire le misure grandi.
- Il secondo (a U rovescia) serve per amplificare le misure piccole cioè i due p.c.r. sono vicini

Manometro metallico (Bourdon)



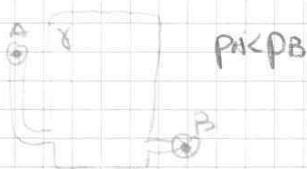
È costituito da una spirale in cui entra il fluido; a lato spirale è alloggiata una lancetta che punta una scala graduata

In base se la pressione aumenta o diminuisce la curvatura della spirale è in un senso o nell'altro cioè se la pressione aumenta la spirale tende a sudsgeri, viceversa s...

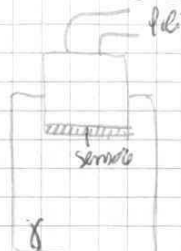
richiudo se la pressione diminuisce

È adatto per misurare la pressione alla quota del barometro

La scala graduata in genere è in $\frac{kg}{cm^2} = n$ (unico caso x noi)



Trasduttori di pressione



Si basano sul fatto che la membrana del sensore varia le sue proprietà elettriche in base alla variazione di pressione; variando la pressione varia la tensione

modulo di $\vec{S}$:

$dS = p \vec{n} dS$ sulla singola area

usato per tutte le aree

fluido in quiete

dove $h = x \sin \alpha$

$$\vec{S} = \int_{\Omega} p \vec{n} dS = \vec{n} \int_{\Omega} \gamma h d\Omega = \vec{n} \gamma \int_{\Omega} h d\Omega = \vec{n} \gamma \int_{\Omega} x \sin \alpha d\Omega = \vec{n} \gamma \sin \alpha \int_{\Omega} x d\Omega = H \gamma \sin \alpha \vec{n}$$

$\int_{\Omega} x d\Omega$ $\rightarrow$ allungamento del punto rispetto PCIR

$$= \vec{n} \gamma \sin \alpha x_G \Omega = \vec{n} h_G \gamma \Omega = \vec{n} p_G \Omega$$

h_G $\rightarrow$ allungamento baricentrico rispetto PCIR
 p_G $\rightarrow$ pressione baricentrica

$H = \int_{\Omega} x d\Omega$ = momento statico della superficie Ω rispetto alla linea di sponda $\rightarrow$ N.B. il baricentro baricentrico è nella

$$\boxed{\vec{S} = p_G \Omega \vec{n}}$$

SPINTA SU PARETE PIANA

modulo $S = p_G \Omega$

- Il verso orientato o esistente dipende dal segno di p
- La direzione è normale alla superficie
- Il modulo è area $\times$ pressione per pressione del baricentro

Il punto di applicazione si chiama CENTRO DI SPINTA

N.B. Non è detto che il centro di spinta coincida con il baricentro (in generale ^{un} è così)

Lo risultamento è equilibrante di tutti i momenti delle singole aree fatte rispetto alla linea di sponda

$\Rightarrow$ Momento di S rispetto alla linea di sponda:

$$S \cdot \xi = \int_{\Omega} p x d\Omega = \int_{\Omega} \gamma h x d\Omega = \int_{\Omega} \gamma x^2 \sin \alpha d\Omega = \gamma \sin \alpha \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \gamma \sin \alpha I_y$$

$\int_{\Omega} x^2 d\Omega$ $\rightarrow$ braccio della generica area
 I_y momento inerzia della superficie rispetto alla linea di sponda

$$\xi = \gamma \sin \alpha I_y \Rightarrow \xi = \frac{\gamma \sin \alpha I_y}{S} = \frac{\gamma \sin \alpha I_y}{\gamma h_G \sin \alpha \Omega} = \frac{I_y}{x_G \Omega} = \frac{I_y}{M}$$

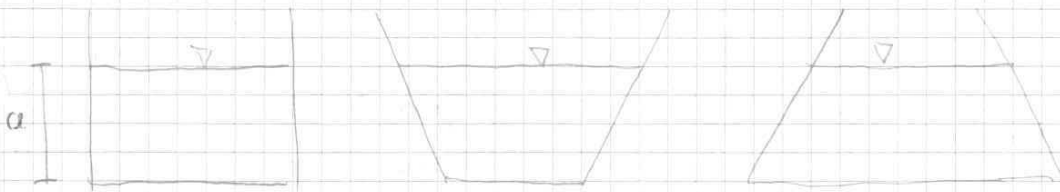
$$\boxed{\xi = \frac{I_y}{M}}$$

COORDINATA CENTRO DI SPINTA

N.B. Stesse formule della pressione e area neutra!

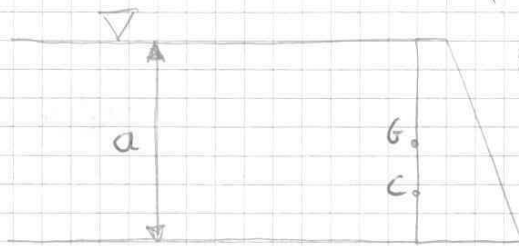
Facendo l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse x si ottiene l'altra coordinata del centro di spinta

Paradossi idrostatici



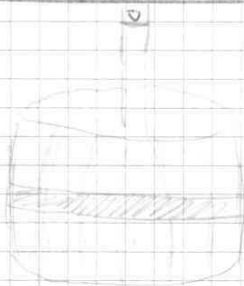
La spinta sul fondo dei 3 recipienti è la stessa nonostante il volume di fluido sia differente per ciascun caso

⇒ caso dello dighe: se non fosse così al variare della quantità d'acqua la diga cederebbe



Spinta sulla parete: deve essere uguale perché deve sapere lo spostamento subito dalla diga per effetto della spinta stessa

Paradossi della botte



Botte di legno in pressione: si diceva "con una goccia si riesce a far esplodere una botte..." significa che il p.c.i.r. è così elevato tale che la pressione della botte vale $z=h \cdot \rho_f$ e se la pressione è così elevata da eguagliare la pressione di rottura della botte, basta una goccia da aumentare ulteriormente la pressione interna all'andare p.c.i.r. tale da provocare la rottura della botte stessa!

Volume V racchiuso dalla superficie $d\Omega$



$$\textcircled{1} \int p \vec{F} dV$$

pF : se siamo nel campo barostatico $\vec{F} = \vec{g}$

$$\Rightarrow \int p dV = \text{massa del fluido} \Rightarrow m\vec{g} = \vec{P} \text{ peso del fluido}$$

$$\textcircled{2} \int \text{grad } p dV = \int \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dV:$$

applicando il teorema di Green

$$= - \int_{\Omega} p (\vec{i} \cos \hat{n}_x + \vec{j} \cos \hat{n}_y + \vec{k} \cos \hat{n}_z) d\Omega = - \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega$$

componente $\vec{i}$ del vettore $\vec{n}$

è la spinta di Vernetto prima!

$\vec{F}_c \rightarrow$ forze di coesione al contorno del volume di fluido considerato (forze causate in statica dalle pareti)

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}_c = 0}$$

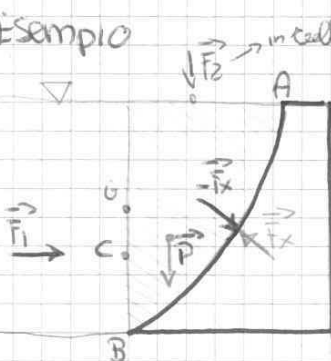
EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA DEI FLUIDI

esprime l'equilibrio tra le forze di massa (peso $\vec{P}$) e le forze che agiscono tramite la superficie del volume cioè le forze di superficie $\vec{F}_c$

Le equazioni globali in genere sono più comode da maneggiare perché applicando il teorema di Green si passa dal volume alla superficie: ciò implica che non dover più conoscere la pressione in ogni punto del volume, ma è sufficiente sapere ciò che accade sulla superficie che racchiude il volume

Esempio

pcir



Superficie AB

Il volume deve essere scelto da calcolare $\Rightarrow$ tutti elementi piani (in quanto così) vanno la superficie AB

Eq. globale: $\vec{P} + \text{5 forze a mtal contorno (2 sono } \perp \text{ al foglio)}$

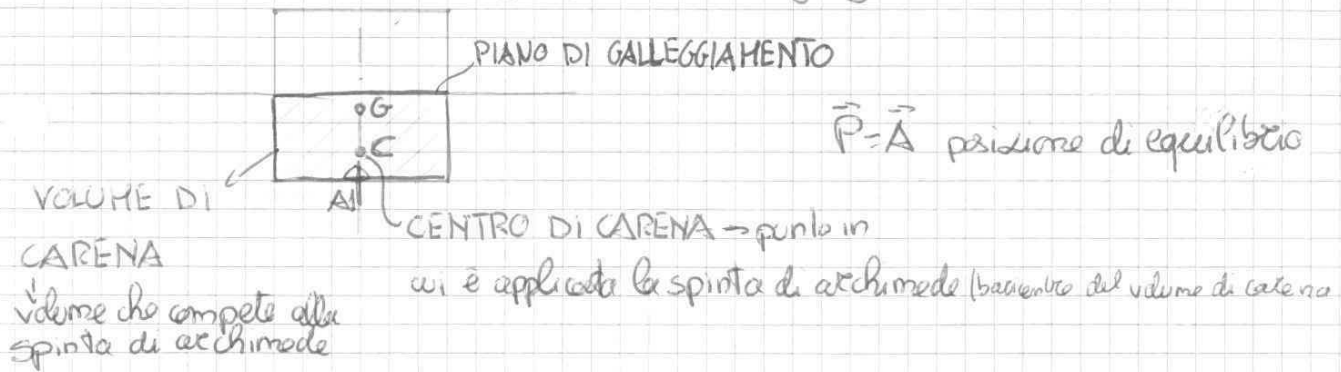
Le due $\perp$ al foglio si compensano e si cancella mentre F_z è nulla

$$\vec{P} + \vec{F}_z + \vec{F}_x = 0$$

MA se se calcolasse p si calcolano anche F_z e F_x

$\vec{F}_x = -\vec{P} - \vec{F}_z$ spinta che dall'esterno la superficie fa sul volume di fluido: in realtà la vera incognita è $-\vec{F}_x = \vec{P} + \vec{F}_z$ perché si vuole sapere la spinta che il volume fa sulla superficie e non la spinta della superficie sul volume di fluido

- asse di galleggiamento: congiunge baricentro e centro di carena

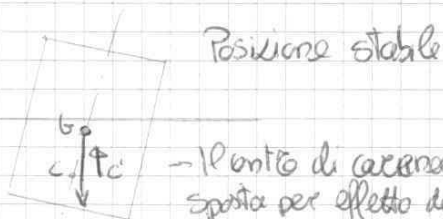
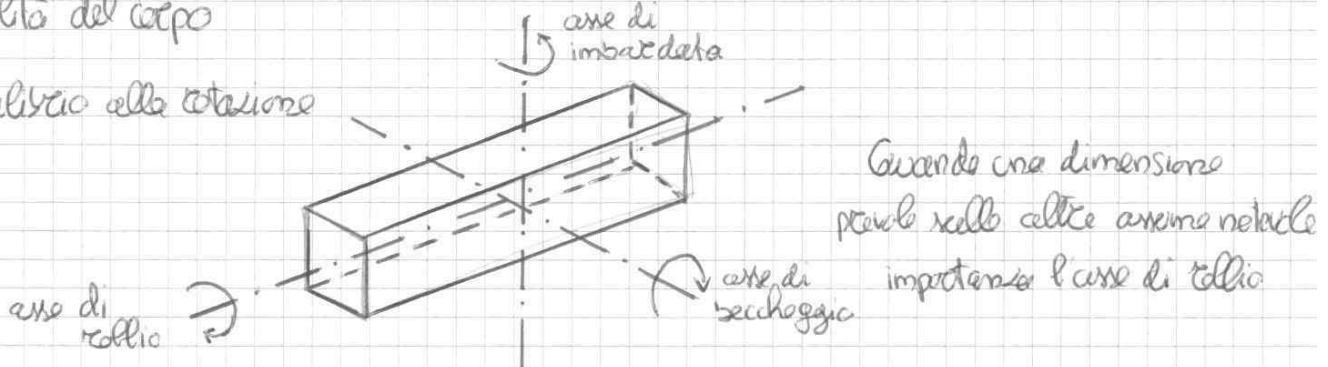


Stabilità del corpo: in base alla sua posizione, le due forze variano (soprattutto la spinta di archimede)

* d'equilibrio per spostamenti verticali è di tipo stabile: se spinto verso il basso il corpo la spinta di archimede aumenta e il corpo risale; viceversa se il corpo si alza il peso aumenta diventando più grande della spinta di archimede quindi il corpo ritorna verso il basso nella sua posizione originaria

* Per traslazioni orizzontali l'equilibrio è indifferente cioè non viene perturbata la stabilità del corpo

* Equilibrio alla rotazione



? $\rightarrow$
Se il centro di carena C è sempre al di sopra del baricentro $\rightarrow$ le forze di attrazione creano una coppia di rigiade $\rightarrow$ il rettoramento quando è immerso
non ha problemi di questo tipo perché C è sempre sopra G ma sotto per il



$\rightarrow$ Equilibrio instabile: si crea una coppia di attrazione che ruota in senso orario concordemente con la rotazione del corpo $\rightarrow$ il corpo ruota ancora di più rovesciandosi

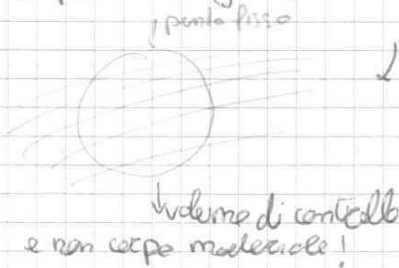
la coppia che si crea è antioraria cioè opposta alla rotazione del corpo $\rightarrow$ il corpo tende a portarsi nella posizione originaria

$$\begin{cases} X = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ Y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ Z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

La variabile principale è il tempo; x, y, z è un'elide che mi consente di distinguere le varie particelle (cioè sono fissate fissate la particella)

Le traiettorie sono quindi ∞^3 perché 3 sono le dimensioni spaziali no segue che spesso sono molto complicate

2) EULERIANO: è l'altro approccio; si fissa l'attenzione sulle particelle che transitano nel punto che è fisso e in tale punto c'è un unico vettore: l'incognita non è più la singola traiettoria ma capire il campo di moto



L'approccio euleriano semplifica il problema da ∞^3 a ∞^2
 $\Rightarrow$ Assunzione fondamentale importanza le linee di corrente

Accelerazione nell'approccio lagrangiano:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

soluzione variabile $\rightarrow x, y, z$ identificano la particella

Accelerazione nell'approccio euleriano:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

fissato l'attenzione sul punto, cioè lo scatto del tempo, ma ora ogni punto ha le sue coordinate che cambiano cambiando il punto stesso.

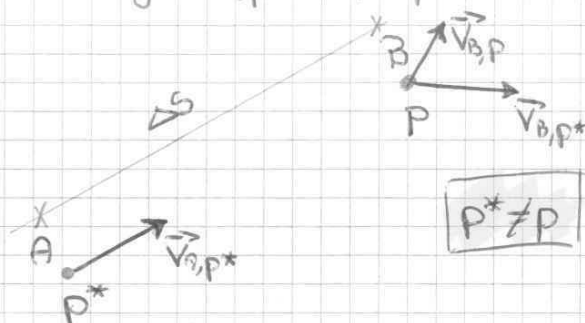
Nell'approccio lagrangiano l'accelerazione è ovviamente delle particelle, mentre in quello euleriano è quella delle particelle che stanno passando nel volume di controllo.

Si aggiunge la posizione del volume di controllo all'interno del sistema di riferimento

Per calcolare l'accelerazione si parte dal legame spazio-tempo

$$\begin{aligned} dx &= u dt \\ dy &= v dt \\ dz &= w dt \end{aligned}$$

u, v, w funzione dello spazio e del tempo



All'istante t due particelle P^* e P

si trovano rispettivamente nel punto A e nel punto B separate da uno spazio ΔS

$\Rightarrow \vec{V}_{A,P^*}(t)$ è il vettore velocità della particella P^* all'istante t nel punto A

CINEMATICA DEI FLUIDI

Il fluido si muove perché c'è un campo di moto $\vec{u} = (u, v, w)$ dove u, v, w sono le componenti secondo i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ della tripla coordinata.

$u = u(x, y, z, t)$
 $v = v(x, y, z, t)$
 $w = w(x, y, z, t)$

Le funzioni devono variare con continuità (sono funzioni delle 3 coordinate spaziali e del tempo)

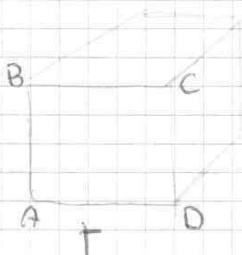
$\Rightarrow$ Significa che se lo stesso punto del fluido sufficientemente grande lo si vede quando si muove molto al di sotto della scala del fluido $\Rightarrow$ particelle fluide $\equiv$ un punto nel campo di moto

Lo scopo del problema cinematico è quello di studiare l'effetto della velocità sulle particelle di fluido cioè capire il comportamento e i movimenti delle particelle fluide punto per punto e istante per istante

Il fluido è soggetto a forze $\vec{T}$ (legati alla pressione p) e $\vec{\tau}$ (forze tangenziali $\tau = \mu \frac{du}{dy}$).
 l'effetto del campo di moto sulle particelle è quello di farle ruotare

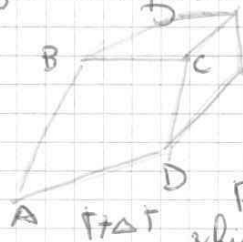
$\Rightarrow$ Dalle variazioni di campo di moto nascono le $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ (attriti cioè dissipazioni di energia)

Dato un cubetto di fluido al tempo t : cosa succede al tempo $t + \Delta t$?



$\Rightarrow$ Se siamo in statica il cubetto rimane tale e quale

$\Rightarrow$ Se siamo invece in cinematica nascono delle τ e di conseguenza il fluido ruota.



cambia la distanza tra i punti A e D
 $\rightarrow$ l'asse non è più quello originario perché c'è la presenza della pressione che schiaccia se è positiva e le τ producono le rotazioni.

Il fluido cambia forma e volume

Le particelle si comprimono, dilatano, ruotano

$\Rightarrow$ In particolare le particelle fluide iniziano a ruotare per qualsiasi campo di moto

• CAMPO DI MOTO VARIO O NON STAZIONARIO: è il campo di moto più generale possibile, il vettore velocità dipende dallo spazio e dal tempo $u = f(\text{spazio, tempo})$ (es. onda di piena di un fiume, fluido in un tubo appena aperto il rubinetto, svuotamento di un serbatoio...)

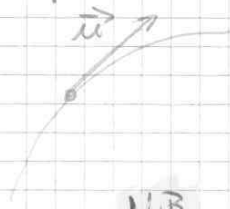
• CAMPO DI MOTO PERMANENTE: moto in cui il vettore velocità è funzione solo dello spazio; la velocità è diversa da punto a punto: $u = f(\text{spazio})$, le condizioni permanono nel tempo istante per istante, il moto è sempre lo stesso (es. svuotamento serbatoio quando contemporaneamente =

* La parte locale compete alle variazioni del campo di moto nel tempo, ma lo spazio rimane costante

* La parte convettiva è un termine non lineare, compete le variazioni spaziali del campo di moto, ma il tempo è costante

oss In caso di moto permanente posso eliminare la parte locale!

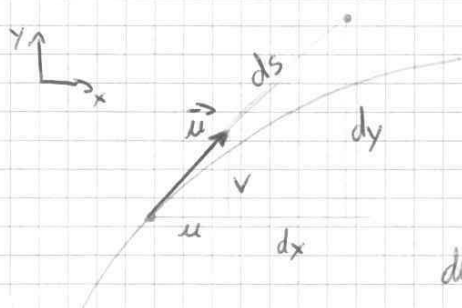
Nell'approccio euleriano si parla di LINEE DI CORRENTE: avendo l'interesse rivolto al campo di moto e al vettore velocità, si prende una curva che sia il luogo dei punti tangente istante per istante al vettore velocità



⇒ Dato il campo di moto automaticamente ho le linee di corrente e viceversa

N.B. Linee di corrente e traiettorie coincidono quando non c'è dipendenza dal tempo cioè in caso di moto permanente

EQUAZIONI DELLE LINEE DI CORRENTE



3 triangoli simili

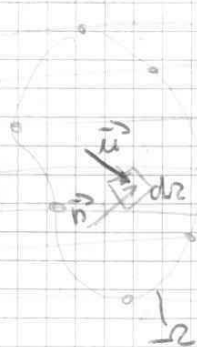
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

equazioni differenziali delle linee di corrente

due segni di "=" ⇒ ∞² linee di corrente

Per visualizzare le traiettorie si mettono delle particelle "non miscibili" nel fluido e poi si seguono le particelle scattando immagini con lunghi tempi d'esposizione

Per le linee di corrente si usa scattare immagini con piccolissimo tempo d'esposizione: le particelle seguono le linee di corrente istante per istante



Le linee di corrente passanti per una linea chiusa formano un TUBO DI FLUSSO

La superficie laterale ha il vettore velocità tangente alla superficie ⇒ il vettore velocità non può attraversare la superficie quindi le linee di corrente e di conseguenza il tubo di flusso è una superficie

impermeabile ⇒ il vettore velocità non ha componente trasversale che attraversa le linee di

$\times \rho u dt dz dy$ massa che entra nel volume al tempo dt attraverso la faccia $\perp$ asse x

$\times \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dt dz dy$ massa che esce dal volume al tempo dt attraverso la faccia $\perp$ all'asse x

Dalle due facce distanti dall'asse x complessivamente entra/esce una differenza di massa:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt \quad \text{e analogamente per le altre facce}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz dt$$

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dt dx dy dz = - \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\rho dx dy dz}^{\text{massa}}$$

variazione di massa nel tempo
nell'unità di tempo

Il segno "-" al secondo membro indica una diminuzione di massa dovuta alle variazioni temporali della densità (massa uscente - massa entrante)

$$\textcircled{1} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}}_{\text{div}(\rho \vec{u})} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textcircled{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

EQUAZIONE INDEFINITA
DI CONTINUITÀ

con la regola di derivazione euleriana

$$\textcircled{3} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Esplicitando i prodotti della prima si ottiene un'altra forma equivalente

$$\textcircled{4} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{u} = 0$$

Le 4 forme dell'equazione di continuità sono tra loro equivalenti

$\Rightarrow$ Se il fluido è incompressibile la densità è costante nel tempo e nello spazio e l'equazione di continuità si riduce a

$$\boxed{\text{div} \vec{u} = 0}$$

cioè il campo di moto è solenoidale

Corrente

I tubi, come i fiumi e i canali sono sistemi che hanno una dimensione (lunghezza) che prevale sulle altre

⇒ Le correnti di fluido hanno delle traiettorie che sono SENSIBILMENTE rettilinee e parallele

→ s

↓
Punto ingegneristico del problema

Se così è, la trattazione è monodimensionale cioè serve solo un'unica coordinata spaziale per definire le varie grandezze

$$\Omega = \Omega(s, t)$$

sezione

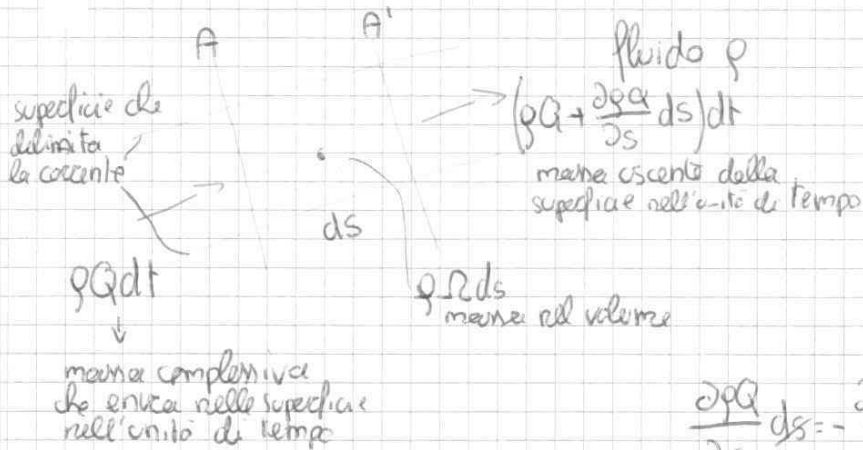
$$U = U(s, t)$$

velocità media

$$Q = Q(s, t)$$

portata

Trattazione delle correnti monodimensionali



Si applica la conservazione della massa

Massa uscente - Massa entrante =

$$= \rho Q dt + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt - \rho Q dt = - \frac{\partial \rho Q}{\partial t} ds dt$$

variazione nel tempo della massa nel volume di controllo

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds = - \frac{\partial \rho Q}{\partial t} ds$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho Q}{\partial t} = 0}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PER CORRENTI MONODIMENSIONALI

Se il fluido è incompressibile $\rho = \text{cost}$ e lo si può portare fuori dal simbolo di derivata e semplificare, l'equazione di continuità diventa

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PER CORRENTI MONODIMENSIONALI DI FLUIDI INCOMPRESSIBILI

⇒ Inoltre se il campo di moto è permanente non vi è alcuna dipendenza dal tempo:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} = 0}$$

⇒ passando alle derivate totali $\frac{dQ}{ds} = 0 \Rightarrow$ integrando $\boxed{Q = \text{cost}}$

nel caso dei condotti la velocità è costante

$$Q = \Omega \cdot V = \text{cost} \Rightarrow \text{la velocità media è costante sezione per sezione}$$

in caso di condotti rigidi (o acciati)

$$Q = \text{cost}$$

se aumenta uno diminuisce l'altro e viceversa per la costante portata

In forma scalare:

$$\rho \left(F_x - \frac{D u}{D t} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_x - \frac{D u}{D t} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_y - \frac{D v}{D t} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_y - \frac{D v}{D t} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_z - \frac{D w}{D t} \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_z - \frac{D w}{D t} \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

⇒ Se siamo nel campo gravitazionale $F_x = F_y = 0$

⇒ I termini τ sono quelli che fanno girare le particelle

Il problema dinamico è un problema con 10 incognite → servono 10 equazioni

Incognite:

⑥ $\left. \begin{matrix} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \\ \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz} \end{matrix} \right\}$ tensori stress e sempre simmetrico

③ campo di moto u, v, w

④ densità ρ (il fluido è qualsiasi!)

Equazioni:

③ → Equazioni indefinite della dinamica (in forma scalare)

④ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$
Equazione globale di continuità

④ $\rho = \rho(\dots)$: funzione di stato → se il fluido è incomprimibile e più facile perché $\rho = \rho(\dots)$

Le altre 5 equazioni arrivano dal legame costitutivo forze-deformazioni, e in genere dalla reologia del fluido → $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

Se si integra l'equazione indefinita della dinamica su un volume W :

$$\int_W \rho \vec{F} dW = \int_W \rho \vec{A} dW = \int_W \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) dW$$

Applicando il TC di Green al 2° membro

$$\int_W \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) dW = \int_{\partial W} \underbrace{(\vec{\sigma}_x \otimes \vec{n}_x + \vec{\sigma}_y \otimes \vec{n}_y + \vec{\sigma}_z \otimes \vec{n}_z)}_{\text{TC tetraedro Cauchy}} d\vec{r} = - \int_{\partial W} \vec{p} d\vec{r}$$

forza che agisce sulla superficie che ha normale $\vec{n}$ cioè l'area $d\vec{r}$ con normale $\vec{n}$!

Termine β :

$$\rho \vec{A} = \rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right)$$

se il fluido è newtoniano l'equazione locale si particolarezza:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \Delta \vec{u} - \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{u} \quad \text{EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES}$$

$\Rightarrow$ Se il fluido è incomprimibile $\text{div } \vec{u} = 0 \Rightarrow$ il termine $\frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{u}$ si annulla!

$\Rightarrow$ Se il fluido è fermo $\vec{u}$ si annullano essendo fermo è nullo anche il termine $\vec{A} \Rightarrow$ l'equazione che si ottiene è: $\rho \vec{F} = \text{grad } p$ equazione infinita della statica

L'equazione di Navier-Stokes governa la dinamica di tutti i fluidi newtoniani e in particolare per noi che trattiamo essenzialmente acqua (che consideriamo praticamente incomprimibile) assume la forma:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \Delta \vec{u} \quad \text{in forma locale}$$

Se la integriamo su tutto il volume si ottiene la stessa equazione in forma globale:

$$\bullet \int_W \rho \vec{F} dW = \vec{P} \text{ peso del volume}$$

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{tang}} + \vec{H}_e - \vec{H}_i = 0 \quad \text{eq. globale}$$

$$\bullet \int_W \rho \vec{A} dW = \vec{I} \text{ inerzie locali}$$

$$\bullet \int_W \mu \Delta \vec{u} dW = \text{applicando te. Green} \Rightarrow \int_{\partial W} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \hat{n}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \hat{n}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \hat{n}_z \right) d\Omega = \mu \int_{\partial W} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\Omega = \vec{F}_{\text{tang}}$$

Questo è il termine delle T ovvero dove ci sono le dissipazioni di energia per effetto della viscosità

legge di Newton su una faccia tangenziale si agiscono dall'interno sul volume attraverso la superficie

$$\bullet \int_W \text{grad } p dW = \vec{T} \text{ stesso normale che agisce sulle superficie}$$

$$\bullet \vec{H}_e = \int_{\partial W} p \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega - \rho \int_{\partial W} u^2 \vec{n} d\Omega = \vec{n} \rho \int_{\partial W} u^2 d\Omega = \vec{n} \rho U Q_B \quad \text{vero se le traiettorie sono sensibilmente rettilinee}$$

$\vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega = \text{portata} \Rightarrow U Q$
velocità media della portata

semplifico il calcolo dell'integrale assumendo il concetto di corrente ace di reattori SENSIBILMENTE RETTILINEE E PARALLELE

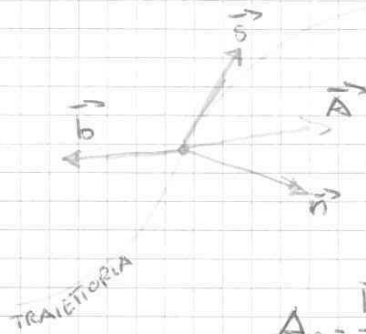


$$P = \frac{\rho \int_{\partial W} u^2 d\Omega}{\vec{n} \rho U Q} \approx 4 \quad (1,1 \div 1,2)$$

COEFFICIENTE DI RAGGUAGLIO DELLE QUANTITÀ DI MOTO

La precedente equazione è scritta in forma vettoriale.

Se ne può dare una scrittura in forma scalare considerando una traiettoria generica su cui la posizione del punto è individuata in funzione dello spazio e del tempo: si può associare quindi una terna intrinseca della traiettoria:



• vettore tangente $\vec{s}$ (tangente alla traiettoria)

• vettore normale $\vec{n}$ (normale alla traiettoria)

• vettore binormale $\vec{b}$ (ortogonale ad entrambi)

La velocità è un vettore: diciamo il vettore normale $\vec{s}$

$$A_s = \frac{Du}{Dt} \quad \text{modulo della velocità}$$

$$A_n = \frac{u^2}{R} \quad R \rightarrow \text{raggio}$$

$A_b = 0$ si può dimostrare che è sempre nulla

del cerchio osculatore nel punto

Sostituendo:

$$\textcircled{1} \text{ lungo } \vec{s}: \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ lungo } \vec{n}: \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{u^2}{R}$$

$$\textcircled{3} \text{ lungo } \vec{b}: \quad \frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

Integrando si ottiene:

① La variazione lungo la componente binormale del carico piezometrico h è nulla significa che il carico piezometrico lungo $\vec{b}$ è costante ($h = \text{cost}$)

② Se la traiettoria è rettilinea come nel caso delleorrenti il raggio di curvatura del cerchio osculatore tende all'infinito o il secondo membro si annulla
 $\Rightarrow$ Se ne deduce che lungo la direzione normale di traiettoria rettilinea il carico piezometrico è costante

$\Rightarrow$ i vettori $\vec{n}$ e $\vec{b}$ individuano quindi l'esistenza di un piano in cui il carico piezometrico è costante: questo è il p.cir piano dei carichi idrostatici relativi

③ applicando al secondo membro la regola di derivazione euleriana

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} - \frac{1}{g} \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} \quad \text{applicando l'ipotesi di fluido in moto permanente il secondo membro si annulla}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} H = 0 \quad \text{con } H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

INTERPRETAZIONE ENERGETICA

Il carico totale è un'energia meccanica per unità di peso: è l'unica forma di energia possibile perché non ci sono attriti; questa mancanza di attriti agisce in modo che non avvengano dissipazioni di energia per attriti appunto e gli attriti che consumano energia trasformandola in calore che è energia persa e non più recuperabile.

Il teorema di Bernoulli afferma quindi che si conserva l'energia meccanica per unità di peso.

* Termine z : è legato all'energia potenziale (legato alla posizione del punto)

Scrivendo l'energia potenziale di una particella rispetto ad un piano $z=0$:

$E_{pt} = mgz$ energia potenziale di una particella di massa m alla quota $z \rightarrow$ dividendo per il peso:

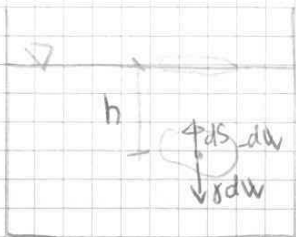
$\frac{E_{pt}}{\text{peso}} = \frac{mgz}{mg} = z$ dimostrazione che z è un'energia per unità di peso

* Termine $\frac{u^2}{2g}$: legato all'energia cinetica; se si scrive l'energia cinetica per una particella di massa m che si muove con una velocità u :

$E_{cin} = \frac{1}{2} m u^2$ dividendo per l'unità di peso

$\frac{E_{cin}}{mg} = \frac{1}{2} \frac{m u^2}{mg} = \frac{u^2}{2g}$ dimostrazione che $\frac{u^2}{2g}$ è un'energia cinetica per unità di peso

* Termine $\frac{P}{\gamma}$: è legato all'energia potenziale. Per dimostrarlo bisogna considerare un serbatoio aperto con fluido fermo dove un volume è affondato di una quantità h rispetto al pelo che coincide con il pelo



pele libero. Il volumetto è in equilibrio sotto l'azione delle forze di massa (forza peso γdW) e le spinte sul volume cioè le spinte di Archimede dS .

$$\gamma dW + dS = 0$$

Se si porta ora molto molto lentamente il volumetto in superficie: per spostare tale volume compiamo un lavoro nullo (la risultante delle forze è nulla ai fini dell'equilibrio).

Il peso si è spostato di una quantità $h \rightarrow$ il volume ha subito un incremento di energia

Esiste poi la classificazione in luci in parete grossa e luci in parete sottile (luci a spigolo vivo)

PARETE SOTTILE
 Il bordo è affilato in modo che la vena liquida se ne distacca completamente uscendo e vince l'aderenza

la vena che esce per un tratto infinitesimo è ancora dritta per vincere la gravità che tende a far curvare sempre più la vena fluendo verso il basso

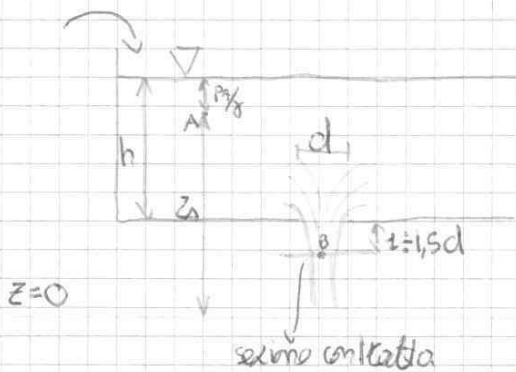
Lo stacco delle vene non può essere ad angolo come le traiettorie non possono essere a spigolo vivo senza aver delle accelerazioni infinite in tali punti!

PARETE GROSSA



Il fluido si riattacca di nuovo alla parete creando zone che non sono a p_{atm} dove si crea turbolenza

Luci in parete sottile



Il serbatoio si svuota dal bottom del fondo, ma contemporaneamente vi è un tubo che adduce altro liquido mantenendo costante il livello: il moto è permanente (è una delle ipotesi del 1° di Bernoulli)

Le altre ipotesi che sono soddisfatte è quella che essendo acqua è praticamente incompressibile e siamo nel campo di gravità (senza il fluido non uscirebbe)

Si ipotizza inoltre che il fluido sia perfetto ma è un'ipotesi tutta da verificare

↳ se le particelle hanno traiettorie abbastanza lineari e $h \gg d$ con il fatto fatto bene in prima approssimazione è accettabile.

Se ipotizziamo che il serbatoio sia molto grande rispetto al foro e la particella sia molto distante dal foro, tale particella è praticamente ferma: $u_A \approx 0$ il termine cinetico è nullo

Se ci posizioniamo $1.5d$ sotto il foro le traiettorie delle vene liquide diventano praticamente rettilinee e parallele: tale sezione si chiama sezione contratta.

Se la sezione contratta è orizzontale tutti i punti sono alla stessa quota e quindi tutti i punti sono alla stessa pressione $\Rightarrow$ tutti i punti della sezione contratta sono a p_{atm} $\Rightarrow$ ciò è vero solo se le traiettorie sono rettilinee.

Applicando il 1° di Bernoulli

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} \Rightarrow \frac{u_B^2}{2g} = \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - z_B = h_A + 1.5d$$

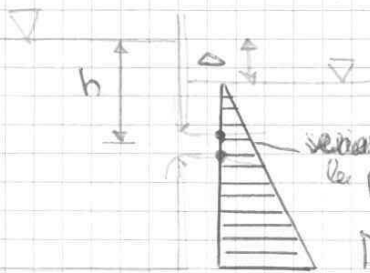
perché $u_A = 0$ si considera la part. alla part. a $z=0$ ferma

perché $p_A = p_B = p_{atm}$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{2g(h_A + 1.5d)} \text{ velocità torricelliana}$$

se $h \gg d$ $1.5d$ lo posso trascurare

Esempio



2 serbatoi con livello differente; il primo ha un foro in parete sottile che lo fa comunicare con il secondo serbatoio

sezione contratta: pressione idrostatica p è quella che c'è all'interno del serbatoio; la pressione reale p per sfondamento h

Determinato la Q della sezione contratta

Esempio



Fluido che fluisce all'esterno

punto a pressione nulla (p_{atm})

↳ punto a pressione nulla (p_{atm})

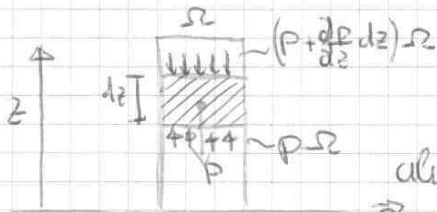
I due estremi del getto sono a p_{atm} quindi la pressione relativa nulla: come varia la distribuzione della pressione lungo la vena?

In teoria la pressione dovrebbe aumentare

spostandosi lungo la sezione della vena.

Se si fosse distribuzione idrostatica dove dimostrato che aumenta, ma in questo caso non c'è sezione contratta o quindi dove riuscire a calcolare la pressione punto a punto

Si deve quindi dimostrare che lungo tale sezione tutti i punti sono a p_{atm} :



Si consideri un serbatoio con acqua in quiete dove si considera una colonna di liquido di area Ω prendendo un cilindretto di tale colonna alta dz . È soggetto alle forze peso $\vec{P}$ e alle spinte agenti sulle superfici le devono essere in equilibrio

tra loro. la forza peso vale $\vec{P} = \gamma \cdot \Omega \cdot dz$

Le forze di superficie agenti orizzontalmente sono in equilibrio tra loro (si compensano); esistono quindi delle differenze di pressione tra la superficie superiore e quella inferiore che creano delle spinte, le quali dovranno equilibrare il peso

Equilibrio delle 3 forze: $\underbrace{\Omega \left(p + \frac{dp}{dz} dz \right)}_{\text{forza verso il basso}} + \underbrace{\gamma \cdot \Omega \cdot dz}_{\text{forza verso l'alto}} = \underbrace{p \cdot \Omega}_{\text{forza verso l'alto}}$

$$\frac{dp}{dz} dz + \gamma dz = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dz} + \gamma = 0 \Rightarrow z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \text{ ovvio perché è tutto fermo!}$$

Sulla base di ciò prendo un elemento di vena fluida che esce dal foro

Applicando il tr di Bernoulli a tale traiettoria

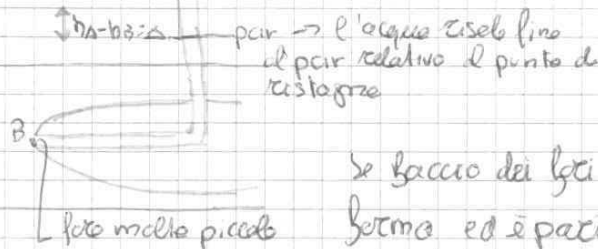
$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} + \frac{u_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B} + \frac{u_B^2}{2g} \Rightarrow u_0 = u_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

$\Rightarrow$ il pte è fermo

Se la differenza tra carichi piezometrici dei due punti risale alla velocità della corrente (o viceversa se il fluido è fermo alla velocità del tubo)

$\Rightarrow u_0$ è la velocità relativa fluido-tubo

piezometro:
circa il pte A
estende la
distribuzione
idrostatica
il pte è di
tutta la
sezione



$$u_0 = \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2g\Delta}$$

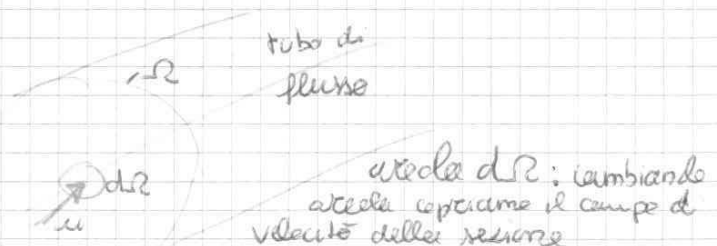
Se faccio dei fori nel tubo di Pitot, l'acqua nel tubo è ferma ed è pari al carico piezometrico del pte A $\Rightarrow$ posso fare un confronto delle letture dei pte di A e B.

È un sistema molto usato per misurare la velocità relativa sugli aerei o sulle auto da F1

Estensione del tr di Bernoulli alle correnti

Il teorema di Bernoulli obbliga a sapere il moto lungo ogni traiettoria

Si può estendere il teorema di Bernoulli alle correnti con traiettorie sensibilmente rettilinee e parallele $\Rightarrow$ in questo caso la sezione trasversale presenta una distribuzione idrostatica delle pressioni. CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE cioè variazioni molto piccole e lente della traiettoria (i casi pratici rientrano in questo caso)



la portata attraverso l'area dA vale: $dQ = u dA$

All'area infinitesima posso associare una quota, una pressione e una velocità: si può quindi associare un carico totale (che è un'energia per unità di peso)

$\gamma dQ \rightarrow$ peso che passa nell'unità di tempo

$dP = \gamma dQ$ POTENZA cioè potenza della corrente che transita attraverso l'area dA
 $\hookrightarrow$ energia per unità di tempo

della condotta dove c'è la

$P = \gamma Q H$ rappresenta il limite massimo di potenza che può essere prodotta, per tenerne conto di ciò si introduce il coefficiente di rendimento della macchina η che può variare tra 0 e 1:

$$P = \gamma Q H \eta$$

$\Rightarrow$ si può quindi avere piccole portate con grandi salti o piccoli salti e grandi portate.

Tubi convergenti e venturimetro

Il venturimetro è un dispositivo costituito da un convergente da un tratto cilindrico e poi da un divergente: effetto è effetto venturi.

Nei convergenti invece sia una corrente che scorre in un tubo di diametro D e l'ammite appunto il convergente la sezione progressivamente si stringe fino al diametro d : e il convergente è fatto bene le dissipazioni sono praticamente nulle $\Rightarrow$ si può parlare di correnti graduate $\Rightarrow$ la linea dei carichi totali è orizzontale (te Bernoulli)

Fig 5.14 pag 124 Citarini

Si fa riferimento all'asse della tubazione perché se si è in una corrente in moto permanente c'è distribuzione idrostatica delle pressioni e quindi il carico piezometrico non varia ma rimane costante: se allo zero dove per forza scende p_a , l'asse della tubazione è come se per di sé sempre individuabile, ma se prendessi un altro punto non cambierebbe niente perché il carico piezometrico è costante

V_n è la velocità media della corrente: in realtà si dovrebbe scrivere il termine cinetico

$$\alpha \frac{V_n^2}{2g} \quad \text{ma si è assunto } \alpha = 1$$

Tra i due carichi piezometrici c'è una curva la cui forma dipende dalla geometria del convergente

Il te di Bernoulli dice che il carico totale in A deve essere uguale al carico totale in B:

$$H_A = H_B$$

Il manometro differenziale indica l'ammite la differenza Δ tra i due menischi la differenza Δ tra i 2 carichi piezometrici, ma questa è anche la differenza tra i termini cinetici essendo per te Bernoulli il carico totale costante lungo tutta la corrente

Estensione del teorema di Bernoulli di fluidi reali

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$$
 è stata ricavata dal concetto di potenza

$P = \gamma QH$ se il fluido è perfetto

$P = \rho \times g \times H$ se il fluido è solo

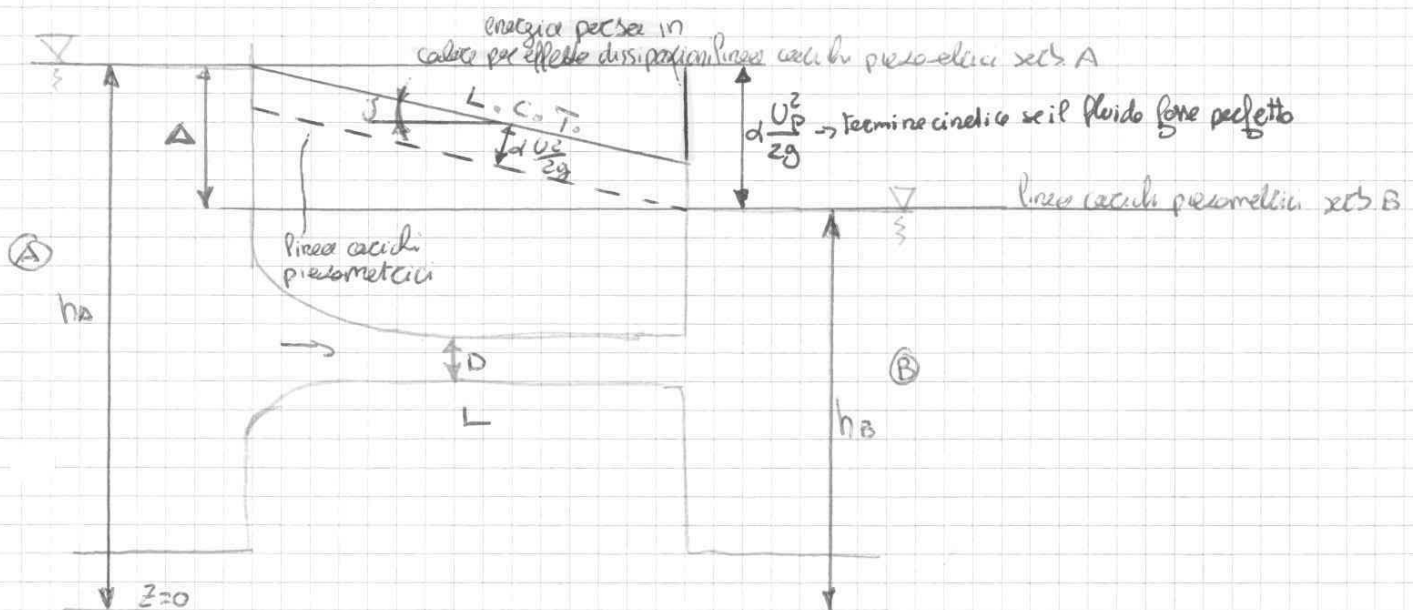
Si può vedere come la potenza massima che può ricavare una turbina o la potenza di una pompa dove avete per spostare una portata Q ad un'altezza H !

⇒ Una pompa è l'opposto di una turbina

H è nob anche come prevalenza cioè l'altrezza di dove aggiungere il fluido da sollevare

- $\mu \Delta \vec{u}$ è il termine che differenzia un fluido perfetto da uno reale

$\Rightarrow H$ non è più costante ma varia sezione per sezione perché il fluido deve spendere, durante il moto, energia per vincere gli attriti $\rightarrow$ spende energia meccanica che si degrada in calore cioè energia che è più difficile recuperare.



oss. L'inclinazione della linea dei carichi totali è nella direzione verso cui si sposta il fluido!

Se due serbatoi A e B sono collegati da un tubo lungo L e di diametro D , il fluido si muove da sx verso dx perché l'energia potenziale del fluido nel serbatoio A è maggiore di quella presente nel serbatoio B.

Rispetto ad un piano $z=0$, il livello del serbatoio A coincide con il suo carico piezometrico ha cioè l'energia che possiede è maggiore del carico piezometrico $h_B \Rightarrow$ il fluido si muove solo quando ci sono delle variazioni di energia (da punto a maggiore energia verso quello a minore energia)

Se il mezzo è di tipo permanente, la portata è costante $\Rightarrow$ Q è anche il termine cinetico

OSS!

① $\Delta Y = d \frac{U^2}{2g} + J L$

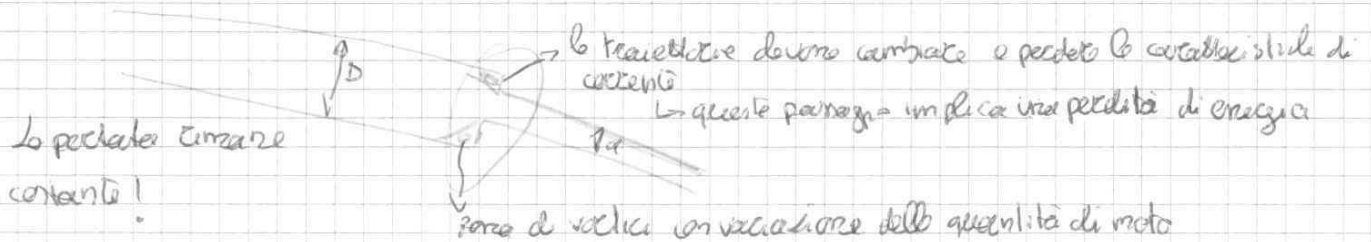
↓
differenza di energia potenziale

→ dissipatione di se ne va in calore

→ in cinetica al fondo della condotta cioè quella che aveva all'inizio meno le spese per attrito

TERKINE CINETICO RESIDUO

② Esistono anche perdite di carico concentrate cioè dove varia la sezione ^{dalla condotta} ci sono delle variazioni della corrente di variazione le traiettorie



Oltre alle perdite concentrate si hanno ovviamente perdite una certa entità nella condotta di diametro D e altre perdite condotte di diametro d .

$$H(s) = H_0 - J \cdot s - \sum \lambda$$

sommatoria delle perdite di energia di tipo concentrato

Da ciò se ne deduce il motivo per cui l'imbocco della condotta è disegregato così: se le traiettorie cambiano gradualmente le perdite sono trascurabili: si parla in questo caso di imbocco ben raccordato

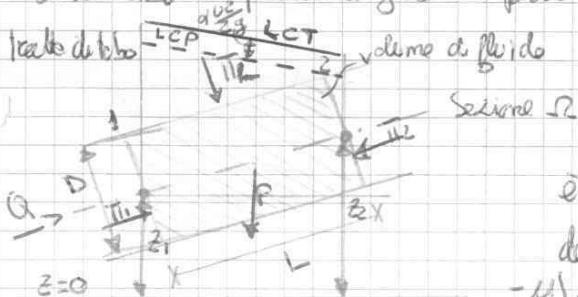
Il problema ora si sposta su come diminuire le perdite di carico distribuite e concentrate in quest'ultimo che creano turbolenze che dissipano energia

Valutazione delle perdite di carico distribuite J

Le dissipazioni nascono perché un fluido newtoniano in movimento nascono le τ .

Le J sono presenti nel termine $-\mu \frac{du}{dy}$: devo saper calcolare tale termine

Si utilizza l'equazione globale perché nei tubi è più facile da usare.



OSS. I tubi sono rotondi oltre che per ragioni tecnologiche anche perché a parità di area il perimetro è inferiore e quindi si ha una minore dissipazione dovuta all'attrito con le pareti del tubo stesso, cioè $-\mu \frac{du}{dy}$ è minore

Essendo la T distribuita lungo tutto il tubo anche le tensioni tangenziali sono distribuite in modo uniforme nella superficie laterale

$$T_0 = \frac{T}{(P \cdot D)} = \frac{\gamma W}{P \cdot L} = \frac{\gamma \cdot R \cdot J}{P \cdot L}$$

superficie laterale

P^* = contorno bagnato: zona dove il fluido tocca la parete nei tubi avendo nei rami così pieni, coseno di un la circonferenza

TENSIONE
TANGENZIALE
ALLA PARETE

$$T_0 = \gamma R J$$

$$R = \frac{J}{P^*}$$

RAGGIO IDRAULICO: è una lunghezza d'appoggio tra l'area della sezione e il suo contorno bagnato mette in relazione l'area con il contorno cioè la sede delle dissipazioni

N.B. Raggio idraulico è diverso dal raggio geometrico

Esempio: raggio idraulico sezione circolare: $R = \frac{\pi D^2}{4 \pi D} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$ 

Altro alla sezione circolare interessa quella circolare larga cioè $b = 50 \div 60$ h (cioè è praticamente una fessura); il raggio idraulico vale:

$$R = \frac{b \cdot h}{2(b+h)}$$

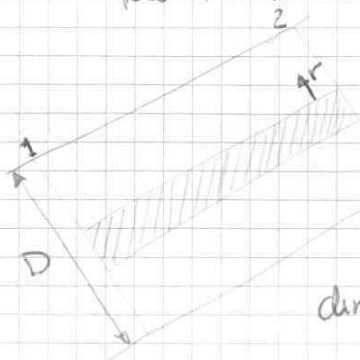
raggio idraulico di una sezione rettangolare tutta piena di fluido; se la sez. è rettangolare larga $b \gg h \rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{b \cdot h}{2(b+h)} = \frac{b \cdot h}{2b} = \frac{h}{2}$$

$\Rightarrow$ Il raggio idraulico può essere visto anche come il rapporto tra ciò che vorrebbe passare e ciò che oppone resistenza

Sulla base di ciò si intuisce il motivo per cui si studiano la sezione circolare, la quale ha l'area maggiore a parità di perimetro, e la sezione rettangolare larga, che presenta a parità di area il maggior perimetro e quindi tende a massimizzare la resistenza: queste due sezioni rappresentano quindi i due estremi, tutte le altre sezioni stanno nel mezzo.

Esempio: la sez. del po. davanti alla Gran Halle ha una larghezza dell'ordine del centinaio di metri per una profondità di circa un metro: tale sezione è molto simile a quella di sezione rettangolare larga: il rapporto larghezza altezza $\gg 10, 20, 30$!



Tensione tangenziale alle pareti.

Si prende un cilindro di fluido coassiale all'asse della condotta e si fa variare il raggio r tra 0 e $D/2$

Il problema si risolve applicando l'equazione globale di equilibrio dinamico

- Se la velocità è bassa i filletti fluidi non si mescolano tra loro $\rightarrow$ MOTO LAMINARE O REGOLARE
- Se invece la velocità è tale per cui i filletti fluidi si mescolano tra loro nascono spontaneamente componenti della velocità ortogonali alla direzione del moto $\rightarrow$ MOTO TURBOLENTO

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}$$

$\uparrow$ velocità media $\uparrow$ lunghezza caratteristica del fenomeno $\rightarrow$ r.b. è il diametro
 $\uparrow$ viscosità dinamica $\uparrow$ viscosità cinematica

NUMERO DI REYNOLDS

• Se $Re < 2000$ MOTO LAMINARE

• Se $Re > 4000$ MOTO TURBOLENTO

• Se $2000 < Re < 4000$ moto in fase transitoria tra i due tipi di moto

$Re = 2000$ valore critico

N.B. Il numero di Reynolds rappresenta il grado di turbolenza a cui è soggetto il fluido!

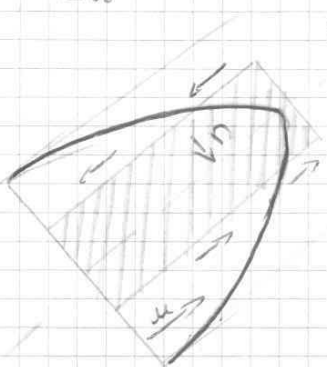
Nel moto laminare i filletti fluidi sono sempre paralleli tra loro e indipendenti: questo è l'unico caso in cui si può dare una formulazione analitica della γ , nel turbolento questo non è possibile, γ si può esprimere solo per via sperimentale.

Il moto laminare è importante per fluidi diversi dall'acqua: es. olio che scorre in piccoli tubi o fessure, acqua nel terreno dove scorre in fessure piccolissime, birre che sono fluidi molto viscosi, fanghi fognari molto densi $\rightarrow$ non è la nostra acqua in tubi per scopi civili o nei canali.

Moto laminare

$$T = \mu \int_{R_0} \frac{\partial u}{\partial r} dR = \gamma \pi r^2 L$$

legame tra velocità e raggio; non c'è il simbolo di vettore perché essendo in moto laminare le traiettorie non si mescolano tra loro e sono quindi sempre nella stessa direzione



$$\mu \int_{R_0} \frac{\partial u}{\partial r} dR = \gamma \pi r^2 L$$

la direzione di r è opposta a quella di n

L'integrale di $\frac{\partial u}{\partial r}$ è in funzione di dR , ma non cambia da p.to a p.to perché il campo di moto è sempre in una direzione:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \text{cost} \Rightarrow \mu \frac{du}{dr} \rightarrow u = u(r) \Rightarrow \int_{R_0} dR = 2\pi r L$$

$\uparrow$ se il moto è regolare $\rightarrow$ la velocità è solo più funzione della sua distanza dal centro

$\rightarrow$ superficie laterale del cilindro

Il problema si può risolvere come nel caso di sezione circolare applicando l'equazione di equilibrio globale dinamico o integrando direttamente le equazioni di Navier-Stokes; se si applicano quest'ultime

$$-\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma z) - \mu \Delta_z u$$

↳ deriva dal fatto che sono nel campo gravitazionale: $\vec{F} = -\gamma \vec{e}_z$

Le altre componenti sono nulle perché siamo in regime di moto laminare

⇒ se la sezione è rettangolare larga come in questo caso, qualsiasi sezione ^{verticale} è di simmetria

$u = u(y)$ intesa solo la distanza dal punto dallo due lastre (sono lontano dai bordi)

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

moto uniforme sostituendo nell'eq. di Navier-Stokes

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma z) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$h = H$ in caso di moto uniforme ⇒ cioè J

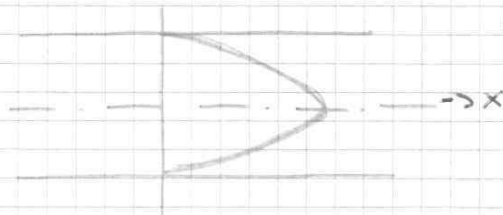
$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

$$\text{se } y=0 \rightarrow \frac{du}{dy} = 0$$

integrando con le condizioni al centro

$$\text{se } y = \pm h \rightarrow u = 0$$

$$u = \frac{\gamma J}{2\mu} (h^2 - y^2) \quad \text{il profilo di velocità è di tipo parabolico}$$



Cio è vero se le lastre sono infinite ⇒ è un'approssimazione buona in caso di sezione rettangolare larga

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\gamma J}{\mu} b h^3$$

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{1}{3} \frac{\gamma J}{\mu} b h^2$$

Dal confronto dei due casi:

$$R = D/4 \Rightarrow D^2 = 4R^2$$

$$\textcircled{P} \quad U = \frac{1}{32} \frac{\gamma J}{\mu} D^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma J}{\mu} R^2$$

$R = h$

$$\text{---} \quad U = \frac{1}{3} \frac{\gamma J}{\mu} h^2 = \frac{1}{3} \frac{\gamma J}{\mu} R^2$$

Con queste due relazioni si descrive tutto il moto laminare
le altre sezioni stanno nel mezzo
Il raggio idraulico non è sufficiente per descrivere il problema
necessito anche dello J
Se in caso di triangolo equilatero si cerca di determinare
il costante J per via analitica

$$\vec{F}_c = \int_{\Omega} \vec{\phi}_n d\Omega$$

$$\vec{F}_c = \frac{1}{T} \int_T \left[\int_{\Omega} \vec{\phi}_n d\Omega \right] dt = \frac{1}{T} \int_T \int_{\Omega} (\vec{\phi}_n + \vec{\phi}'_n) d\Omega dt \quad \text{pone scombinare i due integrali:}$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{T} \int_T \vec{\phi}_n dt + \frac{1}{T} \int_T \vec{\phi}'_n dt \right) d\Omega \Rightarrow \vec{F}_c = \int_{\Omega} \vec{\phi}_n d\Omega$$

$\xrightarrow{\text{valori di medio}}$

La decomposizione lineare vale bene tutte le volte che le grandezze sono lineari!

$\Rightarrow$ Per $\vec{H}_c - \vec{H}_{ci}$ ciò non è più vero perché termini non lineari!

$$\vec{H} = \rho \int_{\Omega} \vec{u} u_n d\Omega$$

$$\vec{H} = \frac{1}{T} \int_T \rho \int_{\Omega} (\vec{u} + \vec{u}') (\bar{u}_n + u'_n) d\Omega dt = \frac{1}{T} \int_T \rho \int_{\Omega} \vec{u} \bar{u}_n + \vec{u} u'_n + \vec{u}' \bar{u}_n + \vec{u}' u'_n d\Omega dt =$$

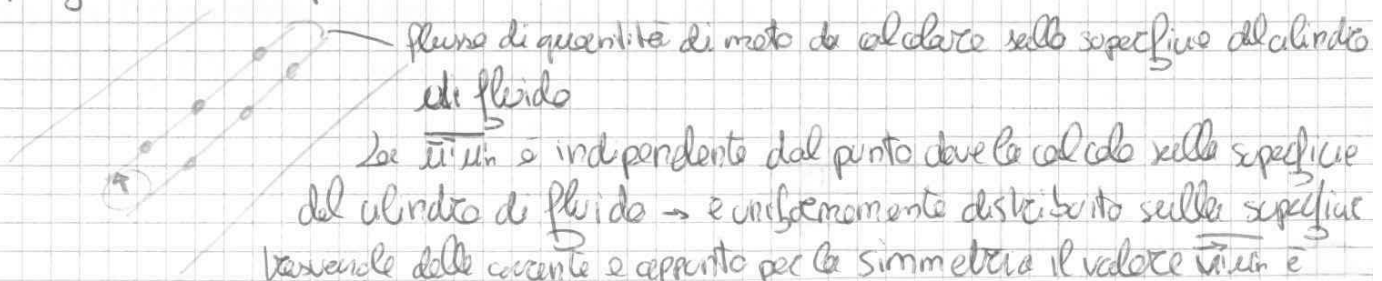
$$= \int_{\Omega} \rho \vec{u} \bar{u}_n d\Omega + \int_{\Omega} \rho \overbrace{\vec{u} u'_n}^{\text{temporali}} d\Omega$$

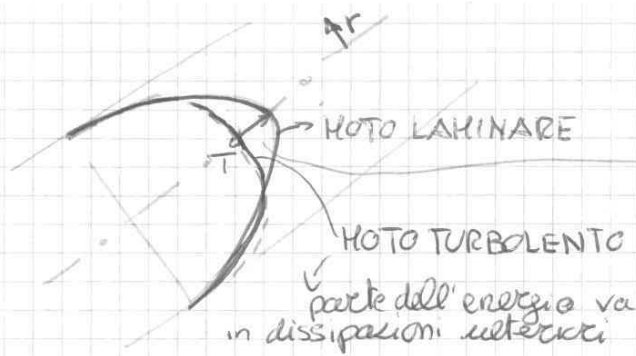
$\hookrightarrow$ valore medio del prodotto delle componenti di agitazione del vettore velocità $\vec{u}$ e la sua componente normale u_n

Da ciò se ne deduce che per tutti i termini dell'espressione globale di equilibrio dinamico rimane quello relativo al flusso delle quantità di moto applicando la regola di decomposizione di Reynolds rimane solo la componente media; i flussi delle quantità di moto, che sono relativi alla parte convettiva delle velocità, sono termini non lineari $\rightarrow$ non vale la regola di decomposizione di Reynolds.

Il problema della turbolenza è legato al termine $\overline{u' u'_n} \neq 0$ in quanto la media del prodotto non è nulla!

$\rho \int_{\Omega} \overline{u' u'_n} d\Omega$ è legato al 1° dell'impulso: questa grandezza porta a nuove tensioni tangenziali $\rightarrow$ se ci sono variazioni di quantità di moto ci sono variazioni delle forze e quindi di sforzi in gioco che sono sforzi di natura tangenziale sulla parete laterale.





$$u(r) = \bar{u} = \underbrace{\frac{85}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)}_{\text{parte laminare}} - \underbrace{\frac{8}{\mu} \int_r^{\frac{D}{2}} u'v' dr}_{\text{aggiungo questo termine}}$$

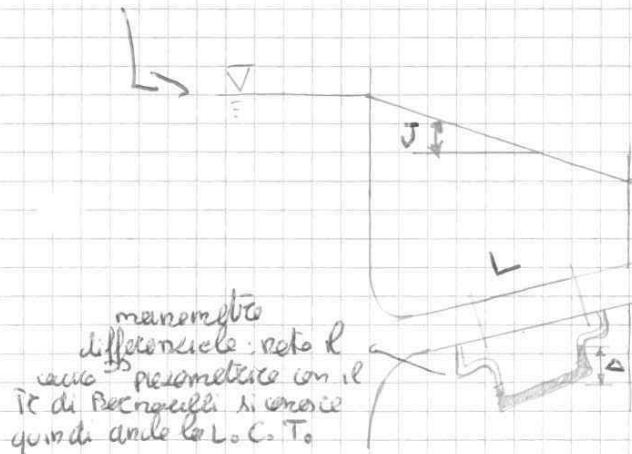
questo è il motivo $\leftarrow$ dove sapere la velocità perché va meno veloce nelle due direzioni.
 $\rightarrow$ spreco più energia per vincere le ulteriori dissipazioni.

Il problema si può risolvere in due modi:

- 1) studiare l'andamento temporale della velocità e risolvere le eq. di Navier-Stokes
- 2) metodo ingegneristico

U.B. la linea dei carichi totali per i fluidi reali è inclinata di una certa quantità per i fluidi in moto laminare (funzione dell'entità delle dissipazioni); per fluidi in moto turbolento la linea dei carichi totali è più inclinata per via delle maggiori dissipazioni di energia.

Esistono formule simili a quelle del moto laminare che tengono conto della turbolenza come effetto $\rightarrow$ sono di tipo sperimentale e non analitico (altrimenti dovremmo conoscere u e v per trovare τ per via analitica.)



Per effettuare una misura sperimentale delle dissipazioni si deve misurare la caduta di tubo lungo L e con una certa differenza di energia.

La J si sa calcolabile analiticamente solo se il moto è laminare; se il moto è turbolento si possono ricavare per via sperimentale.

La J sono le variazioni di carico totale ma essendo il moto uniforme è quindi anche dei carichi piezometrici.

Questo vice presenta il vantaggio che è facile fare la misura ma non si ha la conferma per via analitica.

$$U = \frac{1}{32} \frac{85}{\mu} D^2 \rightarrow U = \frac{1}{32} \frac{8}{\mu} \frac{4T_0}{8D} D^2 \rightarrow T_0 = \frac{8\mu U}{D}$$

$\rightarrow$ le tensioni che devo trovare sono fatte così (ricavate a partire eq. moto laminare)

$$T_0 = \gamma \frac{D}{4} J \rightarrow \text{ricavo } J \text{ e lo sostituisco} \rightarrow J = \frac{4T_0}{\gamma D}$$

⇒ Fisicamente il termine λ è il rapporto tra le perdite di carico distribuite di un condotto lungo quanto il diametro e il termine cinetico residuo.
 ↳ JD deve essere il più piccolo possibile e U^2 il più grande possibile

$$\Rightarrow \lambda = \frac{64}{Re} \Leftrightarrow U = \frac{1}{32} \frac{\gamma S}{\mu} D^2 \quad \text{solo se il moto è regolare!}$$

↳ sezione circolare

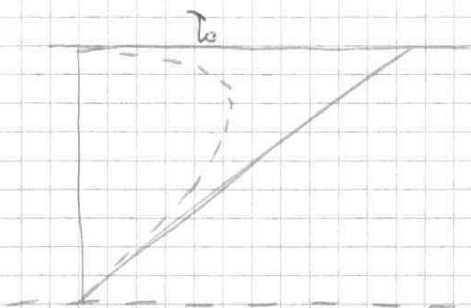
Dimostrazione:

$$\lambda = 8\lambda_1 = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = 8 \frac{\frac{8\mu U}{D}}{D \rho U^2} = 64 Re^{-1}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{96}{Re} \Leftrightarrow U = \frac{1}{3} \frac{\gamma S}{\mu} h^2 \quad \rightarrow \text{sezione rettangolare larga moto laminare!}$$

Dimostrazione

15-11-2010



L'energia necessaria per spostare del fluido in un condotto in pressione deve essere superiore alle tensioni:

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} \int_0^R \mu \frac{du}{dr} + \overline{\rho u'v'} \quad \text{media temporale: tempo caratteristico del fenomeno turbolento;}$$

r variabile alle normale positive entrante

L'ordine è delle decine di minuti per turbolenza nei tubi di uso civile per acqua.

Se il numero di Reynolds sale, aumenta la velocità e quindi prevalgono le dissipazioni turbolente $\overline{\rho u'v'}$, se Re scende prevalgono gli sforzi di natura viscosa.

Nel moto laminare $\tau = f(\mu, U, D)$

$$\lambda = \frac{DS}{U^2 \gamma} \quad Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{UD}{\nu}$$

effetti turbolenti in funzione degli effetti laminari

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{rapporto quanta energia si vede per spostare un fluido in un condotto circolare in moto laminare.}$$

Nel moto turbolento: $\tau = f(\rho, \mu, D, U, \epsilon)$ tensione di parete

Per risolvere il problema devo necessariamente procedere in modo ingegneristico e vedo quindi quali sono gli effetti dello τ e la tensione di parete τ_0 è funzione quindi del tipo di fluido, velocità media della corrente U , lunghezza caratteristica

$$T_o = f(\rho, U, \mu, D, \epsilon) = \lambda(Re, \epsilon) \rho U^2 \quad \text{se } \epsilon > 0$$

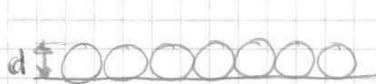
Si deve quindi mettere in relazione la scabrezza con lo spessore dello strato laminare
 $\rightarrow$ la scabrezza deve essere una lunghezza!

Problema: lunghezza di che tipo? $\rightarrow$ si cade in contraddizione per qualsiasi caratteristica della scabrezza: altezza massima dello asperità, altezza media, media geometrica



Ipotezando una scabrezza fatta a denti di sega cambia se facciamo andare uno stesso fluido in direzione opposta nonostante, le altezze massime o medie siano uguali $\Rightarrow$ la scabrezza non la trova per via geometrica!

Nota nei tubi scabbi $\rightarrow$ scabrezza alla Nikuradse



Nikuradse indici sferette alla parete di un tubo liscio le sferette sono ad esempio sabbia ben vagliata in modo da avere il diametro d di tali sferette il più possibile costante

Facendo variare Reynolds e riportando i punti su un grafico si ottengono per interpolazione varie curve $\Rightarrow$ curve di Nikuradse

Sul grafico si evidenzia una retta di pendenza costante $\rightarrow \lambda = \frac{64}{Re}$ (N.B. il piano è logaritmico)

ϵ/D : scabrezza relativa rispetto al diametro D (grandezza adimensionata)

Diminuendo Re la scabrezza si sente meno perché le asperità sono tutte contenute nel substrato in moto laminare, mentre aumentando Re la scabrezza si sente sempre di più perché le punte bucano lo strato in moto laminare.

Ulteriore curva $Re^* = 70$ le curve diventano orizzontali e sono parallele all'asse delle ascisse ($\log Re$) indipendentemente dal valore di $Re \rightarrow$ sono di moto permanentemente turbolento. Nel moto turbolento completamente sviluppato conta solo la scabrezza della tubazione

$$Re^* = \frac{d u^*}{\nu}$$

dove d $\rightarrow$ diametro delle sferette

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$$

velocità d'attrito $\rightarrow$ è la trasformazione in velocità dello sforzo tangenziale τ_o

Nella realtà però la scabrezza non è quella di Nikuradse, ma i tubi commerciali hanno un'altra geometria di scabrezza $\rightarrow$ si parla di scabrezza equivalente di Nikuradse

Tecnicamente ci si sta spostando sempre più dalla zona di moto assolutamente turbolento verso la curva di tubo liscio.
Nel passato si utilizzavano formule particolari.

FORMULE PRATICHE:

$$J = P \frac{Q^2}{D^5}$$

DARCY

valore per moto assolutamente turbolento → manca numero di Reynolds!!

$$n = 5 \div 5,33$$

↳ dovuto alla natura sperimentale!

N.B. la scabrezza è riassunta in P → in base al tipo di materiale (acciaio, cemento, ...) il P è ovviamente differente

OSS.

Il legame tra J e Q è di tipo quadratico: moto turbolento → significa che se raddoppio la portata Q si quadruplica la J , se invece dimezzo il diametro la J varia di circa 32 volte ($n \sim 5$)

raggio idraulico

$C = 25$ con area rettangolare e calcolo la parte con R

$$U = X \sqrt{R J}$$

CHEZY

strutturalmente è simile alla formula di Darcy

se metti il raggio idraulico adatto si utilizza anche per i canali → non prima applicazione → correnti a pelo libero in moto permanente

dove X contiene il tipo di materiale:

↳ $J = U^2$ moto permanentemente turbolento

$$X = \frac{87}{1 + \frac{28}{\sqrt{D}}}$$

BAZIN

r è il coeff. di scabrezza nm e peso specifico

$$X = C R^{1/6}$$

GAUKLER-STRIKLER

$$X = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

MANNING

$C = \frac{1}{n}$ legame tra C di Strickler e $1/n$ di Manning

Perdite di carico localizzate

Le perdite di carico concentrate sono spese di energia che il sistema deve fare per oltrepassare l'ostacolo, allargarsi, restringersi, flange mal saldate, valvole: avvengono quindi ogni volta che ci si allontana dalla corrente

FIG. 2.13 Citani: il manometro tra i punti N e H la corrente deve superare tale

Il salto di energia ΔH che fa la linea dei carichi totali è dovuto alla perdita di carico concentrata → compare al campo di del tratto.

Inserendo nell'equazione globale di equilibrio dinamico in direzione del moto:

$$-\gamma \Omega (z_2 - z_1) + p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 + \rho Q U_1 - \rho Q U_2 = 0$$

$$\Omega_2 \left[\underbrace{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right)}_{h_1: \text{carico piez. sezione 1}} - \underbrace{\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)}_{h_2: \text{carico piez. sezione 2}} \right] = \frac{Q}{g} \underbrace{(U_2 - U_1)}_{< 0}$$

$\Rightarrow$ se $U_2 - U_1 < 0$ allora anche il primo membro è < 0
cioè $h_1 - h_2 < 0 \Rightarrow h_1 < h_2$

$\Rightarrow$ Si ha quindi un concetto di carico piezometrico

Le due linee non hanno la stessa inclinazione perché il diametro è diverso $\Rightarrow$ bisogna vedere anche dalla legge di Poiseuille cambiando il diametro cambia la J !

$$\Delta H = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g}$$

$$h_1 - h_2 = \frac{Q}{g \Omega_2} (U_2 - U_1) \text{ sostituendo in } \Delta H$$

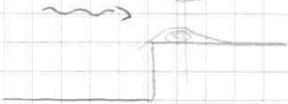
$$\frac{Q}{2g \Omega_2} (U_2 - U_1) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g}$$

$$\Delta H = \frac{1}{2g} (2U^2 - 2UU_2 + U_1^2 - U_2^2) \Rightarrow \Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \text{ PERDITA DI BORDA}$$

Il fluido in caso di brusco allargamento spende la quota ΔH che non si recupera più!

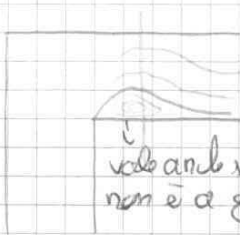
ma la perde dalla sezione in avanti: ci si ricorre al caso di brusco allargamento

Sperimentalmente si è visto che la perdita non è nell'allargamento



$$\Delta H = \eta \frac{U_2^2}{2g}$$

Casi analoghi a cui ci si ricorre al brusco allargamento:



valvola se la curva non è a gomito



imbocco di un serbatoio



valvola

Si associa l'equazione di continuità che dice che la portata è costante:

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2$$

causa di variazioni dell'LCI
→ situazione di disequilibrio

Se ci sono più perdite concentrate? O più tubi di diametro o materiale diverso?
Se c'è una valvola a sfera chiusa?

↳ la L.C.T. subisce variazioni: se ci sono altre perdite di carico concentrate o una valvola la L.C.T. ha un salto (assunto di concentrare le perdite nella sezione)

OSS!

* Le perdite di carico concentrate non dipendono dalla lunghezza della condotta, ma solo dal termine cinetico o meno di un coefficiente

* Le perdite di carico distribuite dipendono, invece, esclusivamente dalla lunghezza delle condotte.

Lunghe condotte: quando le perdite di carico distribuite sono assolutamente prevalenti rispetto alle perdite di carico concentrate cioè quando quest'ultime sono del tutto trascurabili rispetto a quelle distribuite

↳ N.B. Sono trascurabili non nulle!

Questo assunto comporta una semplificazione dell'equazione di bilancio energetico

Brevi condotte: non è possibile effettuare questa semplificazione cioè trascurarle rispetto alle perdite di carico distribuite

$$\frac{U^2}{2g} = \int L = \int n D \quad \text{dove } n D = L \quad n = \text{di diametro}$$

↳ quanto deve essere lunga la condotta affinché la perdita di carico distribuita ugua gli la perdita di carico concentrata

$$\lambda = \frac{D J}{\frac{U^2}{2g}} \Rightarrow D J = \lambda \frac{U^2}{2g} \text{ e sostituendo } \Rightarrow \frac{U^2}{2g} = n \lambda \frac{U^2}{2g} \Rightarrow 1 = n \lambda \Rightarrow n = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{es. } n = \frac{1}{\lambda} = 40 \Rightarrow \lambda = 0,025$$

Significa che quando la condotta è lunga circa 40 volte il diametro le perdite di carico concentrate equivalgono quelle distribuite; ma se la condotta ha $n = 4000 \div 5000 D$ le perdite di carico concentrate sono dell'ordine di circa 1%

$n = 4000 \div 5000 D$ per il diametro di 5cm la condotta è lunga 200m! → lunga condotta
⇒ poco trascurate le perdite di carico concentrate.

c) verifica: cioè deve verificare il sistema sulla base della scelta dei diametri commerciali
 → deve valutare sulla base dei risultati ottenuti se apporlate dei correttivi come perdite di carico concentrate (valvole, ecc) o cambiare sistema

I vincoli sono di mercato ed economici

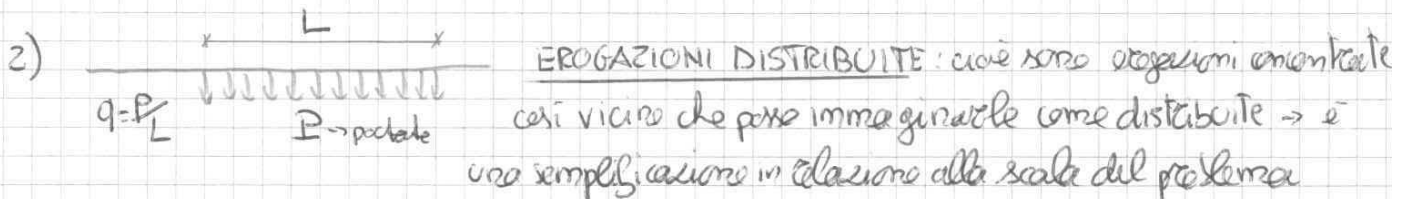
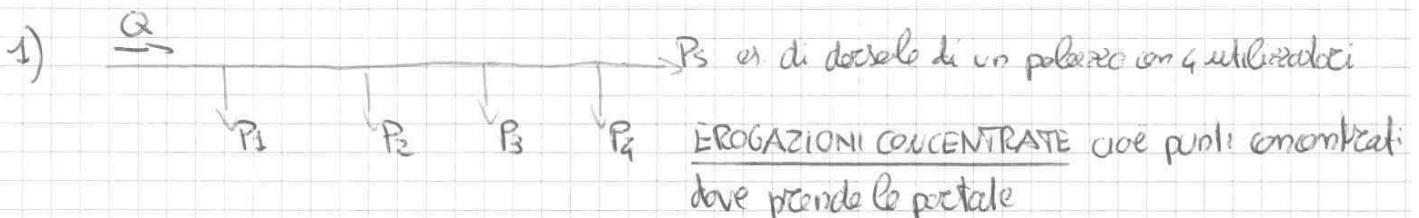
↳ bisogna tradurre le forzanti esterne cioè ciò che impingono il mercato e altri vincoli e tradurli in equazioni

⇒ Il sistema presenta analogie con il problema delle resistenze elettriche.

EROGAZIONI

Generalmente un acquedotto è fornito da fiumi, dighe, altri serbatoi, ecc...; si deve poi progettare il tubo che distribuisce l'acqua alle utenze chiamato dorsale

Normalmente per il tubo dorsale ci sono ben più di un solo utente



Prese singolarmente sono erogazioni concentrate, ma se il tubo è lungo L e complessivamente il sistema porta fuori una portata P , allora posso fare finta che per ogni tratto dx venga portata fuori una una portata per unità di lunghezza $q = \frac{P}{L}$

Esempi di tali sistemi sono gli irrigatori goccia a goccia oppure tanti palazzi che arrivano dalla dorsale stessa (a livello di singolo edificio è una erogazione concentrata → dipende dalla scala del problema)

Nel caso di lunghe condotte viste le semplificazioni la l.c.t. coincide con la linea dei carichi piezometrici.

oss.

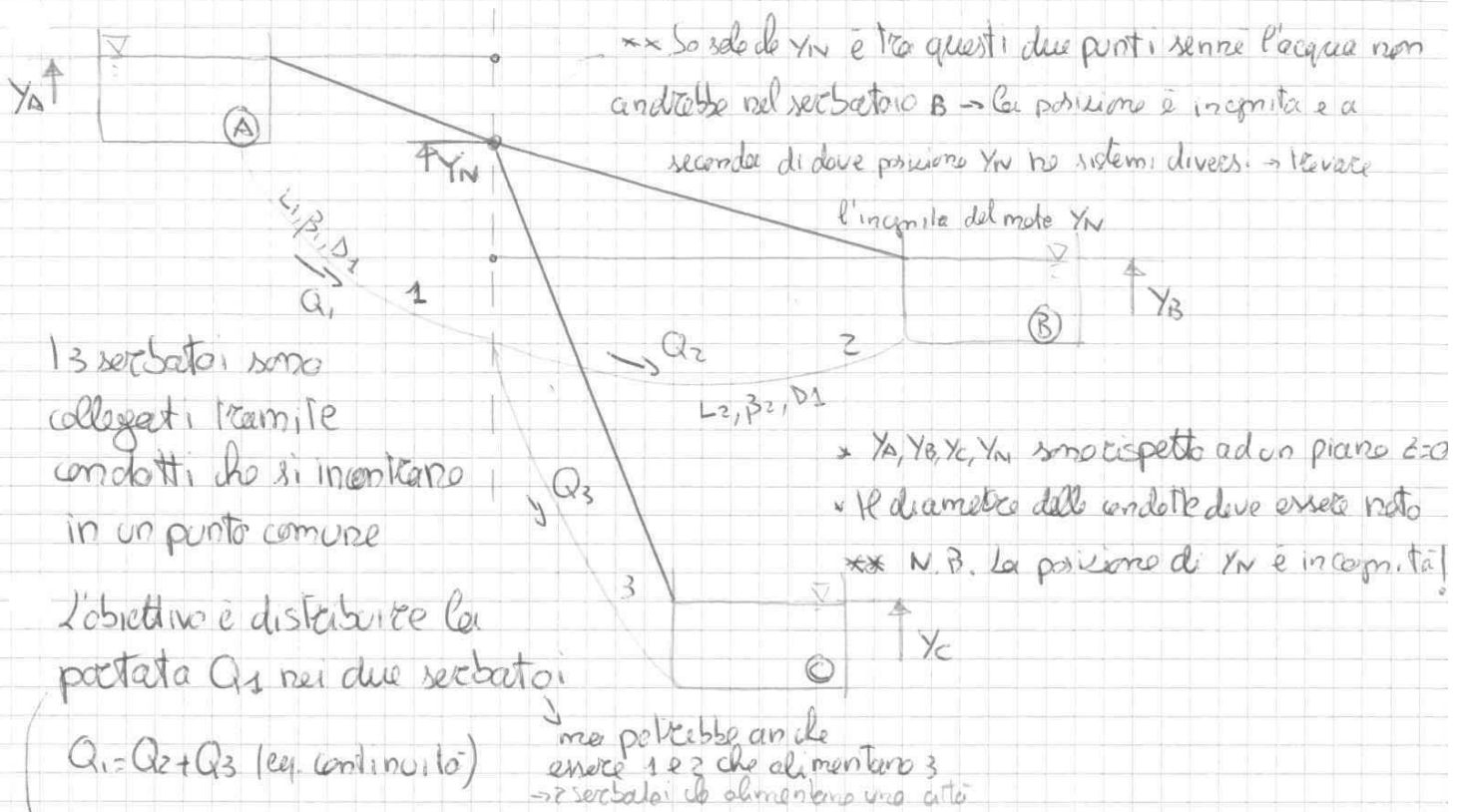
Normalmente le dorsali sono ad anello e non a linea singola

Erogazioni distribuite ciltini pag 263

Ogni metro di tubo fa uscire una portata $p = qL$

Erogazione centralizzata problema dei 3 serbatoi

È il problema alla base della progettazione degli acquedotti



Si deve calcolare i diametri delle 3 condotte noti posizione dei serbatoi, geometrie e materiali
 ↳ problema di progetto

Le lunghezze delle condotte dipendono dalla geometria e dalla topografia del luogo quindi è imposta!

Il problema si inizia sempre a risolvere dal tracciamento della linea dei carichi piezometrici che nel caso di lunghe condotte coincide con la linea dei carichi totali

N.B. Nel nodo il carico è unico!

oss. Y_N è il carico piezometrico del nodo non la quota del nodo!!

Finché non so quanto sono i diametri non so dove esattamente come vanno le linee dei carichi; il carico del serbatoio A deve per forza avere un andamento come disegnato, se no non riuscirebbe ad alimentare gli altri due serbatoi e quindi non può nemmeno andare al di sotto dell'orizzontale per il pelo libero del serbatoio B

Assume quindi importanza anche la direzione della portata

Alle 3 incognite dei diametri si aggiunge quella della posizione di Y_N
 ↳ ho bisogno di 4 equazioni

I diametri si ricavano dalle equazioni di bilancio energetico

$$D_1 = \left(\frac{B Q_1^2 L_1}{Y_A - Y_N} \right)^{1/n}$$

$$D_2 = \left(\frac{B Q_2^2 L_2}{Y_A - Y_N} \right)^{1/n}$$

$$D_3 = \left(\frac{B Q_3^2 L_3}{Y_A - Y_N} \right)^{1/n}$$

$$\frac{dC_{TOT}}{dY_N}$$

Le sostituisco nella formula di C_{TOT} e la derivo rispetto Y_N

La condizione di minimo costo vale:

$$\frac{D_1^{2+n}}{Q_1^2} = \frac{D_2^{2+n}}{Q_2^2} + \frac{D_3^{2+n}}{Q_3^2}$$

oss. Compare solo il diametro e la portata; il primo membro è relativo solo alla condotta 1, il secondo membro è relativo alle condotte 2 e 3

⇒ Dal punto di vista del nodo la condotta 1 è entrante, le condotte 2 e 3 sono uscite dal nodo

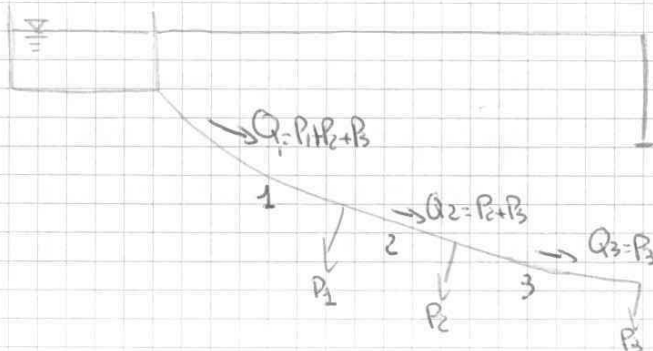
$$\sum_{\text{arriva}} \frac{D^{2+n}}{Q^2} = \sum_{\text{uscita}} \frac{D^{2+n}}{Q^2}$$

Risolvendo il sistema (che è non lineare) e ricavo $D_1, D_2, D_3, Y_N \rightarrow$ posso iniziare la fase di verifica

Dato le condizioni dovute ai diametri commerciali e carichi presuntivi $\rightarrow$
 $\rightarrow$ le incognite diventano le portate che circolano in quel sistema tenendo conto del fatto tubi usati - tubi nuovi (eventualmente introduco sovraccarichi per creare perdite di carico e mantenere la portata costante)

⇒ In fase di verifica la 4ª equazione non è più quella di minimo costo, ma $Q_1 = Q_2 + Q_3$ cioè l'equazione di continuità (coincidente in fase di progetto)

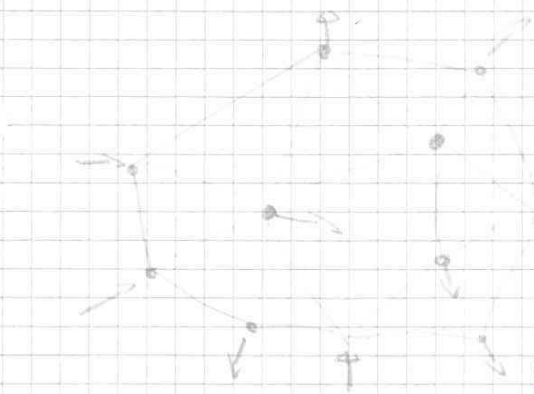
Distribuzioni canalizzate



Il problema è trovare D_1, D_2, D_3

$\Delta h \rightarrow$ perdita del sistema cioè voglio che l'ultima utenza abbia ancora un certo carico $\rightarrow$ deve stare all'interno di certi limiti

Reti - sistemi di condotte



L'acqua a Torino è prelevata dai pozzi e dal Po dopo essere stata opportunamente trattata.

Una rete idrica di una città è costituita da decine di migliaia di maglie chiuse.

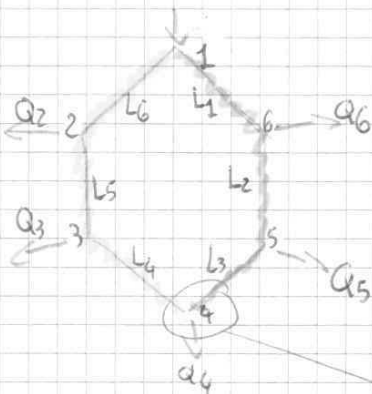
Il numero di nodi, lati e maglie è molto

NODO: sistema in cui entrano/escono almeno 3 portate

Le reti sono costruite così perché se ci sono guasti, le utenze sono raggiunte da un'altra via → una singola dorsale non può garantire ciò in caso di rottura interrompendo così il servizio: questo potrebbe creare dei problemi in certi casi.

Deve innanzi tutto essere noto il carico piezometrico detto anche cado piezometrico dei nodi in entrata i quali devono sottostare ad una serie di vincoli.

RISOLUZIONE DI UNA MAGLIA



4 erogazione in entrata e 5 in uscita

Obiettivo: calcolare il diametro dei 3 lati della maglia
↓ fase di progetto

Si procede aprendo un nodo (es. nodo 4) e quindi la portata

esistente Q_4 diventa ad esempio $Q_{4/2}$ →

→ il vantaggio è che si è trasformata

la maglia in un due dorsali aventi

Q_1 in ingresso e 3 erogazioni di cui:

l'ultima erogazione è per entrambi $Q_{4/2}$

⇒ Ci si riconverte quindi al problema di risoluzione di una dorsale con le relative erogazioni.

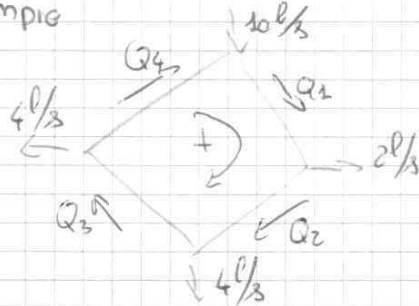
Aspetto negativo non esistono regole tecniche sui tagli migliori da fare, non ho più le stesse condizioni che avevo all'inizio cioè non è detto che una maglia chiusa in cui entrano $10\frac{1}{2}$, togliendola eroga $5\frac{1}{2}$ per parte perché dipende da cosa c'è a monte, dai diametri, ecc. → ci si basa molto sull'esperienza: in questo caso è quasi logico togliere nel p104 perché è simmetrico rispetto alla portata in ingresso, ma se un numero elevatissimo di maglie è un lavoro complesso.

$\sum r_i Q_i'^2 + 2 \sum r_i Q_i' q_c + \sum r_i q_c^2 = 0$ se sono vicine alle portate teoriche q_c è piccolo:
 $\Rightarrow$ il termine $\sum r_i q_c^2$ è quindi trascurabile

$$q_c = - \frac{\sum r_i Q_i'^2}{2 \sum r_i Q_i'}$$

non q_c vado a correggere $\rightarrow$ metodo iterativo che converge molto rapidamente

Esempio



rete bilanciata $\rightarrow$ assegno un verso di percorrenza

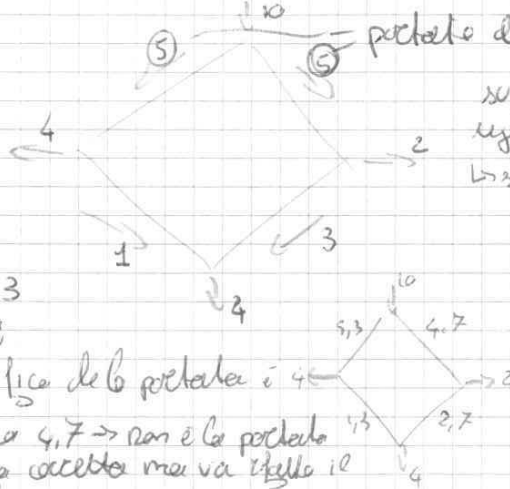
portate di primo tentativo

sopporti diametri, β , lunghezza
 uguali $\rightarrow r_i$ uguali
 $\rightarrow$ solo ai fini di calcolo

$$q_c = - \frac{8^2 + 13^2 - 1^2 - 8^2}{2(5+3+1+5)} = - \frac{8^2}{28} \sim -0,3$$

significa che portate $\pm 0,3$

per $4,7 \rightarrow$ non è la portata
 teorica corretta ma va usata il
 calcolo



Oss Q^2 deriva da Darcy quindi è legato alla perdita di carico $\rightarrow$ se la simmetria è
 nella significa che ci sono termini positivi e negativi

$$\sum r_i Q_i'^2 = \sum r_i Q_i' |Q_i'|$$

$\rightarrow$ portata positiva da portata positiva e
 portata negativa da portata negativa

$$\sum r_i Q_i' = \sum r_i \frac{Q_i'^2}{|Q_i'|} = \sum r_i \frac{Q_i'}{|Q_i'|} |Q_i'| = \sum r_i |Q_i'|$$

cancello Q_i' e
 una portata per una portata

$\rightarrow$ i termini al denominatore sono sempre positivi

Oss.

- 1) Il metodo converge molto rapidamente anche se si parte da condizioni molto sbilanciate.
- 2) Dei 10 l/s che entrano 2 escono da una parte e ne vanno 4 e 2 dall'altra mi aspetto che molte va da una parte e meno dall'altra $\rightarrow$ la rete anche se ho parecchia differenza di elevazione, le portate rimangono mediamente costanti e quindi sono più stabili in caso di guasti: il sistema da solo cerca di mantenere costanti le cose

Se ci sono più maglie, la progettazione è effettuata come prima, ma effettuare il taglio è più complesso $\rightarrow$ per la verifica si applica molte volte il metodo di Hess in ciascuna maglia continuando ad aggiustare



$T=24h$ è il tempo ciclico caratteristico del sistema $\rightarrow$ se non c'è non c'è a guidare il sistema stesso

$\hookrightarrow$ Dovremmo a ipotizzare la ciclicità del fenomeno $\rightarrow$ in 1gg è la ciclicità del serbatoio di acqua x uso civile

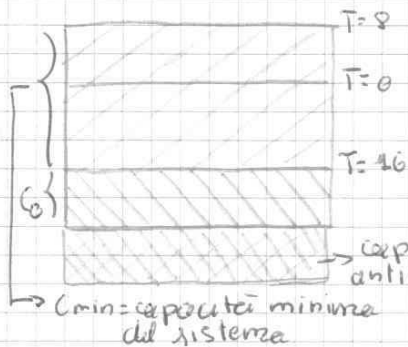
$\Rightarrow$ Il serbatoio in sostanza reagisce trasformando i flussi in volumi $\rightarrow$ volumi deflotti dal serbatoio istante per istante

Il volume si trova dalla portata moltiplicandola per il numero di secondi del fenomeno

$\hookrightarrow$ Se le portate variano si fa l'integrale: $Q = \frac{dV}{dt} \rightarrow \int dV = \int Q dt$

$\hookrightarrow$ se Q è costante $\rightarrow V$ è una retta

$\hookrightarrow$ se $Q=0 \rightarrow V$ è una retta orizzontale

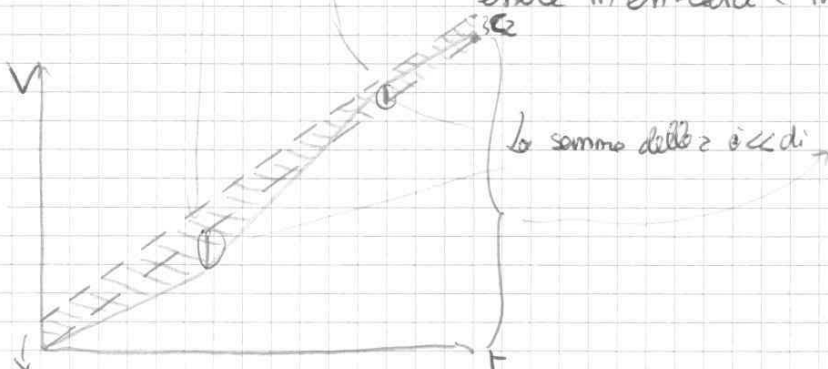


Il livello nel serbatoio sale fino allo 8 (rispetto a $Q_A = A$) $\rightarrow$ livello aumenta

Dallo 8 inizia a scendere in quanto iniziano i deflussi: fino a quando i deflussi si equivalgono a $T=16$ e gli afflussi sono superiori

$$C_{min} = |C_1| + |C_2|$$

N.B. I segni devono essere positivi perché i volumi possono essere in entrata e in uscita $\rightarrow$ intermedia la somma delle C



Si prende la curva dei volumi affluenti (tratti eguali) e la si fa scorrere tangente alla curva dei deflussi $\rightarrow$ e si trova l'intersezione di una quantità $C_2 \rightarrow$ la somma $C_1 + C_2$ rappresenta istante per istante il volume all'interno del serbatoio, cioè $V_A - V_D$

La C_m è appunto la capacità minima del serbatoio e quindi potrebbe essere niente altro: in realtà c'è una C_0 che serve affinché gli organi di rilievo rimangano sempre coperti e non aspirino aria che potrebbe causare danni.

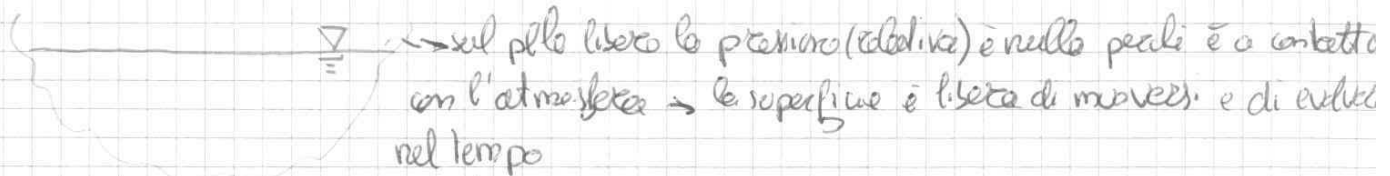
Se il serbatoio è di uso civile deve contenere anche un'ulteriore capacità adibita come antincendio.

$\Rightarrow$ la capacità serbatoio è quindi la somma delle 4 capacità: $C_1 + C_2 + C_0 + C_{antincendio}$

CORRENTI A PELO LIBERO

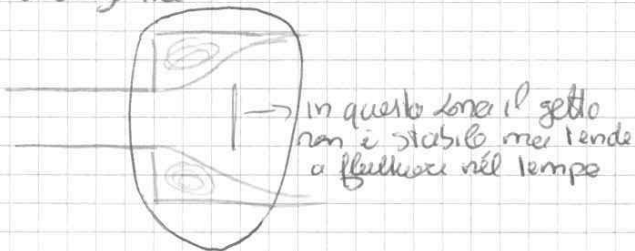
Si parla sempre di correnti cioè moto del fluido in una sola direzione.

La differenza rispetto alle correnti in pressione, dove la geometria è nota, nelle correnti a superficie libera ha una porzione di fluido che è a contatto con l'atmosfera → la superficie evolve nel tempo →



La geometria diventa un'incognita stessa del problema → anche applicando le equazioni di Navier-Stokes e sperando risolvere anche l'incognita del dominio di integrazione in quanto la superficie varia a causa delle variazioni di pressione e del campo di moto.

Nelle correnti in pressione il moto è uniforme con tratti a geometria costante molto estesi rispetto a zone circoscritte con geometria che cambia: esistono piccole zone in cui il moto non è uniforme.

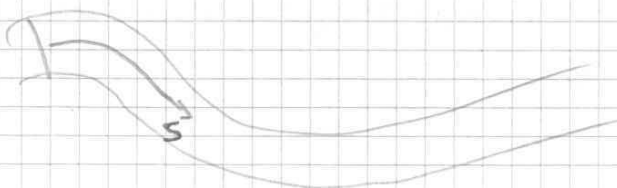


Ma se il getto, nelle correnti in pressione, non fosse dell'ordine di qualche decimetro, ma più disteso, non potrei fare tutte le semplificazioni.

Nelle correnti a superficie libera, le discontinuità fanno sentire la loro influenza molto a monte e molto a valle → la corrente porta un moto permanente non uniforme.

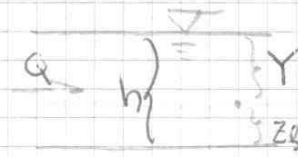
Per descrivere il fenomeno attraverso una via alternativa rispetto alle equazioni di Navier-Stokes si deve introdurre delle ipotesi semplificative.

- 1) corrente che si muove in una direzione (secondo la coordinata curvilinea dell'asse) → si assume portata, sezione R , velocità media U , carico totale e piezometrico in generale funzioni di s e del tempo (in generale si potrebbero avere moti vari).



- 2) correnti gradualmente variate: correnti correnti abbastanza cilindriche cioè la corrente può variare nello spazio e nel tempo ma molto lentamente; la variazione spaziale

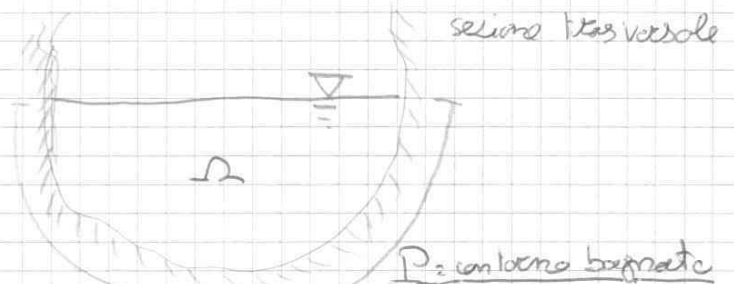
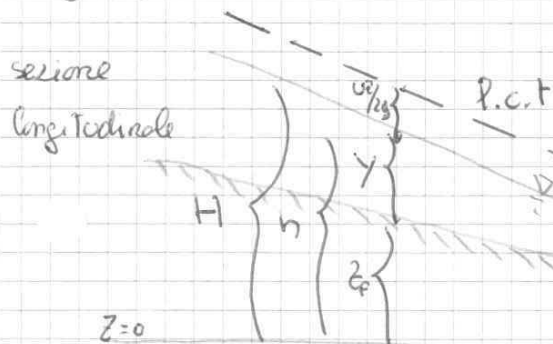
il problema si riduce tanto tanto più a (pendenza) si riduce e le linee si schiacciano verso la superficie libera $\rightarrow$ riducendo la pendenza (ordine del 5% - 10%) le linee sono così schiacciate che non si riesce più a distinguere $\Rightarrow$ p.c.i. coincide con la superficie libera
pendenza $i_b \ll 1$



OSS. Disegnato in scala non vedo la pendenza

OSS. Tutto ciò non vale per i torrenti ecc dove la pendenza è molto più elevata

$h = Z_b + Y$
 $\swarrow$ quota
al fondo
 $\searrow$ profondità



la superficie libera non è
debole se sia parallela al fondo

oss. dove ci sono le cascate
l'aria oppone poca resistenza
che si può trascurare

$$h = Z_b + Y$$

$$H = Z_b + Y + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{U^2}{2g}$$

$$i_b = \frac{dZ_b}{ds}$$

la quota del fondo
diminuisce nel verso della s

$$R = \frac{\Omega}{P} \quad \text{RAGGIO IDRAULICO}$$

Le variabili del problema (H, h, U, Ω, Y) sono
tutte funzioni di s e (il moto potrebbe essere vario)
e sono tutte grandezze integrate.

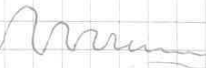
Il problema delle correnti a pelo libero, vista l'eccezionale difficoltà delle equazioni di Navier-Stokes, è stato affrontato dal de Saint Venant $\rightarrow$ non esisteva per lui la meccanica dei solidi e dei fluidi, ma tutto era riunito sotto la meccanica del continuo.

In S.d.C. il solido di Saint-Venant è un solido prismatico in cui una dimensione prevale sulle altre $\rightarrow$ la ipotesi semplificativa assume proprio che una direzione prevale sulle altre

La relazione di partenza è sempre quella di Newton scritta in riferimento ad una porzione di corrente:

$$\vec{F} = m \vec{A}$$

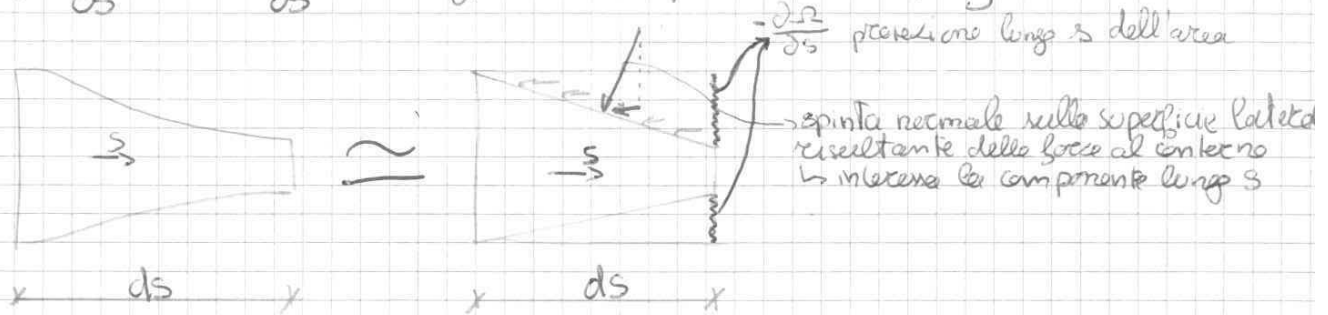
$\Rightarrow$ la risultante delle forze agenti sull'elemento di corrente fluida è pari alla massa della porzione per l'accelerazione della massa stessa

oss. Se però butto un sasso nella corrente si formano delle onde  che non posso descrivere con de Saint Venant solo un certo tratto può farlo $\leftarrow$

$$p \cdot \Omega - \left(p \cdot \Omega + \frac{\partial(p \cdot \Omega)}{\partial s} ds \right) = - \frac{\partial(p \cdot \Omega)}{\partial s} ds = \text{valore il gradiente della spinta}$$

spinta sulle $x_p \cdot \Omega_z \rightarrow$ avrei potuto scriverla come $p \cdot \Omega_z$ e avrei ottenuto delle differenze ma l'obiettivo è scrivere eq. differenziali e quindi avere derivate e quindi scrivo la spinta sulle sup come spinta sulla prima più la variazione di spinta nel tratto ds

$$= -p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} ds \quad \text{effetto delle spinte sulle superfici 1 e 2}$$



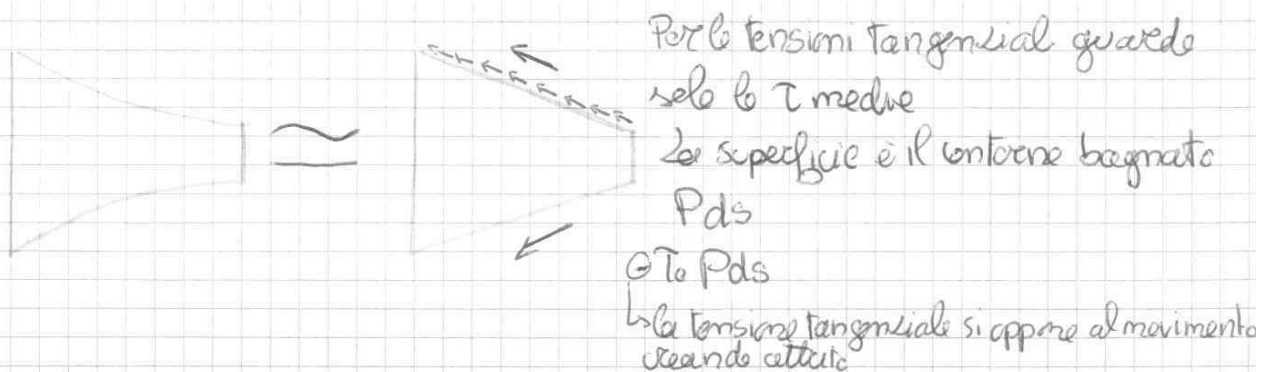
Posso fare questa semplificazione perché nell'infinitesimo non vedo la curvatura: è come negli sviluppi di Taylor che per approssimare meglio la funzione utilizzo tratti di rette (derivata prima), arco di parabola (derivata seconda), parabola cubica (derivata terza), quadrato (derivata quarta), ecc. $\rightarrow$ nel caso in esame mi fermo all'ordine 1 perché sono già nell'infinitesimo e non vedo la curvatura ma tratti di retta!

Il risultato che si ottiene è:

$$p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds \rightarrow \text{variazione che } \Omega \text{ subisce percorrendo un tratto } ds$$

misuro la pressione in Ω_1 o Ω_2 e scarto infinitesimo di ordine superiore $\rightarrow$ ho la pressione per differenza di area

N.B. Il segno è già a posto perché $-\frac{\partial \Omega}{\partial s}$ è negativo



Rettendo assieme tutti i termini ottengo un'equazione di bilancio

$$-g \cdot \Omega ds \frac{dz}{ds} - p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} ds + p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds - T_0 P ds = g \cdot \Omega ds \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right)$$

Si porta tutto al 2° membro (diventa tutto positivo) e si divide per $g \cdot \Omega$

$$3) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{eq. conservazione della massa a livello locale}$$

per le correnti: $\Downarrow$ $\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0$ se il fluido è incompressibile posso portare fuori ρ dal simbolo di derivata e semplificarlo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} &= 1 - J \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Equazioni del problema di de Saint Venant

$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ 2^a eq. da associare alla prima $\rightarrow$ eq. di continuità
 $\Downarrow$ Regola il moto di una corrente attraverso le variabili U e Y

Oss.

* È un'equazione non lineare: termine $U \frac{\partial U}{\partial s}$ derivano dalla parte convettiva dell'accelerazione euleriana, termine J è non lineare perché siamo in moto turbolento nella maggior parte dei casi e il legame è del tipo $J = J(U^2)$ NON LINEARE

* Esiste una gerarchia di equazioni per descrivere sempre meglio il comportamento dei fluidi

Navier-Stokes $\rightarrow$ va bene praticamente per tutti i fluidi

$\uparrow$ In mezzo ci sono equazioni che man mano rimuovono ipotesi fino a ritornare all'eq. di Navier-Stokes.
 Boussinesq
 Vortewez de Vries (VdV) $\rightarrow$ rimuove l'ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni
 de Saint Venant $\rightarrow$ 4 ipotesi $\rightarrow$ descrive bene gli tsunami, soloni - onde solitarie
 semplificative

Dalle equazioni del de Saint-Venant ci si mette nella condizione più semp. possibile $\rightarrow$ moto uniforme

N.B. Per le correnti a superficie libera il moto uniforme è un'eccezione perché appunto vi è una superficie isobara

$\rightarrow$ a riga per parlare di moto uniforme dovrei avere una corrente perfettamente cilindrica senza discontinuità, salti, ecc. $\rightarrow$ questa ipotesi però permette di capire qualcosa sulla corrente

Ipotesi di moto uniforme matematicamente significa assenza di moto vario cioè:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{non ci sono variazioni temporali delle grandezze}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = 0 \quad \text{assenza di variazioni spaziali delle grandezze in arco}$$