

NUMERO : 205

DATA : 07/02/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Sannipoli

MATERIA : Idraulica, Teoria + Esercitazioni
Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IDRAULICA

03-10-2011

Programma:

PROF. LUCA RIDOLFI

- STATICA DEI FLUIDI
- CINEMATICA
- DINAMICA
 - (montagne e alberi sono frattali)
 - fluidi PERFETTI
 - fluidi VISCOSI
- CORRENTI (cioè quando il fluido si muove soprattutto in una direzione)
 - SUPERFICIE LIBERA
 - PRESSIONE
 - MOTI A POTENZIALE
 - MOTI DI FILTRAZIONE
 - SEMINARI

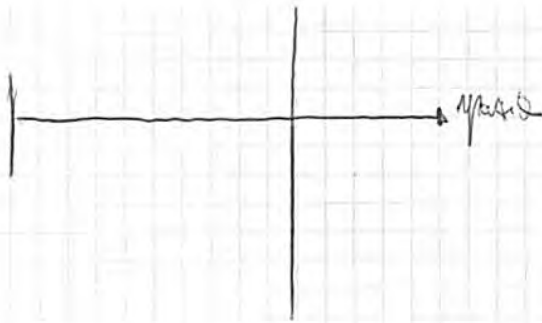
Esame: SOLO ORALE

Libri:

- Cetrini/Novack: IDRAULICA (tratta l'80% del corso)

Esercizi molte da CARLO CAMPOREALE

NoBo: bisogna portare l'eserciziario all'esame



possiamo considerare di essere in CAMPO CONTINUO \Rightarrow va bene il dx (se no c'è bisogno di altri operatori matematici)

Quindi: possiamo vedere il FLUIDO come un CONTINUO

Introduciamo alcune grandezze: P.A.G. 8

- DENSITÀ DEL FLUIDO: ρ [kg/m^3]

- PESO SPECIFICO:

$$\gamma = g \rho$$

$$g = 9,806 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\rho = \rho(\theta, p)$$

\downarrow temperatura \searrow pressione

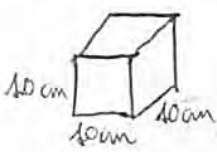
Però all'acqua, l'influenza della temperatura è poco importante (alle temperature ordinarie); questi fluidi li definiamo FLUIDI FREDDI.

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{H_2O} \approx 1000 \text{ kg/m}^3 \\ \gamma = 9805 \text{ N/m}^3 \end{array} \right\} \text{trascorrendo l'effetto della temperatura}$$

Noi non considereremo nemmeno la presenza di particelle in sospensione.

Per i liquidi: $\epsilon = n \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ (infatti un liquido è
abbastanza comprimibile)

Consideriamo un cubetto pieno d'acqua (1 L) e lo tuiamo giù nel mare di 10m.



$\Rightarrow V = 10^3 \text{ cm}^3$

$\Delta p = \gamma \cdot 10 \text{ m} \approx 10^5 \text{ N/m}^2$

questa formula la
vedremo più avanti

affondamento (facciamo approfondire nel mare
quel litro d'acqua di 10 m)

Quindi dato che non teniamo conto della temp. (temp ambiente)
e che, dato che ϵ è molto grande, la diff. di pressione influenza
poco, allora possiamo dire:

$\rho = \rho(\theta, p) \approx \text{cost}$

\Rightarrow FLUIDI INCOMPRESSIBILI

consideriamo gradienti
di pressione non grandissimi
(infatti nell'esempio sopra, un affonda-
mento di 10 m nel mare comporta
un Δp grandissimo, ma come ϵ è
sempre molto più grande)

La velocità con cui si propagano le onde di pressione è:

$c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$ (nell'aria è la velocità del suono)

La ϵ dell'acqua è minore di quella dell'aria \Rightarrow il suono si
propaga più velocemente (non più facilmente)

Nella circolazione dell'aria in una stanza possiamo considerare ϵ tendente
all'infinito \Rightarrow aria incompressibile (non consideriamo frazioni di
secondo, ma decine/centinaia di secondi)

Scale temporali del problema molto più lunghe delle scale
con cui si trasmette l'informazione

(cioè con cui "viaggiano" le onde di
pressione)

Nel fluido nascono tensioni tangenziali perché ci sono gradienti spaziali di velocità.

Inoltre:

Le tensioni tangenziali sono 0 se la viscosità è 0.

Nel caso in cui la viscosità è nulla \Rightarrow si parla di FLUIDO PERFETTO o IDEALE

[superfluidi: elio e litio]

$$\mu \neq \mu \text{ (Stato di tensione)}$$

non dipende tanto

$$\mu = \mu(\theta)$$

↓
temperatura

di inverno le temperature sono più basse \Rightarrow viscosità maggiore \Rightarrow fatica più fatica a spostare l'acqua.

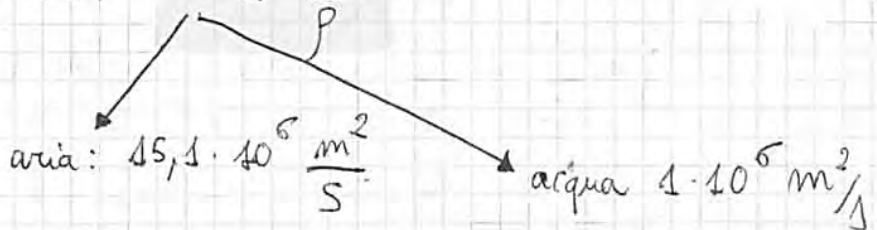
Per un liquido: $\theta \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$

(olio fatto si muove più facilmente)

Per un gas: $\theta \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow$

In tutti i nostri problemi consideriamo $\mu = \text{cost}$, altrimenti dovremmo anche considerare la temperatura.

VISCOSITÀ CINEMATICA: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ \rightarrow viscosità o viscosità dinamica

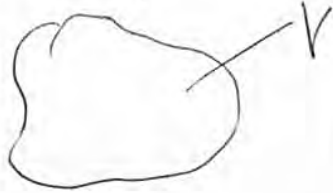


No B...

$$\mu_{acqua} > \mu_{aria} \quad ; \quad \nu_{acqua} < \nu_{aria}$$

SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI PAG. 3

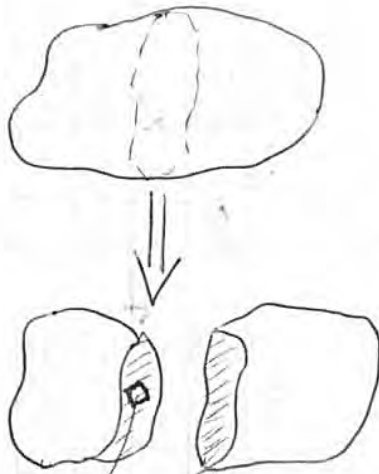
Una massa di fluido è sottoposta a:



- forze di massa (forza peso)
- forze di superficie

si esplicano per il fatto che c'è una superficie di contatto

Togliamo la massa:



sto studiando cosa accade nell'infinitesimo attorno al punto O.

normale contribuisce positivamente la normale puntando perché i fluidi non hanno nessuna resistenza a trazione



forza infinitesima che agisce nell'infinitesimo del punto O

$d\Omega$
superficie infinitesima

Definisco il rapporto $\frac{d\vec{N}}{d\Omega}$ e studio $\lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{d\vec{N}}{d\Omega} = \vec{\phi}_m$

SFORZO (ha 2 dimensioni di una forza su una superficie)

$d\vec{N}$ cambia a seconda del particolare $d\Omega$ che scelgo \Rightarrow è per questo che faccio il limite

$$d\vec{N} = \vec{\phi}_m d\Omega \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \int_{\Omega} \vec{\phi}_m d\Omega$$

$\vec{\phi}_m$ varia da punto a punto \rightarrow carta come io sto tagliando la superficie

$$\phi_{ny} = \phi_{xy} \cos n\hat{x} + \phi_{yy} \cos n\hat{y} + \phi_{zy} \cos n\hat{z}$$

$$\phi_{nz} = \phi_{xz} \cos n\hat{x} + \phi_{yz} \cos n\hat{y} + \phi_{zz} \cos n\hat{z}$$

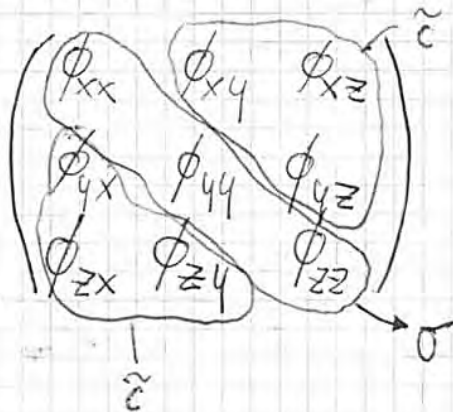
In ogni punto, per caratterizzare lo stato di tensione, ho bisogno di nove numeri.

Oltre all'equilibrio alla trazione, c'è anche quello alla rotazione; imponendo quest'ultimo equilibrio si ottiene che:

$$\phi_{ij} = \phi_{ji} \quad i, j = x, y, z$$

$$\phi_{xy} = \phi_{yx}$$

MATRICE DELLO STATO DI TENSIONE



Tensore simmetrico del 2° ordine

PROPRIETÀ:

- esiste sempre un s.d.r. opportuno $\{x, y, z\}$ tale che $\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & \sigma \end{pmatrix}$

autovalori: si trovano gli autovettori che rappresentano il s.d.r.

rispetto a cui ho solo

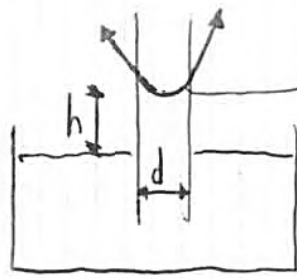
spazi normali e non tangenziali

(le trabecole esse sono orientate in modo da rappresentare solo

spazi normali \Rightarrow le assi passano di mezzo che se fossero tutte piene)

$$-\sum \phi_{ii} = \text{Tr} = \text{cost}$$

matrice diagonale



c'è la curvatura perché c'è Δp
tra dentro e fuori

$$hd \approx 30$$

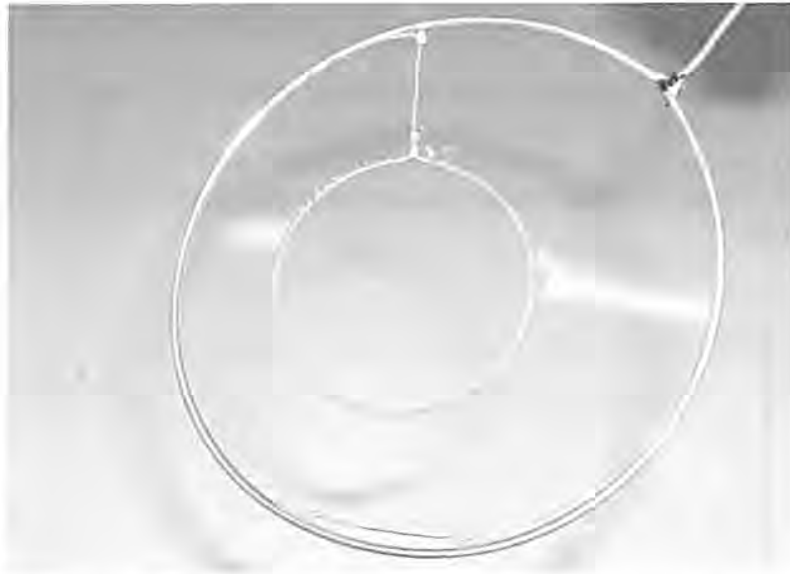


Figura 4: Questa lamina di acqua saponata è stata fatta aderire su un contorno di filo di ferro. Sul telaio è legato un sottile filo di cotone che è annodato a cappio: rompendo con un oggetto appuntito la lamina liquida all'interno del cappio, si osserva che il foro si allarga a formare un cerchio pressoché perfetto.

si tratta dell'azione di una forza di origine molecolare, a cui si dà il nome di tensione superficiale.

L'intensità della tensione superficiale dipende dal tipo di liquido considerato e da quale altra sostanza è circondato. La tensione superficiale è anche la causa della formazione delle gocce, che sono tenute insieme proprio da questa forza. Si prenda come esempio il mercurio, un liquido dotato di una elevata tensione superficiale: si può notare che il mercurio rovesciato su un tavolo si raccoglie sempre in piccole sferette compatte³.

2 I tensioattivi e le bolle di sapone

I tensioattivi sono sostanze che, aggiunte all'acqua, ne abbassano la tensione superficiale. I tensioattivi vengono utilizzati nell'industria dei detersivi e dei saponi perché, abbassando la tensione superficiale dell'acqua, si ha l'effetto di una migliore capacità di bagnare l'oggetto da pulire, penetrando nei piccoli interstizi per rimuovere lo sporco.

Quando la tensione superficiale diminuisce, si ha una minore coesione della superficie del liquido, per quanto abbiamo detto finora. È per questo motivo che l'acqua saponata, a differenza dell'acqua pura, fa la schiuma.

Le bolle di sapone sono molto istruttive perché permettono di capire come agisce

³Evitate però di provare: il mercurio, se ingerito o inalato, è tossico!

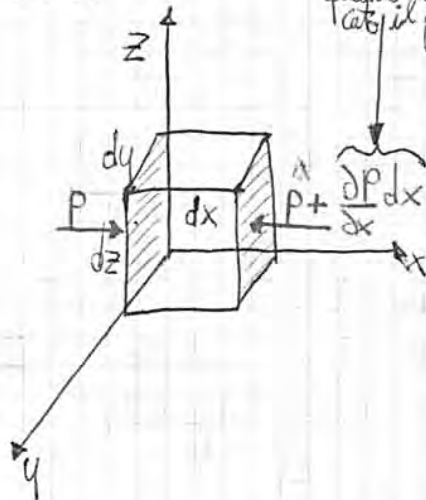
• \vec{j}) $\phi_{ny} = \phi_n \cos \hat{m}_y = \phi_{yy} \cos \hat{m}_y \Rightarrow \phi_n = \phi_{yy}$

• \vec{k}) $\phi_{nz} = \phi_n \cos \hat{m}_z = \phi_{zz} \cos \hat{m}_z \Rightarrow \phi_n = \phi_{zz}$

In ogni punto c'è un solo p , ma p può variare da punto a punto:

$p = p(x, y, z)$ (non metto il tempo perché per definizione in statica il tempo non conta)

EQUAZIONE INDEFINITA (o DIFFERENZIALE) della statica dei fluidi PAG. 30



quanto cambia la p quando faccio un parete dx , moltiplico il parete dx .

Consideriamo un prisma infinitesimo e guardo le forze applicate. Potrei scegliere una qualsiasi altra figura, ma vediamo perché abbiamo scelto il prisma (è PIÙ COMODO!!!) nella direzione x .

Il elementino contiene una massa dm : $dm = \rho dx dy dz$ (ecco perché ho scelto un prisma, perché posso facilmente scrivere il volume)

Dato che c'è una massa, ci saranno forze di massa applicate.

$\vec{F} dm = \vec{F} \rho dx dy dz$
 risultante delle forze di massa agenti nel prisma.

forza di massa per unità di massa

è l'intensità della forza

di massa (es. \vec{g} , che moltiplicata per m mi dà la forza peso)

Ora consideriamo le forze di superficie e consideriamo "asse per asse":

(X) $p dz dy - (p + \frac{dp}{dx} dx) dy dz =$
 se ci fossero componenti di forze su altre facce oltre quelle mostrate, ci sarebbero tensioni tangenziali (MA SIANO IN STATICA!!!) (nella direzione x)

la stessa).

① Se $\rho = \text{cost} \Rightarrow \vec{F} = \text{grad} \left(\frac{P}{\rho} \right)$

cioè se il fluido è incompressibile, tutte le forze di massa ammettono potenziale ed esso è pari a $\frac{P}{\rho}$.

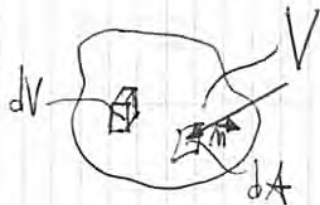
EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO STATICO § PAG. 32

Riscriviamo:

in ogni punto

$\rho \vec{F} = \text{grad } p$; se sono capace ad integrarla trovo p : $p = p(x, y, z)$

• difficoltà di risolvere equaz. differenziali a causa della difficoltà di integrare \Rightarrow punto di vista dell'ingegnere: a me non interessa sempre conoscere come varia la pressione in ogni punto, ma mi può bastare conoscere la risultante.



$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \text{grad } p dV$$

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \vec{P}$$

dm

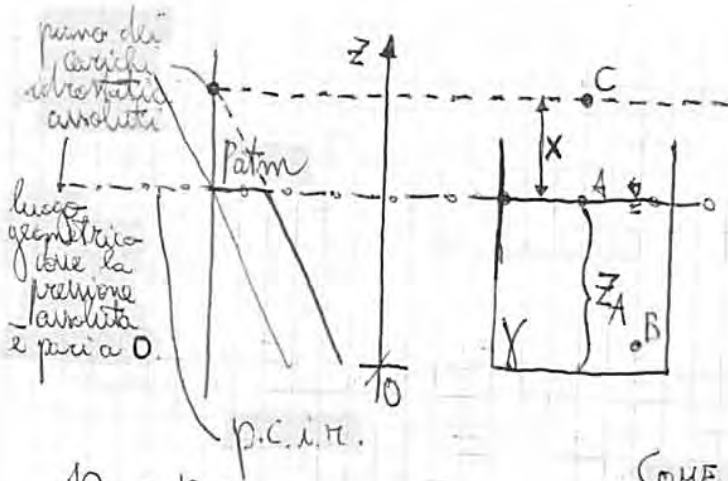
risultante di tutta la forza di massa

all'interno dell'integrale ho $\vec{F} dm$ e cioè la forza vera che agisce sull'elemento dV , dovuta alle forze di massa

$$\int_V \text{grad } p dV = \int_A p (\vec{i} \cos \hat{m}_x + \vec{j} \cos \hat{m}_y + \vec{k} \cos \hat{m}_z) dA =$$

teorema di Green o del gradiente

perché considero positivo \vec{n} entrante



libera
Tutti i punti della superficie del fluido a contatto con l'atmosfera (es. A) hanno pressione pari a quella atmosferica (dove esiste equilibrio)

$$P_A = P_{atm}$$

COME FACCIO A CALCOLARE LA PRESSIONE IN UN PUNTO QUALSIASI DEL FLUIDO?
IO SO SEMPRE CHE LA PRESSIONE SUL PELO LIBERO È PARI ALLA P_{atm} .
DA CIÒ RICAVO LA PRESSIONE IN OGNI ALTRO PUNTO

$$h_A = z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_A + \frac{P_{atm}}{\gamma}$$

per la legge di Stevin

$$h_B = h_A \Rightarrow z_B + \frac{P_B}{\gamma} = z_A + \frac{P_{atm}}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_B = P_{atm} + \gamma (z_A - z_B)$$

La pressione cresce linearmente all'aumentare della profondità e con coefficiente angolare pari a γ .

Dove è che la pressione assoluta si annulla?

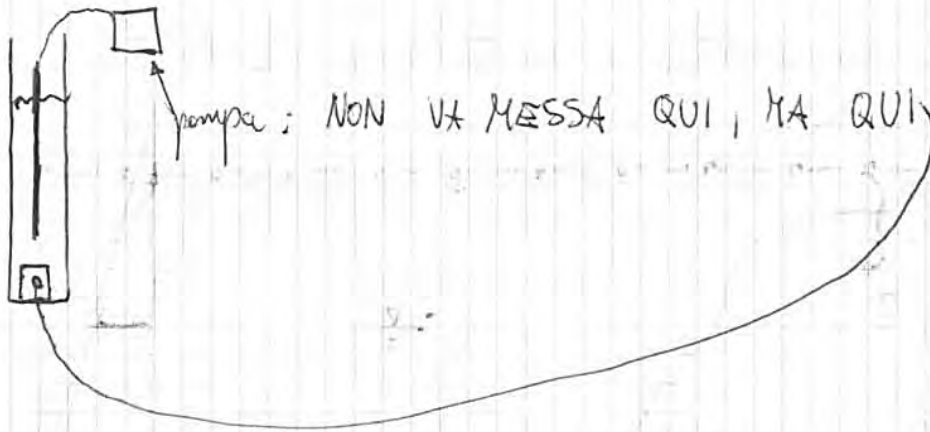
$$\left. \begin{array}{l} \text{A) } h_A = z_A + \frac{P_{atm}}{\gamma} \\ \text{C) } h_C = z_A + x + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{per Stevin sono uguali} \Rightarrow x = \frac{P_{atm}}{\gamma}$$

$P_{atm} = 0$

nel caso di: $H_2O: x = 1$
 $Hg: x = 0,76$

La pressione in un punto viene chiamata pressione assoluta se è riferita al vuoto assoluto, cioè alla pressione dello zero assoluto. Molti dispositivi che misurano la pressione (manometri), comunque, vengono calibrati per leggere zero in condizioni ambiente, e così essi indicano

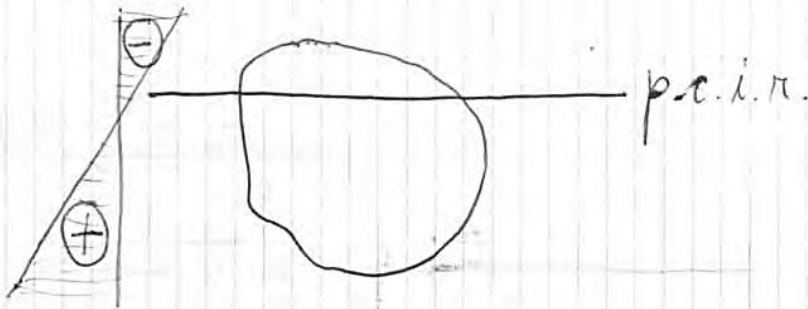
Porto



NON VA MESSA QUI, MA QUI

La p.h.f di pressione massima che posso avere è $p_{atm} + \gamma$, quindi se ho un sesto di 50 m, neppure i 10,33 m non tiro, quindi bisogna mettere la pompa in profondità.
 Cmq in nessun caso si usa mettere la pompa in aspirazione, perché c'è il fenomeno delle CAVITAZIONI (in profondità la pressione aumenta, quindi l'acqua bolla e rovina la pompa)

~~~~~

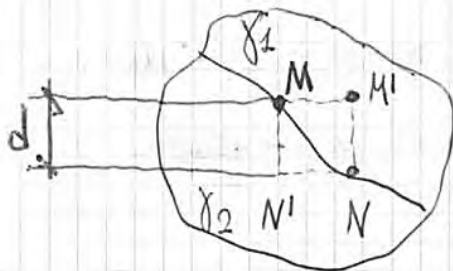


~~~~~

PAG. 37 IN BASSO

Perché la superficie di contatto dei fluidi si dispone orizzontale (cioè secondo la superficie equipotenziale)?

Dimostrazione per assurdo



Si muove sull'orizzontale per M fino la verticale per N $\Rightarrow M'$
 Si muove in orizzontale per N fino la verticale passante per M $\Rightarrow N'$

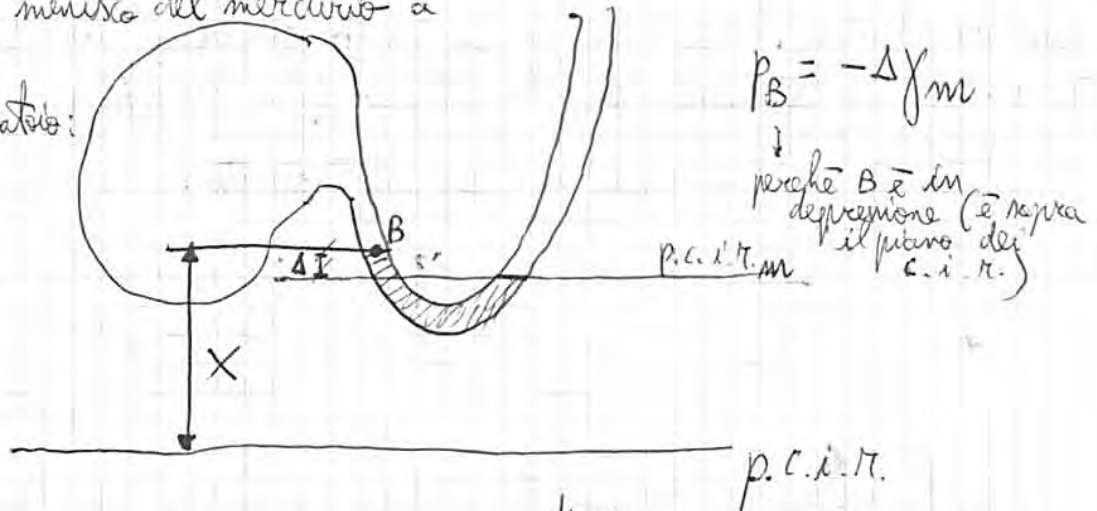
$p_N = p_{N'}$ (1)
 $p_M = p_{M'}$ (2)

si ricava che

$$X = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta \quad \text{poiché}$$

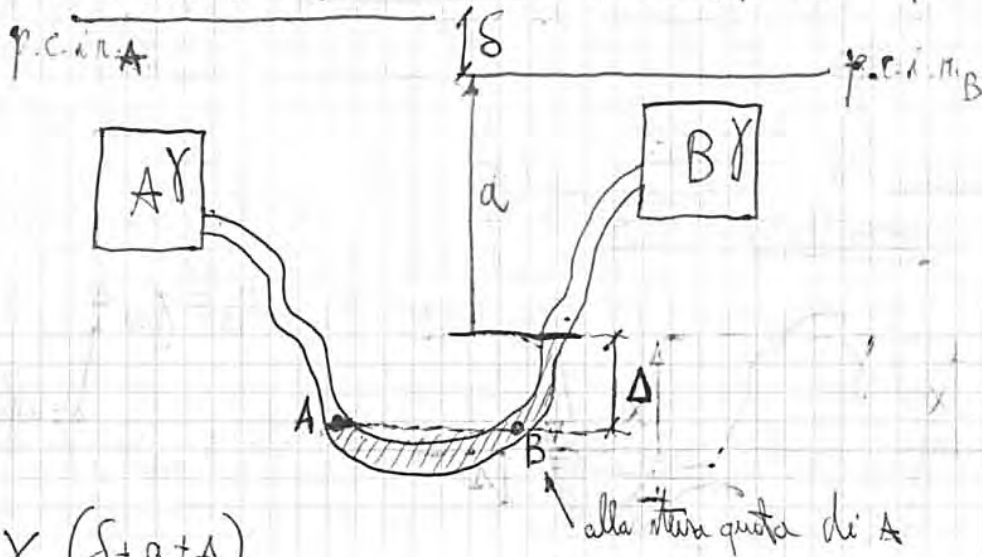
$X \gamma = \Delta \gamma_m$ (in B la pressione in B del fluido γ da sopra deve essere pari alla pressione esercitata dal mercurio dal sotto)

Se ho il caso in cui il menisco del mercurio a contatto con l'atmosfera è più basso del menisco del mercurio a contatto con il fluido nel serbatoio:



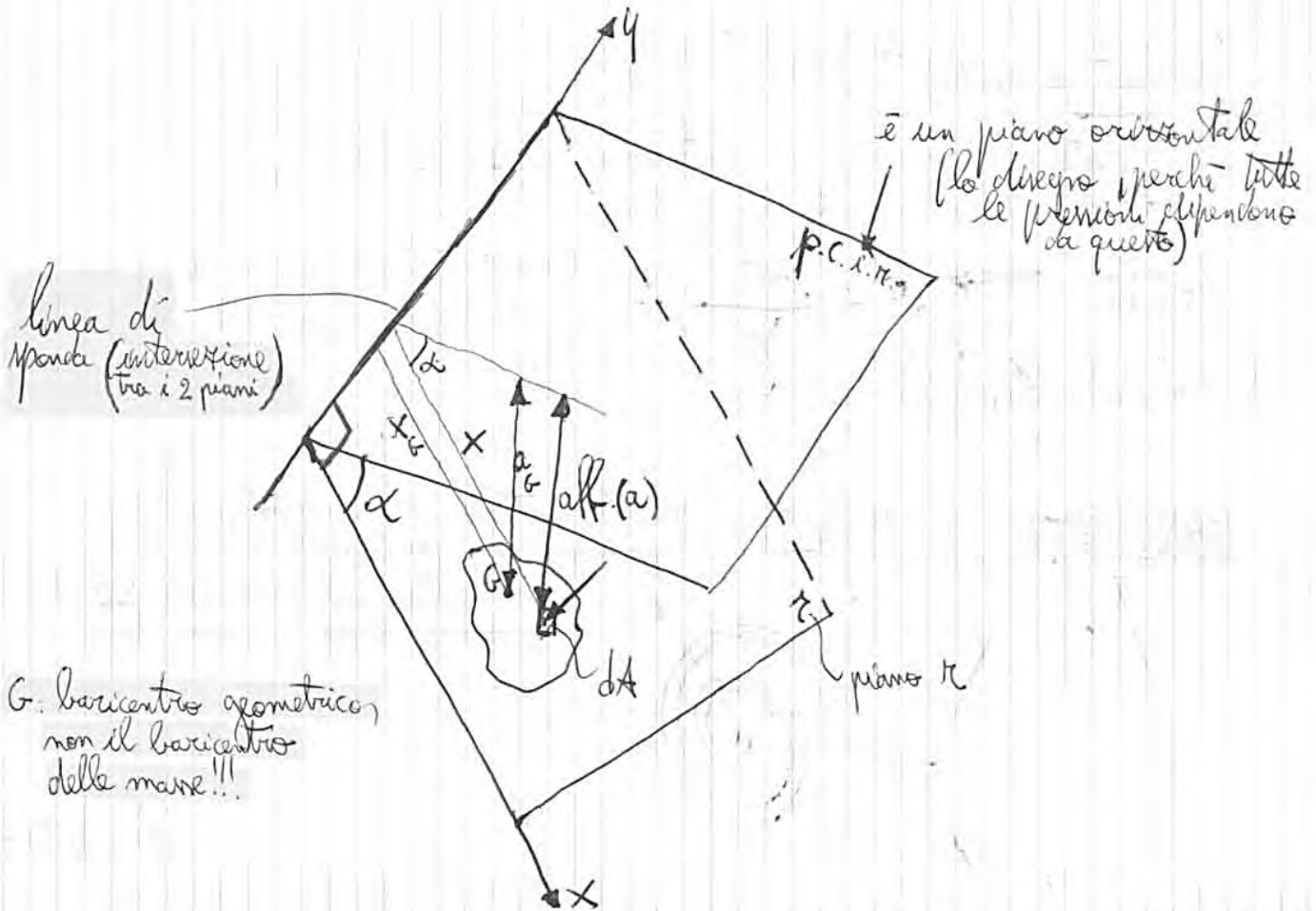
$X = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$ la formula è la stessa ^{di prima}, ma il serbatoio è tutto in depressione, quindi se faccio un buco entra l'aria, mentre nel caso precedente sarebbe uscita acqua.

Problema di controllare la differenza di pressione tra due serbatoi: si usano MANOMETRI DIFFERENZIALI PAG. 40

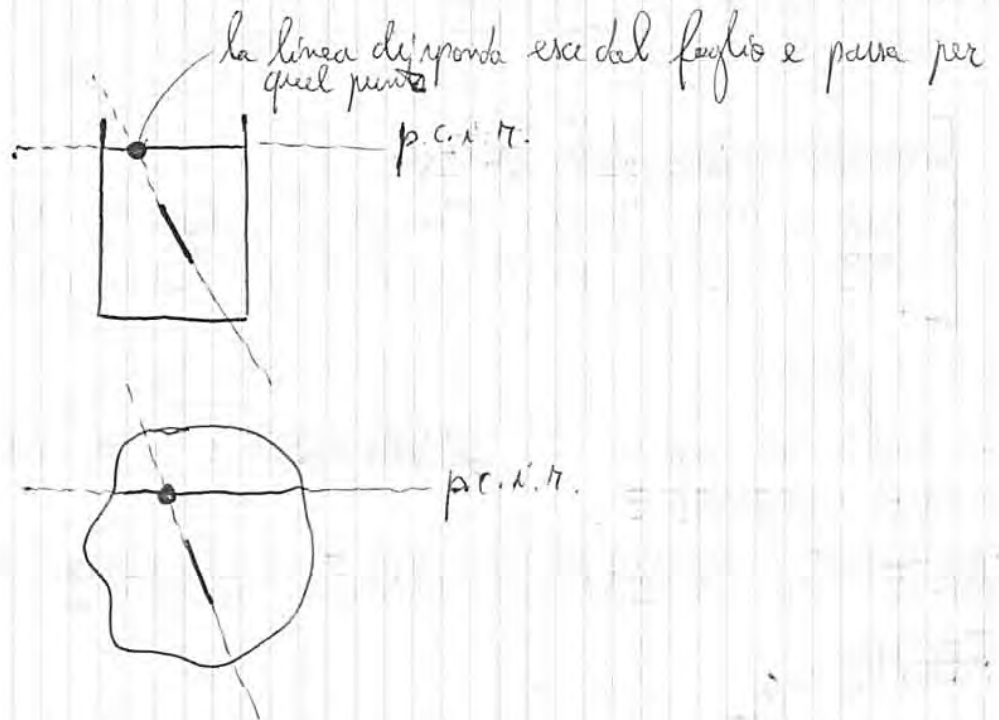


$$P_A = \gamma (S + a + \Delta)$$

distanza di A da p.c.i.r.A

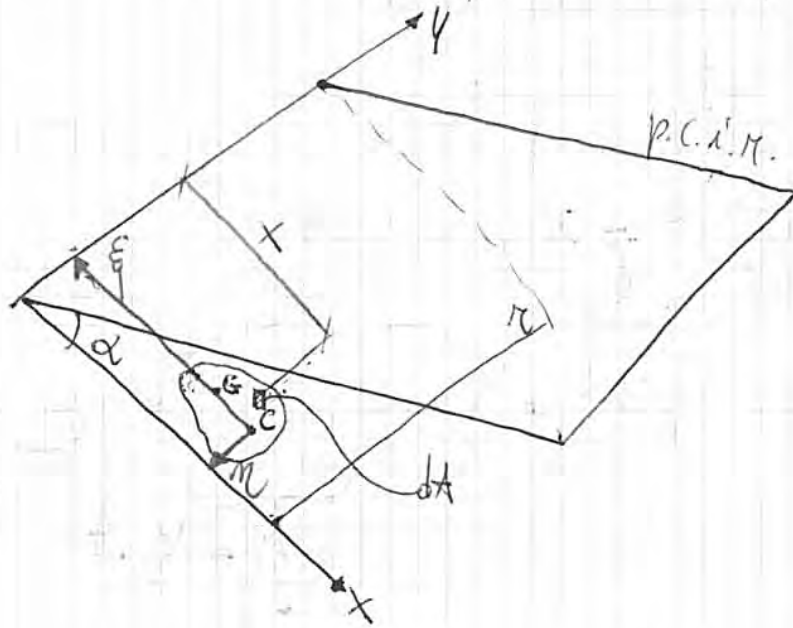


G: baricentro geometrico, non il baricentro delle masse!!



Calcoliamo la spinta \vec{S} esercitata dal fluido sulla superficie piana. Consideriamo l'elementino dA e la pressione applicata su di esso. Abbiamo visto che, in statica, la pressione è ortogonale al piano e dunque, se andiamo a da risultante di tutte le pressioni, sarà, dunque, parallela alla normale al piano π .
 Considerare più elementini, avrò pressioni tutte parallele fra di loro

Come trova il centro di spinta? (basta conoscere la geometria della superficie rispetto alla linea di spinta)



$$x p dA = x \times y \sin \alpha dA = x^2 y \sin \alpha dA$$

momento delle forze infinitesime (agente su dA) rispetto all'asse y

per definizione

Se integro su tutta A trova la risultante dei momenti che deve essere uguale al momento della risultante:

$$\int_A x^2 y \sin \alpha dA = \int_A F$$

↓ risultante

y e $\sin \alpha$ sono costanti

$$F = \frac{\int_A x^2 y \sin \alpha dA}{S} = \frac{y \sin \alpha \int_A x^2 dA}{S}$$

guardando la \odot

$$= \frac{y \sin \alpha \int_A x^2 dA}{y \sin \alpha M} = \frac{I}{M}$$

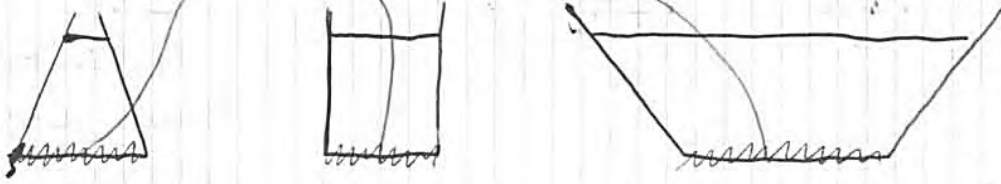
momento statico della superficie fatto rispetto alla linea di spinta

momento d'inerzia della superficie fatto rispetto alla linea di spinta

RICORDARLO LA:

Legge di trasposizione dei momenti d'inerzia, $I_y = I_{Oy} + x_G^2 A$

la spinta in queste 3 superfici è sempre la stessa



Conta la distanza tra la superficie e il p.c.r.m. e non l'inclinazione degli angoli ($\backslash, |, /$)

Il punto chiave sulle pressioni è che dipende dalla posizione del piano dei carichi e non dalla quantità di fluido presente

$$S_x = \int_A p \cos \hat{m}_x dA = \int_{A_x} p dA_x = \gamma h_{G_1, x} A_x$$

S_x è la spinta totale del fluido sulla superficie (S_x è la componente di tale spinta totale lungo l'asse x)
 $dA \cos \hat{m}_x = dA_x$
 $h_{G_1, x}$ affondamento di G_1
 indica che il baricentro G è quello dell'area A_x
 mi sono dunque ricondotto alla spinta su una superficie piana (proiezione della superficie curva sul piano coordinato $x=0$)

Stesso discorso per y e z :

$$S_y = \gamma h_{G_1, y} A_y$$

$$S_z = \gamma h_{G_1, z} A_z$$

Componenti S_x, S_y e S_z ottengo la spinta totale S .

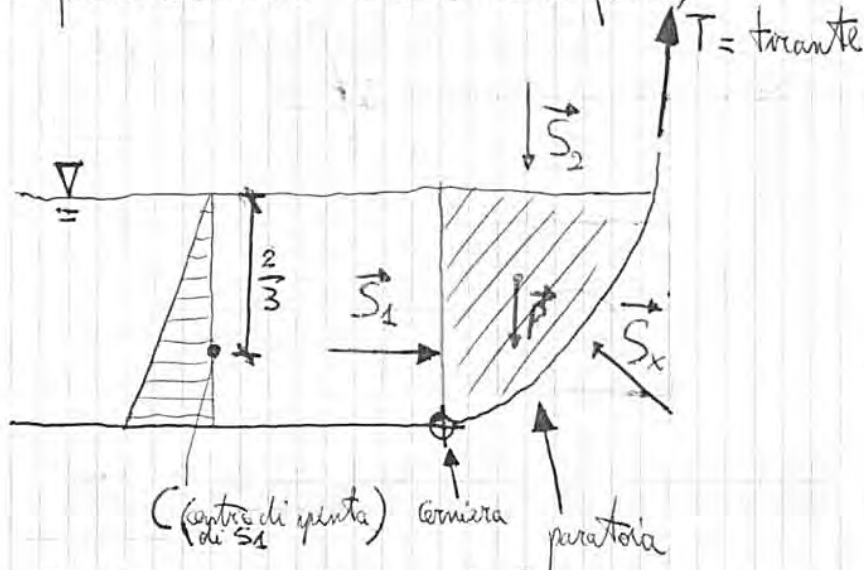
Osservazione su S_z : noi abbiamo calcolato S_z proiettando dA nel piano $z=0$, ma niente mi vieta di calcolare S_z proiettando dA su un qualsiasi piano parallelo al piano $z=0$ (la proiezione è la stessa).
 Il p.c.i.r. è parallelo al piano $z=0$, quindi posso proiettare dA anche in tale piano (la proiezione non cambia): vedi figura ① pag. precedente

$$S_z = \int_A p \cos \hat{m}_z dA = \int_{A_z} p dA_z = \int_{A_z} \gamma h_{dA_z} dA_z \quad \text{①}$$

h_{dA_z} = affondamento (quello verde pag. precedente)
 $h_{dA_z} dA_z$ = volume del prisma di basi dA e dA_z e altezza pari all'affondamento.
 $\gamma h_{dA_z} dA_z$ = peso del fluido contenuto nel prisma volume di

$$\int_{A_z} \gamma h_{dA_z} dA_z = \text{peso del volume di fluido contenuto tra il p.c.i.r. ② e la superficie curva}$$

Esempio: Consideriamo una paratoia (serve per controllare il livello di un fluido per mantenerlo ad una certa quota)



Quanto deve valere T per mantenere il fluido in questa posizione?

In pratica devo calcolare la spinta su una sup. curva. Posso usare le formule viste prima ma c'è una via più veloce: $\vec{P} + \vec{F}_c = 0$ PER POTER USARE TALE EQUAZIONE L'IMPORTANTE È CONSIDERARE UN VOLUME FINITO

Scegliamo un volume in maniera furba (volume finito)

Nel nostro caso l'equazione (a) diventa:

$$\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_x = 0 \Rightarrow \vec{S}_x = -(\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2)$$

\uparrow risultante della forza peso
 \uparrow spinta su sup. piana

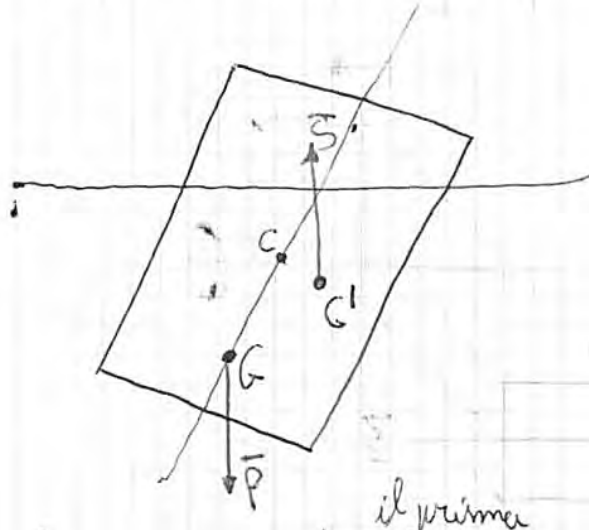
$\vec{S}_2 = 0$ perché si trova nel piano dei carichi idrostatici relativi dove la pressione è 0 e dunque la risultante di 0 è 0.

PROBLEMA DELLA STABILITÀ DEI GALLEGGIANTI

(la bottiglia di plastica in acqua non sta dritta ma tende a stare inclinata)



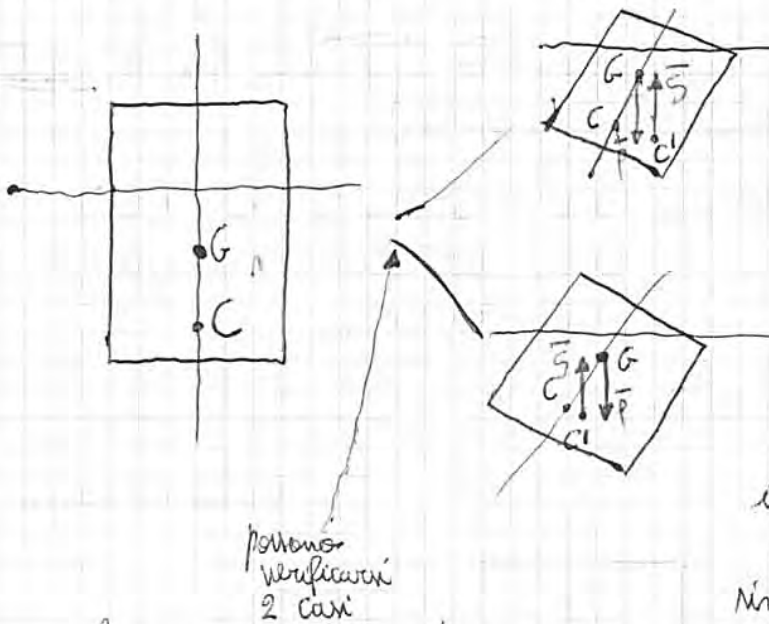
Introduciamo una perturbazione tale che faccia inclinare il prisma.



G non si è spostato (poiché le masse non si spostano)
C si è spostato perché il volume di fluido ha cambiato la sua forma

Nasce una coppia che tende a riportare ^{il prisma} in posit. iniziale
QUINDI: FINCHÉ G è sotto di C, sono a posto per quanto riguarda la stabilità (barche a vela) (navi, traghetti)

Però nella realtà, tipicamente T siamo in questa situazione:



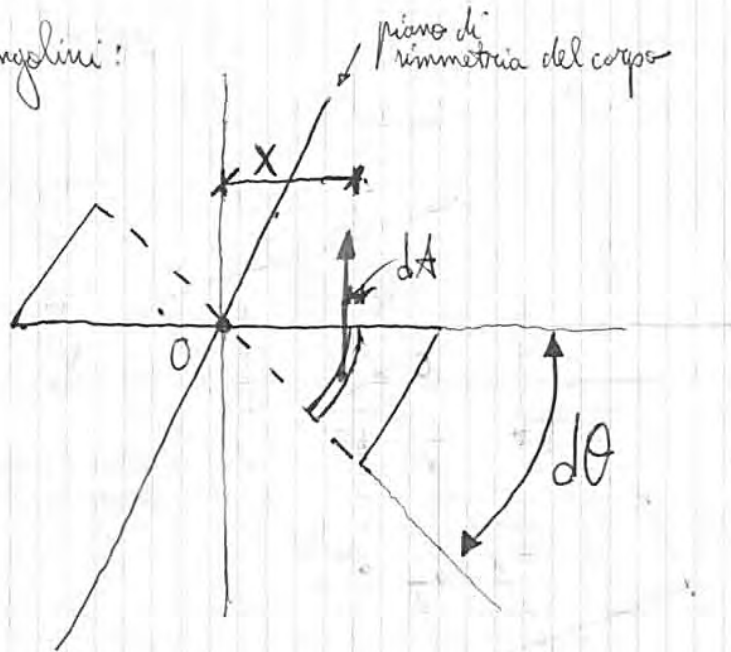
Coppia stabilizzante

Coppia non stabilizzante (come accade nella bottiglia): il centro di carena si sposta poco e rimane alla sinistra di G.

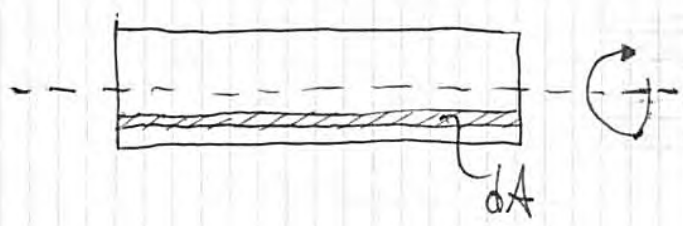
Quindi ora vogliamo avere un criterio per sapere in quale situazione mi trovo:

Continua

Ingrandiamo i due triangolini:



Consideriamo una striscia a distanza x da O
 Quanto è lunga la striscia? $x d\theta$
 larga? dA



$$dV = x d\theta dA$$

Volume (corrispondente alla strisciolina) che è andato immerso e quindi riceverà una spinta di Archimede:

$$dS_{\text{volumetto}} = \gamma x d\theta dA$$

A questa spinta corrisponde un momento rispetto al punto O :

$$dM = \gamma x^2 d\theta dA$$

$dS \cdot x$
 ↑
 braccio

Le traghetti hanno altezze metacentriche basse per far sì che il ritorno alla posizione di equilibrio non sia brusco, mentre le navi militari hanno le altezze metacentriche alte (in tal modo la coppia ha un braccio maggiore e tende a riportare più velocemente la nave orizzontale: ciò si fa perché ad esempio la nave deve sparare e per far ciò deve rimanere orizzontale).

Le navi che trasportano liquidi sono le più pericolose perché quando il liquido si sposta \Rightarrow si sposta anche G e ciò tende ad instabilizzare (es: quando si spegne un incendio, la nave tende ad ~~inclinarsi~~ inclinarsi)

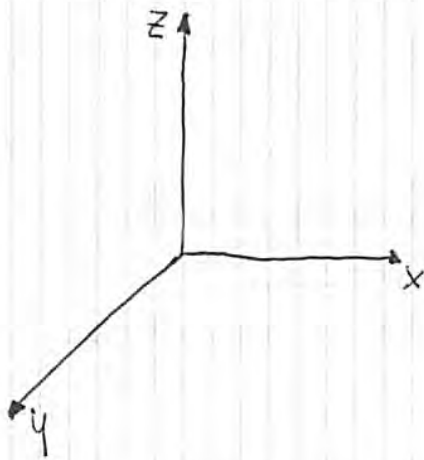
sulla nave, la massa di fluido usata tende a spostare il baricentro G delle masse e dunque

EULERO

- Non descrive le traiettorie percorse dalle particelle per due ragioni:
- il concetto di particella all'interno di un fluido non è molto chiaro (trattiamo il fluido come un continuo per le nostre applicazioni)
 - le proseguisti nella strada di Lagrange arrivo a scrivere equazioni molto complesse (più complesse di quelle ottenibili con l'approccio euleriano).

Eulero mira il suo interesse al CAMPO DI MOTO: *come è fatto il vettore velocità in tutti i punti della massa fluida, indipendentemente dalle particelle che stanno passando (cioè indipendentemente dalle traiettorie)*

$$\vec{v} = (u, v, w)$$



$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned}$$

[Approccio Eulero meno intuitivo, perché siamo abituati ad affidarci a ciò che vediamo; se avessimo parlato di solidi \Rightarrow avremmo usato l'approccio di Lagrange].

l'approccio Lagrangiano serve per problemi specifici (trasporto all'interno dei fluidi, dispersione e diffusione all'interno dei fluidi) che non trattiamo in questo corso.

Qual è il legame fra i due approcci?

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) dt \\ dy = v(x, y, z, t) dt \\ dz = w(x, y, z, t) dt \end{cases}$$

il campo di moto è il "motore" di tutte le traiettorie: u moltiplicato per dt fa fare un pezzetto dx .

\leftarrow 3 equaz. differenziali del 1° ordine \Rightarrow 1 sola condizione iniziale.

$$= \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta S} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

↑
moltiplico e divido il numeratore addendo per ΔS

Facendo il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ (è come fare anche il lim per $\Delta S \rightarrow 0$, perché per $\Delta t \rightarrow 0$, anche $\Delta S \rightarrow 0$).

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \left(\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial S} |\vec{v}| = \vec{A} \quad \text{PAG. 76}$$

variazioni di velocità che c'è nel punto A nel tempo / indifferenziate della parti- cella \Rightarrow questa è la \vec{v} fissa nella spazio

Come il campo di moto cambia in un infinitesimo attorno ad A, con tempo fissato.

modello della velocità

ACCELERAZIONE CONVETTIVA

ciò deve avere un'idea di come cambia la velocità nell'intorno del punto che sto considerando

ACCELERAZIONE LOCALE (con il lim B e A tendono a coincidere)

S coordinate curvilinee

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial S} |\vec{v}| =$$

derivata SOSTANZIALE (dal latino substantia (sostanza), cioè seguendo la sostanza (la particella)).
ACCELERAZIONE EULERIANA

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w$$

\uparrow
 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

Steno approccio per studiare come varia la densità:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w$$

come cambia localmente (nel punto) \downarrow come cambia nell'intorno

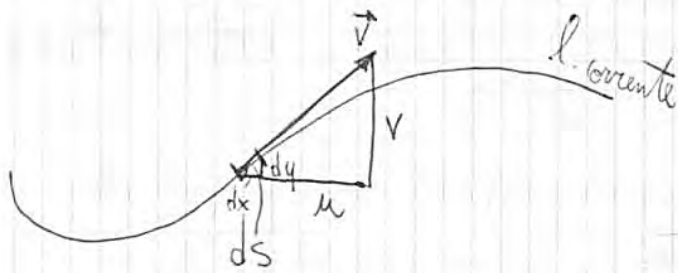


particelle di fumo: particelle incombuste che cambiano l'indice di rifrazione dell'aria

linee di fumo: linee descritte dalle particelle che sono tutte passate per lo stesso punto

«PENNACCHIO»: come va la sostanza ...

EQUAZIONE DELLE LINEE DI CORRENTE



tutto infinitesimo di linea: ha la stessa inclinazione del vettore \vec{v} , quindi i triangoli $\vec{v} \cdot u$ e $dx dy ds$ sono simili:

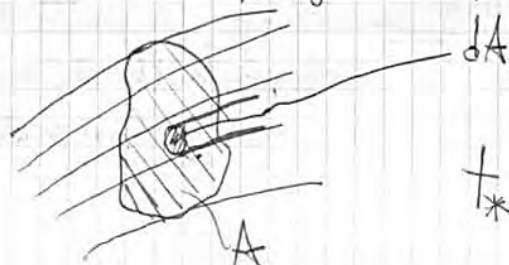
$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{v}$$

In generale, considerando anche la coordinata z :

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

PORTATA PAG. 49

Consideriamo una qualunque linea chiusa all'interno della massa fluida e tutte le linee di corrente che si appoggiano a questa linea chiusa.



Esempio:



velocità media: velocità costante che, moltiplicata per l'area, mi dà direttamente la portata.

Tipi di moto: PAG. 49

• MOTO VARIO: moto in cui il campo di moto dipende da x, y, z e anche dal tempo.

• MOTO PERMANENTE: moto in cui il campo di moto non dipende dal tempo, ma soltanto dallo spazio

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

• MOTO UNIFORME: moto in cui, muovendosi su una traiettoria, il campo di moto non cambia (muovendosi su una stessa traiettoria, il vettore velocità è sempre lo stesso)

• MOTO PIANO: moto bidimensionale: $\begin{cases} u = u(x, y, t) \\ v = v(x, y, t) \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow$ niente dipende da z .

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PAG. 81

(e tutti gli altri fenomeni studiati fino ad ora)

(Il campo elettrico si basa su 4 principi:

- principio di conservazione della massa
- " " dell'energia
- " " della quantità di moto (cioè che si sposta, si porta dietro la propria massa con una certa velocità) e il prodotto mv si conserva
- " " del momento della quantità di moto (interviene quando abbiamo masse che ruotano attorno a un asse.)

lungo y:

$$\rho v dx dz dt$$

$$\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx dz dt$$

lungo z:

$$\rho w dx dy dt$$

$$\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) dx dy dt$$

Mettiamo tutto insieme e facciamo la differenza tra tutto quello che esce e tutto quello che entra:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy dx dz dt + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz dx dy dt =$$

$$= - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$$

non $\bar{\rho} = 0$ perché
non siamo con
fluidi incompressibili
 \Rightarrow può essere
cambiata la
densità (e dunque la
massa nel prisma)
nel tempo dt .

Il cambiamento di densità può avvenire a
causa di azioni di spinte.

(cioè all'interno del prisma)

(cambiamento di massa all'interno del volume) nell'intervallo di
tempo dt (mentre il volume non sta cambiando)

(cioè sto considerando sempre
lo stesso prisma)

In definitiva ho:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ:
in ogni elemento infinitesimo
la massa si conserva

Casi particolari

- moto permanente (mente cambia nel tempo) $\Rightarrow \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

- $\rho = \text{cost}$ (costante: nel tempo; uniforme: nello spazio) $\Rightarrow \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

non cambia nel tempo, ma può cambiare nello spazio.

Come è cambiata la massa del volume V , nel tempo dt :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV dt$$

La variabile rispetto cui sto integrando è diversa dalla variabile rispetto cui sto derivando, quindi:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right] dt \quad \leftarrow \text{variazione di massa}$$

Per il princ. di con. della massa il bilancio di ciò che entra e ciò che esce deve essere uguale alla variazione di massa che c'è stata nell'intervallo di tempo dt :

$$dt \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \left[\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right] dt$$

$$\int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

→ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ IN FORMA INTEGRALE

Casi particolari

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \begin{cases} \text{moto permanente} \\ \rho = \text{cost} \end{cases}$$

ciò avviene in caso di

$$\Rightarrow \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

non mi serve più guardare ciò che accade in tutti i punti del volume, ma solo ciò che accade nella superficie di contorno.

$$\vec{v}_n dA = \text{portata dQ}$$

$$\rho \vec{v}_n dA = \text{portata in massa}$$

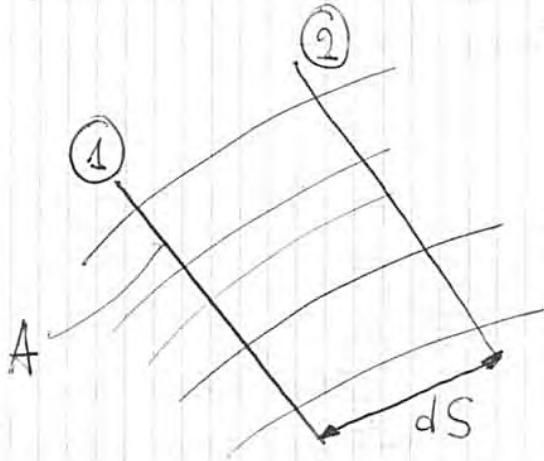
l'integrale è la somma di tutte le portate in massa → la portata in massa entrante deve essere uguale alla portata in massa uscente

Come diventa il principio di conservazione della massa per le correnti???

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

← questa vale per TUTTI i fluidi peró è complicata perché devo conoscere il campo di moto e come varia la densità.

Nel caso di correnti:



① $\rho Q dt$
 massa che nel tempo dt entra nella sezione ①

② $(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds) dt$
 ↓
 variazione della portata in massa quando ho fatto un passo ds

② - ① ⇒ $\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt$ (cassa tra le sezioni ① e ②)

La massa che c'è all'interno è: $\rho A ds$
 ↓
 volume

$\frac{\partial \rho A}{\partial t} dt ds$
 ↑
 variazione di massa contenuta nel pezzo di corrente, nel tempo dt
 compreso tra le sezioni ① e ②

IDRAULICA

11-10-2011

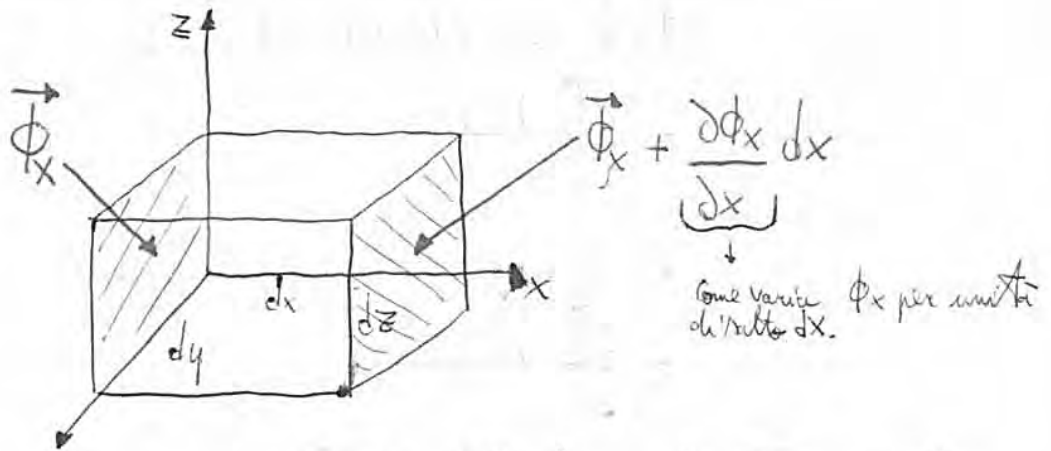
DINAMICA DEI FLUIDI PAG. 90

L'equazione base della meccanica è: $\vec{R} = m \vec{A}$ (aaa)

↑ risultante
↓ forze d'inerzia
deve fare equilibrio

[Eq. indefinita: vale per un generico elemento infinitesimo all'interno della massa fluida].

Consideriamo un prisma infinitesimo:



Del momento che stiamo considerando un elemento infinitesimo, la (aaa) diventa:

$$d\vec{R} = dm \vec{A}$$

utilizziamo l'approccio euleriano

scriviamo \vec{A} :

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dm: $dm = \rho dx dy dz$

$d\vec{R}$: forze di massa (si applicano perché nel volumetto è contenuta) e forze di superficie (agenti sul contorno del volumetto)

forze di massa: immaginiamo che ci sia \vec{F} forza per unità di massa $\vec{F} \rho dx dy dz$ la forza agente su tutta la massa contenuta nel volumetto

Non ci stiamo preoccupando di quale sia la forza di massa.

Finora le equazioni fondamentali fatte sono 3: PAG. 92

① $\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$ equazione indefinita della dinamica

esprime il principio di conservazione della quantità di moto ($\vec{F} = m\vec{a}$)

② $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ equazione di continuità

esprime il principio di conservazione della massa

③ $\rho = \rho(\vec{\Phi}_x, \vec{\Phi}_y, \vec{\Phi}_z) \Rightarrow \rho = \text{cost}$ EQUAZIONE DI STATO

non dipende dalla stato di tensione (altrimenti abbiamo detto che non dipende nemmeno dalla temperatura)

"trascurando la velocità di propagazione delle onde di pressione"

[La statica è un sottocaso della dinamica, infatti nella prima equazione $\rho = \rho$ invece $\vec{A} = 0$ e sostituiamo ρ a tutti i $\vec{\Phi}$, restano $\rho \vec{F} = \text{grad} \rho$].

Quindi, dato che abbiamo 3 equazioni, devono esserci 3 incognite, che sono ^{però} 10

- μ, ν, w (3 incognite scalari)
- $\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}, \phi_{xy}, \phi_{xz}, \phi_{yz}$ (Stato di tensione: 6 componenti indipendenti)

$$\begin{pmatrix} \parallel \\ \phi_{yx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \parallel \\ \phi_{zx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \parallel \\ \phi_{zy} \end{pmatrix}$$

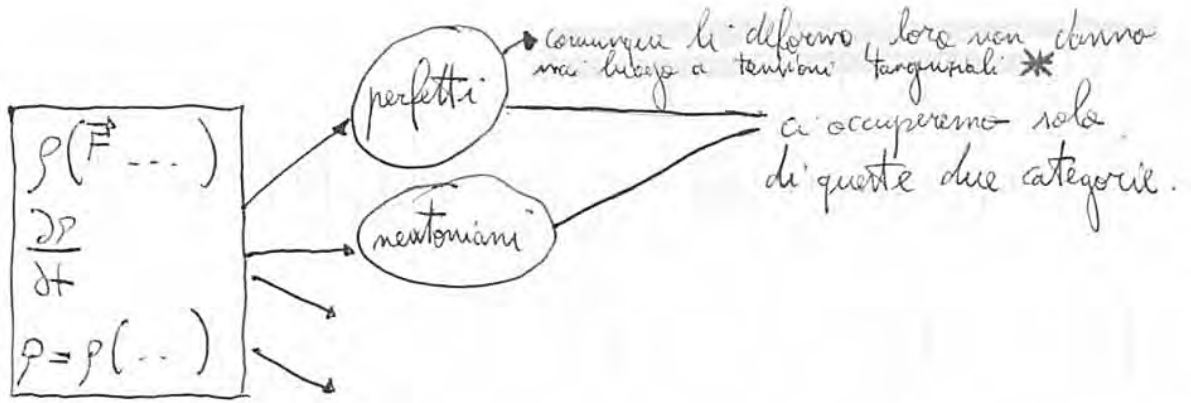
Quindi dovremmo scrivere 10 vincoli (dato che ho 10 variabili scalari). Ma:

l'equaz. della dinamica è vettoriale \Rightarrow 3 vincoli scalari

l'equazione di continuità è scalare \Rightarrow 1 vincolo

l'equazione di stato è scalare \Rightarrow 1 vincolo

Quindi: 10 variabili scalari, ma solo 5 vincoli.



Stato di tensione

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Lo stato di tensione si riduce da un tensore a uno scalare (p)

matrice diagonale qualunque selgo l'orientazione (giacitura) \Rightarrow autovalori tutti uguali tra loro

Nel caso di fluidi perfetti le 3 equazioni diventano:

$$\begin{cases} \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p & \leftarrow \text{EQUAZIONE DI EULERO (1775)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho = \rho(\dots) \Rightarrow \rho = \text{cost} \end{cases}$$

Le variabili sono 5: ρ, u, v, w, p
 Le equazioni sono 5.

deriva la dinamica dei fluidi perfetti

Eulero è quello che per primo si inventa i fluidi perfetti (o ideali) (Orogene, elio e litio si comportano come fluidi perfetti).

[Ci sono dei fluidi in cui la viscosità, pur essendo, è trascurabile?]

I fluidi perfetti, pur non essendo nella realtà, risolvono la maggioranza dei problemi concreti.

* è molto complessa e ora vedremo il perché.

perché a secondo membro ho grad p?
 perché avrei $\frac{\partial p \vec{x}}{\partial x} + \frac{\partial p \vec{y}}{\partial y} + \frac{\partial p \vec{z}}{\partial z} = \text{grad } p$

[Le previsioni del tempo sono difficili perché trattano di fluidi (e sono non lineari)].

L'equazione dei fluidi newtoniani è:

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES : equazione dei fluidi newtoniani

laplaciano (somma delle derivate seconde)

Non c'è maggiore completezza rispetto all'equazione di Eulero, perché in loro sono aggiunte solo derivate seconde.

$$\nabla^2 \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$$

La fonte dei problemi rimane sempre nell'accelerazione.

L'ingegnere dice: supponiamo di saper risolvere l'equazione e avere dunque il risultato. Avere il risultato significherebbe conoscere tutte le variabili in ogni punto e in ogni istante.

[CALCOLO NUMERICO: sostituiamo le derivate con dei delta (Δ , differenze):
 si fa una DISCRETIZZAZIONE di punti.]

Quindi anche se risolve l'equazione avrai un numero grandissimo di informazioni, di cui il 99,99% non me ne farei niente.

Lo strumento matematico per lottare via le informazioni superflue è

l'INTEGRALE (permette di salvare solo le variabili di interesse ingegneristico)

Si tratta dunque di integrare l'equazione di Eulero (*).

(dettagli)

Però prima integriamo nell'equazione prima di scegliere il tipo di fluido

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}$$

$$\int_V \rho \vec{F} dV - \int_V \rho \vec{A} dV = \int_V \left(\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \right) dV \quad \text{PAG. 94}$$

(γ)

(β)

(α)

$$= \int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \vec{v})}{\partial z} \right] - \underbrace{\vec{v} \operatorname{div}(\rho \vec{v})}_{\text{ricordiamo l'equazione di continuità:}} =$$

ricordiamo l'equazione di continuità:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

IN DEFINITIVA HO integrando:

Abbiamo fatto tutti questi passaggi per avere una somma di derivate, quindi:

$$\rho \vec{A} = \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \vec{v})}{\partial z} \right]$$

$$\int_V \rho \vec{A} dV = \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_V \left(\frac{\partial(\rho u \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \vec{v})}{\partial z} \right) dV$$

non posso applicare Green perché ho l'integrale sul volume e la derivata rispetto al tempo

termini locali

applicando il t. di Green:

$$- \int_A \rho \vec{v} (u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z) dA$$

$$\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n}}_{\parallel \vec{v}_n}$$

termini convettivi

Quindi, infine:

$$\beta = \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV - \int_A \rho \vec{v} v_n dA$$

Per γ non c'è un granché da fare.

termine veramente complicato perché, ~~avrei~~ conoscere il campo di moto in ogni punto della massa fluida. presuppone che

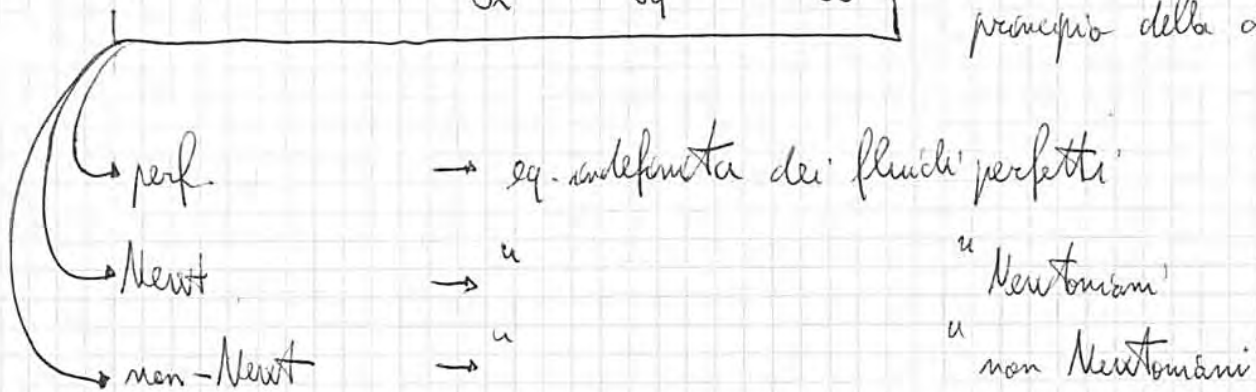
Quindi nel corso tratteremo moti permanenti:-

- questa equazione vale per qualunque fluido (non abbiamo fatto ipotesi sul tipo di fluido) e per qualunque condizione di moto (non abbiamo detto se il moto è turbolento, oppure laminare, oppure...).

hinten della meccanica dei fluidi in questa pagina:

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

equaz. "copertite" (e partono la struttura del 2° principio della dinamica)



Usando l'integrale (ovvero scegliere il tipo di fluido) ho:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e + \vec{M}_v = 0$$

Inserendo queste ultime 2 poteri nella ① mi ha che:

$$\rho (-g \text{grad} z - \vec{A}) = \text{grad} p$$

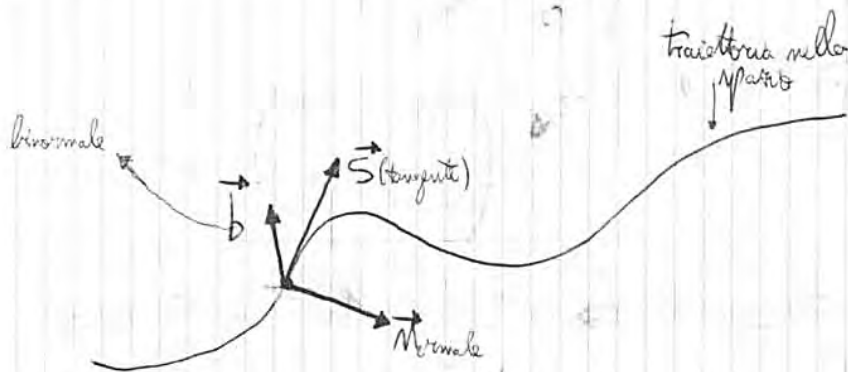
$$- \text{grad} (\gamma z) - \rho \vec{A} = \text{grad} p$$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{A}$$

← Questa è un'equazione vettoriale

①

Consideriamo la generica traiettoria di una particella e in ogni punto possiamo considerare la terna intrinseca:



$$\boxed{\vec{S}}: A_S = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}$$

↓
lungo la dirett. tangente

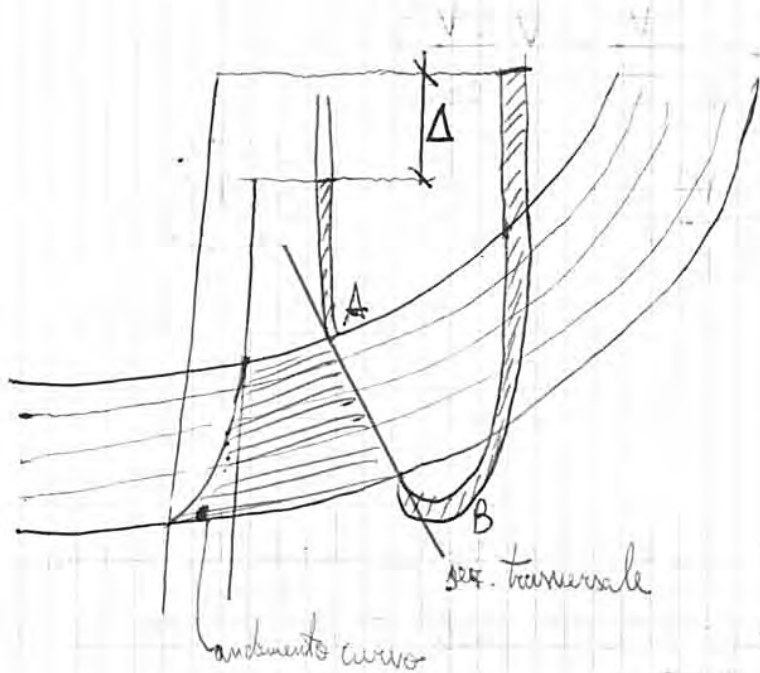
$$\boxed{\vec{M}}: A_M = \frac{v^2}{r}$$

↓
accelerazione centripeta

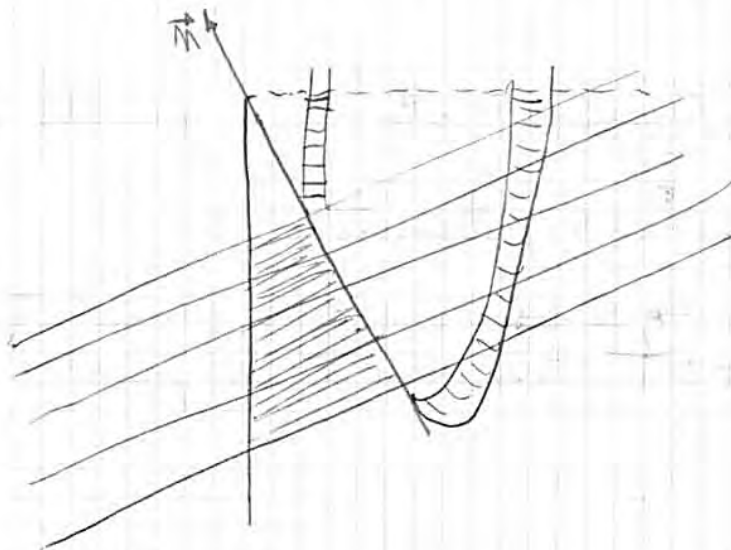
→ raggio di curvatura del arco osculatore in quel punto

$$\boxed{\vec{b}}: A_b = 0$$

perché localmente la traiettoria sta nel piano osculatore → non c'è niente nel piano osculatore, cioè non c'è niente in direzione normale al piano osculatore.



La 2° equazione mi dice che muovendomi lungo \vec{n} , il carico perimetrico diminuisce (dato che a 2° membro c'è il segno -)



PAG. 105

l'andamento delle pressioni

Tanto più il raggio di curvatura è piccolo e tanto più T_p discosta da quello idrostatico.

Ragioniamo ora sulla prima equazione delle acce: PAG. 107

$$\mu \frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mu^2}{2} \right)$$

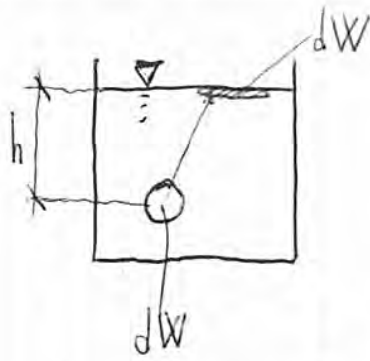
Portando a primo membro quest'ultimo termine si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\mu^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

- A QUESTO PUNTO FACCIAMO LA 4° IPOTESI SU CUI SI BASA IL TEOREMA DI BERNOULLI: MOTO PERMANENTE

[Perché c'è una pressione nel fluido? Perché le particelle stanno vibrando]

Consideriamo un elemento dW nel fluido fermo: PAG. 10



$p = \gamma h$ pressione agente nell'elemento dW

Prendo dW piano piano lo distribuisco sulla superficie.

dW stava fermo perché la risultante delle forze al contorno era pari a \vec{P} .

Spostando un sistema meccanico con risultante pari a zero non compie lavoro.

Lo faccio lentamente (trasformazione quasi statica).

Spostandolo in alto ho guadagnato energia potenziale in quantità

$\rho dW g h$

A scapito di chi ha guadagnato energia potenziale? A scapito della pressione; infatti si ha che:

$\frac{\rho dW g h}{\rho dW g} = h \rightarrow$ energia potenziale guadagnata per unità di peso

$p = \gamma h \Rightarrow \frac{p}{\gamma} = \frac{\gamma h}{\gamma} = h$

$\frac{p}{\gamma}$ rappresenta (contiene) un'energia legata alla pressione.

energia persa a scapito della pressione (è un'energia legata alla pressione).

Ottengo una giustificazione (non è una dimostrazione): l'energia di pressione che perde un'unità di peso è uguale all'energia potenziale che guadagna \Rightarrow mi viene in dubbio che siano la stessa cosa.

Globalmente l'intera massa di fluido non ha né perso, né guadagnato energia.

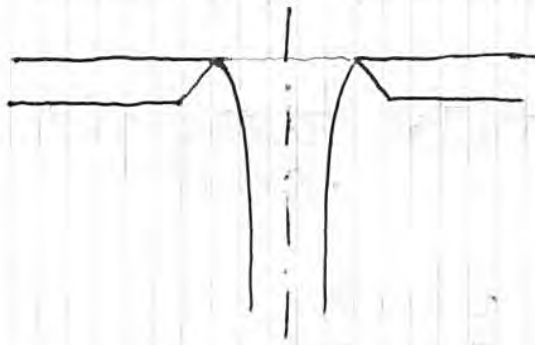
L'equazione di continuità è un'equazione di conservazione della quantità di moto, l'equazione di conservazione dell'energia salta fuori perché ho fatto ipotesi:

ho fatto l'ipotesi di non ci sono tensioni tangenziali, quindi non ci sono attriti interni che mi permettono di trasformare energia meccanica in calore

- fluido incompressibile: non posso trasformare energia meccanica in calore tramite la compressibilità

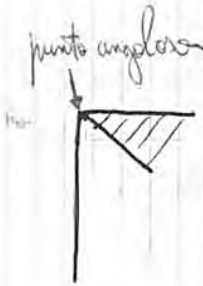
[La pressione è legata all'elasticità? No perché abbiamo fatto l'ipotesi che p è costante]

Ma invece consideriamo un'altra situazione:



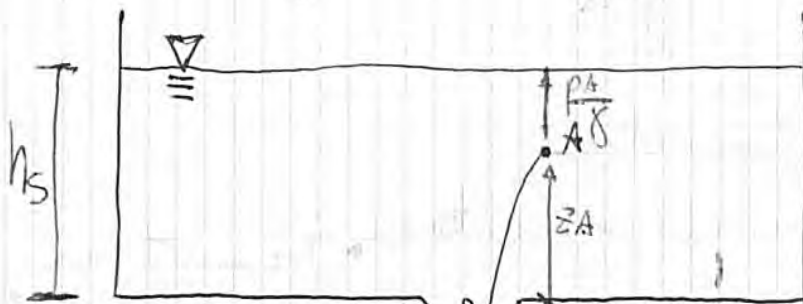
Tagliamo il foro a spigoli vivi

Il getto va restringendosi verso il basso perché aumenta la velocità. E la portata è la stessa e la velocità aumenta \Rightarrow la sezione diminuisce.



Il fluido non può fare così (ci deve essere la continuità della derivata prima).

Così che in questo caso si passerebbe da velocità nulla (in orizzontale) a velocità finita senza continuità.



SEZIONE CONTRATTA

z_B
 z
 $z=0$

tutti i punti di quota sup. trasversale hanno carica piezometrica costante. sul bordo la pressione è nulla e quindi il carico piez. sulla sup. trasversale costante \Rightarrow la pressione è ovunque nulla su quella superficie.

Pensiamo al ∇ di Bernoulli

\rightarrow fluido perfetto: è acqua $\Rightarrow \mu \neq 0$, però se il foro è piccolo rispetto al serbatoio \Rightarrow la zona in cui la velocità è sensibilmente diversa da 0 è solo vicino al foro \Rightarrow allora posso trascurare i gradienti spaziali di velocità \Rightarrow le tensioni tangenziali sono nulle \Rightarrow la viscosità c'è ma è come se non ci fosse perché non riesce a far sentire il suo effetto.

Ogni volta che il fluido accelera, non ci sono grandi deformazioni; quando

$$\underbrace{\left(z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right) - z_B}_{h} = \frac{v_B^2}{2g}$$

$$h_s + (0,5 \div 1)d = \frac{v_B^2}{2g}$$

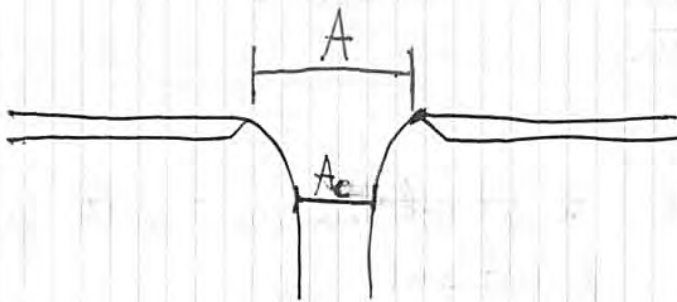
$$v_B = \sqrt{2g [h_s + (0,5 \div 1)d]}$$

Tutti i punti nella sezione contratta hanno la stessa velocità v_B

quindi la portata sarà: $Q = A_c v_B (C_c \approx 0,55)$

$$Q = \underbrace{A_c}_{\text{area sup. contratta}} \sqrt{2g [h_s + (0,5 \div 1)d]}$$

Quanto vale la sezione contratta?

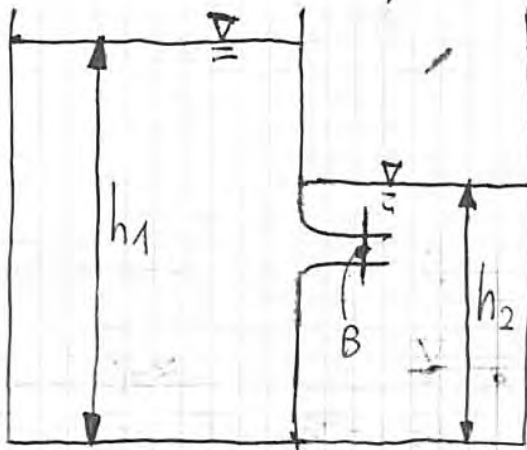


di cui che non si applica le 4 ipotesi in questo caso, non diventa 55 cifre decimali di precisione, ma questa formula sarà precisa con 2-3 cifre decimali.

$$A = \pi \frac{d^2}{4}$$

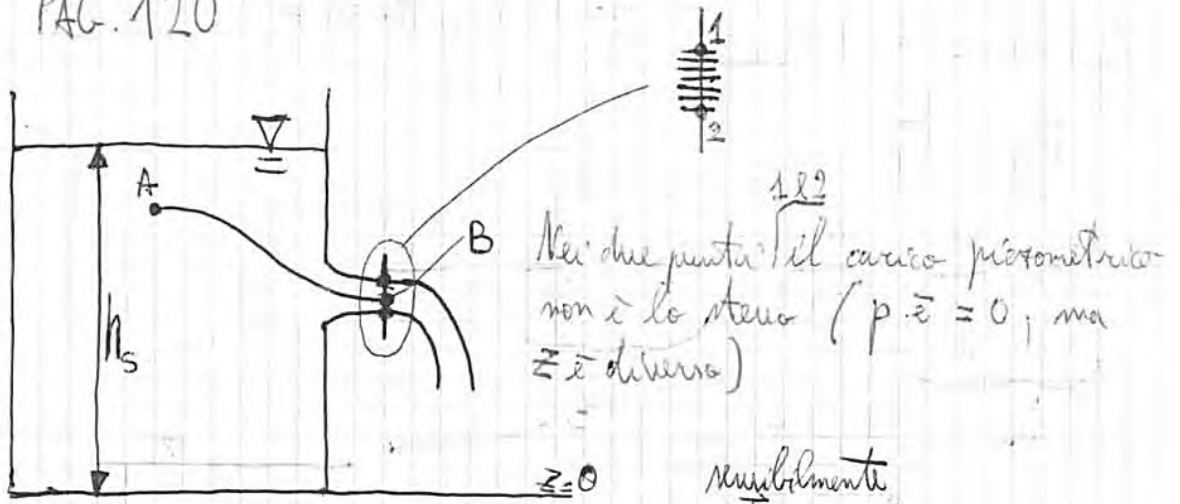
Facendo degli esperimenti si ricava che $\frac{A_c}{A} \approx 0,6$

Esempio



si ricava che $u_B = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

Esempio PAG. 120

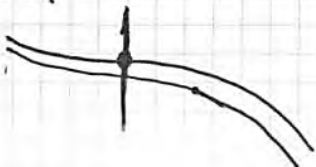


SEZ. CONTRATTA: zona in cui il fluido ha traiettorie rettilinee e parallele.

$$\left. \begin{array}{l} z_1 \neq z_2 \\ p_1 = p_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{è impossibile che } h = \text{cost}$$

è sbagliata l'ipotesi

È sbagliata una delle ipotesi che mi permette di dire che $h = \text{cost}$, cioè che le traiettorie sono rettilinee, infatti le traiettorie hanno un punto di flesso, ma non sono rettilinee e parallele: non riesce a misurarsi un tratto sufficientemente lungo in cui le traiettorie sono rettilinee.



Il fatto di cadere sotto l'effetto della forza peso fa nascere le forze di inerzia.
 Le forze di inerzia nascono a causa delle accelerazioni.

Quindi la (1) va adattata aggiungendo il termine relativo alle forze d'inerzia:

$$pA + \gamma A dz = \left(pA + \frac{dp}{dz} dz A \right) + \gamma A dz$$

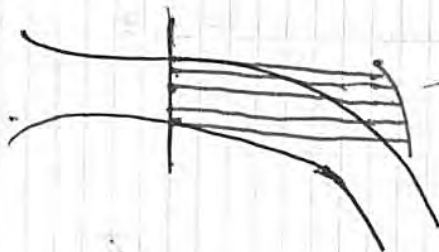
$$\frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow p = \text{cost}$$

All'interno del getto non c'è nessun gradiente di pressione $\Rightarrow p = \text{cost} \Rightarrow$ si suppone che p sul contorno del getto è nulla, allora la p in tutta la sez. controllata sarà nulla

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h_s - z_B)}$$

una definizione
 diciamo che

la velocità nei punti del getto cambia in maniera PARABOLICA ($h_s = \text{cost}$ ma z varia).



Come va il profilo di velocità, cioè il campo di moto

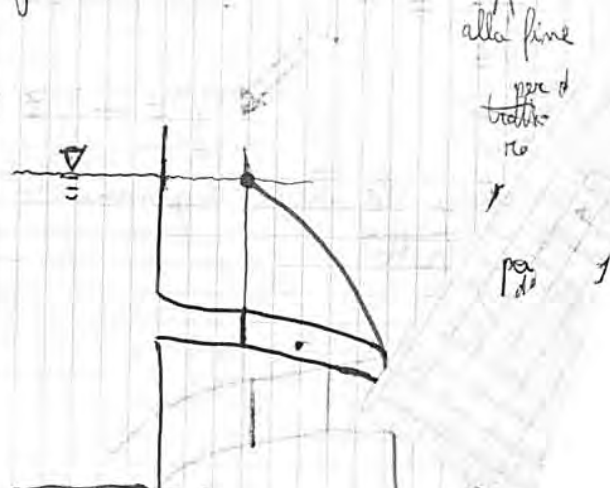
Quanto vale la portata?

$$Q = C_c \frac{\pi d^2}{4} \bar{v}$$

$$Q = C_c \frac{\pi d^2}{4} v_{\text{baricentro}}$$

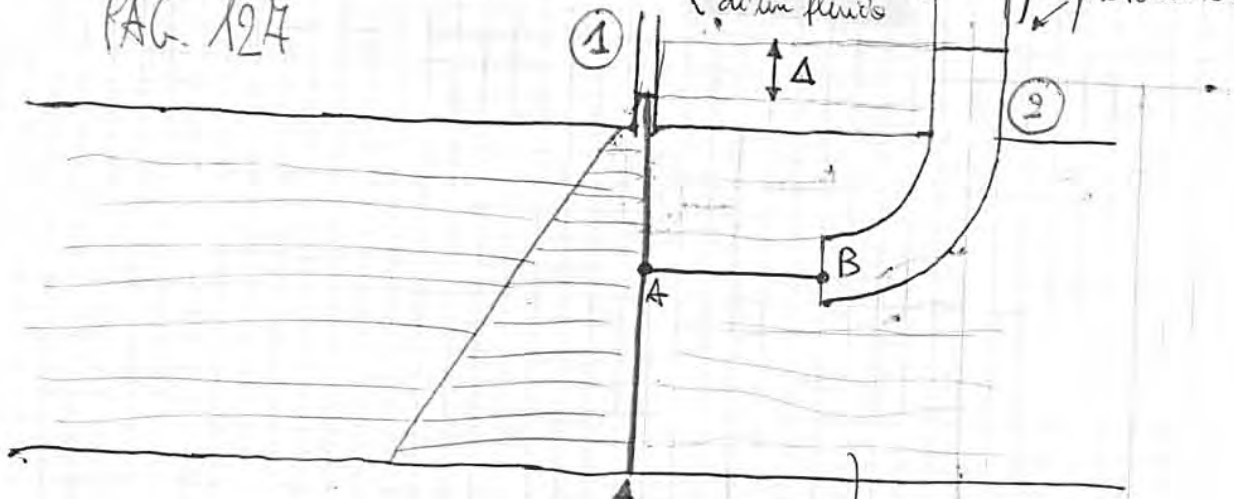
$v_{\text{baricentro}}$
 alla sezione controllata

valor medio della velocità, cioè valor medio del cilindro delimitato dalla $1-1'$, controllata inferiormente da un arco di parabola superiormente \Rightarrow deve fare un integrale



TUBO DI PITOT

PAG. 124



① al piezometro
 rileva il
 carico piezometrico
 in tale sezione
 trasversale dove
 il fluido

Tubo con una
 corrente dentro

Perfetto lo possiamo considerare iperico, se A e B sono vicini, il tratto è piccolo e quindi possiamo dire che le due pressioni sono trascurabili. Valgono inoltre tutte le altre ipotesi del T. di Bernoulli, quindi:

$$H_A = H_B$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{h_A} \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{h_B}$

in B la velocità si annulla (PUNTI DI RISTAGNO) il fluido va a sbattere lì e si ferma.

$$\frac{V_A^2}{2g} = h_B - h_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

$h_B - h_A > 0$ poiché $V_A > 0$
 deve essere

$$\Rightarrow \boxed{h_B > h_A}$$

Δ è legato alla V_A .
 \downarrow
 $(h_B - h_A)$

$\gamma dQ H = dP$
 ↑
 energia meccanica che passa nell'unità di tempo attraverso al tubo di flusso infinitesimo \Rightarrow potenza
 ↳ potenza che passa nel tubo infinitesimo

$$P = \int_P dP = \int_Q \gamma H dQ = \int_A \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) v dA$$

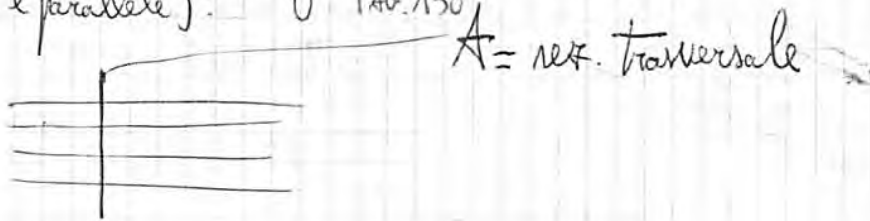
$\rho = \text{cost}$ perché il fluido è incomprimibile

v è la velocità lungo quella determinata traiettoria
 H è costante nella generica traiettoria e con l'integrale sommo più quantità costanti

questo cambia da tubicino a tubicino ma lungo uno stesso tubicino è costante \Rightarrow la potenza è una costante

Quindi lungo il tubo la potenza complessiva è costante.

Consideriamo una corrente gradualmente variata (traiettorie sensibilmente rettilinee e parallele): PAG. 138

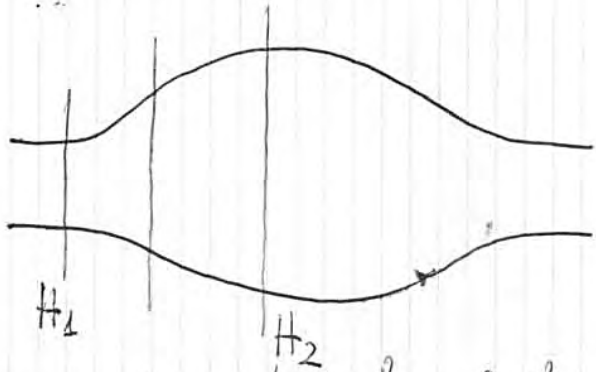


$$\gamma \int_A \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) v dA + \gamma \int_A \frac{v^2}{2g} v dA$$

$$\gamma h Q + \gamma \int_A \frac{v^2}{2g} v dA$$

$h = \text{cost}$ in tutta la sez. trasversale
 $\int_A v dA = \int_Q dQ$

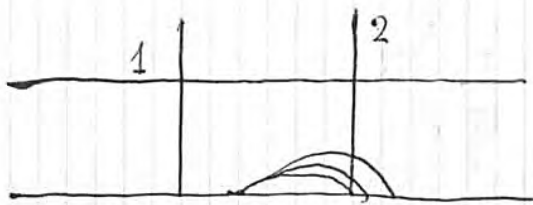
γ, h, Q sono tutte grandezze globali
 devo però ancora sapere come la velocità varia da punto a punto nella sezione trasversale



ANEURISMA: l'aorta si ingrandisce.

La sezione si ingrandisce, la velocità diminuisce perché $Q = \text{cost}$

$H_1 = H_2$, ma se la velocità scende \rightarrow aumenta la pressione



ASTENOSI (forma di colesterolo)

$$P_2 < P_1$$

Diminuisce la pressione, tende ad accumularsi più roba fino alla completa ostruzione della vena.

$$= \alpha \left(\frac{V_u^2}{2g} - \frac{V_i^2}{2g} \right) \quad (m)$$

$Q = \Omega_i V_i = \Omega_u V_u \implies V_i = \frac{Q}{\Omega_i}$
 $V_u = \frac{Q}{\Omega_u}$

\uparrow
 la portata è costante

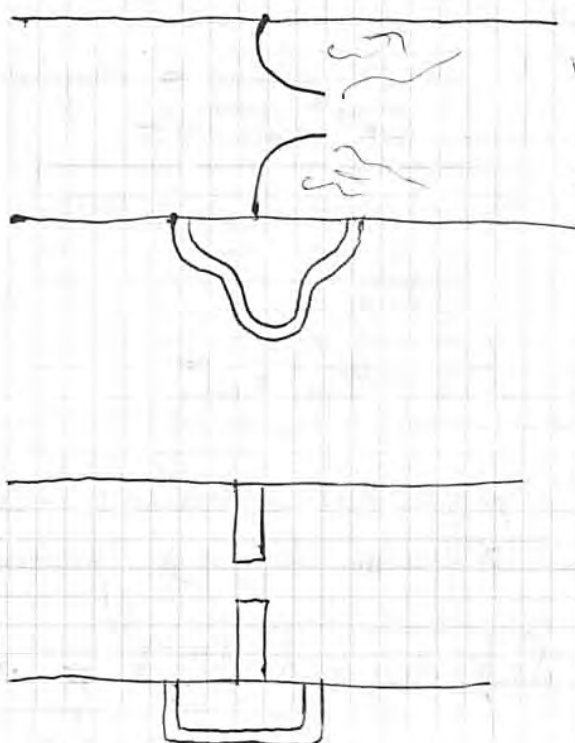
Sostituendo queste ultime formule nella (m), si ottiene:

$$\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q^2}{\Omega_i^2} - \frac{Q^2}{\Omega_u^2} \right)$$

L'unica incognita è la portata:

Il tubo di Venturi permette di misurare la portata in una corrente.

Tutto quello visto vale per qualunque inclinazione della corrente (l'acqua si muove a seconda del valore del carico totale H , non dell'inclinazione)



Bocchiglie:

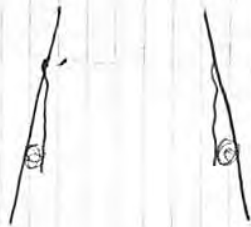
VANTAGGIO: è molto più piccolo del venturimetro

SVANTAGGIO: non è preciso come il venturimetro perché il manometro a destra misura una corrente in cui ci sono dei getti

$$H_A = H_B = \alpha \frac{V_B^2}{2g}$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \alpha \frac{V_A^2}{2g} = \frac{V_B^2}{2g}$$

$\alpha \frac{V_A^2}{2g} \bar{e} > \alpha \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma}$ deve essere negativo, ma $z_A \bar{e}$ positivo e quindi $P_A \bar{e}$ negativo. Quindi il diffusore crea una **DEPRESSIONE**.



il diffusore deve essere fatto bene, altrimenti si creano vortici (che assorbono energia e quindi c'è dissipazione)

INSTABILITÀ DI KELVIN-HELMOLTZ

Cosa vuol dire la parola instabilità?

Modello

che descrive ciò che mi interessa.
(Es. equaz. di Eulero descrive i fluidi perfetti)

Soluzione

Stabilità

Ci sono soluzioni che esistono, ma sono instabili e quindi non si vedranno mai nella realtà

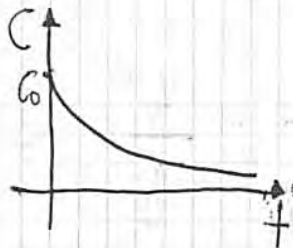
Consideriamo un modello descritto dalla seguente equazione:

$$\frac{dC}{dt} = -kC \quad (1)$$

soluzione

$$C = C_0 e^{-kt}$$

(C es: concentrazione) che diminuisce a seconda di quanto è m'è: se C è tanto \Rightarrow diminuisce tanto se C è poco \Rightarrow diminuisce poco



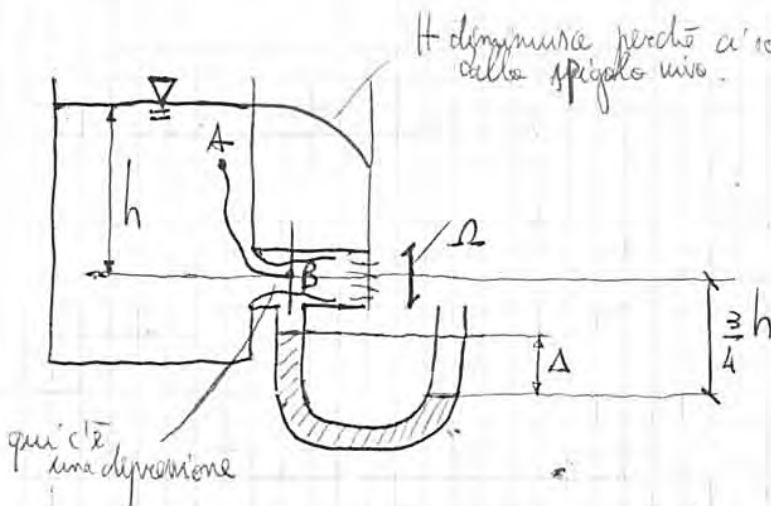
e lo troviamo spesso, perché tante cose, in prima approssimazione, vanno come la (1)

sol. stabile

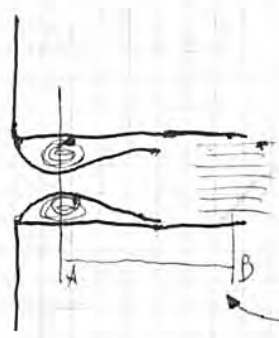


sol. instabile

FORONOMIA PAG. 428



Se c'è uno spigolo vivo la corrente non può fare così → significherebbe che le particelle fanno uno spigolo vivo e cioè che l'accelerazione centripeta va a ∞ e non è possibile.



NELLA REALTÀ, SE C'È UNO SPIGOLO VIVO: si formano quindi dei vortici nella realtà.

Non posso applicare Bernoulli ad A e B perché c'è una forte differenza di energia, però considerando comunque Bernoulli ~~tra A e B~~ nel primo disegno:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

\downarrow
 0
 \downarrow
 $-\frac{3}{4}h$

è un dato sperimentale; non sono in grado di dimostrarlo. Note questa, riesco a ricavare V_B

$$h = 0 - \frac{3}{4}h + \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow V_B = \sqrt{2g(h + \frac{3}{4}h)} = \sqrt{2g \frac{7}{4}h}$$

La portata sarà: $Q = C_c \Omega V_B = C_c \Omega \sqrt{2g \frac{7}{4}h} = 0,8 \Omega \sqrt{2gh}$
 $\approx 0,6$

CONSIDERIAMO ORA CIÒ CHE ABBIAMO FATTO FINORA IN DINAMICA:
 Riprendiamo l'equazione indefinita della dinamica:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

* nel caso dei fluidi perfetti: $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p$

Nel caso di VOLUME FINITO, integrando si ha:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

~~Nel caso dell'equazione indefinita della dinamica:~~ $\vec{F}_c = \int_A \vec{\Phi}_m dA = \int_A p \vec{n} dA = \vec{P}$

nel caso di fluido perfetto (esistono solo le p)

de per ricordare che sono forze normali al contorno, perché nel caso dei fluidi perfetti ci sono solo quelle.

- Teorema di Bernoulli.
- Teorema di Bernoulli esteso alle correnti.

* Ci occupiamo ora dei fluidi NEWTONIANI PAG. 165



L'equazione finale che salta fuori è (la dimostrazione la vedremo alla fine del corso):

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

PAG. 172

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \underbrace{\text{grad } p}_{\text{grad } p} - \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_{\mu \nabla^2 \vec{V}}$$

eq. globale:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$\int_A \vec{\Phi}_m dA \quad \vec{\Pi} = \int_A p \vec{n} dA$$

$$\mu \int_V \nabla^2 \vec{V} dV$$

in questo caso comprende due termini:

Applicando il t. di Green, l'integrale $\mu \int_V \nabla^2 \vec{V} dV$ diventa:

$$-\mu \int_A \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cos \hat{n}_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cos \hat{n}_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cos \hat{n}_z \right) dA =$$

Ho trasformato un integrale di volume in uno di superficie.

$$= -\mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} dA = -\vec{T}$$

↑
somma di tutti i gradienti spaziali lungo \vec{n}

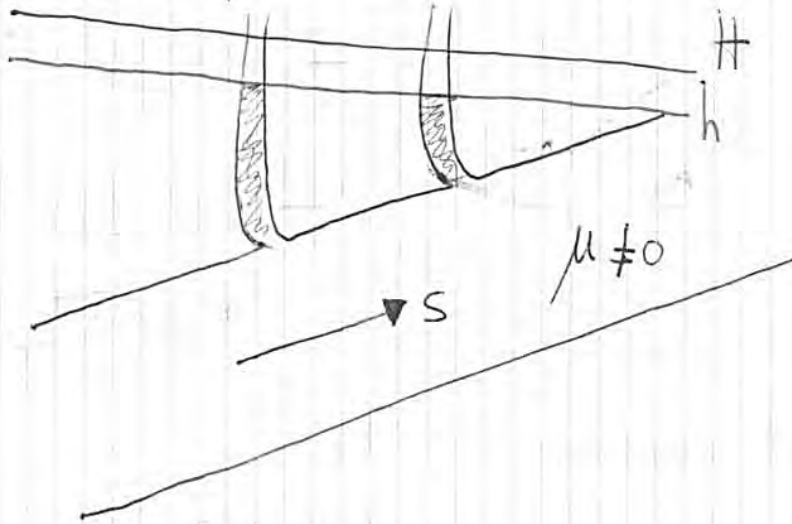
risultante delle forze tangenziali (è l'eredità del termine diffusivo nell'equaz. indefinita)

$$\vec{F}_c = \vec{\Pi} - \vec{T}$$

$$\int_A p \vec{n} dA \quad \mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} dA$$

Portando μ fuori dall'integrale sto ipotizzando che μ rimanga costante (e quindi che la temperatura non vari (infatti $\mu = \mu(\text{temp})$)).

Nel caso di un fluido reale:



H scende, e poiché la res. rimane costante (il termine cinetico rimane costante) $\Rightarrow h$ diminuisce.

Quindi devo fornire energia perché il fluido la sta perdendo per causa dell'attrito.

PENDENZA MOTRICE $i(s) = - \frac{dH}{ds} \Rightarrow H(s) = H_0 - \int_0^s i(s) ds$ (f)

PAF. 136

integrando, ottengo come varia l'energia mano a mano che mi sposto.

In un certo tratto ds , si perde una certa energia $dH \Rightarrow$ per avere una quantità positiva netto il segno meno.

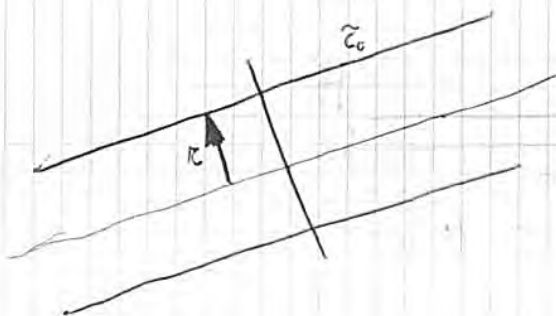
Se $\Omega = \text{cost/unif}$
 ↑
 sezione

$\Rightarrow i(s) = - \frac{dh}{ds}$

il termine cinetico, se $\Omega = \text{cost/unif}$, si mantiene costante (H e h sono paralleli)

Dalla (f), se $i \neq i(s) \Rightarrow H(s) = H_0 - si$
 i non dipende da s

ORA VOGLIAMO RISPONDERE A DUE QUESITI:

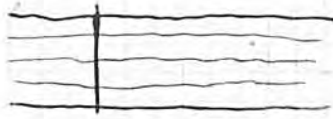


Quanto valgono le tensioni tangenziali sul bordo (τ_0)?
 E quanto valgono al variare del raggio r della condotta cilindrica circolare? $\tau = \tau(r)$

Come calcolo le H per una corrente?

$$\vec{H} = \int \rho \vec{v} v_m dA = \vec{n} \int \rho v^2 dA$$

flusso di
quantità
di moto



in questo caso: $\vec{v} = v \vec{n} \Rightarrow$ ho v^2 (perché $v_m \equiv v$)

Il vettore velocità cambia di modulo da punto a punto, ma non lungo una sezione trasversale (è orientata con la stessa \vec{n} lungo una sezione trasversale)

l'elemento $\beta = \frac{\int v^2 dA}{V^2 A}$

← "quello che non so"

← "quello che è facile calcolare"

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{n} \int \rho \beta v^2 A = \vec{n} \int \rho \beta V Q$$

suppongo $\rho = \text{cost}$, quindi lo posso portare fuori dal segno di integrale

si può determinare la seguente relazione: α misura in moto turbolento ($\alpha \approx 1$) $\Rightarrow \beta \approx 1$

$$(\alpha - 1) = 3(\beta - 1)$$

NEL NOSTRO CASO

Il flusso di quantità di moto entrante è uguale a quello uscente \Rightarrow

$$\vec{H}_e - \vec{H}_u = 0$$

In definitiva abbiamo dunque:

$$-\gamma A L \sin \alpha + p_1 A - p_2 A - T_{bordo} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow T_{bordo} = -\gamma A L \sin \alpha + p_1 A - p_2 A = -\gamma A (z_2 - z_1) + p_1 A - p_2 A$$

$L \sin \alpha = z_2 - z_1$

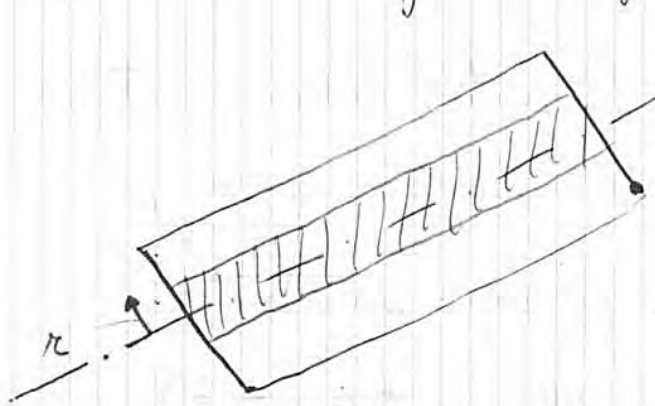
$$T_{bordo} = \gamma A \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = -\gamma A (h_1 - h_2) = -\gamma A \cdot L = -\gamma A \cdot \frac{1}{V}$$

$AL = \frac{1}{V}$

Una res. circolare è quella che a parità di area ha il minor contorno e quindi ha meno τ_0 di un' altra area \Rightarrow il condotto circolare è il più efficiente

Quindi: A par. di indicazione dell' efficienza idraulica, tanto più ho res. ^{che tendono all' essere} circolari e tanto più riesco a minimizzare l'area (di contorno) su cui ho attriti.

Come varia la tensione tangenziale lungo il raggio r ?



fatto per un cilindretto di generico raggio r

$T_{\text{bordo}}(r)$ stesso ragionamento di prima, quindi al posto di R prendiamo r .
 $\tau_0 = \frac{T_{\text{bordo}}(r)}{L \pi r^2}$ ^{"r grande", cioè il raggio di tutta la condotta}

$$\tau(r) = \gamma_i \frac{r}{2}$$

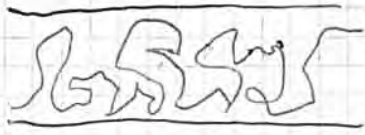
$$R = \frac{\pi r^2}{2 \pi r} = \frac{r}{2}$$

La tensione tangenziale è nulla al centro, cresce linearmente ed è massima sulle pareti.



ciò vale per qualunque tipo di moto, purché il fluido sia newtoniano e la corrente sia laminare

CATASTROFICO: cambiamento radicale delle caratteristiche dinamiche del sistema. Il filetto rosso rompere e tutta l'acqua diventa rosata; quindi sono arrivati ad un campo di moto complicatissimo da descrivere:



Aumentando ancora di più la portata (aprendo ancora di più il rubinetto) questo moto si amplifica sempre di più.

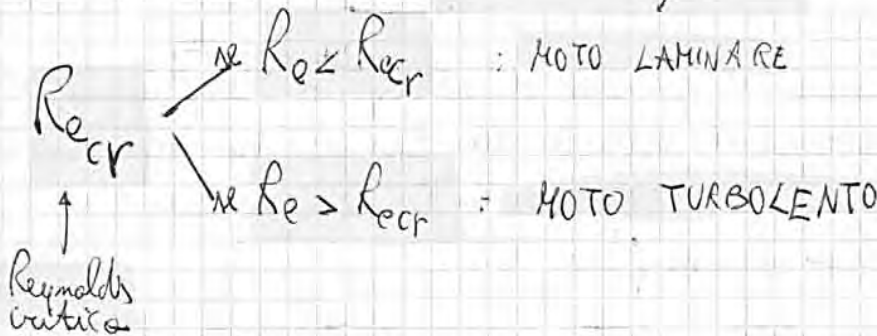
Tale moto complesso lo chiamo MOTO TURBOLENTO.

Dal punto di vista ingegneristico ho quasi sempre a che fare con il MOTO TURBOLENTO.

Parliamo oggi, però, del moto laminare. Introduciamo ora il:

NUMERO DI REYNOLDS: $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$

ρ = densità del fluido
 V = velocità tipica del fluido
 L = lunghezza tipica
 μ = viscosità del fluido



OSSERVAZIONI:

- Re è un numero ADIMENSIONATO.

- significato fisico di Re : $\frac{\rho}{\mu}$ è formato da due caratteristiche fisiche del fluido (ρ, μ)
 due caratteristiche tipiche del problema (V, L)

scala delle velocità scala delle lunghezze

$Re_{aeroplano} \cong Re_{mosca} \Rightarrow$ vuol dire che per tanti problemi le cose non cambiano.

Il numero di Re ci dice come le 4 grandezze coinvolte si combinano tra di loro.

Per Re bassi \Rightarrow le forze viscosi sono grandi (le forze viscosi sono quelle che "tranquillizzano" un fluido) \Rightarrow moto laminare

Tanto più Re cresce \Rightarrow le forze d'inerzia crescono, quindi ad un certo punto si nota una transizione critica in cui $F_{in} > F_{vis}$ e quindi ho un moto turbolento.

Quando ci presentano una nuova equazione, la prima cosa da fare è chiedere se è lineare o non lineare, la seconda cosa da fare è adimensionalizzarla.

ADIMENSIONALIZZAZIONE dell'equazione:

se il fluido è newtoniano $\Rightarrow \rho(\vec{F} - \vec{g}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{v}$ (1)

questa equazione coinvolge:

- coordinate x, y, z
- velocità u, v, w
- tempi t
- pressioni p

dell'adimensionalizzazione consiste nell'introdurre nuove variabili:

$- x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}$

Nel mondo di x', y', z' tutto varia tra 0 e 1 (usa per la morca nica per l'aeroplano)

$- u' = \frac{u}{V_0}, \quad v' = \frac{v}{V_0}, \quad w' = \frac{w}{V_0}$
 (V₀ è la velocità tipica della velocità)

$- t' = \frac{t}{\frac{L}{V_0}}$

$- p' = \frac{p}{\rho V_0^2}$

infatti facendo l'analisi dimensionale si ha:

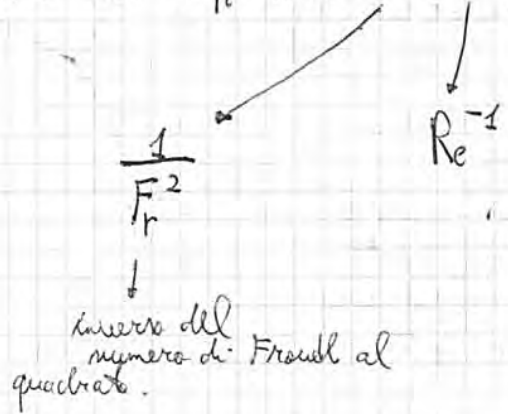
$$\frac{[Pa]}{\frac{[kg]}{m^3} \left[\frac{m}{s} \right]^2} = \frac{N/m^2}{m s^{-2}} = \frac{\frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2}}{\frac{kg}{m s^2}} = \frac{kg}{m s^2} \cdot \frac{m s^2}{kg} = [-]$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\rho g}{\nu_0^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = - \frac{Dv'}{Dt'} + \frac{\mu}{\nu_0 \rho} \nabla^2 v' \quad (2)$$

\uparrow a \uparrow b

La (1) misura nello spazio dimensionale (metri, secondi...)

La (2) viene con grandezze tutte adimensionate e che variano tra 0 e 1. Le caratteristiche (aereo, mosca) sono tutte nascoste nei coefficienti a e b.



(l'aereo è diverso dalla mosca? Certo, come lunghezza, ma è importante che mi dia Reynolds: Re è la restanza al numero).

Se $Re \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{Re} \rightarrow \infty$ e quindi può trascurare il termine $\frac{Dv'}{Dt'}$.
 creeping flows

Dato che tutti i termini hanno lo stesso ordine di grandezza (variano da 0 a 1) \Rightarrow può confrontarli tra loro e eventualmente trascurarli a seconda del valore dei coefficienti.

Invece nella (1) lo non può dire di trascurare ad esempio \vec{A} (rispetto a cosa è piccolo?? Non lo potrei dire).

Se $Re \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{Re} \rightarrow 0$ e quindi può trascurare $\nabla^2 v'$.
 a caso di esempio l'elicottero molto grandi.

Dalla (9)

$$T = \mu \frac{dv}{dn} 2\pi r L = -\mu \frac{dv}{dr} 2\pi r L \quad (101)$$

passo da n a r e dunque devo mettere il segno - perché n e r hanno verso opposto (vedi disegno precedente)

↓ lo porto fuori dall'integrale perché è una costante nella superficie cilindrica (non dipende dal dA): e sempre la stessa, per simmetria.

metto la derivata totale perché, essendo il moto laminare, ho solo la componente lungo v

Uguagliando la (100) con la (101):

$$\gamma L \pi r^2 i = -\mu \frac{dv}{dr} 2\pi r L$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma r i}{2\mu} \Rightarrow V(r) = -\frac{\gamma r^2 i}{4\mu} + \text{cost}$$

la costante la trovo con la condizione al contorno: $(V(r=R) = 0)$

quindi trovo:

$$V = \frac{\gamma i}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{\gamma i}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$

Questa superficie è un PARABOLOLE DI RIVOLUZIONE

$$V_{\text{max}} = \frac{\gamma i D^2}{16\mu}$$

$$V_{\text{media}} = \frac{\gamma i D^2}{32\mu}$$

per il teorema di quel libro (è la metà del volume massimo nel paraboloide)

$$Q = V A = V \pi \frac{D^2}{4} = \frac{\gamma i D^4 \pi}{128 \mu}$$

Osservazioni:

- dalla formula della Q riservo:

$$i = \frac{128 \mu Q \pi}{\gamma D^4}$$

energia che devo spendere per spostare una corrente di un'unità di lunghezza

Quindi: Nel caso di moto laminare i dipende da questi parametri (μ, Q, γ, D)

IDRAULICA

31-10-2011

MOTO LAMINARE PAG. 182

Il profilo di velocità in una condotta (in condizione di moto laminare) risulta:

$$u(r) = \frac{\gamma_i}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right), \quad u_{MAX} = \frac{\gamma_i}{16\mu}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valore} \\ \text{medio}}}{U} = \frac{\gamma_i}{32\mu} = \frac{u_{MAX}}{2}$$

La portata risulta essere:

$$Q = U \cdot \Omega = \frac{\gamma_i}{32\mu} \cdot \pi \frac{D^2}{4} = \frac{\gamma_i}{128\mu} \pi D^4$$

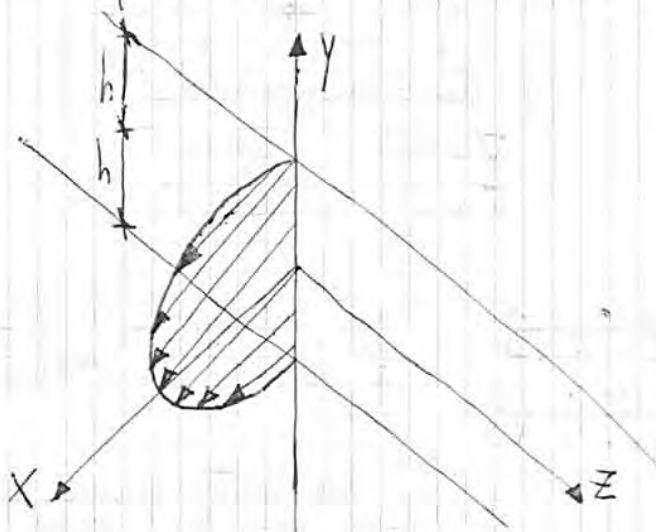
FORMULA DI POISEUILLE

PAG. 182
(le assi sono Navier-Stokes, essendo il moto circolare, avere unità coordinate polari)

Poiseuille era un fisiologo, voleva legare la Q delle arterie a grandezze integrali (γ, μ, D, μ).
 i = energia spesa per unità di lunghezza

PAG. 183

MOTO DEL FLUIDO TRA DUE LASTRE PARALLELE E INFINITE (dicendo "infinite" \Rightarrow non servono le condizioni al contorno)



Il fluido si muove in moto laminare.

h: resistenza tra i due piani

Ho un moto piano; deduco l'andamento di $u(y)$ a partire dall'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u} \quad ; \quad \text{proietta tale eq. lungo l'asse X e ottengo:}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (-gz) - \frac{Du}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u \quad \textcircled{1} \quad (u: \text{componente di } \vec{u} \text{ lungo } x)$$

$$u(y) = \frac{-\gamma^i}{2\mu} y^2 + \text{cost}$$

impongo c.c.: $u(\pm h) = 0 \Rightarrow$ trovo il valore della cost.

Ho dunque:

$$u(y) = \frac{\gamma^i}{2\mu} (h^2 - y^2)$$

ANDAMENTO
DI VELOCITÀ
PROFILO

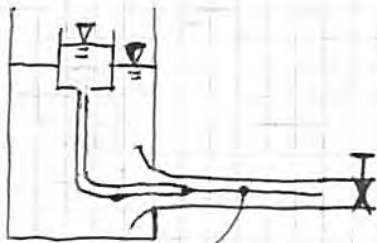
$$u_{\text{MAX}} = \frac{\gamma^i}{2\mu} h^2, \quad U = \frac{\gamma^i}{3\mu} h^2 = \frac{2}{3} u_{\text{MAX}}$$

(è una parabola, non un paraboloide)

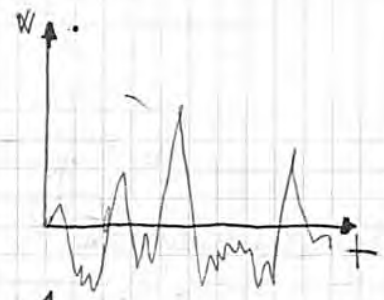
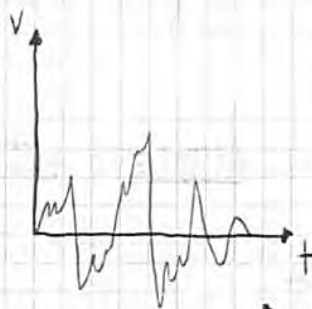
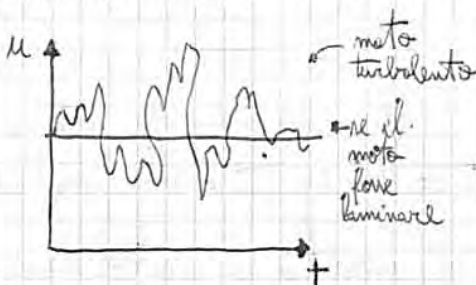
Il moto laminare è semplice per sezioni circolari o, come in questo esempio, quando ho due lastre parallele. Altri profili con gli spigoli (□ ...) creano problemi, perché dove ci sono gli spigoli, non esistono le derivate. (Analogia con scienza delle costruzioni: □: il problema degli spigoli)

IL MOTO TURBOLENTO PAG. 186

Prendiamo l'esperienza di Reynolds:



Mettersi in un punto generico e misuriamo la velocità: nel moto permanente si ha una velocità costante; quando ho Re_{critica} , se registriamo la velocità, il suo andamento ha fortissime variazioni. Ho oscillazioni intorno ad un valore medio.



C'è un valore medio $\neq 0$ perché, meccanicamente, il fluido si sposta.

v e w hanno valore medio nullo

{ gli animali sono di dimensione limitata, perché si
 potrebbe di laminare a turbolento e il cuore
 dovrebbe avere dimensioni patesche.
 } questo perché v e w hanno valori $\neq 0$ (val. medio = 0).

Le ha una centrale termoelettrica e ha un'enorme pentola che bolle, io, ingegnere strutturalista, devo progettare la struttura per il massimo picco di pressione p^+ e non per il valore medio:



Ma per noi questo non interessa!!! : A NOI INTERESSANO I VALORI MEDI E NON CONOSCERE LA TURBOLENZA ISTANTE PER ISTANTE, PUNTO PER PUNTO.

Navier - Stokes ($\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \vec{u}$) contiene dentro di sé la turbolenza \Rightarrow applichiamo un filtro matematico per eliminare la turbolenza e ottenere un'equazione con valori medi: TALE FILTRO MATEMATICO SARÀ LA MEDIA DI INSIEME.

Ma cosa è la media?? (50-60 anni per capirlo)

Fisso un certo punto nello spazio:



\bar{u} : valore medio (che arco)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_+^{+T} u(t) dt$$

(trovo il lato del rettangolo a pari area : TEOREMA DELLA MEDIA ANALISI I)

è una MEDIA TEMPORALE : la indico con $\bar{\cdot}$: grandezza generica

Ma cosa è T?

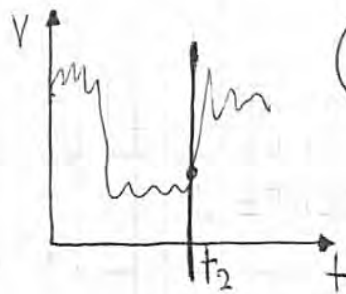
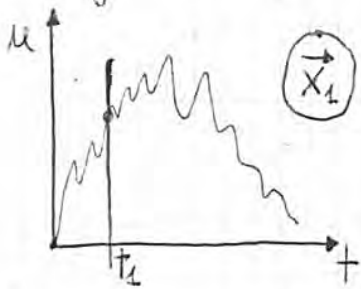
T è l'intervallo di tempo in cui ho visto tutto ciò che il sistema può produrre (tutte le variazioni di manifestazioni del sistema).

Nel caso ho un numero finito di possibilità. La turbolenza è un dato con infinite facce \Rightarrow T deve essere infinito : questo è il problema!

dal punto ^{di vista} concettuale ho risolto, ma dal punto di vista ingegneristico non posso calcolare molti esperimenti.

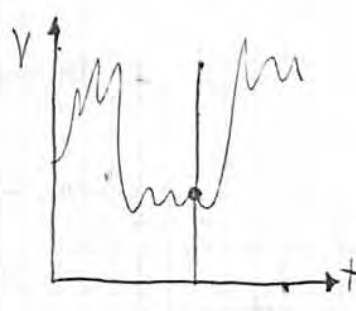
Guardiamo 2 grandezze (come se fossero 2 "dadi"): $u(t_1, \vec{x}_1)$ e $v(t_2, \vec{x}_2)$ con $t_1 \neq t_2$ e $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$

u, v grandezze qualsiasi



$\left. \begin{matrix} u_1(t_1, \vec{x}_1) \\ v_1(t_2, \vec{x}_2) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (I \text{ realizza}) \\ \text{Zarione} \end{matrix}$

ripeto per più realizzazioni:



$\left. \begin{matrix} u_m(t_1, \vec{x}_1) \\ v_m(t_2, \vec{x}_2) \end{matrix} \right\}$

lo faccio ∞ volte:

$\Rightarrow \{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_\infty, v_\infty\}$: ho infinite coppie di u e v

Moltiplico tali coppie:

$u_1 v_1 \quad u_2 v_2 \quad \dots \quad u_\infty v_\infty$: ho infiniti numeri

Faccio distribuzione densità di probabilità:



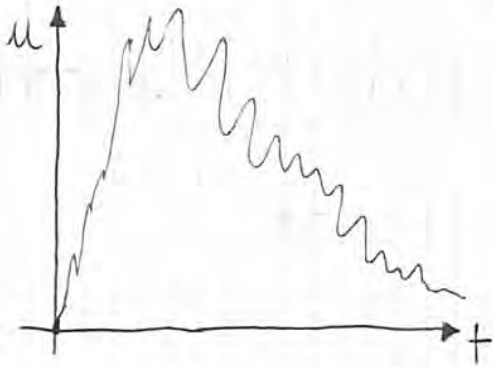
trovo MEDIA D'INSIEME $\langle uv \rangle$

dove: u è riferita al tempo t_1 e \vec{x}_1

v è riferita al tempo t_2 e \vec{x}_2

La MEDIA D'INSIEME $\langle uv \rangle$ È DETTA COVARIANZA.

Apri la saracinesca e misuro la u nel punto identificato da \vec{x} :



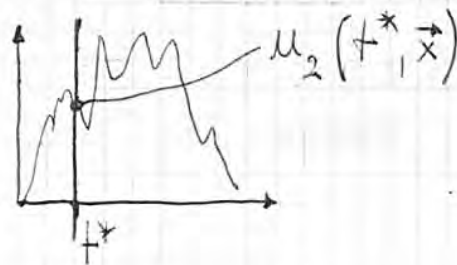
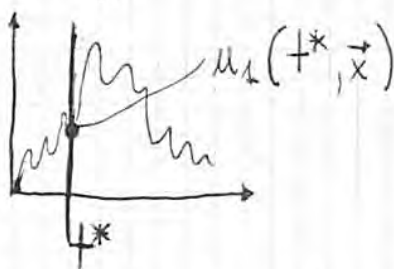
LA TURBOLENZA È UN CAMPO STOCASTICO (cst. Kolmogorov) casuale

Realizzazione: accadimento di un certo processo casuale (come il lancio del dado).
 ES. 1,6 etc sono realizzazioni del lancio del dado (È IL VALORE EFFETTIVAMENTE OSSERVATO, CIO' CHE È REALMENTE ACCADUTO)

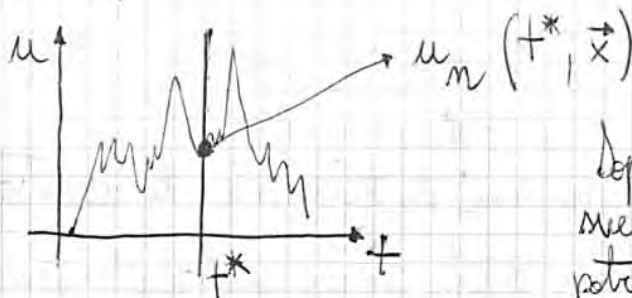
La turbolenza \bar{u} che per ogni punto (campo) e per ogni istante \vec{x} come se qualcuno stesse lanciando il dado u , il dado v , il dado w , il dado pressione, ...

LA TURBOLENZA È UN CAMPO CHE VARIA NEL TEMPO E NELLO SPAZIO

Realizzazioni ne posso fare quante ne voglio (come i lanci del dado).
 Faccio tante realizzazioni del processo stocastico "mutamenti del rebotolo".
 E rissunto il tutto ho una nuova realizzazione. Le due realizzazioni non sono sovrapponibili:

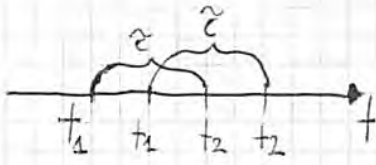


Posso fare infinite realizzazioni; nella realtà ne faccio m :



Dopo tot realizzazioni il processo mi è svelato: (dopo tot lanci del dado posso dire che la popolazione va da 1 a 12)

Prendendo t^* , la m -esima realizzazione mi dà $u_m(t^*, \vec{x})$.



Se il problema è STAZIONARIO \Rightarrow dipende dal Δt (z) e non dal particolare t_1 e $t_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_{uv}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, z)$$

tabella sui livelli \vec{x}_1 e \vec{x}_2 sono rittiranti $\Rightarrow R_{uv}(z)$

Posso prendere anche la stessa grandezza nello stesso punto; allora ho:

$$R_{uu}(z)$$

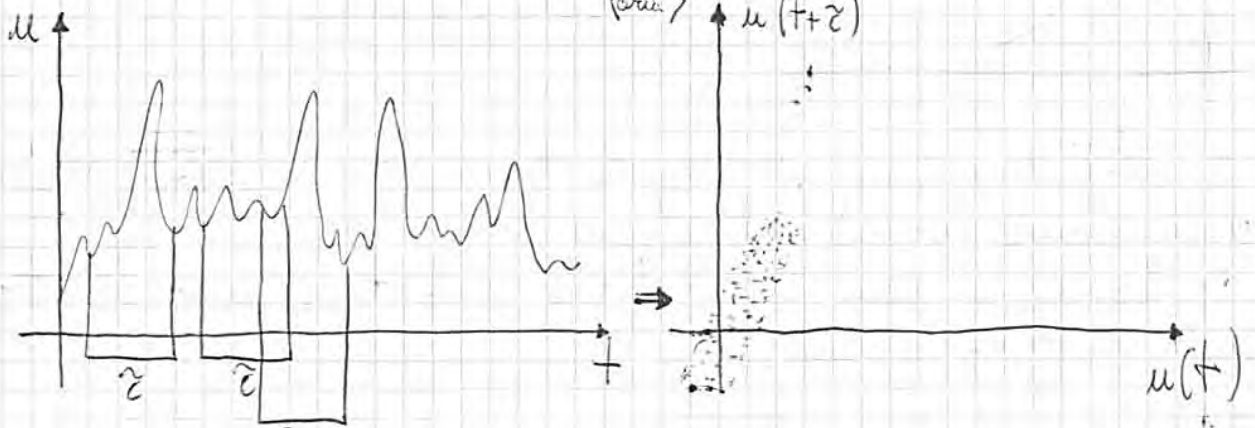
AUTO-COVARIANZA

mi dice quanto u è correlata a u stessa dopo un tempo z .
(quanto il prezzo del petrolio oggi è correlato a quello di 3 gg fa).

(1) è ancora un problema!

① u : velocità a 100 m di quota

(vel. dell'aria) (vel. dell'ordine del m/s)



Voglio $R_{uu}(z)$; prendo diverse coppie di misura; poi prendo una forchetta lunga z . Ho un sacco di misura e non ho una forte correlazione.

Quanto faccio il prodotto uu ho numeri grandi nell'esempio

$\Rightarrow \langle uu \rangle = R_{uu}(z)$ questo numero è SENSIBILE ALL'UNITÀ DI MISURA SCELTA!

② Se ho un altro fenomeno (vel. dell'ordine del cm/s):



Ma questo non è più correlato del 1°!!!
Dipende dall'unità di misura!
(ANZI È PROPRIO IL CONTRARIO)

Nascita sotto l'arco ha la prevedibilità del processo. Tanto più la curva è alta e tanto più posso fare delle previsioni.

$$\boxed{Y = \int_0^{\infty} p(x) dx = Y}$$

SCALA INTEGRALE (è l'area, cioè la memoria)

I maniglia curva

se Y è alta il sistema ha memoria \Rightarrow prevedibilità fenomeno prevedibile
 Y è bassa: contrario!

Osservazioni

1) TEOREMA ERGODICO

Se la scala integrale è finita ($Y < \infty$), allora per tempi sufficientemente lunghi $\Rightarrow \langle \cdot \rangle = \bar{\cdot} \Rightarrow$ PROCESSO ERGODICO (la media temporale $\bar{\cdot}$ = media d'insieme)

Se $Y = \infty \Rightarrow \langle \cdot \rangle \neq \bar{\cdot} \Rightarrow$ PROCESSO NON ERGODICO.

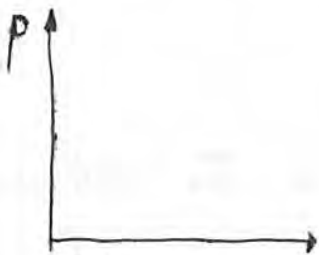
Questo perché se Y è finita, allora la curva, prima o poi, va a 0 \Rightarrow

\Rightarrow È un tempo per cui la correlazione smette di esistere \Rightarrow è come se il processo ricomincia senza avere memoria, come se ho innestato realizzazioni differenti.

quando la curva va a 0

(ha morte biologica permette di studiare $\langle \cdot \rangle = \bar{\cdot}$ per tempi $>$ della durata della vita dell'organismo (processo ergodico).

2)



DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

a topografia abbiamo scelto la gaussiana e^{-x^2}

Perché il mondo è "gaussiano"? (andamento piogge, pezzi con errori in produzioni in serie).

Perché vale il TEOREMA CENTRALE DELLA STATISTICA: la somma di tanti processi indipendenti si distribuisce come una gaussiana.

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{eq. continuità del campo di moto istantaneo})$$

Faccio così, applico le mie forbici ($\langle \cdot \rangle$) all'eq. più semplice, cioè quella di continuità:

$$\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \rangle = 0, \quad \text{ma l'operatore } \langle \cdot \rangle \text{ è lineare} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \textcircled{a} \quad \text{ho così tolto la turbolenza (momento del moto medio).}$$

ma:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow$$

usando la \textcircled{a} ottengo: $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ (MOMENTO DELLA TURBOLENZA)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

INDICE DI KRONECKER

Perché può scrivere che $\vec{v} = \vec{L} \cdot \vec{v} + \dots$, ho:

$$\frac{\partial (V_i + u_i)}{\partial t} + (V_j + u_j) \frac{\partial (V_i + u_i)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (V_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} g$$

(a)
(b)
(c)
(d)
(e)

g non resistente della turbolenza \Rightarrow lo lascio così

Facciamo la media di insieme di tutta l'equazione (con questo passaggio otteniamo l'equazione che governa tutto il moto medio):
 dunque

< equazione sopra >

La media d'insieme totale è la somma delle medie di insieme. Consideriamo termine per termine:

(a) $\left\langle \frac{\partial (V_i + u_i)}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle (V_i + u_i) \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} =$

\downarrow media d'insieme di qual cosa che è qui mediato $\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial t}$
 \downarrow media degli scarti: perché dif. è 0

$= \frac{\partial V_i}{\partial t}$ l'operatore di media ha filtrato via la turbolenza

(b) $\left\langle (V_j + u_j) \frac{\partial (V_i + u_i)}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + V_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle$

$=$ Attemp che = applica la media ad operatori già alcuni che sono
 \uparrow la media di insieme della somma è la somma delle medie di insieme

$$e) \Rightarrow -\int_{i3} g$$

Quindi, in definitiva, l'equaz. del moto medio è:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \mu_i \mu_j \rangle}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\rho \partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \int_{i3} g$$

EQUAZIONE DI REYNOLDS (è l'equazione di Navier-Stokes media)

Questa equaz., accoppiata con quella di continuità ($\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$), mi descrive tutto il moto medio.

Iniziamo l'eq. di Reynolds "meglio":

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{\partial \langle \mu_i \mu_j \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i3} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \tau_{ij} \rangle \right) - g \delta_{i3}, \text{ ove:}$$

$$\langle \tau_{ij} \rangle = - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i} - \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \rho \langle \mu_i \mu_j \rangle \right] \quad (M)$$

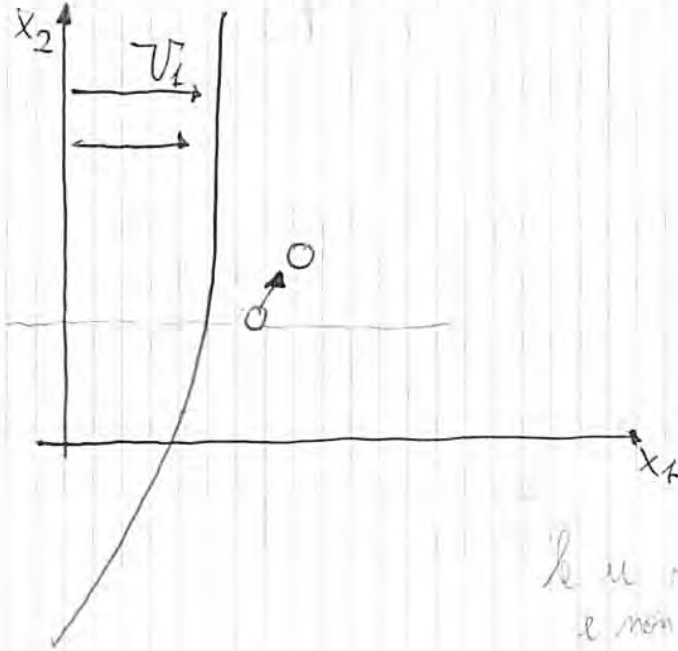
opportuno tenersi che raccoppava

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \langle \mu_i \mu_j \rangle \right] \right] - g \delta_{i3}$$

1: derivata euleriana: come sta cambiando la velocità media di una particella, segue la particella (mi metto a cavallo di una qualsiasi particella e la seguo): la sua velocità sta cambiando perché il 2° membro non è 0, ma perché cambia? Segui il 2° membro: ci sono derivate spaziali di termini tangenziali e poi c'è un campo di gradienti ($g \delta_{i3}$ c'è perché tiene conto della variazione di en. potenziale) (è tenuto conto dell'en. cinetica).

(se fosse stato 0, allora la derivata sarebbe stata nulla e dunque la velocità costante)

Il moto turbolento è più dissipativo di quello laminare (- per -
 μ_1 da +, cioè guardando la \mathcal{M} ho che $\langle u_i u_j \rangle > 0$, ma con il - che c'è davanti
 la parentesi ha in totale + \Rightarrow ho termini tangenziali maggiori che nel moto laminare \Rightarrow più dissipativi)
 Perché viene proprio quella forma di miscela, cioè viene che $\langle u_i u_j \rangle > 0$!



Supponiamo che ci
 sia un profilo
 di velocità media U_1 , cioè,
 mediamente, il
 fluido si sta spostando
 nella direzione x_1
 con questo profilo
 di velocità:

è un caso di turbolenza
 e non velocità

Considero O (particella); a causa della turbolenza (ad esempio $u_2 > 0$)
 \Rightarrow la particella si sposta verso l'alto (O). Per spostarsi, la particella
 ha dovuto creare uno spazio. Le particelle sopra hanno una velocità
 media un po' più alta ^{di quella zona} (\Rightarrow poco appetibili ^{quella zona} con turbolenza un
 po' più alta). L'idea è che la particella sopra stia su un'onda più
 alta \Rightarrow quando passa di sopra, le particelle devono rallentare
 di sopra
 (es. sorpasso in autostrada: $\Rightarrow u_1 < 0$)
 e l'auto della corsia di sorpasso
 rallentare

Se invece avviene un auto $u_2 < 0$ (auto che dalla corsia di sorpasso va
 a destra \Rightarrow le macchine in tale corsia devono accelerare) $\Rightarrow u_1 > 0$.

QUINDI
 le componenti di velocità ^{turbolente} vanno dunque in senso opposto \Rightarrow media
 d'insieme del loro prodotto non è nulla (anzi < 0).

Non possiamo conoscere dunque quanto vale $\rho \langle u_i u_j \rangle$ in maniera precisa, per
 quanto dire che $\rho \langle u_i u_j \rangle$ è trascurabile rispetto agli altri nella \mathcal{M}
 (cioè le tensioni di Reynolds sono piccole rispetto alle tensioni visose)???

Ma pratica ci stiamo chiedendo come va il rapporto: $\frac{\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}{\rho \langle u_i u_j \rangle} \approx$
 (il numeratore avrei potuto
 mettere $\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$: È INDIFFERENTE) \nearrow $\rho \langle u_i u_j \rangle$ \nwarrow come ordine
 di grandezza

del numeratore -

Quindi possiamo trascurare $\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ e non

$\rho \langle u_i u_j \rangle$ -

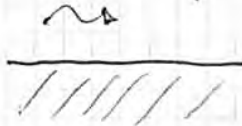
(dunque il rapporto diventa più piccolo e così il denominatore diventa più grande)

Più tratto problemi piccoli e più la viscosità non conta, ma conta la turbolenza.

Dunque diversi moti turbolenti vengono studiati come moti non viscosi, perché la viscosità non conta praticamente nulla.

Ma quanto vale comunque? Cioè, ovunque la viscosità non conta nulla?

Se ho una parete

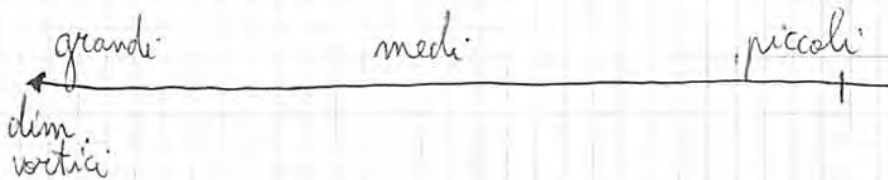


→ molto vicino la parete, era ostacolo, impedisce le oscillazioni turbolente ortogonali ad essa ⇒ vicino la parete la turbolenza si annulla e dunque conta la viscosità.

Ora parliamo di una TEORIA DI INTERPRETAZIONE dei moti turbolenti:

TEORIA DELLA FRAMMENTAZIONE TURBOLENTA (o teoria della cascata dei vortici): (Landaу):

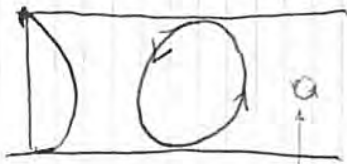
il moto turbolento lo vedo come incontro di tanti vortici di dimensione diversa:



(Se mi metto in un punto a registrare, ad esempio, la velocità, avrò la velocità data da tutto questo intreccio di vortici ⇒ complessa:



Cosa è che porta via energia al moto medio? I VORTICI GROSSI, perché sono gli unici vortici che vedono tutto il profilo di velocità.

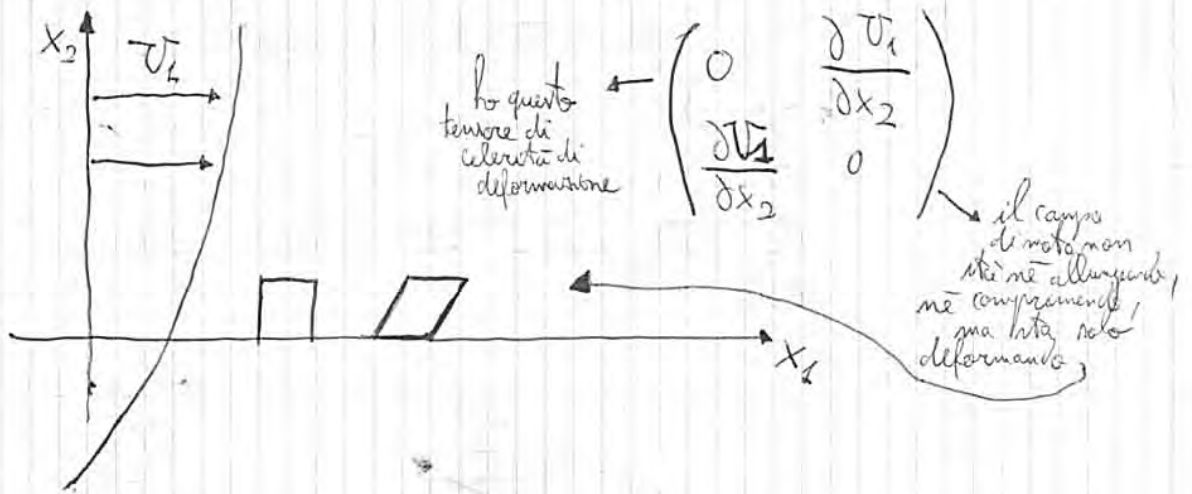


non riesce a vedere tutto il profilo di velocità

Per portare via energia, i vortici hanno bisogno di vedere i gradienti di moto medio $\frac{\partial U}{\partial x_i}$

I vortici grandi sono quelli che "approssimano" tutto il moto medio.

I meccanismi con cui portano via energia sono tanti; ce n'è uno semplice, chiamato VORTEX STRETCHING (stiramento dei vortici):



Ma Navier Stokes è venuto fuori prima: $\mu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i^2} \right)$

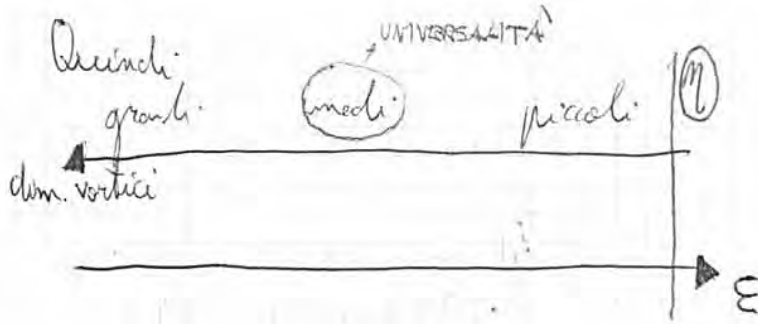
TENSORE DI CELERITA' DI FORMAZIONE (ci dice come le particelle di fluido vengono deformate)

Una qualunque matrice posso diagonalizzarla:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

cambia n.d.m. (non più x_1, x_2) e trovo un n.d.m. rispetto a cui la matrice diventa diagonale.

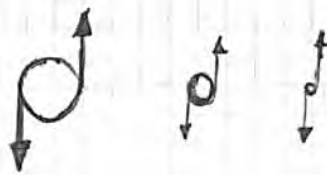
Quindi esiste un altro n.d.m. rispetto a cui non ho più deformazione, ma solo stiramento e accorciamento.



→ si ha un flusso E di energia dai vortici più grandi (che hanno perso del suo modo) a quelli più piccoli.

Il fatto che ad un certo punto, i vortici medi abbiano dimenticato come sono fatti i vortici grandi \Rightarrow "molto" che hanno perso le informazioni sulle C.C. (esempio: particelle considerate due specie di forma completamente diversa: una è la sfera e l'altra è ad un certo punto tutte le altre si ottengono a scapito uno della misura conservata che è usata: in un punto di vista grande contro la simmetria della misura (cioè le C.C.), ma si considerano solo 1D-2D perché, il loro avvolgimento è indipendente dalle C.C.)
 Quindi i vortici medi hanno carattere di UNIVERSALITÀ (i vortici medi hanno lo stesso comportamento nel sole, nei vari sanguigni...).

Se non ci fosse qualcosa che dice basta, avrei che la frammentazione avviene all'infinitesimo \Rightarrow calcoli integrali e derivati (che tutta la costruzione terrore fatta)
 Cosa è che dice basta?



Il vortice diminuisce di dimensioni \Rightarrow aumenta il gradiente di velocità (è vero si che anche la velocità diminuisce, ma tale diminuzione è molto minore della diminuzione di dimensioni) \Rightarrow aumenta il termine $\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ nella $(M) \Rightarrow$ diventa trascurabile la turbolenza.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$
 di velocità
 cioè quanto è la
 gradiente spaziale: differenza di velocità nello spazio

(Aumentano i gradienti \Rightarrow diventano così alti che non possono essere i valori ancora più grandi e quindi interviene la viscosità: $\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$ (es: centro del tornado).) \Rightarrow È DETTO MALE!

$$\mu_{H_2O} > \mu_{aria} \Rightarrow v_{H_2O} < v_{aria}$$

l'acqua ha una viscosità
 considerevole tra le più basse tra
 quelle dei fluidi reali.]

Facciamo considerazioni sull'eq. globale:

$$\vec{P} + \vec{F}_C + \vec{I} + \vec{M}_e + \vec{M}_u = 0$$

è un'eq. già
 integrale (per noi ingegneri
 può essere utile!) ↖

↑
 forze locali
 ↑
 flussi di
 quantità
 di moto

solo questo
 termine mi richiede ciò che accade all'interno del volume
 di superficie

(gli altri mi
 serve solo
 sapere ciò che
 accade sulla
 superficie
 di contorno)

Guardiamo termine per termine:

\vec{P} : il peso di acqua ferma ρ per aria, non cambia,
 in un bicchiere

$$\vec{F}_C = \int_A \vec{\phi}_M dA$$

nel caso della turbolenza: $\vec{\phi}_M = \vec{\phi}_M + \vec{\phi}_M \Rightarrow$

$$\downarrow$$

$$\langle \vec{\phi}_M \rangle$$



$$\Rightarrow \int_A (\vec{\phi}_M + \vec{\phi}_M) dA \Rightarrow \text{come si trasforma quando applico l'operatore media?} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \int_A \vec{\phi}_M dA \rangle \Rightarrow \int_A \langle \vec{\phi}_M \rangle dA + \int_A \langle \vec{\phi}_M \rangle dA =$$

la media degli
 scarti è 0

$$= \int_A \vec{\phi}_M dA = \int_A P dA$$

↑
 \vec{n} : forze normali
 \vec{T} : forze tangenziali
 qui dentro
 ci sono (la
 risultante delle
 forze al
 contorno si divide
 in una componente normale
 e in una tangenziale)

$$= \mu \int_A \frac{\partial U}{\partial n} dA$$

↑
 gradiente della
 velocità media

In definitiva, l'eq. globale \bar{x} :

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M} + \rho \int_A \langle \vec{u} \cdot \vec{v}_m \rangle dA = 0$$

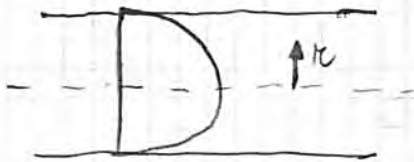
medice
medice
medice

che sta sempre lì

\vec{M} deriva dall'accelerazione convettiva!!! Ritroviamo il problema!!!

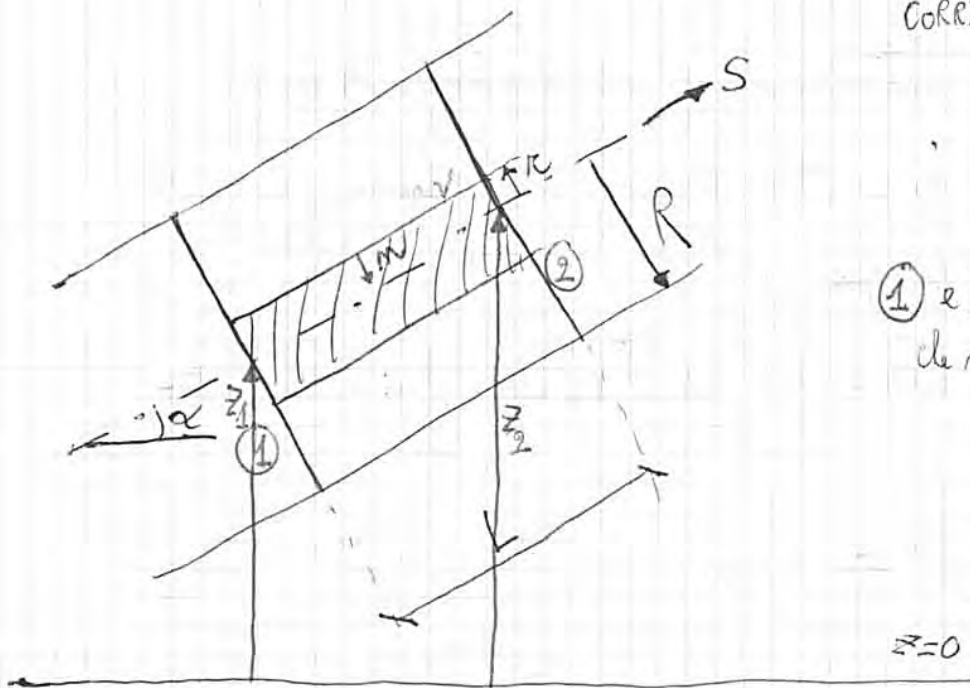
Facciamo ora un'APPLICAZIONE (c'è anche nel libro):

In una corrente cilindrica, il profilo di velocità \bar{v} è:
in moto laminare

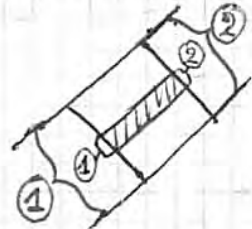


Ripetiamo lo stesso ragionamento per un moto turbolento:

CORRENTE, CILINDRICA



① e ② indicano le sezioni che stiamo considerando



$z=0$

Proiettiamo l'equaz. globale lungo la direzione della corrente (S):

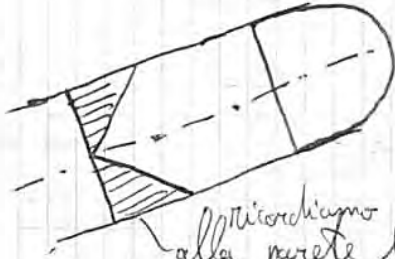
$$-\underbrace{\gamma \pi R^2 L \sin \alpha}_{\text{forza peso}} = -\underbrace{\gamma \pi R^2 L \frac{z_2 - z_1}{L}}_{\text{cateto / ipotenusa} = L \sin \alpha} = -\gamma \pi R^2 (z_2 - z_1) = \gamma \pi R^2 (z_1 - z_2)$$

diviso per 2:

$$\gamma_i \frac{\mu}{2} = -\mu \frac{dT}{dr} - \rho \langle u v_r \rangle \quad (11)$$

nel moto laminare non c'era questo termine

$$\tau = \tau(r)$$



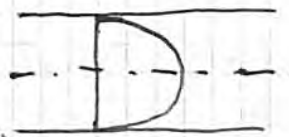
ricordiamo che alla parete $\tau_0 = \gamma_i$

anche nel moto turbolento le tensioni variano linearmente (infatti anche nel moto turbolento trova l'espressione di τ in questa forma)

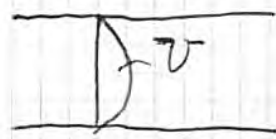
Il profilo di velocità me lo devo aspettare più basso rispetto al moto laminare.

1° membro: anche nel moto turbolento le tensioni variano linearmente col raggio; quindi tutto il diagramma delle tensioni tangenziali è dato da due contributi (i due contributi a secondo membro).

laminare

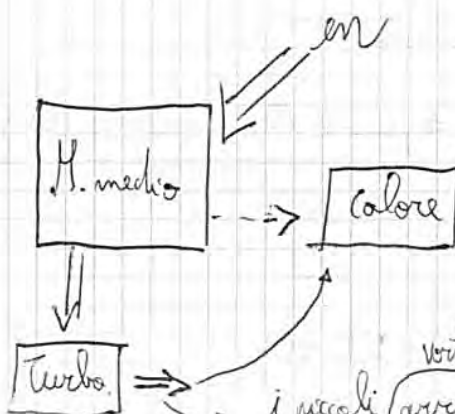


turbolento




il profilo di velocità è molto schiacciato perché $-\rho \langle u v_r \rangle \Rightarrow > 0$ cioè di energia che sto mettendo dentro


a parità di pendenza motorice, la portata in un moto laminare è (molto) maggiore rispetto a quella del moto turbolento \Rightarrow ritroviamo quanto accennato nella dissipazione in un moto turbolento (che è maggiore di quella in un moto laminare)



i piccoli vortici arrivano al limite \Rightarrow interviene la viscosità \Rightarrow dissipazione in calore

Con che base abbiamo scelto l'unità (1)? La ragione è biologica (perché l'unità è sulla base della scala delle nostre dimensioni, cioè sulla base di come sono fatto io).


 $A = c l^2$

 coefficiente (da utilizzare o anni diverse unità: | 1 )

Quindi mi è comodo usare grandezze derivate (che derivano da grandezze fondamentali), altrimenti dovrei usare dei coefficienti.

Con che criterio tu scegli le grandezze fondamentali?

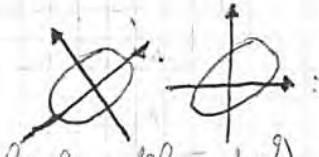
L, T, M grandezze fondamentali

Ho scelto queste grandezze come fondamentali perché ti permettono di descrivere meglio il fenomeno???

La ragione per cui abbiamo scelto L, T, M è ^{ancora} di natura biologica (sono le prime cose di cui ci rendiamo conto)

La meccanica dei fluidi usa ρ, μ : usa queste grandezze come fondamentali e vedrai che molti problemi si semplificano. (nella meccanica dei fluidi, chiaramente!)

Nello spazio delle grandezze, scegliere come terza di riferimento fondamentale la L, T, M è sempre la scelta più giusta?

(è come se avessi  : qual è la scelta più furba del s.d.n.?)

MONDO
NOSTRO
 L, T, M

MONDO
"EXTRA"
 Q_1, Q_2, Q_3

Quasi tutti i problemi si semplificano, scegliendo il s.d.n. di grandezze tipiche del nostro problema.

Quindi l'unità di misura di Q_1 , cambia di q_1 , dove:

$$q_1 = \lambda^{\alpha_1} \tau^{\beta_1} \mu^{\gamma_1}$$

quella di Q_2 cambia di q_2 :

$$q_2 = \lambda^{\alpha_2} \tau^{\beta_2} \mu^{\gamma_2} \quad (1)$$

quella di Q_3 :

$$q_3 = \lambda^{\alpha_3} \tau^{\beta_3} \mu^{\gamma_3}$$

Nel mondo extra $\Rightarrow Q_1, Q_2, Q_3$ FONDAMENTALI
 L, T, M DERIVATE

$$[L] = [Q_1^{\delta_1} Q_2^{\varepsilon_1} Q_3^{\omega_1}]$$

$$[T] = [Q_1^{\delta_2} Q_2^{\varepsilon_2} Q_3^{\omega_2}]$$

$$[M] = [Q_1^{\delta_3} Q_2^{\varepsilon_3} Q_3^{\omega_3}]$$

Di quanto cambia l'unità di misura di L ?

$$\lambda = q_1^{\delta_1} q_2^{\varepsilon_1} q_3^{\omega_1}$$

$$\tau = q_1^{\delta_2} q_2^{\varepsilon_2} q_3^{\omega_2}$$

$$\mu = q_1^{\delta_3} q_2^{\varepsilon_3} q_3^{\omega_3}$$

Devo dunque riuscire ad invertire la (1), però ho un'equaz. con esponenti; facendo il \ln della (1)

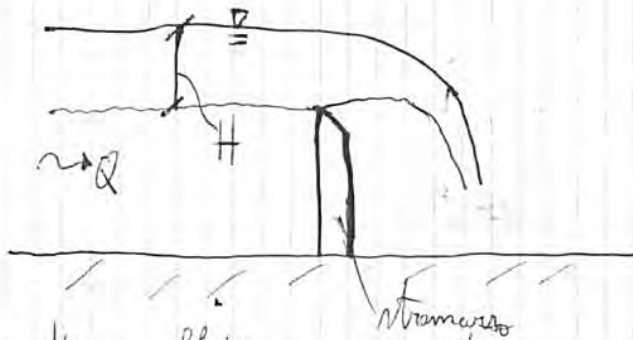
$$\ln q_1 = \alpha_1 \ln \lambda + \beta_1 \ln \tau + \gamma_1 \ln \mu \rightarrow \text{(ho ottenuto un'equazione algebrica)}$$

$$\ln q_2 = \alpha_2 \ln \lambda + \beta_2 \ln \tau + \gamma_2 \ln \mu$$

$$\ln q_3 = \alpha_3 \ln \lambda + \beta_3 \ln \tau + \gamma_3 \ln \mu$$

Esempio:

STRAMAZZI



C'è un legame tra H e Q, ma immaginiamo che non esista. Voglio trovare Q.

Applico Navier-Stokes, ma questo è un problema che i matematici chiamano FRONTIERA LIBERA; la frontiera non so dove è ed. è una parte del problema stesso.
 ⇒ abbandono questa strada. (che un getto da nonno come è fatto)

Quindi faccio degli esperimenti:

$$Q = f_1(H, L, g)$$

↑ lunghezza stramazzo ↑ intensità del campo di gravità

La μ non conta neanche, perché:

- $Re = \frac{\rho v L}{\mu}$ viene molto alto \Rightarrow la viscosità conta poco.
 Se c'è una parete \Rightarrow c'è viscosità, ma qui c'è un getto libero.

Esperimento: voglio vedere l'effetto di una grandezza: tengo costanti le altre due grandezze e faccio variare la terza e vedo come essa influisce.

Però con g come faccio? Dovrei variare l'intensità del campo gravitazionale \Rightarrow abbandono anche questa strada.

STRADA GIUSTA: c'è il teorema π . Scegliamo come grandezze fondamentali H ed g e verifico che il determinante è diverso da 0.

Adimensionalizziamo Q:

$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = f_2\left(\frac{L}{H}\right)$$

Ho un legame fra due gruppi adimensionali \Rightarrow lo faccio su un piano;

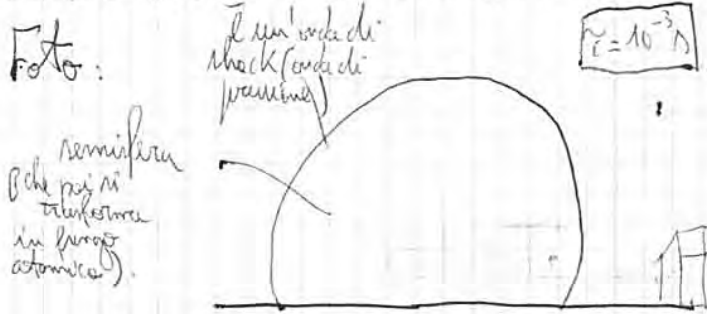
(mentre prima il problema era a 4 dimensioni)

Bevinoli: il Teorema π mi fa capire cosa conta davvero
 (cambiare fuori il R_2) \Rightarrow il TEOREMA π :

• tira fuori i gruppi adimensionali che dominano il problema.

1° ESEMPIO: GUERRA FREDDA USA - U.R.S.S. chi ha la bomba atomica più forte? (anni '50):

Foto: $\lambda = 10^{-3} \text{ m}$ \rightarrow pochissimo dopo la corsa viene sparata via



Vedi questa foto Taylor:

energia della bomba

$$R = f(t, \rho, E)$$

raggio semisfera

tempo da lavoro

densità aria

la misura con il righello sul foglio

$$R = C \cdot t^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot E^{\gamma}$$

= cost = nota il valore della cost. la ricava Taylor con esperimenti vari

\Rightarrow ricavo l'energia della bomba (anni dopo gli americani misurarono l'energia della bomba: Taylor si era sbagliato solo dell'4%!!!)

la α e β che è dato dalla storia U.S.A. o U.R.S.S.
 la covaria (è quella dell'aria)

2° ESEMPIO:

Dimostrare in modo ~~originale~~ originale il T. di Pitagora (lo fa Abhukov):



$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$S = S_1 + S_2$$

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} u^{\beta} D^{\gamma}}$$

$$[F] = [L^4 T^{-2} M^1]$$

$$[\rho] = [L^{-3} T^0 M^1]$$

$$[u] = [L^1 T^{-1} M^0]$$

$$[D] = [L^1 T^0 M^0]$$

$$1 = -3\alpha + 1\beta + 1\gamma$$

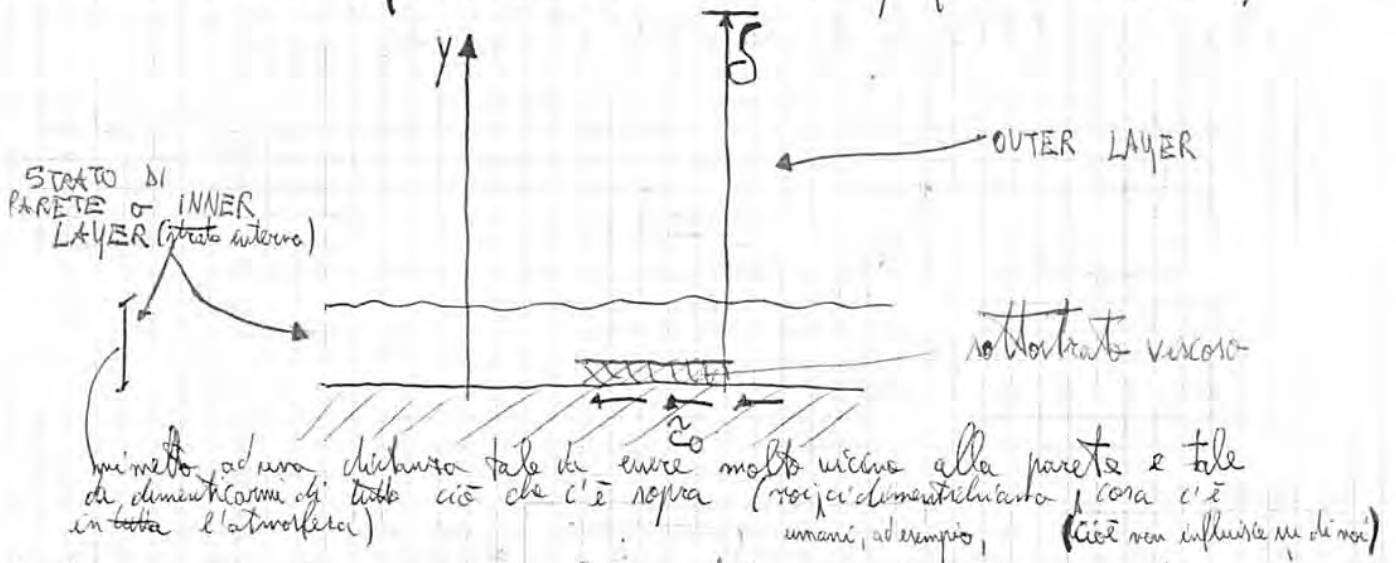
$$-2 = 0\alpha - 1\beta + 0\gamma$$

Il prof. è andato in cucina e ha preso gli aggeggi che servono per mischiare un litro:

- $P = 100 \text{ W}$
 - $1 \text{ dm}^3 \approx 1 \text{ l}$
 - (v è quella dell'acqua)
- } $\Rightarrow \eta \approx 10^{-2} \text{ mm}$

Ricaviamo ora il profilo di velocità in una corrente turbolenta (sul libero è concettualmente sbagliato):

usiamo il teorema Π (colui che ha ricavato il profilo è Hillikam):



ha una parete \Rightarrow vicino nel capitolo di turbolenza detto TURBOLENZA DI PARETE (contrario di TURBOLENZA LIBERA)

c'è una parete che vincola la turbolenza.

Nella turbolenza libera, la turbolenza può fare ciò che vuole \Rightarrow la studiamo con un approccio solo stocastico; nella turbolenza di parete, ho un'informazione deterministica (velocità nulla a contatto con la parete) \Rightarrow devo studiare con un po' di determinismo e un po' di stocasticità \Rightarrow la turbolenza di parete è più complicata di quella libera.

Il teorema di Hillikam è: ciò che succede nello strato in basso è del tutto indipendente da ciò che accade in tutta la scala del flusso (δ).

La velocità media sarà ricorrenza funzione di:

$$U = U(y, \nu, \rho, \delta, z_0)$$

molto direttamente la versione cinematica perché di Hines-Hillikam ho capito che è questa \Rightarrow poiché mi sto focalizzando vicino la parete non voglio generalizzare nella relazione globale.

SOTTOSTRATO VISCOSO: siamo così vicini alla parete che la turbolenza non può più esistere: non c'è più lo spazio per far vivere u, v, w ; quello che succede dipende soltanto dalla viscosità; la turbolenza scompare.

Non sappiamo come vanno le τ :



Perché sto studiando il sottostato viscoso, \Rightarrow non riesco ad apprezzare la variazione di z_0 , quindi posso dire che in tutto il sottostato viscoso si ha:

$$\tau \approx \tau_0 = \mu \frac{dV}{dy}$$

eq. differenziale: integriamo con la c.c. $V(y=0) = 0$ e otteniamo:

$$V = \frac{\tau_0 y}{\mu} \Rightarrow$$

legge scritta in termini dimensionali

quindi l'andamento di V è lineare nel sottostato viscoso

Se voglio scrivere la relazione qui sopra (che è scritta in termini dimensionali) in termini adimensionali:

$$V = \frac{\tau_0 y}{\mu} \xrightarrow[\text{per } \rho]{\text{moltiplica e divide}} V = \frac{\tau_0 y \rho}{\rho \mu} \Rightarrow V = \frac{y \rho u_*^2}{\mu} \Rightarrow V = y_+ u_* \Rightarrow$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 \qquad y_+ = \frac{y u_*}{\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{u_*} = \tau_x = y_+ \rightarrow \text{relazione adimensionale}$$

Si mette nello strato di sovrapposizione dove devono valere entrambe le leggi 1 e 2: dunque

quindi calcolo $\frac{dT}{dy}$ (la variazione di velocità deve essere la stessa sia che la ricavo dalla 1, sia che la ricavo dalla 2)

→ porto a 2° membro la u_* che c'è a 1° membro sotto la V nella 1

$$\frac{dT}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+} \quad \parallel \quad \frac{dT}{dy} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi}$$

PASSAGGI COMPLETI

1. $T = u_* f\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) \Rightarrow \frac{dT}{dy} = u_* \frac{d}{dy} \left[f\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) \right]$

$\Rightarrow \frac{dT}{dy} = u_* \frac{d}{dy} (f) \frac{d}{dy} y^+ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dT}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+}$

uguagliando:

$$\frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi} \Rightarrow \text{moltiplico ambo i membri per } y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_+ \frac{df}{dy_+} = \xi \frac{dF}{d\xi} = \text{cost} = \frac{1}{K}$$

↑
per conversione si scrive

K: costante di Von Karman

perché è come se avessi $f(x) = g(y)$: affinché siano uguali \Rightarrow deve essere per forza = cost (ho due funzioni che dipendono da due variabili diverse \Rightarrow devono per forza essere costanti per essere uguali)

Dunque:

$$f(y_+) = \frac{1}{K} \ln y_+ + A$$

$$F(\xi) = \frac{1}{K} \ln \xi + B$$

Quanto valgono le costanti A e B? Devono fare degli esperimenti; sperimentalmente si ottiene $A = 5,0$ e $B = -4,0$

\rightarrow K sperimentalmente è $\approx 0,4$

Valgono solo nell'OVERLAP LAYER (sotto la stessa retta!)

IN $\frac{T}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{y u_*}{\nu} \right) + A$ (a)

OUT $\frac{T_\infty - T}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) + B$ (b)

- parete liscia (tanta più ^{un tubo} è liscia (scabrezza piccola) e tanto più il fluido si muove velocemente):

chiamo parete liscia ^{meglio} o idraulicamente liscia quella parete in cui la scabrezza è contenuta tutta nel sottotratto viscoso:



$$y^+ = 5 \Rightarrow \frac{y \mu_*}{\nu} = 5 \Rightarrow y = \frac{5\nu}{\mu_*} \quad (\approx)$$

E: scabrezza della parete: si sente quando consideriamo, studiamo il sottotratto viscoso.

Il limite che ci fa dire liscia o scabra non è un limite geometrico; è un limite idraulico; infatti dipende da ν e μ_* (\approx).

Dato che sono tutte queste quote, compare lo strato viscoso e la turbolenza si manifesta subito \Rightarrow in una parete idraulicamente scabra non si ha più l'effetto della viscosità.

Quindi in una parete idraulicamente scabra compare il sottotratto viscoso.

Abbiamo visto che $\langle u'v' \rangle$ estraggono energia dal moto medio e ciò avviene grazie al $\frac{\delta U}{\delta y}$ (così è un aspetto fondamentale del vortex stretching? L'instanza del profilo di velocità).

La turbolenza nasce dove c'è un forte gradiente \Rightarrow la turbolenza nasce vicino la parete; quella all'interno del fluido è turbolenza diffusa (turbolenza che si diffonde)

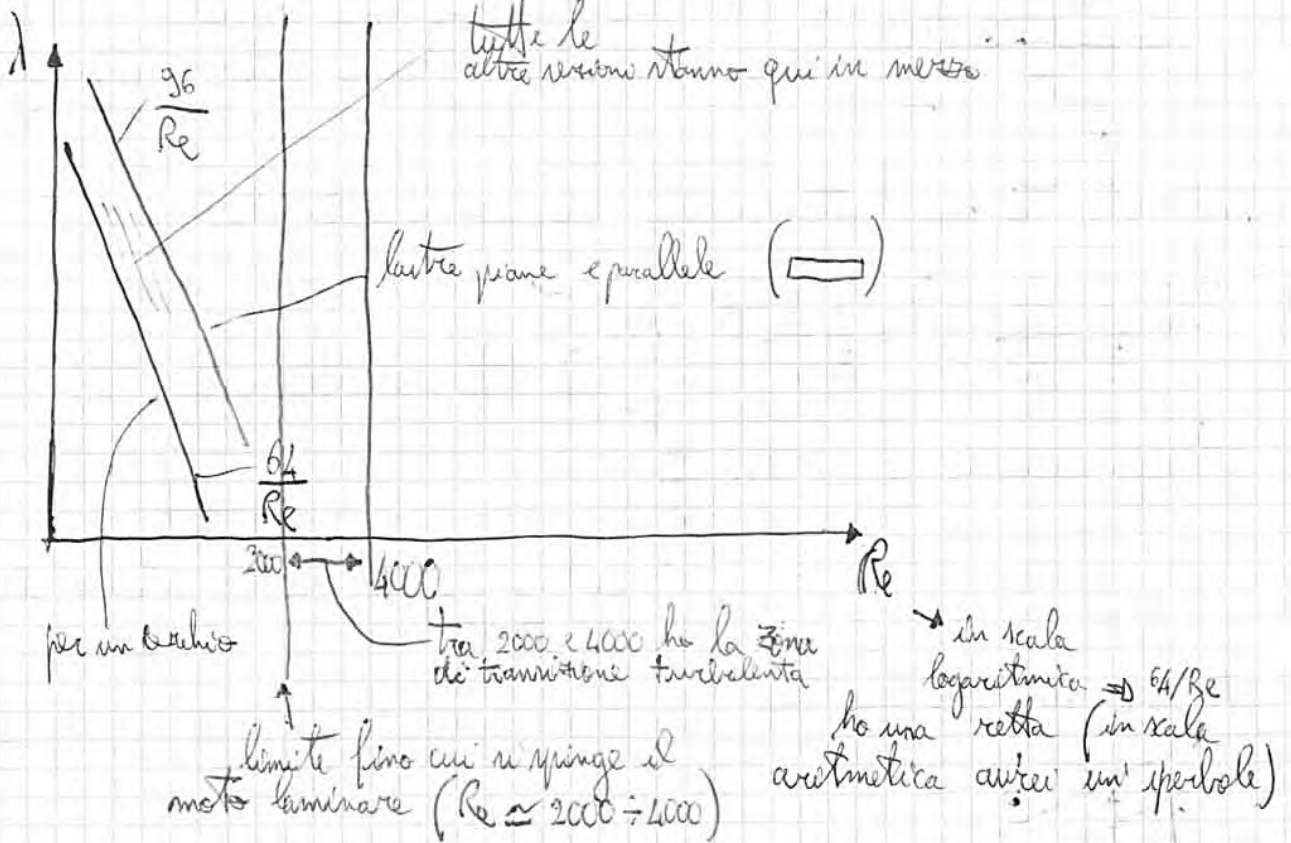
diviso rispetto al termine cinetico $(\frac{V^2}{2g})$.

$$= \frac{2g \Delta i}{V^2}$$

Corrente circolare:

$$l = \frac{2g \Delta i}{V^2} = \frac{2g D}{V^2} \frac{32 \mu V}{\gamma \Delta^2} = 64 \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{64}{Re}$$

\uparrow non la Δ (III) \uparrow $\gamma = \rho g$ $\underbrace{\rho V D}_{Re^{-1}}$



2 lastre piane e parallele:

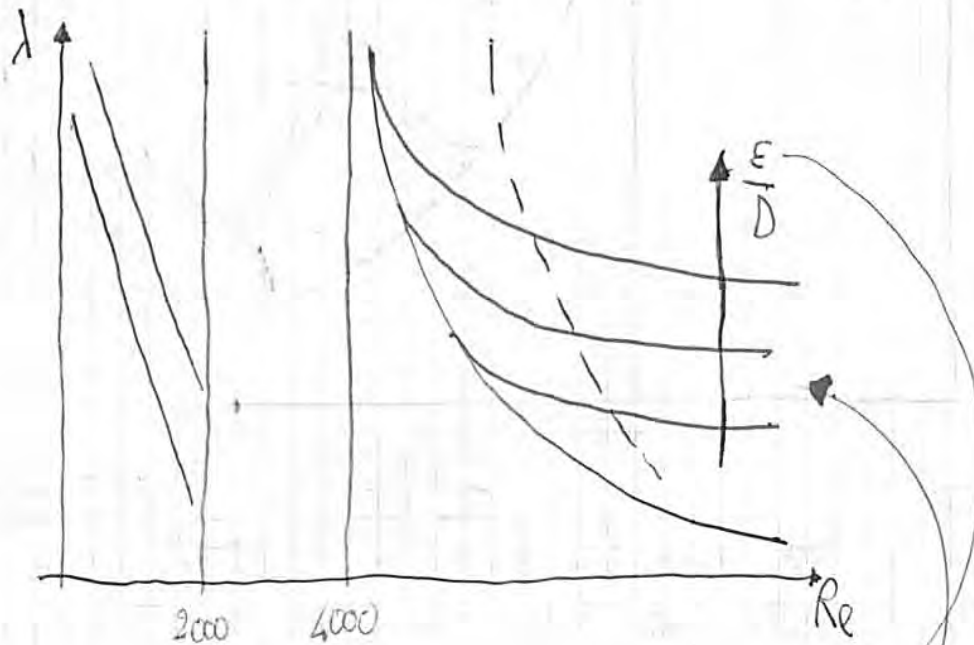
$$l = \frac{2g 4R i}{V^2} = \frac{8g R}{V^2} \frac{3 \mu V}{\gamma R^2} = \frac{24 \mu}{\rho V R} = \frac{96}{Re} \quad \text{ove } Re = \frac{4RV}{\nu}$$

\uparrow non ha senso mettere Δ (sono tra due lastre piane!) \rightarrow mette il raggio idraulico (in una corrente circolare si ha che $R = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \left(\frac{3.71}{\epsilon/D} \right) : \text{descrive il tubo completamente ruvido} \rightarrow (bb)$$

Blasius : $\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}}$: per la parete liscia: questa espressione vale finché $Re \leq 10^5$

In un unico diagramma, Moody ha raccolto tutti i risultati per correnti in parete commerciale (tubi commerciali) PAG. 211-212



è tutto adducito perché la rottura del sottostato viscoso non avviene tutta insieme (cioè bruscamente) ma un po' alla volta (cioè gradualmente)

ϵ è la scalorosa di Nicuradre che sarebbe lungo alla stessa dim passione, così quell' ϵ di Nicuradre che sarebbe lungo alla stessa resistenza.

La formula più utilizzata è questa:

$$\chi = c R^{\frac{1}{6}} \quad \text{formula di Gauckler - Strickler}$$

In America non conoscono quest'ultima, ma usano un'altra espressione:

$$\chi = \frac{1}{M} R^{\frac{1}{6}} \quad : \text{ formula di Manning}$$

Darcy fa questo ragionamento:

$$i = \frac{V^2}{R \chi^2} = \frac{V^2}{R c^2 R^{1/3}} = \frac{V^2}{R^{4/3} c^2} = \frac{Q^2}{D^4 D^{4/3}} \frac{1}{\left(\frac{V}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{4/3} c^2} =$$

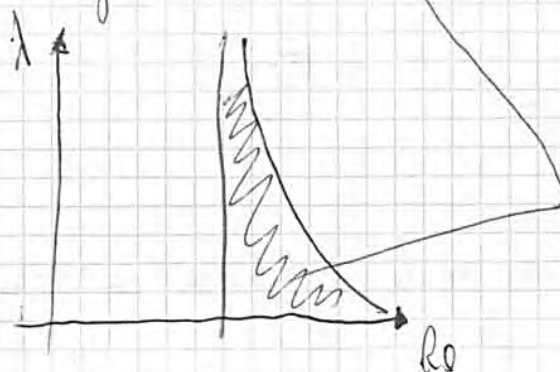
$$= \beta^1 \frac{Q^2}{D^{5.33}} \quad \beta^1 = \beta^1 (\text{scalaresa})$$

La formula di Darcy è data anche in quest'altra modo:

$$i = \beta \frac{Q^2}{D^5}$$

} $\beta = \beta (\text{scalaresa}, D)$

Ultima considerazione riguarda tutta la zona:



IDRAULICA

15-11-2011

MOTO LAMINARE

PAG. 223 (IN BASSO) / 224

$$\lambda = \frac{c}{Re}$$

$$\frac{2g i D}{U^2} = \frac{c \cdot \nu}{U D}$$

$$\text{cioè: } i \propto \frac{U}{D^2}$$

$$i \propto \frac{Q}{D^4}$$

MOTO TURBOLENTO LISCIO

$$\lambda = \frac{c}{Re^{0,25}}$$

$$i \propto \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}}$$

$$\text{oppure } i \propto \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}$$

MOTO TURBOLENTO E TUBO SCABRO

$$\lambda = c \left(\frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$i \propto \frac{Q^2}{D^5}$$

$$i \propto \frac{U^2}{D}$$

all'acqua di entrare e creare il getto.

Nel condotto, quanta energia viene persa?

$$E_{\text{persa}} = \int_0^L i(x) dx = iL$$

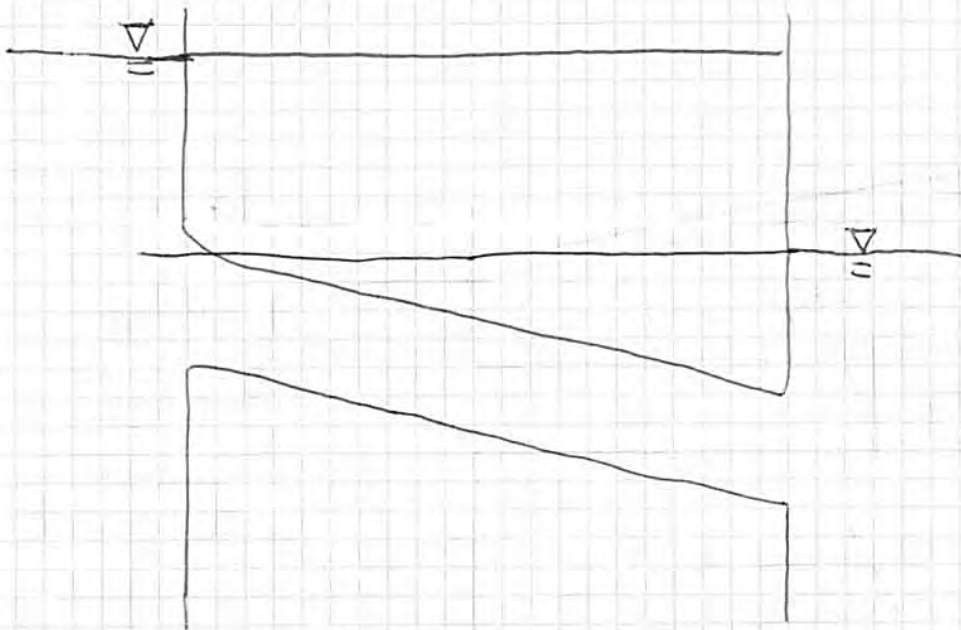
ogni dx fatto
 ha perso un pozzettino di energia
 (in turbolenza e poi in calore)

i è in ogni punto costante \Rightarrow la linea dei carichi totali è una retta.

$$\frac{dH}{dx} = i$$

dato che ho una corrente cilindrica, le caratteristiche globali non cambiano $\Rightarrow \frac{dH}{dx}$ è una costante

FLUIDO PERFETTO



Se il fluido fosse perfetto $\Rightarrow i = 0$ (non ci sono dissipazioni)

termine $p/\gamma \Rightarrow$ cambia la pressione.
(vedi disegno)

Potiamo risolvere tutti questi problemi impostando un'equazione di bilancio di energia:

$$E_{monte} - E_{valle} = D_{imp}$$

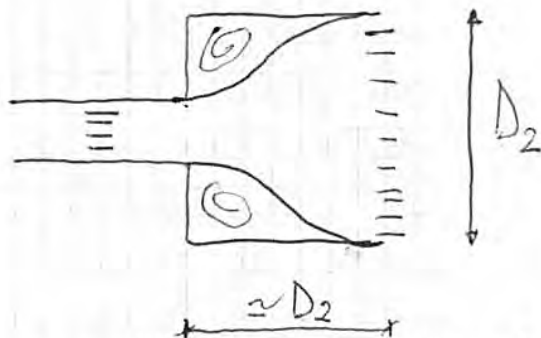
\downarrow \downarrow \downarrow
 z_1 $z_2 + \frac{\alpha V^2}{2g}$ iL

$$\Rightarrow z_1 - \left(z_2 + \frac{\alpha V^2}{2g} \right) = iL \quad \left(\text{vedi sul primo disegno!} \right)$$

(vedi disegno 2° pagina)

DISSIPAZIONI LOCALIZZATE PAG. 224

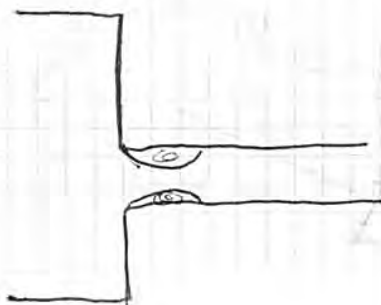
hanno esercizi discontinuità geometriche, ad esempio un cambio di diametro della condotta:



Si osservano moti permanenti di piccola entità che durano per una lunghezza pari a circa il diametro del condotto di valle.

(cioè viste finora in questa lezione)

Quelle di prima erano dissipazioni distribuite (perché distribuite su tutta la corrente). Queste sono localizzate (in determinate parti delle condotte),
per cui facemmo questo:



Suppongo quelle linee dei carichi totali e dei carichi piezometrici disegnate in corrispondenza della sezione le
 Non cambio scala verso nel passaggio tra i due condotti.

Cambia diametro \Rightarrow cambia velocità \Rightarrow perché la velocità scende \Rightarrow la i scende \Rightarrow meno dispendiosa \Rightarrow minor inclinazione della linea.

però (ricordare formula: $v = \frac{1}{32} \frac{\gamma_i}{\mu} D^2$, ad esempio nel moto laminare)
 C'è un recupero di carico piezometrico (la linea blu destra si alza rispetto a sinistra) la distanza sarà minore perché $v_2 < v_1$ tra le due linee.

Lo scopo è calcolare quanto vale ΔH :

Basta fare queste ipotesi:

- nell'intera sezione di misura della tubazione grande c'è un andamento delle pressioni di tipo idrostatico (rossa in figura)
- le tensioni tangenziali nel contorno cilindrico lungo L siano piccole; non che non ci siano, ma le tensioni tangenziali dobbiamo moltiplicarle per la superficie, ma essendo il tratto breve \Rightarrow la loro risultante è trascurabile.

Applico l'eq globale della dinamica dei fluidi a tutto il volume cilindrico compreso tra (A) e (B):

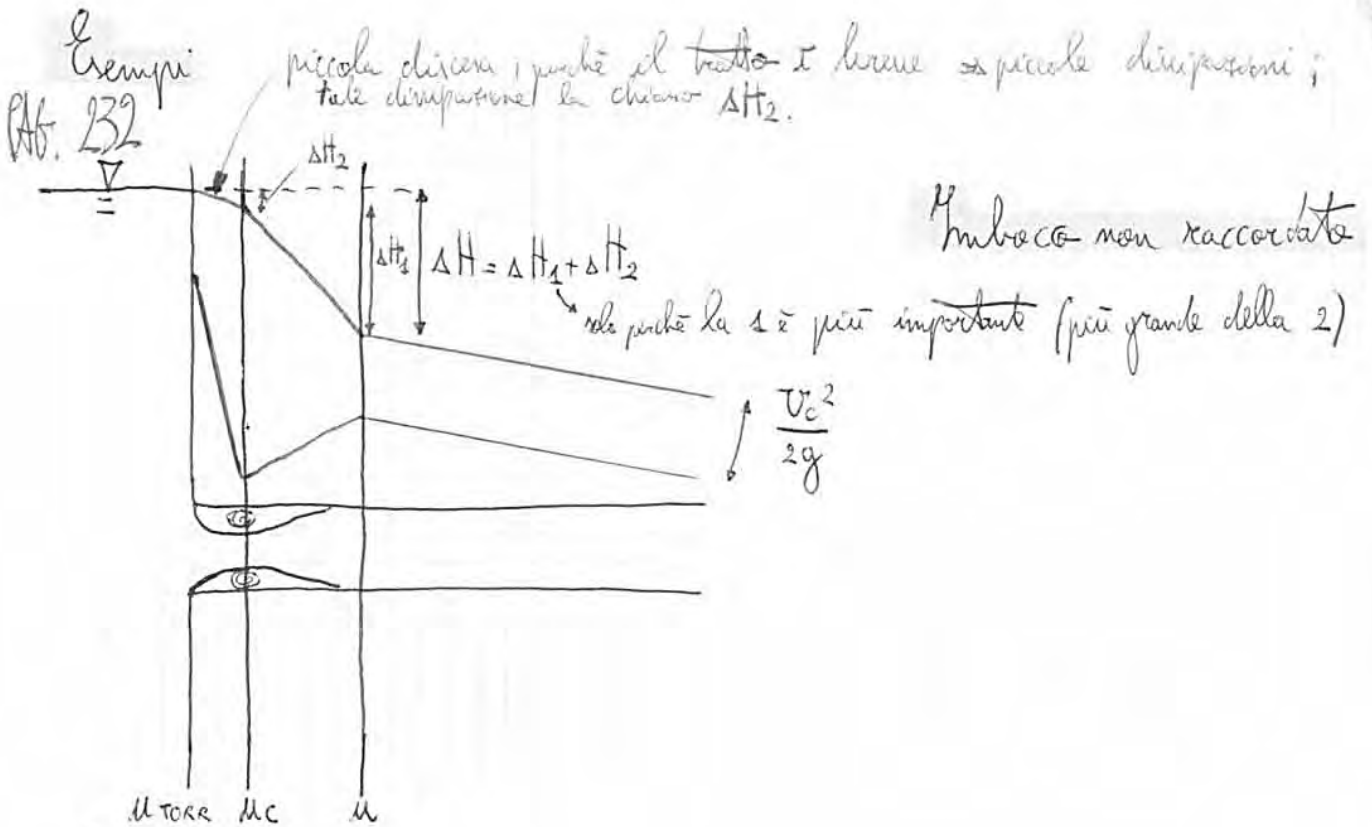
$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e + \vec{M}_u = 0$$

Proietto lungo la direzione x :

$$P_x = -\Omega_2 L \gamma \sin \alpha = -\Omega_2 \gamma (z_2 - z_1) = \Omega_2 \gamma (z_1 - z_2)$$

$$F_c = \underbrace{p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2}_{\text{le scriviamo così perché l'andamento delle pressioni è idrostatico: su } \Omega_1 \text{ l'abbiamo supposto idrostatico, perché le traiettorie sono rettilinee e parallele}} + \underbrace{\sum F_t}_{\text{la risultante delle tensioni tang. abbiamo supposto sopra che sia trascurabile}}$$

$$M_e = \rho Q v_1 \quad // \quad M_u = \rho Q v_2$$



$C_c \approx 0,6$

$C \approx 0,99$ (coeff. di velocità)

$$\Delta H_2 = \frac{U_{TORR}^2}{2g} - \frac{U_C^2}{2g} = \frac{U_C^2}{2g} \left(\frac{1}{C^2} - 1 \right) \approx 0,04 \frac{U_C^2}{2g} \approx 0,1 \frac{U^2}{2g}$$

$U_{TORR} = \sqrt{2gH}$; $U_C = C \sqrt{2gH}$

coeff. di velocità

$U_C = \frac{U}{C_c}$

$$\Delta H_4 = \frac{(U_C - U)^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \approx 0,14 \frac{U^2}{2g}$$

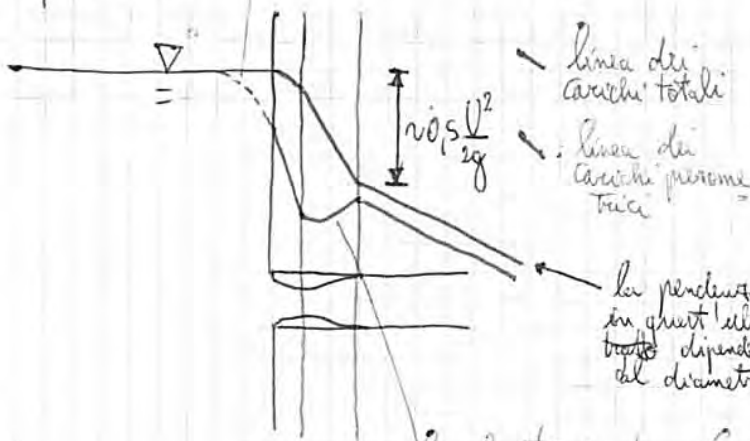
↑
 uso l'espressione di Borda

$U_C = \frac{U}{C_c}$ (la portata è costante ⇒ usando la formula di Q scritta per le due aree si trova questo)

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \approx 0,15 \frac{U^2}{2g}$$

Esempio nella
linea dei carichi
totali e piezometrici

il fluido comincia ad accelerare \Rightarrow è nato un
termine contrattivo



linea dei
carichi totali

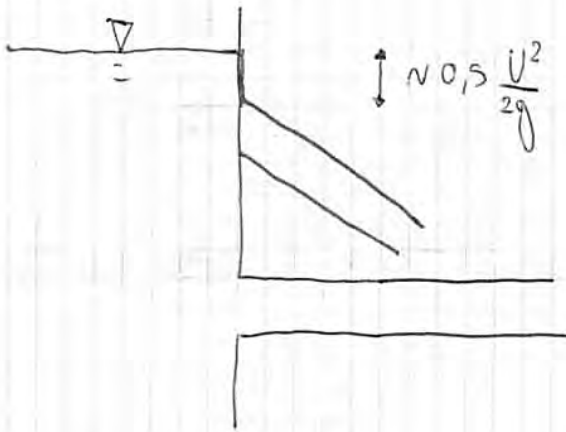
linea dei
carichi piezome-
trici

la pendenza
in quest'ultimo
tratto dipenderà dalla rugosità,
al diametro della condotta considerata

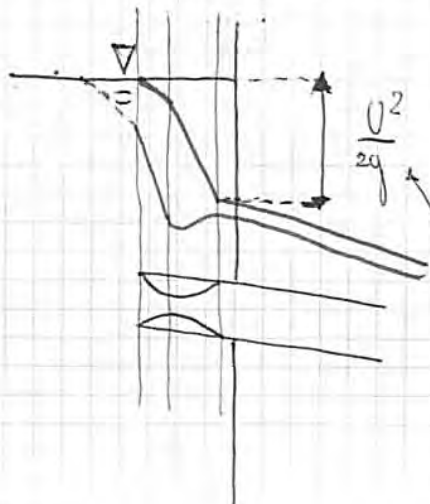
Le traiettorie non possono
avere punto angolare,
perché forze parve istantanea-
mente da 1 a $-\Gamma$ e vice-
versa, cioè che $a_c = \infty$, ma non
è possibile.

La velocità si riduce (c'è un allargamento!) e quindi la distanza
tra le due linee deve ridursi \Rightarrow per questo la linea reale va
verso l'alto.

Quando rappresentato su tutta la scala della tubazione \Rightarrow il tratto in cui
avviene l'allargamento di una \bar{e} piccolissimo (collana) \rightarrow rappresentato
tale tratto con un brusco salto nella
linea dei carichi totali:
ripetto a tutta la
tubazione



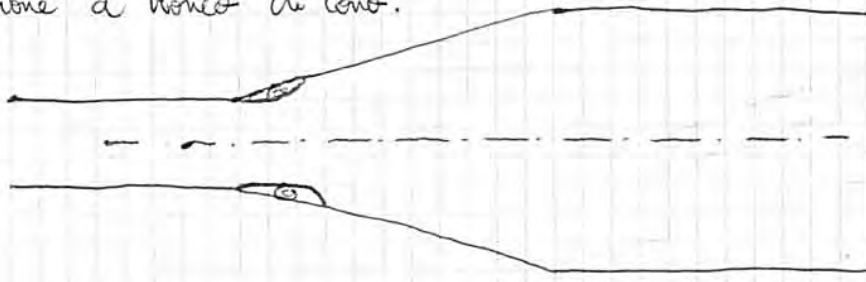
Le curve abbiamo:



Le particelle devono fare una
rotazione di $180^\circ \Rightarrow$ vrt. contratta
ancora più piccola $\Rightarrow C_c = 0,5$

perdita maggiore perché la contrazione
è maggiore \Rightarrow anche allargamento
maggiore

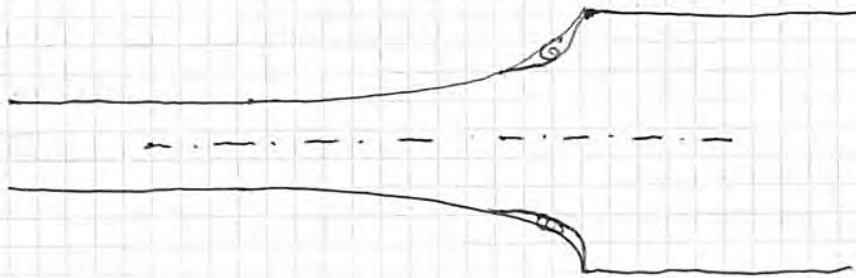
Considero ora due condotti di diverso diametro che devono essere collegati tra loro; la soluzione più naturale che viene in mente è quella di usare una tubazione a tronco di cono:



At. 235

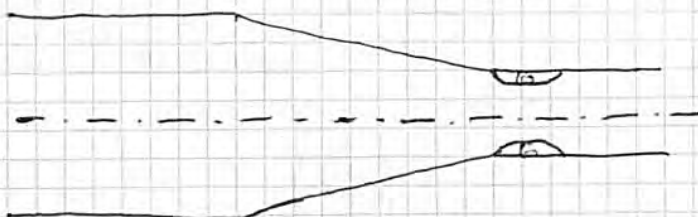
Il grado delle dimissioni c'è due tratti il primo spigolo. Chiaramente, tanto più il tratto del tronco di cono è lungo e tanto più le dimissioni sono piccole, però non è che se raddoppio la lunghezza \Rightarrow diminuisco le dimissioni (il legame è non lineare).
del tronco di cono

Una soluzione più furba per collegare le due condotte è la seguente:



Il distacco di vena accade nella zona in cui la corrente è più lenta \Rightarrow perd di meno!

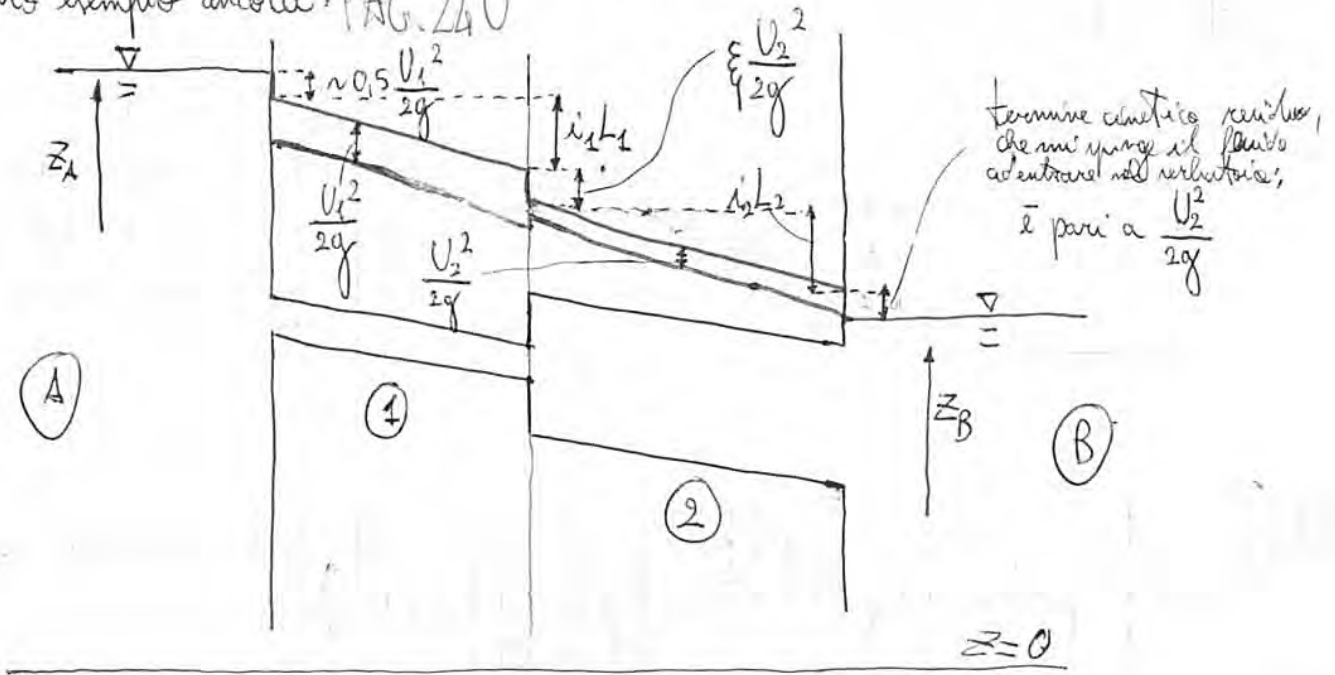
Stessa cosa per i convergenti:



In questo modo:

si crea il distacco di vena nella zona in cui la corrente ha maggiore velocità \Rightarrow alte dimissioni.

Altro esempio ancora: PAG. 240



Letto i_1 perché la T motrice dipende dal diametro D_1 e dalla scabrezza β_1 .

Proviamo un bilancio di energia:

$$E_{in} - E_{fin} = \Delta E_{loss}$$

$$z_A - \left(z_B + \frac{U_2^2}{2g} \right) = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + i_1 L_1 + \xi \frac{U_2^2}{2g} + i_2 L_2$$

↑ termine cinetico
↑ termine distribuito

Tipicamente il bilancio si scrive alla fine così:

$$\Delta z = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + i_1 L_1 + \xi \frac{U_2^2}{2g} + i_2 L_2 + \frac{U_2^2}{2g} \quad (a)$$

↑
differenza geometrica fra il livello di monte e di valle

metto genericamente in parentesi una variazione di 0,33 la presenza del fatto che $\mu \approx \beta^3$

funzione della portata Q:

Quanto vale la portata ??? Nella (a) Δz lo conosciamo; proviamo tutti i termini in

$$U_1 = \frac{Q}{A_1} \quad ; \quad i_1 = \beta_1 Q^2 D_1^{-5} \quad ; \quad U_2 = \frac{Q}{A_2} \quad ;$$

↑
supponiamo di essere in tubazione scabita ⇒ formule matriche (cambiano quella di Darcy)

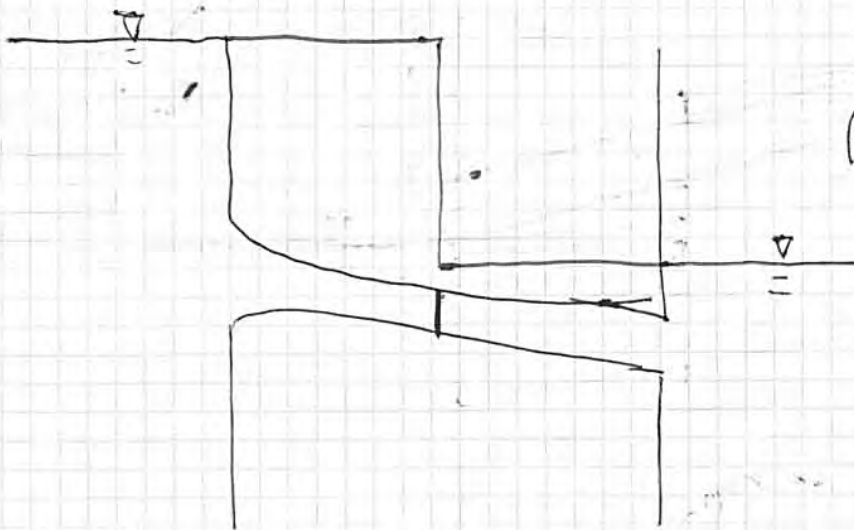
β dipende dalla scabrezza
↑
la formula vale quando il non dipende più da Re ⇒
⇒ tubazione completamente scabita

l'altra conseguenza del chiudere la saracinesca è la seguente:
 Come fa a ridurre i ? h riduce L ? No, quindi si riduce i :

$$i = \beta Q^2 D^{-2}$$

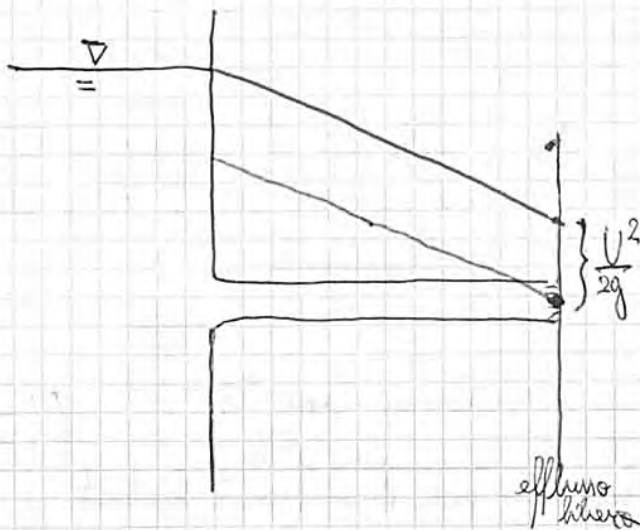
⇒ si è ridotta la portata e quindi il termine cinetico i è ridotto ⇒ più chiuso e più le due linee (carichi totali e carichi parametrizzati) sono vicine tra loro.

Se tutta la saracinesca fosse chiusa:



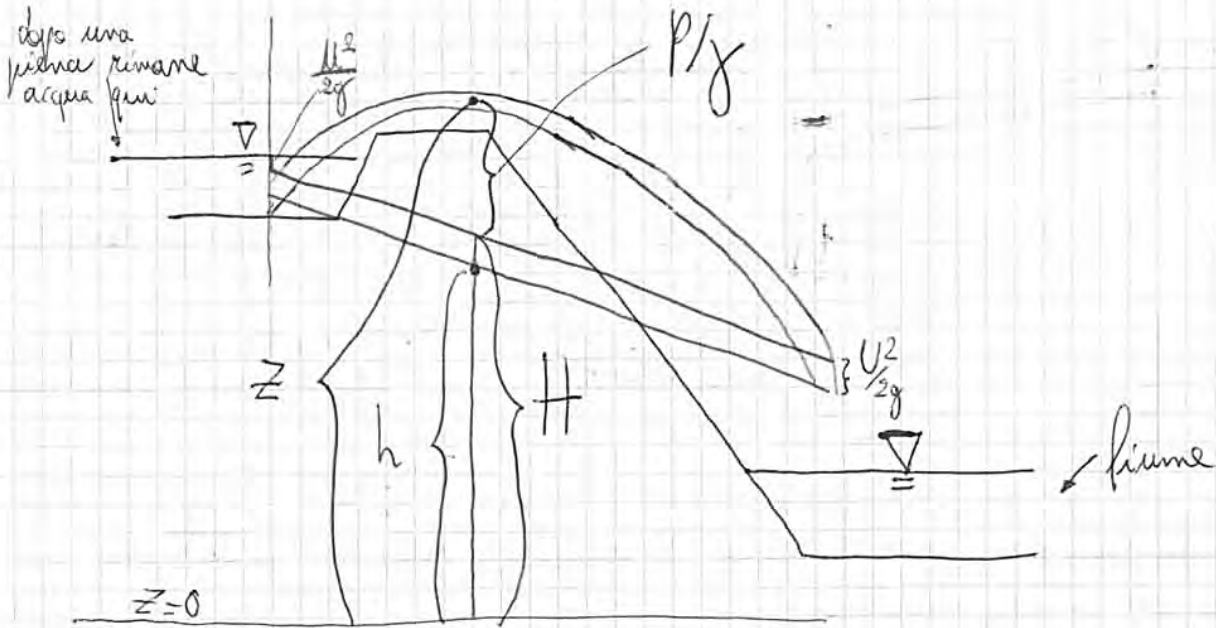
Se due linee (l.c.t. e l.c.p.) coincidessero e la perdita di carico sarebbe esclusivamente localizzata (e perciò niente distribuita).

Altro esempio:



Faccio passare la l.c.p. per il baricentro della sezione a contatto con l'atmosfera.

Argine di un fiume: PAG. 233-234



Per mettere l'acqua rimasta per mettere una pompa, ma spende energia inutilmente. Quindi si mette un tubo a cuneo dell'argine; esso deve essere immersato (perché l'acqua non sale da sola!), ma poi procede da sola. (la condotta sta sopra la linea dei carichi piezometrici) nel 4° tratto

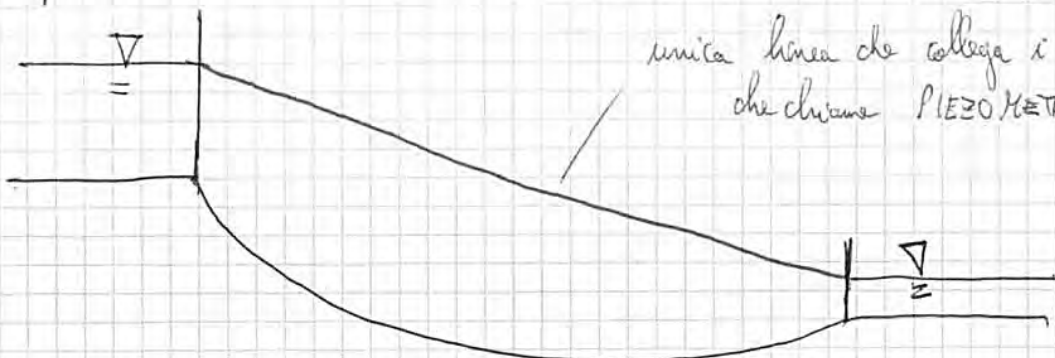
(è depressione!!!) ⇒ quindi questo sistema funziona finché la depressione è limitata.

LUNGHE CONDOTTE PAG. 261

Problemi in cui il termine cinetico diventa trascurabile rispetto alla perdita di carico distribuita ⇒ traccia solo una linea che chiamo PIEZOMETRICA.

Le perdite di carico localizzate sono trascurabili e così

di lunghe condotte i sono problemi



Le condotte invecchiano; invecchiando si ha questo:

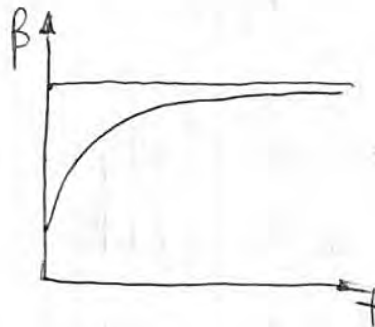


↑
diametro
interna

↑
diametro
esterno: è molto
minore di quello iniziale!!
Inoltre la rugosità va
incrementandosi.
(ci sono
differenti, ecc...)

$$i = \beta Q^2 D^{-m}$$

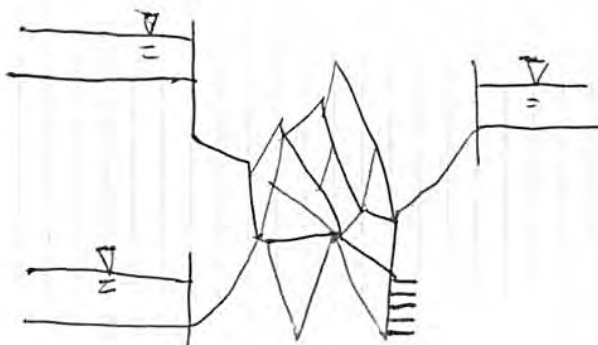
Col passare del tempo, β aumenta:



andamento
asintotico

Inoltre, problema: come fare anche d'accordo i diametri che troviamo dai conti con i diametri commerciali in vendita (es: dai conti di progetto troviamo che D deve essere 146 cm, ma in commercio si ha $D = 120, 130, 140, 150 \dots$).

Immaginiamo una rete: serbatoi che forniscono acqua ad una rete di distribuzione.



M nodi
 M lati

$$dH = dx i \Rightarrow dH = dx \beta \underbrace{(Q - qx)^2}_{\text{portata de sta parametro}} D^{-m}$$

Integrando:

$$H(x) = H_A - \int_0^x \beta (Q - qx)^2 D^{-m} dx$$

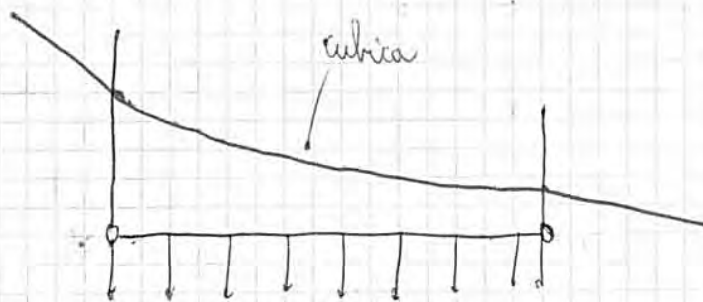
$$H(x) = H_A - \beta D^{-m} \int_0^x (Q^2 + q^2 x^2 - 2Qqx) dx =$$

non cambio di diametro
non cambio di altezza

$$= H_A - \beta D^{-m} \left(Q^2 x + \frac{1}{3} q^2 x^3 - 2Qqx \right) =$$

$$= H_A - \beta D^{-m} x \left[Q^2 + \frac{1}{3} q^2 x^2 - 2Qqx \right] \Rightarrow$$

\Rightarrow quindi è una cubica (dipende da x^3)



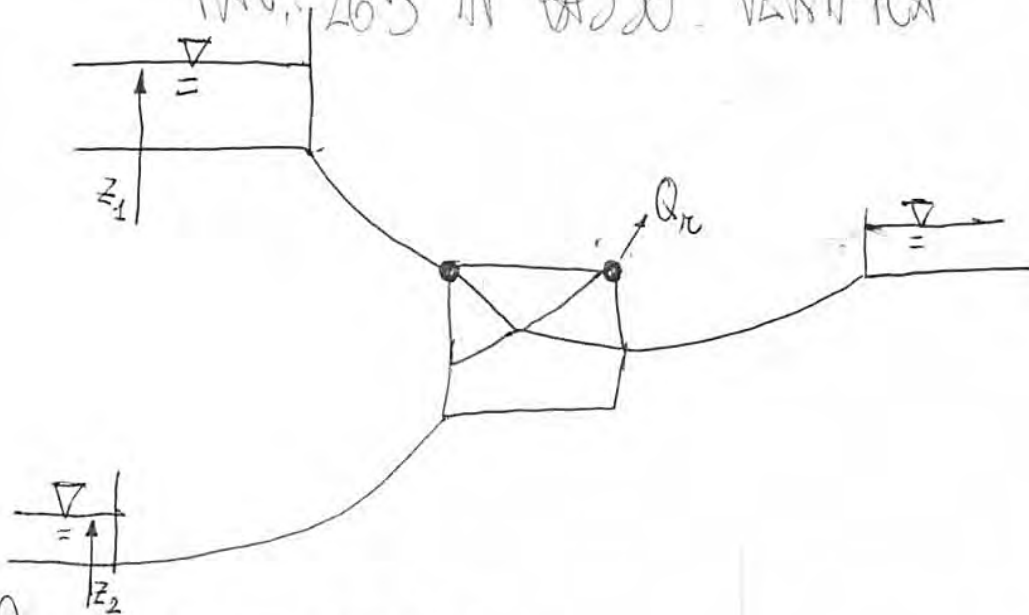
totale, cioè tra i due nodi di inizio e fine del ramo se cui avvenga no i problemi.
e cioè la portata che entra la distribuisce tutta

Osservazioni:

- se $x = L \Rightarrow \beta D^{-m} L \left[Q^2 + \frac{1}{3} P^2 - QP \right] = \Delta H_{\text{totale}} \text{ (a)}$

- se avessi una condotta cieca, cioè non esce niente alla fine e cioè l'acqua non prosegue dopo e cioè: $Q \equiv P \Rightarrow \Delta H = \beta D^{-m} L \left(\frac{1}{3} Q^2 \right)$; avremmo dunque $1/3$ della dissipazione che ci sarebbe se l'acqua entrasse e uscisse.

RAG. 265 IN BASSO. VERIFICA



PROBLEMA DI VERIFICA:

- + Note:
- livelli scabrità
 - Δ_i
 - β_i
 - L_i

- Q_r (portate richieste ai nodi)

- + Incognite:
- Q_i ($i = 1, m$)
 - H_j ($j = 1, m$)

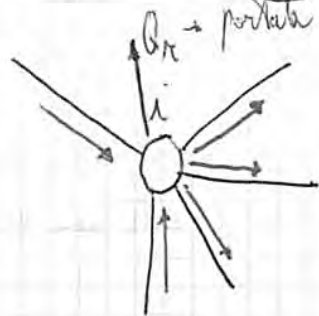
portate che transitano nei vari rami
corichi ai nodi

Stiamo facendo l'ipotesi di moti uniformi (tutto costante nel tempo);

Possiamo scrivere l'eq. di continuità per ogni nodo.

Per nodo: $\sum Q_e = \sum Q_u + Q_r$

Q_e : portata entrante
 Q_u : portata uscente
 Q_r : portata recapitata, quella che si prende al nodo



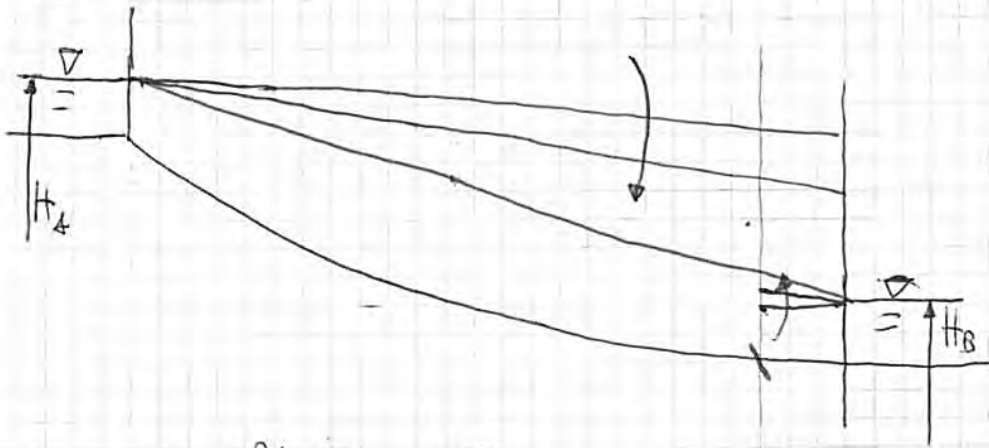
come accade la portata

⇒ m equazioni

Esempio: RAG. 267 (in basso) - 268

$m = 1$

$n = 0$



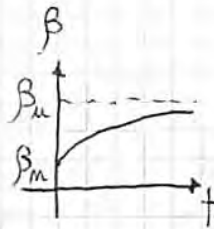
↗ ↘ : indicano mano a mano che apro la valvola

$$H_A - H_B = \beta Q^2 D^{-m} L \quad (10)$$

di tale relazione ricavare Q

$$\beta_m = \beta_{\text{tubi nuovi}}$$

$$\beta_u = \beta_{\text{tubi usati}}$$



Se metto $\beta_{m \text{ usati}}$ nella (10)

$$H_A - H_B = \beta_m Q^2 D^{-m} L \Rightarrow \text{a } \beta_m \text{ corrisponde una certa } Q_m$$

Passa il tempo e β va incrementandosi:

a β_u corrisponde una portata $Q_u < Q_m$ (poiché $H_A - H_B, D, L$ rimangono costanti \Rightarrow se β aumenta, Q deve diminuire)

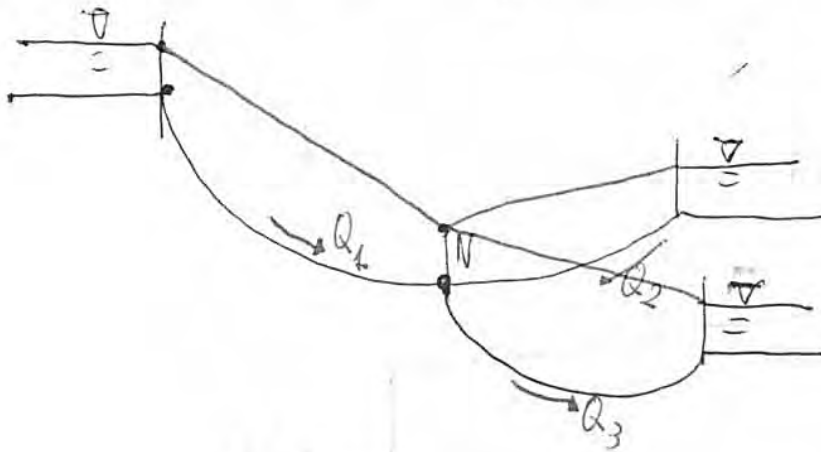
Io voglio che la portata rimanga, col tempo, sempre la stessa.
Rinocchio: metto una valvola (serie) in modo tale che pari la portata di progetto in corrispondenza di β_m .

$$\textcircled{1} Q, \beta_u \Rightarrow D$$

Cioè: io voglio che col tempo la portata rimanga sempre la stessa; progetto dunque D considerando la condizione più sfavorevole ($\beta = \beta_u$) cioè quella che si presenterà andando avanti con il

tempo, $\beta_u < \beta_m$, quindi, ^{perché il diametro l'ho scelto} necessariamente ^{richiedendo} ^{la} ^{portata} \Rightarrow ^{introdurre} una valvola \Rightarrow portata di carico localizzata \Rightarrow man mano

Posso accadere che il moto sia più basso



Reservoiri 1 e 2 alimentati
 no. il reservoir 3 è alimentato.

(2)

A seconda della posizione del moto, il reservoir (2) diventa alimentato o alimentante.

? Q_1, Q_2, Q_3, H_N reservoir

Faccio l'ipotesi che il (2) sia alimentato (\Rightarrow situazione (1))

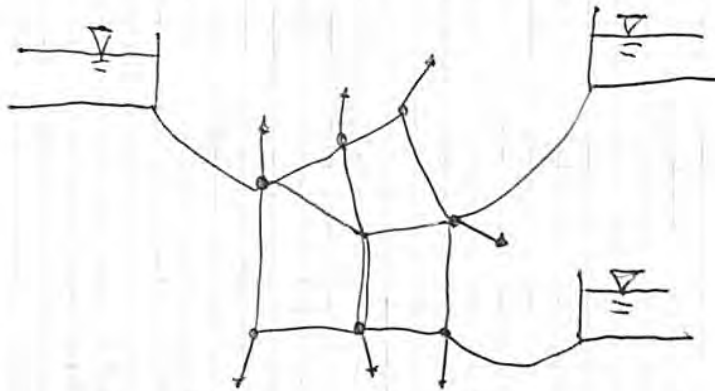
$$\begin{cases} H_1 - H_N = \beta_1 L_1 D_1^{-5} Q_1^2 \\ H_N - H_2 = \beta_2 L_2 D_2^{-5} Q_2^2 \rightarrow \text{(se avrei scelto che (2) è alimentante, avrei invertito i segni a 1° membro)} \\ H_N - H_3 = \beta_3 L_3 D_3^{-5} Q_3^2 \\ Q_1 = Q_2 + Q_3 \end{cases}$$

Se tutte le portate vengono reali positive \Rightarrow è giusta l'ipotesi fatta.
 Se vengono negative o complesse \Rightarrow l'ipotesi fatta è sbagliata \Rightarrow cambio il segno e risolve il sistema.
nella 2° equazione

IDRAULICA

22-11-2011

PROBLEMI DI PROGETTO : dimensionamento della rete PAG. 272



hanno sempre nell'ipotesi di moto permanente (anche se nella realtà non è così: i livelli non rimangono costanti, ...)

- Noti :
- livelli nei serbatoi
 - portate nei nodi
 - topologia (come è fatta la rete, come sono collegati fra loro i nodi)

- Inconosciute :
- carichi H nei nodi
 - portate Q che circolano nei rami
 - diametri D dei rami
- (m equaz.)
(m equaz.)

Non possiamo scrivere

• m equazioni di continuità ai nodi :
$$\sum_e Q_e = \sum_u Q_u + Q_n$$

↑
portata che preleviamo al nodo

• m equazioni di bilancio energetico :
$$H_i - H_{i-1} = \beta_i L_i D_i^{-5} Q_i^2$$

Numero di equazioni inferiore al numero delle incognite \Rightarrow infinite soluzioni, cioè infiniti diametri che soddisfano le richieste. (cioè esistono ∞ gradi di libertà cioè ∞ possibilità per il progettista).
 Se però devo soddisfare dei vincoli \Rightarrow non ho più ∞ possibilità; ad esempio:
 - se ho una portata di tubi economica \Rightarrow prendo quelli.
 - se ho un vincolo sulle velocità (voglio abbattere il tempo di residenza dell'acqua nei tubi) \Rightarrow scelgo i diametri in base a tale vincolo.

dal libro: $\beta_i L_i = \lambda_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow H_i - H = \lambda_i Q_i^2 D_i^{-m_i} \quad (a)$$

$$(H - H_S = \lambda_S Q_S^2 D_S^{-m_S} \quad (b)$$

Noi vogliamo che:

$$\sum_i P_i + \sum_S P_S = \min$$

numeraria
intera a
tutte le con
dette entranti

parità
dell'i-esima
conoscete entrante

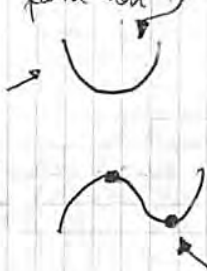
$$\sum_i \kappa_i L_i (w_0 + w_i D_i^{\epsilon_i}) + \sum_S \kappa_S L_S (w_0 + w_S D_S^{\epsilon_S}) = \min \quad (b_0)$$

costo
costo per unità di
lunghezza moltiplicato
per la lunghezza

Bisogna dunque uguagliare a 0 la derivata, non facciamo i conti, ma procediamo così: i diametri li possiamo usare la (a) e (b), sostituiamo tali diametri nella (b_0) e poi deriviamo rispetto ad H e poniamo tale derivata uguale a 0:

$$\frac{d^*}{dH} = 0 \quad \text{e poi verificiamo che } \frac{d^2}{dH^2} > 0$$

essendo una funzione
fatta così



ha il
massimo
all'infinito

allora la derivata
mi dà sicuramente
il min \Rightarrow non c'è bisogno
di fare la derivata
seconda.

Se però la funzione
fosse stata così, allora
avrei dovuto calcolare
la derivata seconda per
vedere se si trattava
di minimo o massimo

Le incognite sono:

$$D_1, D_2, D_3, H_N$$

↑
carico nel nodo

Nel caso di verifica scriviamo:

$$\left. \begin{aligned} H_1 - H_N &= L_1 \beta_1 Q_1^2 D_1^{-m} \\ H_N - H_2 &= L_2 \beta_2 Q_2^2 D_2^{-m} \\ H_N - H_3 &= L_3 \beta_3 Q_3^2 D_3^{-m} \end{aligned} \right\} : \text{Equaz. di bilancio energetico}$$

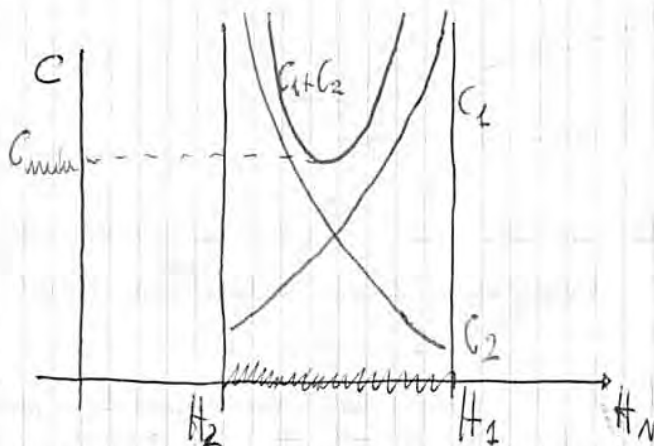
$m (=3)$

La nuova informazione che mette è l'eq. di minimo costo (ma può scrivere tante quante sono i nodi e cioè 4); uso la formula

$$\underbrace{\frac{D_1^{m+E}}{Q_1^2}}_{\text{ciò che entra}} = \underbrace{\frac{D_2^{n+E}}{Q_2^2} + \frac{D_3^{m+E}}{Q_3^2}}_{\text{ciò che esce}}$$

ⓐ (suppongo stesso materiale, stessa viscosità, ...):

⇒ numero di equazioni = numero incognite



della geometria del tratto A

Io voglio far passare sempre la stessa portata Q_1 , ma voglio che il carico al nodo sia circa pari a quello a monte e cioè che la pendenza sia quasi nulla e ciò lo realizzo facendo sì che il diametro sia più grande (⇒ avrà una velocità minore ⇒ meno dissipazioni perché l'acqua va così piano che praticamente non dissipa ⇒

(cioè $H_N \rightarrow H_1$)

perché passa più piano per Q_1

Ora i diametri sono noti; ciò che sono incognite sono:

- quanto deve essere lunga la parte L_1 che corrisponde con il diametro D_1 -
- u $u L_2^u$
- D_2 -

Posso scrivere due equazioni:

$$\begin{cases} L = L_1 + L_2 \\ H_1 - H_2 = L_1 \beta_1 Q^2 D_1^{-m} + L_2 \beta_2 Q^2 D_2^{-m} \end{cases}$$

questo sistema mi fornisce L_1 e L_2

Supponiamo che:

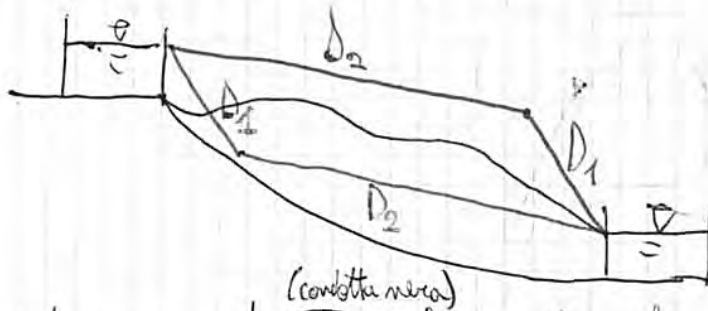
$L = 1000 \text{ m}$ e che dal sistema abbia trovato:

$L_1 = 200 \text{ m}$

$L_2 = 800 \text{ m}$.

NOTA:

Se due tubazioni sono messe in serie: è uguale, mettere prima la più corta e poi la più lunga e viceversa?
 Per quanto riguarda le dissipazioni totali \bar{u} ; ciò che cambia è l'andamento della linea piezometrica:



Se la condotta è scavata \Rightarrow preferisco la soluzione verde perché alleggerisco il carico.

Se la condotta è in una montagna ed ad esempio è quella blu \Rightarrow

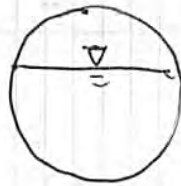
\Rightarrow è meglio la soluzione rossa perché con la soluzione verde avrei gran parte della condotta in depressione.

Traccio poi (sempre a matita) la piezometrica relativa e gli ultimi tratti di tali linee.
 Tra C' e D' la piezometrica assoluta coincide con la condotta, perché questa è a pressione assoluta nulla.

Se due piezometriche sono meno inclinate \Rightarrow resistenze diminuite \Rightarrow
 \Rightarrow diminuisce la velocità \Rightarrow portata minore.

Quindi, se metto la condotta come il caso IV, la portata che passa non è quella prevista dai calcoli, ma ne passa di meno. in realtà

Inoltre in C' ho pressione assoluta pari a 0 \Rightarrow si libera il vapore \Rightarrow KOTO A CANALETTA: l'acqua non occupa tutta la sezione, che in parte viene occupata dal vapore acqueo:



Il tubo a canaletta funziona da C' a D'.

Sezioni 1, 2, 3 (verdi):



dopo D' ho RISALTO IDRAULICO (quia la sez. ritorna piena)

IDRAULICA

PAG. 359

CORRENTI A PELO LIBERO

28-11-2011

Capitolo che riguarda una massa di fluido in cui è presente una superficie libera che può fare ciò che vuole (es. onde).

Le onde si distinguono in ONDE DI GRAVITÀ (quelle che ci sono nel mare) e ONDE DI CORRENTE o DI TRASLAZIONE (quelle legate allo spostamento di una massa; es. onde di piena dei fiumi).

Nel caso del mare non c'è una massa che si sposta. Le onde dei fiumi vanno ad una velocità di $\frac{3}{2} U$; quelle del mare viaggiano a decine di m/s \rightarrow non può essere la massa d'acqua

↑
velocità media

che si sposta (quando avviene a riva ci sarebbe un'inerzia enorme!), ma invece sono onde di forma. In questo corso ci riferiamo sempre alle onde di corrente e non trattiamo quelle di gravità.

L'equazione di Navier-Stokes descrive il moto di qualunque tipo di fluido \rightarrow vale anche per le correnti, però non la usiamo perché:

- molto complessa; la sup. libera
- quando studio un fenomeno di tipo ondulato \rightarrow le variabili in gioco non sono quelle presenti nell'equaz. di Navier-Stokes:

in Navier-Stokes ci sono: u, v, w, p, ρ , ma noi vogliamo scrivere un'equazione del tipo $\psi = \psi(x, y, z, t)$ \Rightarrow le variabili u, v, w, p, ρ non ci interessano.

LE IPOTESI

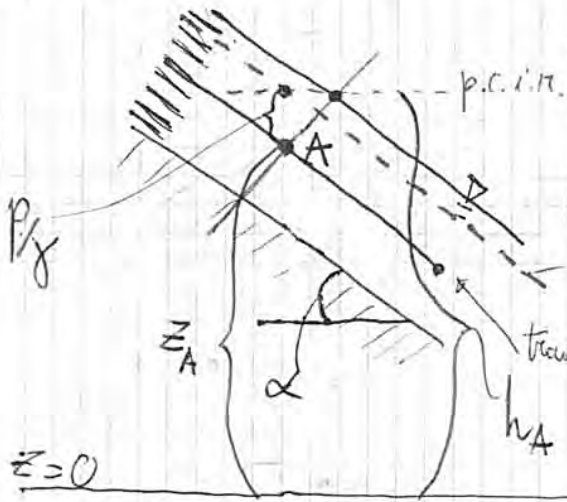
Noi ci occupiamo di moti a superficie libera che si trovi sopra una corrente; cioè sotto la superficie libera c'è una corrente.



Ci occupiamo delle correnti perché tanti problemi di interesse ingegneristico ricadono in questo campo. Inoltre perché possiamo descriv

IV IPOTESI

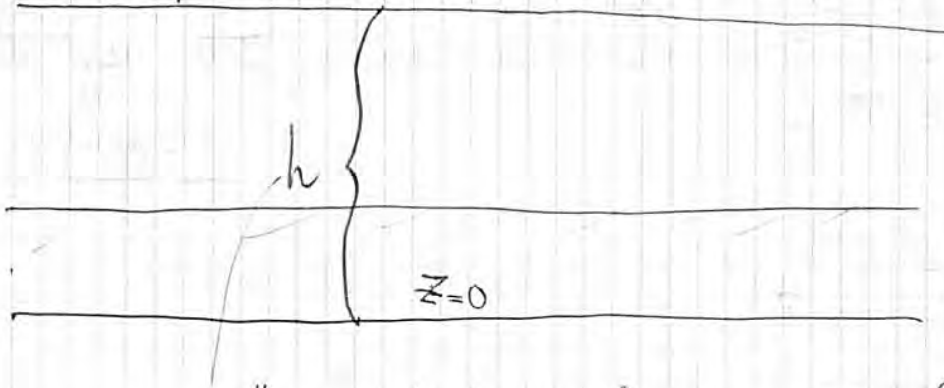
Trattiamo correnti poco inclinate dall'orizzontale.
 Se consideriamo correnti molto inclinate:



Supponiamo che la soluzione sia stabile, cioè che le traiettorie sono regolari (come in cima al disegno).
 Troviamo la parametrica della generica traiettoria nera:

Consideriamo il punto A su questa traiettoria nera, avremo z_A . Poiché le traiettorie sono regolari \Rightarrow andamento idrostatico delle pressioni sulla res. trasversale verde. Poiché la corrente è a sup. libera \Rightarrow indichiamo il p.c.i.m. (rosso). P/Y sarà quello in l.c.p.A.

figura, dato che lo andamento idrostatico della pressione. Per gli infiniti punti sulla res. trasversale (verde) esistono infinite parametriche, e ciò è molto scomodo!
 L'ipotesi che facciamo è che: tanto meno è inclinata la sup. libera e tanto più le parametriche sono vicine tra loro (sono sempre infinite, ma saranno così vicine tra loro che possono considerarle tutte coincidenti con la sup. libera):



non metto più il pedice perché, con un piccolo errore, posso dire che tutte le linee parametriche coincidono con la superficie libera.

Questa ipotesi è conforme alla realtà, perché le pendenze delle pianure sono molto piccole.

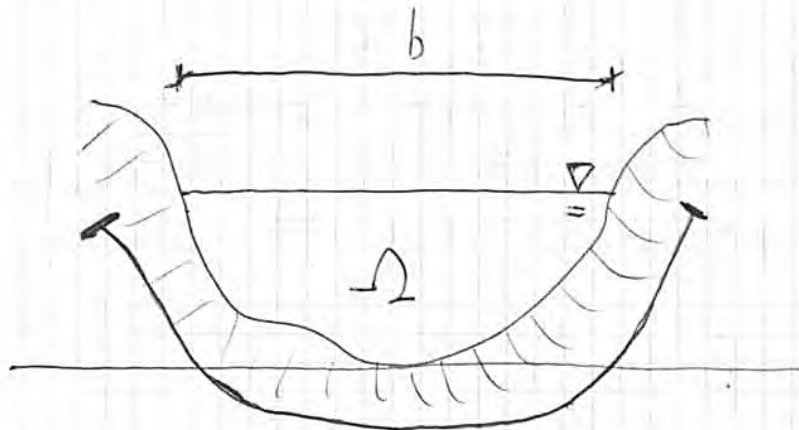
$Y = Y(s, t)$: PROFONDITÀ DELLA CORRENTE

$h = h(s, t) \Rightarrow - \frac{\partial h}{\partial s} = i \quad (a)$

$H = H(s, t)$

$\frac{dH}{ds} = -J \quad (b)$

i e J della (a) e (b) sono diversi perché in generale è diverso da $\frac{\partial h}{\partial s}$, perché il termine costante può variare spontaneamente nella sezione e può variare nel tempo).



$b = b(s, t)$

raggio idraulico

$R = \frac{\Omega}{P}$

P contorno bagnato: in una metrica solo la parte dove c'è attrito \Rightarrow a contatto con l'aria no perché non ci sono tensioni tangenziali (però la sup. libera non contribuisce al contorno bagnato; se le onde sono generate dal vento, c'è attrito anche lì, ma noi di solito del mare non lo studiamo).

Osservazione:

La tensione superficiale compare quando ci sono forti curvature sulla sup. libera:



Noi non consideriamo questi fenomeni di capillarità in cui dovremmo considerare anche la tensione superficiale.

ONDE CAPILLARI (legate alla capillarità) (es: quando soffiato in un bicchiere d'acqua; tutti i film di liquido (es: quando piove sul parabrezza dell'auto in moto)).

$$dm = \rho ds \Omega$$

↑ volume

↑ densità

non mette $d\Omega$ (volume giusto), perché le variazioni sono tutte infinitesime di ordine superiore \Rightarrow si trascurerebbero.

$$A_S = \frac{\partial U}{\partial t} + v \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{DU}{Dt}$$

Consideriamo le forze in gioco:

$$F_{P,S} = \rho g ds \Omega \sin \alpha = -\rho g ds \Omega \frac{dz_f}{ds}$$

↑ forza peso nella direzione S

↑ $\sin \alpha = -\frac{dz_f}{ds}$ ← cateto ipotenusa

Forza sul contorno:

- sezione ①: la spinta la vedo come $p \Omega$ (prima nell'ipotenusa di corrente gradualmente variata \Rightarrow aumento idrostatico delle pressioni \Rightarrow la spinta si calcola come in idrostatica)

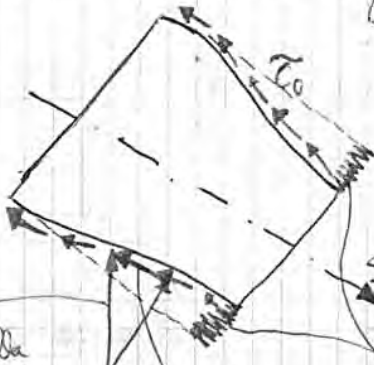
La risultante delle forze di pressione sulla sup. ① e ② è:

$$p \Omega - \left(p \Omega + \frac{\partial(p \Omega)}{\partial s} ds \right) =$$

$$= -p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

metto sia p che Ω nella parentesi, perché entrambi variano al variare di s .

Consideriamo una ^{aguzza} ~~rett.~~ longitudinale lunga ds :



Le forze sul contorno sono:

$$-\tau_0 P ds + p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds$$

il segno è giusto, perché quando s aumenta \Rightarrow Ω diminuisce \Rightarrow ottengo segno - che è giusto (infatti la forza è contraria alla direzione s)

forza totalmente ortogonale alla superficie (è la spinta sul contorno). La scompongo in due componenti: una parallela ad S e una ortogonale ad S (quest'ultima non ci interessa perché noi stiamo considerando l'equilibrio nella direzione S)

contorno bagnato

sono forze di attrito \Rightarrow si oppongono al movimento

variazione dell'area

moltiplico direttamente la spinta normale per la proiezione dell'area (quella blu o $\sin \alpha = \frac{z_2 - z_1}{\Omega}$)

componenti longitudinali

componente longitudinale delle spinte normali alla sup. laterale. Per ottenere la risultante di tali componenti lungo s moltiplico tali forze per l'area della sup. laterale. Invece per ottenere la risultante di tali componenti lungo s moltiplico la spinta normale e moltiplico l'area per l'area della sup. laterale.

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = -J$$

bilancio di massa, abbiamo visto che: $h = z_f + \gamma$; sostituiamo questa espressione nella (##):

$$\frac{\partial z_f}{\partial s} + \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = -J$$

↓
-i_f

$$\Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = i'_f - J$$

Introduco anche l'eq. di continuità per le correnti: nel caso di fluido incomprimibile posso semplificare ρ

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Metto a sistema queste due ultime equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = i'_f - J \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{EQUAZIONI DI DE SAINT VENANT}$$

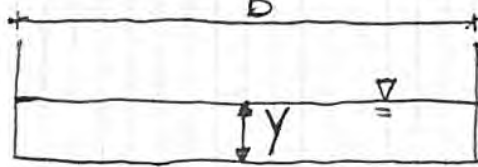
COMMENTI

- queste equazioni sono le eq. più semplici che descrivono il comportamento delle correnti; le altre equaz. sono quelle che posso scrivere rimuovendo le ipotesi fatte: (man mano più difficili di queste)
 - DE SAINT VENANT (le più semplici)
 - BOUSSINESQ (commento di non avere il profilo di velocità verticale)

Vediamo quanto vale il numero di Reynolds:

$$Re = \frac{4 R U}{\nu}$$

Consideriamo una sezione semplice (rettangolare):



$$R = \frac{bY}{2Y+b}$$

Dato che, generalmente, si ha che $b \gg y \Rightarrow R \approx \frac{bY}{b} = y$

(nel Rio delle Amazzoni $\bar{y} \approx 60m$)

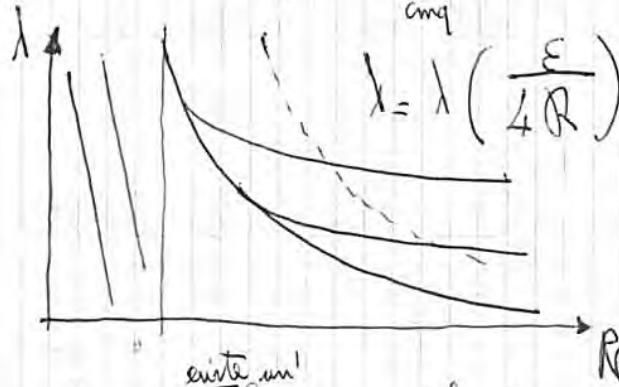
ordine della profondità

in una corrente a sup. libera

ordine della velocità ($1, 1,5 m/s$)

$Re = \frac{4 \cdot 10^0 \cdot 10^0}{10^{-6}} \approx 4 \cdot 10^6$ \Rightarrow il numero di Reynolds è altissimo e dunque ho molta probabilità di cadere nella zona del diagramma di Moody dove $\lambda = \lambda(E)$ e non dipende più da Re

[Osservazione importante: il vero vincolo fisico del diagramma di Moody è che le correnti siano cilindriche, ma nel nostro caso (corrente a sup. libera in MOTO UNIFORME) \Rightarrow ho corrente cilindrica:]



[Non abbiamo utilizzato Moody anche per le correnti in pressione, ma esse infatti sono una sottocategoria delle correnti cilindriche!]

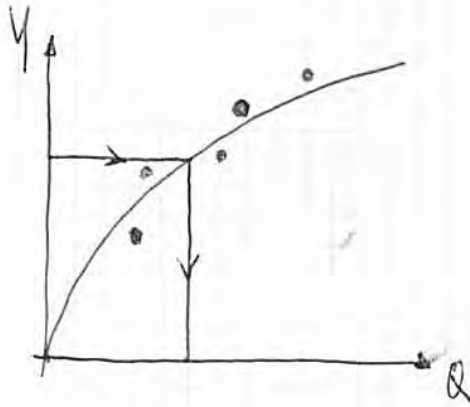
[Facciamo una parentesi: esiste un' applicazione del teorema π per ricavare il diagramma di Moody]

Si ha dunque che siamo nella zona di moto completamente turbato e dunque possiamo usare le formule pratiche:

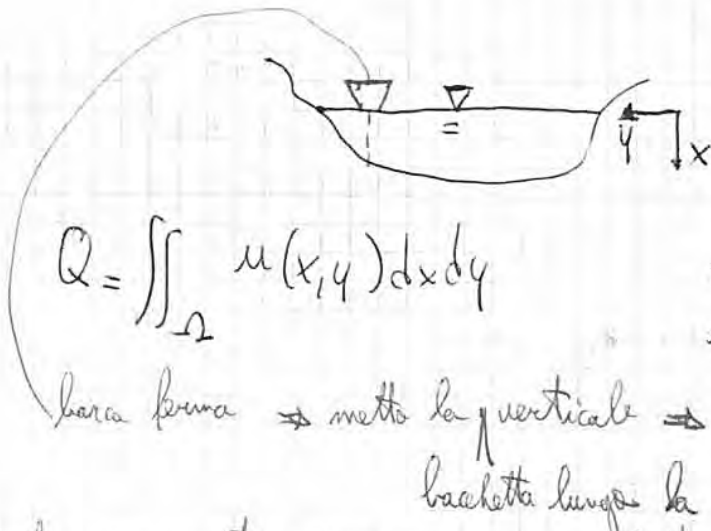
$$U = K \sqrt{R i f}$$

FORMULA DI CHEZY \rightarrow ha lavorato nei canali in Francia

$$Q = \Omega K \sqrt{R i f}$$

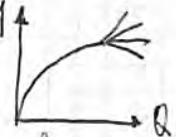


Se assumi un moto uniforme \Rightarrow
 \Rightarrow sarebbe facile calcolare
 la Q (infatti mente variabile con lo spazio \Rightarrow
 potrei entrare nel grafico con il valore
 di v e ricavare la portata Q)
 In realtà ho ricorrenze di
 stati permanenti, e altre
 "complicazioni" ...



Assumiamo che il
 livello quel giorno non
 cambi molto (le piogge
 non ci siano state) \Rightarrow
 vogliamo misurare sperimenta-
 mente la portata.

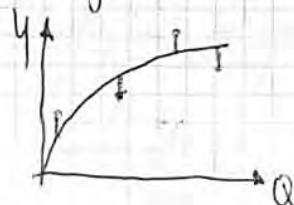
ripetiamo questa operazione per tutta l'estensione del fiume \Rightarrow
 ottengo la portata per quel livello (●); dovrà dunque andare
 un altro giorno per ottenere la portata relativa ad un altro
 livello (e continuare così per altri livelli ottenendo i punti verdi ●).
 Otterrò vari punti fino ad un certo livello (non posso
 andare quando c'è la piena) \Rightarrow come va la curva in caso
 di piena? **ESTRAPOLO** la curva, ma come la estrapolo?
 Posso estrapolare in infiniti modi:



Un'estrapolazione corretta è quella che segue una legge di potenza:

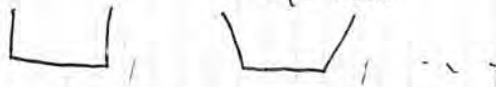
$$Q = K v^m$$

K e m si ottengono tramite il metodo dei minimi quadrati,
 cioè minimizzando gli scarti così seguenti:



Ma nella realtà nessuno fa una sezione della scava di questo tipo \Rightarrow soluzione non corretta.
 (è difficile da realizzare)

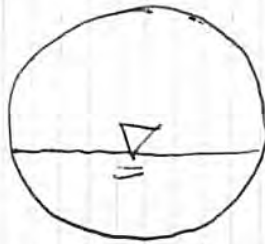
Nella realtà invece, si propongono una serie di sezioni:
 si fa così:



si fanno tutti i calcoli e poi si vede la soluzione più conveniente.

PAG. 270

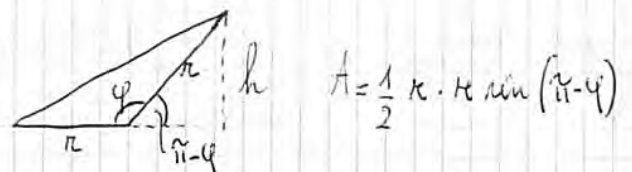
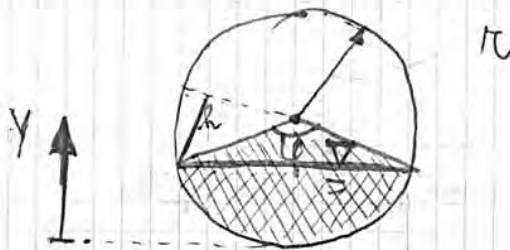
Alcune volte si fa viaggiare una corrente a sup. libera in una sezione chiusa (es: acqua nei canali delle centrali idroelettriche):



$$Q = C R^{2/3} i_f^{1/2} \Omega \quad R \uparrow \Rightarrow Q \uparrow$$

dunque, intuitivamente, vorremmo poter dire che aumentando al massimo l'acqua (cioè riempendo completamente la sezione d'acqua) \Rightarrow avrei la massima portata.

Se il livello si avvicina molto al tetto della sezione, è più il contorno bagnato che aggiungo rispetto all'area che aggiungo $\Rightarrow R$ non è una funzione monotona delle altere, ma dopo un certo livello comincia a scendere \Rightarrow la portata diminuisce.

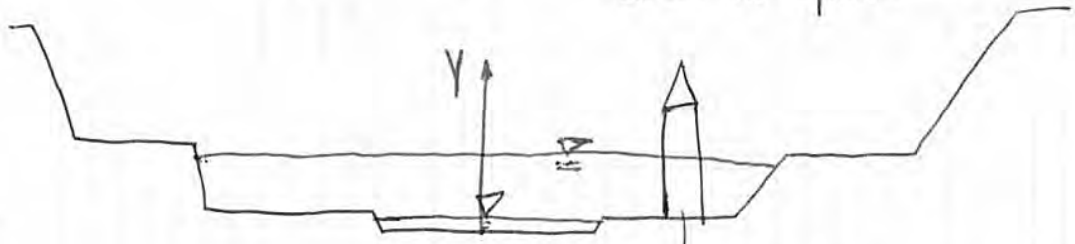


Vediamo come varia R al variare della profondità (y):

$P = \pi \varphi$ espresso in radianti.
 ↗ contorno bagnato

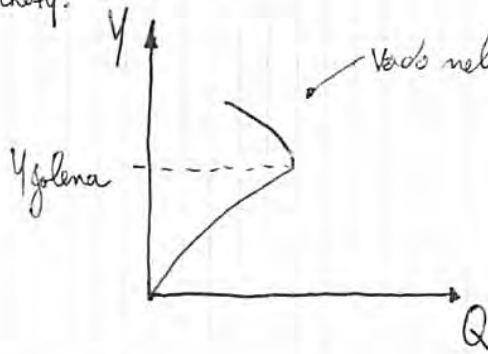
Altro caso: PAG. 272

AREE GLENALI : aree che vengono erodate in caso di piena



ci è estratto qui → deve proteggere in caso di piena!

Disegno la scala di deflusso attraverso Chézy:



Vado nelle zone glenali → la portata raddoppia. Ma ciò è assurdo!!!
 Il errore è che sto considerando tutto come un'unica sezione.
 cioè che Chézy valga anche per sezioni non compatte: Chézy vale per sezioni chiuse.

Fai questo allora:



foto applicando Chézy ad un'unica sezione.

Divido la sezione in 3 parti separate:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

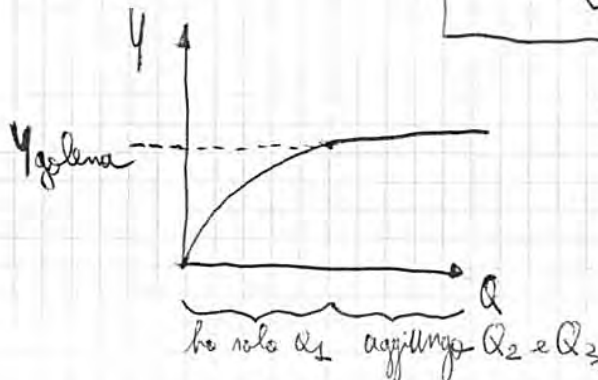
$$Q_1 = C_1 R_1^{2/3} i_f^{1/2} \Omega_1$$

$$R_1 = \frac{\Omega_1}{P_1}$$

applica il no. Chézy con la sua natura.

$$Q_2 = C_2 R_2^{2/3} i_f^{1/2} \Omega_2$$

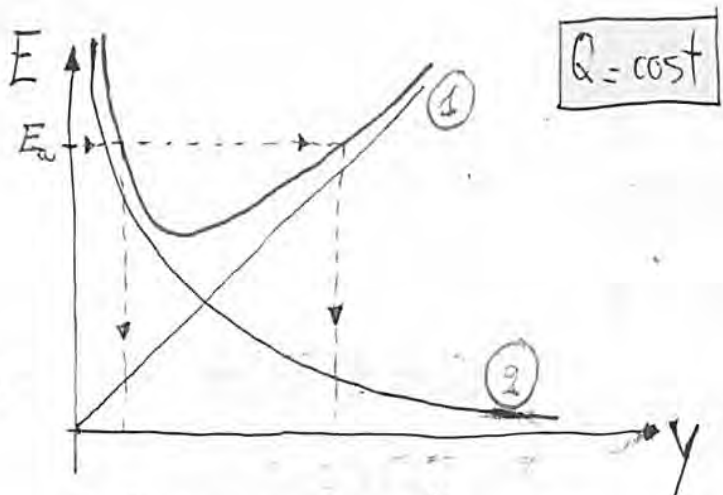
$$Q_3 = C_3 R_3^{2/3} i_f^{1/2} \Omega_3$$



Non sto applicando la 1° ipot. (reato unidimensionale) corrente e qui invece l'aurea laterale menzionata.



Troviamo il risultato corretto!



E è somma di ① e ②

$E = Y$ (lineare)

$E = \frac{(cost)^2}{2g \Omega^2}$

se Ω aumenta \Rightarrow anche Y aumenta

$(\Omega \uparrow Y) \Rightarrow$ all'aumentare di Y , E diminuisce

Al crescere di $Y \Rightarrow$ ② costa sempre meno e ① sempre più

OSSERVAZIONI:

E (che è somma di ① e ②), avrà come minimo ① all'aumentare di Y . Viceversa accade al diminuire di Y .

- c'è un minimo \Rightarrow c'è una profondità y (PROFONDITÀ CRITICA) a cui corrisponde un'ENERGIA CRITICA che è anche l'energia minima \Rightarrow se fai passare quella portata che hai scelto con la Y critica, la corrente ha la minima en. possibile.
- Se faccio passare quella portata scelta con più energia $\Gamma \Rightarrow$ quell'energia posso ottenerla con 2 altezze differenti (linee blu tratteggiate). (L'altezza critica divide la curva in 2 rami: sinistro e destro).
- Cosa cambia tra le due altezze che soddisfano realizzano la stessa E ?
- altezza più bassa \Rightarrow portata stessa, livello basso, sezione bassa \Rightarrow velocità alta \Rightarrow alto termine cinetico (infatti conta di più la ② rispetto alla ①) \Rightarrow il grosso dell'en. è quella cinetica.
- altezza più alta \Rightarrow il grosso dell'energia è quella pot. en. potenziale (infatti la portata è la stessa, livello più alto, sezione). più alta \Rightarrow velocità bassa

In base a quanto visto si ha:

- RAMO DELLE CORRENTI LENTE: ramo destro (a destra di Y_c)
- RAMO DELLE CORRENTI VELOCI: ramo sinistro (a sinistra di Y_c)

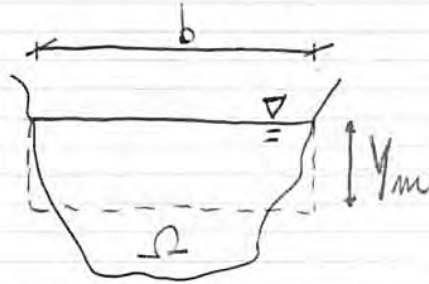
Tanto maggiore è l'energia e tanto più le quote delle Y cambiano sempre di più tra loro (cioè si allontanano sempre).

Tutto questo non esiste nelle correnti in pressione; esiste soltanto quando puoi giocare con le profondità (cioè solo nelle correnti a sup. libera).

instabili; è difficile tenere la corrente lì.
 Se invece il minimo fosse stato pronunciato \rightarrow una variazione di E dal valore critico avrebbe comportato una piccola variazione di profondità.

Risolviamo:

$$\frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 1$$



Altezza media y_m \bar{e} quell' altezza che la sezione Γ fosse rettangolare e avesse la stessa b e Ω avrebbe

$$y_m \cdot b = \Omega$$

$$Q = U \cdot \Omega = U \cdot y_m \cdot b$$

La condizione di criticità diventa:

$$\frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = \frac{U^2 y_m^2 b^2 \cdot b}{g y_m^3 \cdot b^3} = \frac{U^2}{g y_m} = 1$$

questo rapporto prende il nome di
NUMERO DI FROUDE (Fr)

$$Fr = 1 \iff y = y_c$$

Nelle correnti a sup. libera, Fr è importante come Re nelle correnti in pressione

Significati fisici di Fr (il prof. ce ne dice 2):

1) rapporto tra en. cinetica e en. potenziale:

$$\frac{U^2}{2g} \quad \text{en. cinetica per unità di peso}$$



y : en. potenziale per unità di peso

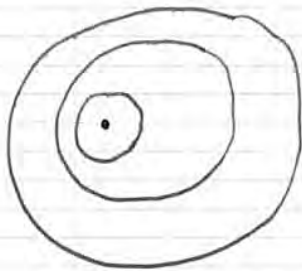
Quindi una perturbazione infinitesima in una corrente veloce può solo andare verso valle.

$$\frac{U}{\sqrt{gY}} > 1$$

$$F_r > 1$$

Quindi quando $F_r > 1 \Rightarrow$ la perturbazione può solo andare verso valle (\rightarrow in una corrente veloce ($F_r > 1$) la perturbazione può solo andare verso valle)

Se $\sqrt{gY} > U \Rightarrow \frac{U}{\sqrt{gY}} < 1 \quad (F_r < 1)$



Per $F_r < 1$ (corrente lenta) una qualunque perturbazione fa sentire il suo effetto anche a monte.

Sui libri troviamo che $F_r = \frac{U^2}{gY}$ o $F_r = \frac{U}{\sqrt{gY}}$, ma ciò non

ha importanza, perché a fare la differenza c'è \pm e $\sqrt{\pm} = \pm$.

Torniamo alla relazione: $f(E, Y, Q) = 0$ PAG. 378

Assumiamo ora $E = \text{cost}$

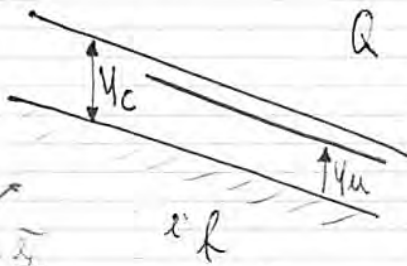
$$E = \text{cost}$$

$$E = Y + \frac{Q^2}{2gY^2}$$

ricavo Q da questa espressione;



Vediamo ora il concetto di pendenza critica: PAG. 382
 Supponiamo di avere una certa pendenza, assegniamo una certa portata e la forma della sezione; tramite $\frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 1$ trovo l'altezza critica:



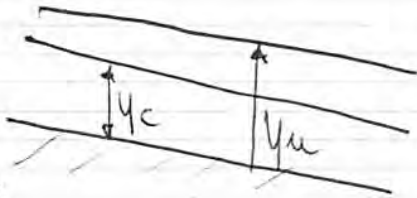
Tra tutte le altre possibili condizioni, chiedo che la corrente pari in moto uniforme:

$$Q = \Omega \sqrt{R i f} \quad (1)$$

Il moto uniforme è una corrente veloce (F_r del moto uniforme $\bar{\alpha} > 1$)

Supponiamo che l'altezza del moto uniforme sia y_u ($y_u < y_c \Rightarrow$ il moto uniforme è una corrente veloce)

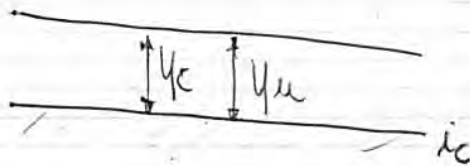
Suppongo di diminuire la pendenza \Rightarrow l'altezza critica non cambia; cambia però l'altezza di moto uniforme (dove cresce perché la pendenza si riduce e la portata rimane la stessa: vedi la (2))



perché era indipendente dalla pendenza

Il moto uniforme è una corrente lenta (F_r del moto uniforme $\bar{\alpha} < 1$)

Ci sarà una certa pendenza per cui $y_c = y_u$:



la pendenza per cui ciò accade la chiamo PENDENZA CRITICA i_c

DEFINIZIONE PRECISA DI PENDENZA CRITICA:

pendenza per la quale il moto uniforme passa in condizioni critiche (cioè pendenza per la quale il moto uniforme ha $F_r = 1$).

Per la pendenza critica, valgono (cioè, se la pendenza è pari a quella critica, sono verificate contemporaneamente le condizioni):

$$\begin{cases} Q = \Omega \sqrt{R i f} & (1) \\ \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 1 & (2) \end{cases}$$

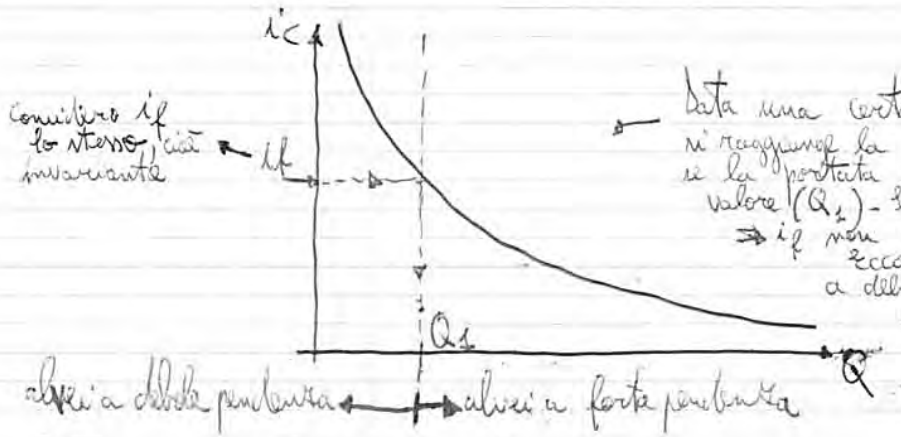
Nota
 Il fatto che un alveo sia a debole o forte pendenza non è una conclusione solo geometrica, ma anche idraulica:

$$i_c = \frac{gP}{\lambda^2 b} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow i_c \text{ dipende n} \text{ dalla geometria (P), ma anche da un parametro} \\ \text{idraulico (la portata, che è "nascosta" in questa formula)} \end{array} \right.$$

$\lambda = c R^{1/6}$ se cresce la portata $\Rightarrow R$ cresce $\Rightarrow \lambda$ cresce $\Rightarrow i_c$ diminuisce.

Il p₀ ai Murazzi è a pendenza subcritica o supercritica? La domanda ^{fatta} con Q è posta male, dovremmo dire: a $100 \text{ m}^3/\text{s}$, è a pendenza subcritica o supercritica?

(cioè ad una data portata)



data una certa pendenza del fondo (i_f), si raggiunge la pendenza critica solo se la portata Q che passa è un ben preciso valore (Q_s). Se la portata è diversa da Q_s $\Rightarrow i_f$ non rappresenta la pendenza critica. Ecco perché il fatto che un alveo sia a debole o forte pendenza non è solo una conclusione geometrica, ma anche idraulica.

In fisica si chiamano fenomeni critici quelli in cui ci sono cambiamenti strutturali forti in poche differenze di (cambiamenti di stato).

valori
 esempio: i

$Q = \text{cost}$ (a) (ecco perché qualcuno si è inventato la portata; perché è un invariante)

Vediamo ora la 1° equazione; ricordiamo la definizione di en. specifica:

$E = \gamma + \frac{U^2}{2g}$ (M)

$\left(\frac{dE}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{U^2}{2g} \right) = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{2U}{2g} \frac{dU}{ds} \right)$

en. specifica (riferita al fondo dell'alveo) dunque la prima equazione la posso scrivere così:

$\frac{dE}{ds} = i_f - J$ (a) → la variazione nello spazio dell'en. specifica è frutto di due termini:
 - i_f : che tende ad incrementarla } ⇒ E può variare, diminuire, rimanere costante
 - $(-J)$: che tende a ridurla

agrade nel moto uniforme:
 $\frac{dE}{ds} = 0 \Rightarrow E = \text{cost}$

→ (la stessa energia che sto dando, la perdo come dissipazioni)
 ⇒ il moto uniforme è un caso particolare del moto permanente

ricordiamo che $i_f = - \frac{dz_f}{ds}$

* Guardando la (M): se γ varia ⇒ perché $Q = \text{cost}$ (a), il termine $U^2/2g = \text{cost} \Rightarrow$ se γ varia ⇒ E varia

Quindi; sostituendo nella (a) e inglobandola nella E:

$\frac{dH}{ds} = -J$. questa equazione ci dice che l'energia non si conserva, perché ci sono le dissipazioni (ecco perché qualcuno si è inventato l'en. totale; perché questa equaz. ci dice che l'energia non si conserva)

non è quest'ultima ma l'equazione però che ci dice di più è la (a); capiamola meglio. Perché la E può cambiare lungo s? O perché sta cambiando la γ (perché $Q = \text{cost} \Rightarrow E$ cambia*), o perché la corrente sta cambiando la forma della sezione (cambia la forma idrobrica).

la $\frac{dE}{dy}$ l'avevamo ricavata la les. nuova:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2/b}{g \Omega^3} = 1 - Fr^2$$

$Fr > 1 \Rightarrow$ correnti veloci
 $Fr < 1 \Rightarrow$ correnti lente

$Q^2/\Omega^2 = U^2$
 $Fr^2 = \frac{U^2}{gY}$

g è omipresente: è il campo di gravità che sta muovendo tutto (altrimenti non si muove niente)

$\frac{dy}{ds} = \frac{df - J}{1 - Fr^2}$

(C)

da studiare

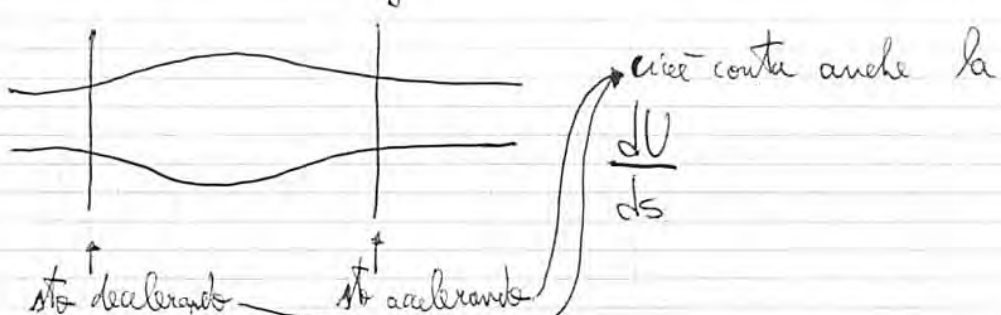
rimane la J : nelle correnti in pressione avevamo fatto questo:

$$i = J = f(Q, U, \epsilon, \dots) \quad (D)$$

nelle correnti in pressione si turbavano sempre dei cilindri \rightarrow le correnti erano tutte correnti uniformi (come la (D))

tutto questo è stato condensato nel diagramma di Moody (anche se è solo un caso irrazionale)

Avevamo esteso questo anche alle correnti a *sup. libera*; in esse abbiamo parlato di moto uniforme perché abbiamo voluto esaltare l'espressione delle resistenze che abbiamo trovato per le correnti in pressione; se il moto non fosse uniforme, allora non entrerebbe in gioco solo le variabili Q, U, ϵ, \dots , ma anche ad esempio: - se la corrente aumenta o restringe:

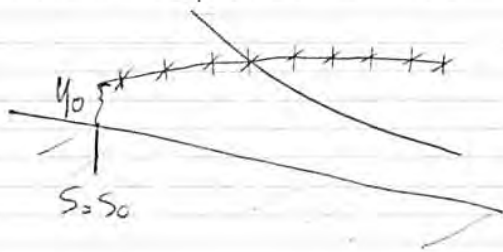


Quindi come esprimo J nella (C)? Non esiste un'espressione, perché nel

Negli ultimi 30 anni, ^{per risolvere} si è usato il calcolatore: METODO ALLE DIFFERENZE FINITE; tale risoluzione per via numerica ha:

- pregio: risolve l'equazione.

ha l'ongine al contorno $y = y_0$ ($s = s_0$), ma di contorni quanti ne ho in un tratto? In monte e valle.



Ho due c.c.: una a monte e una valle; dove la metto? Sappiamo di metterla a monte (vedi disegno a lato)

- difetto: per risolvere numericamente questa equazione devo mettere tutti i numeri (scalrezza, portata...) \Rightarrow le soluzioni numeriche risolvono problemi specifici, ma non risolvono il problema in generale, non riusciamo mai a capire cosa succede in generale.

... sia per specifici valori di scalrezza, portata...

[L'ingegnere non si chiede prima se la soluz. di un'eq. differenziale esiste perché:

- si stufa! Non è come il matematico!
- sa che la soluzione esiste; in natura esiste quel profilo; non te lo sa dimostrare, ma ti porta in laboratorio e te lo faccio vedere]

Cosa vuol dire trovare la soluzione?

es. $\frac{dy}{ds} = -ay \Rightarrow$ soluzione: $y(s) = y_0 e^{-as}$: trovare una

soluzione vuol dire trovare un'espressione sintetica (in questo caso l'esponenziale), che, sostituita nell'eq. differenziale, la risolve \Rightarrow trovare una soluzione significa trovare simboli giusti

[sin, cos, ln, e... : sono simboli che sono nati perché ricorrono spesso come simboli della soluzione dell'eq. differenziale]

Quindi, dire che non sappiamo trovare la soluzione della \textcircled{e} vuol dire che non conosciamo un simbolo che la risolve; noi non lo conosciamo, però esiste.

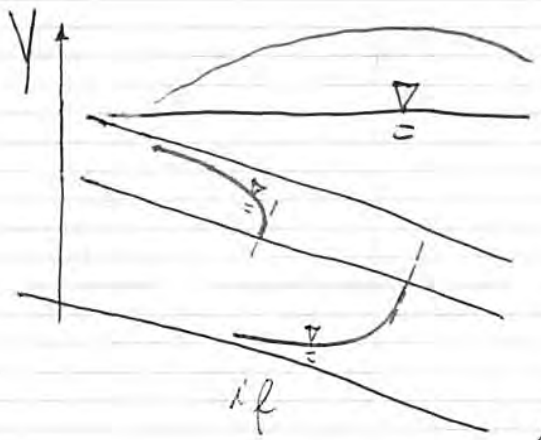
PAG. 393

consideriamo un alveo a debole pendenza: (l'altrezza del moto uniforme \neq a quella critica)

$N > 0$ e $D > 0 \Rightarrow \frac{dy}{ds} > 0$ (il livello sale)

$i_f < i_c$

(y_c lo ricavo da $\frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 1$; y_u lo ricavo da Q_{eq}).



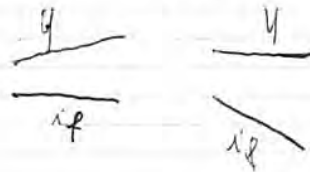
Perché sale come lo lile e non come il verde?

per $s \rightarrow +\infty$, il numeratore tende a i_f ; il denominatore ($F_r \rightarrow 0$) tende a 1 \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{dy}{ds} \rightarrow i_f$ quindi la profondità tende a crescere con

gradiente pari alla pendenza del fondo

\Rightarrow il livello tende all'orizzontale



perché per s che cresce, il livello cresce ($\frac{dy}{ds} > 0$) \Rightarrow la resistenza cresce, la velocità diminuisce \Rightarrow le dispersioni ($\frac{Q^2}{\lambda^2 \Omega^2 R}$) diminuiscono

per $s \rightarrow -\infty \Rightarrow N \rightarrow 0$
 $D \rightarrow 1 - F_r^2$ moto uniforme

y tende \Rightarrow la resistenza tende a quella del moto uniforme \Rightarrow il secondo addendo del numeratore tende al valore del moto uniforme.

$\Rightarrow \frac{dy}{ds} \rightarrow 0$: ciò significa che tende al moto uniforme

Zona verde: $N < 0, D > 0 \Rightarrow \frac{dy}{ds} < 0$ (la corrente scende):

(così $\left\{ \begin{array}{l} \text{a monte} \\ \text{a valle} \end{array} \right. \rightarrow$ tende a $\left. \begin{array}{l} \text{schiarirsi} \\ \text{accorciarsi} \end{array} \right\}$ nel moto uniforme

$F_r \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{dy}{ds} \rightarrow \infty \Rightarrow$ tangente verticale con cui

perché siamo vicini all'altrezza critica

- nel caso di alveo a debole pendenza, il moto uniforme viene ristabilito a monte;
- nel caso di alveo a forte pendenza, viene ristabilito infinitamente a valle

a vicino l'altera critica la traiettoria diventa quasi verticale!

- i profili scendono (corrente accelerata) solo se siamo tra critica e uniforme, altrimenti è decelerata - ovunque

valore per piccola deviazione della traiettoria

- non è vero che vicino all'altera critica (è tangente verticale, perché vicino all'altera critica non può essere de Saint Venant e dunque certo non avrà tg. verticale (non so come è, ma sicuro non ho tg. vert.))

- dove dà la condotta al contorno? **REGOLA** come si dice ingergo:
- + se la corrente è veloce \Rightarrow la c.c. deve darla a monte ("sic" la corrente veloce è comandata da monte)

quando faccio qualcosa ad una corrente veloce \Rightarrow l'effetto è a valle

- + se la corrente è lenta \Rightarrow la c.c. deve darla a valle ("la corrente lenta è comandata da valle": quando faccio qualcosa ad una corrente lenta, l'effetto è verso monte, non verso valle).

Perché questo?

Il libro ci dà una spiegazione errata, la verità è che:

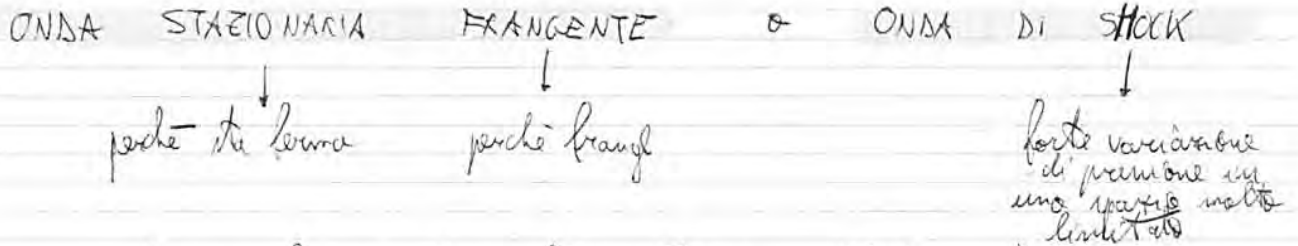


quando abbiamo un po' le piccole perturbazioni \Rightarrow c. veloce: $U \pm \sqrt{gY} > 0$ la perturbazione può solo andare verso valle

se la c. è lenta $\left\{ \begin{array}{l} U + \sqrt{gY} > 0 \\ U - \sqrt{gY} < 0 \end{array} \right.$: la perturbazione va sia verso valle sia a monte: nonostante la perturbazione vada anche verso valle, quello che conta è quello che va verso monte

(la "vera informazione"; teoria delle caratteristiche di Riemann (studia gli assi portanti nella cui direzione si propaga la vera informazione))

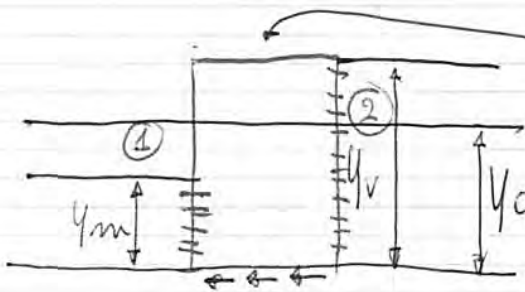
Dal punto di vista teorico, il fenomeno del risalto viene chiamato:



Non possiamo studiare bene il risalto (Nומר - Stokes...), quindi mettiamo il risalto tutto dentro una scatola e lo studiamo con l'equaz. globale dell'equilibrio dinamico:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{H}_e - \vec{H}_u = 0$$

vale in un volume finito; come volume finito lo scelgo con:



in cima lo taglio in corrispondenza del pelo libero; lo taglio a monte e a valle sufficientemente "in là" ^{poter} perché che le traiettorie si sono ristabilite traiettorie e parallele.

trattiamo lungo \vec{s} :

• trascuriamo la componente di \vec{P} perché è solo quella verticale

$$\vec{F}_c: \int_{G_1} \rho g_1 dV_1 - \int_{G_2} \rho g_2 dV_2 + 0$$

↓
affondamenti di G_1

trascuro le componenti di tensione tangenziale sul fondo (libro) perché:

- non è calcolabile (ma questo non è il motivo per cui lo trascuro)
- il tratto è corto \Rightarrow piccolo rispetto alle spinte; ecco perché lo trascuro.

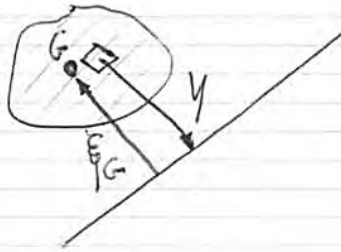
• \vec{I} : il risalto idraulico sta fermo (è stazionario; non vogliamo studiare gli estuari) $\Rightarrow \vec{I} = 0$

• $\vec{H}_e: \rho Q U_1$

• $\vec{H}_u: \rho Q U_2$

Donque, in definitiva:

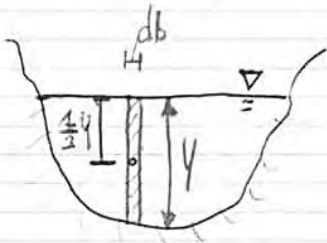
$$I_{G1} = \frac{M_S}{\Omega} \quad \text{--- momento statico}$$



$$M_S = \int_A y dA$$

$$\frac{M_S}{A} = \bar{y}_G$$

Nel nostro caso dove è il baricentro?



$$\bar{y}_G = \frac{\int \underbrace{\frac{1}{2} y}_{\text{distanza}} \underbrace{db}_{dA \text{ (area reale)}}}{\Omega}$$

Portituyendo nella (f):

$$S = \gamma \int_b \frac{1}{2} y^2 db + \rho \frac{\Omega^2}{\Omega}$$

deriviamo:

$$\frac{dS}{dy} = \gamma \int_b y db + \rho \Omega^2 \left(-\frac{1}{\Omega^2} \frac{d\Omega}{dy} \right) = \gamma \Omega - \rho \Omega^2 \frac{b}{\Omega^2} \stackrel{\text{cerchiamo il minimo}}{=} 0$$

area
somma di tutte le aree

= b (visto qualche bar. fa)

$$\Rightarrow \frac{\Omega^2 b}{\gamma \Omega^3} = 1$$

ritroviamo proprio la condizione di artocità!

un po' di conti \Rightarrow

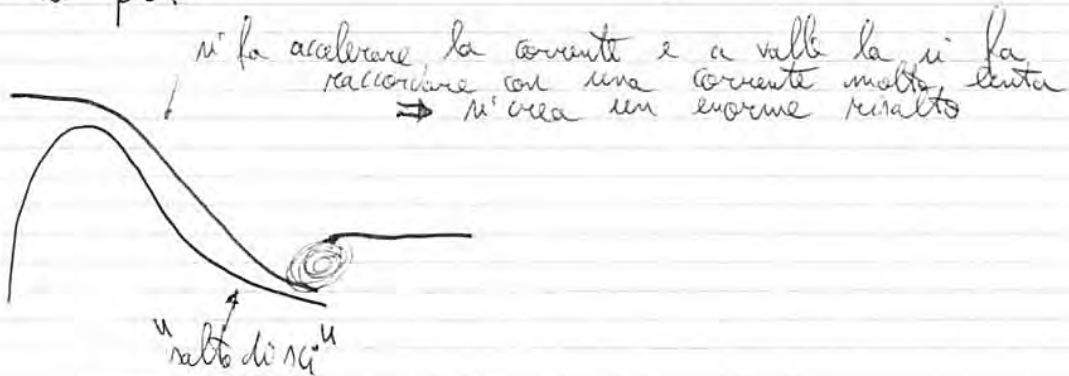
$$\Rightarrow \Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$$

$\Rightarrow \Delta E > 0$: il rialzo idraulico è effettivamente una perdita di carico localizzata

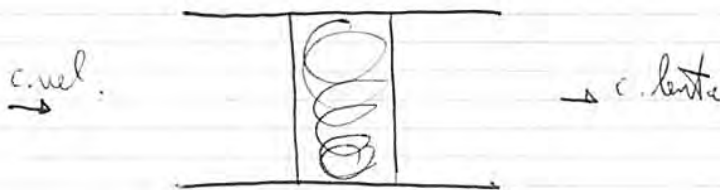
si trova che:

$$L_{\text{rialto}} \simeq 6 \div 7 (y_2 - y_1) \quad (\Rightarrow \text{è corto!})$$

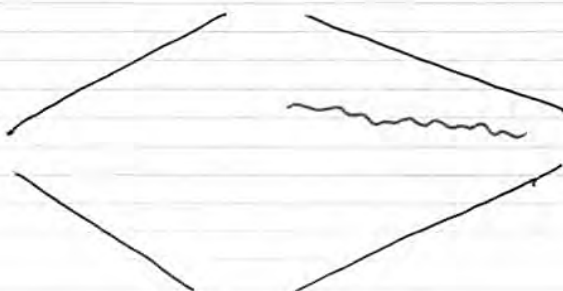
Negli scarichi delle dighe, per dissipare le grandi quantità di energia si fa:



Altra osservazione:
guarda dall'alto il canale:



Se crea il rialzo in un divergente:



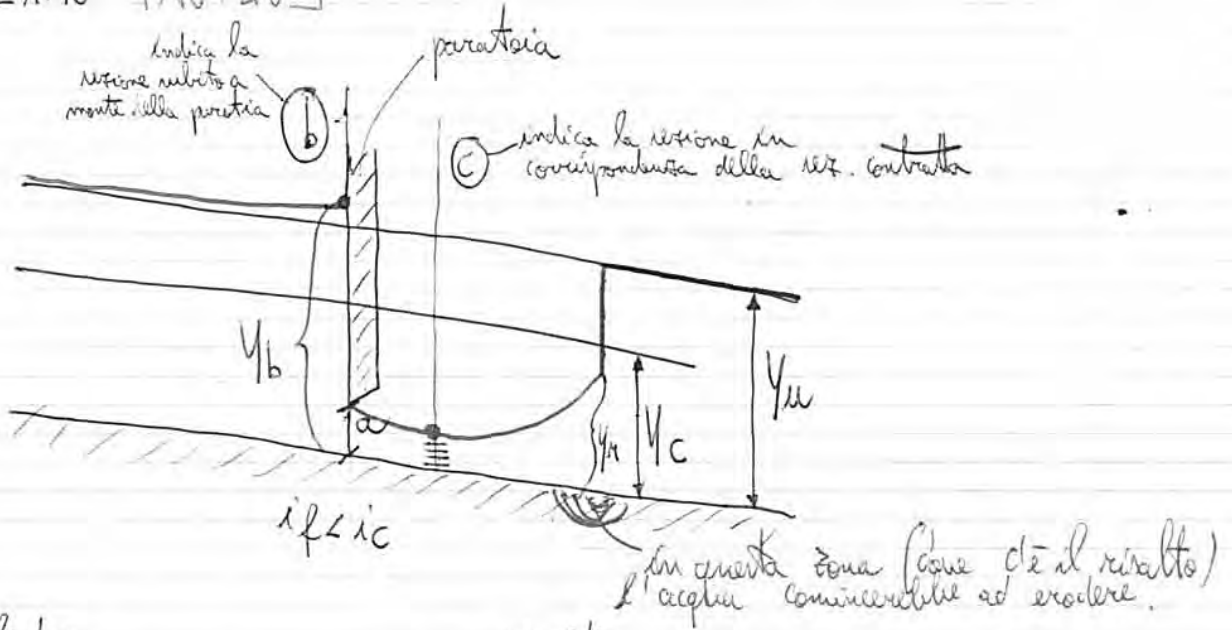
Nota che il rialzo non è stabile \Rightarrow non esiste la soluzione stazionaria; esiste solo la soluzione oscillante (onda)

IDRAULICA

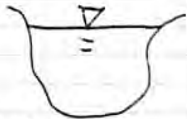
06-12-2011

Facciamo qualche esempio su ciò che abbiamo visto la let. scorsa

1° ESEMPIO PAG. 409



cilindrico
 Alveo in cui scorre una portata Q ; conosco la geometria dell'alveo:
 preselta



geometria dell'alveo,

Noti i_f , Q , i_f , $abitudine$, possiamo calcolare:

- y_c
- y_u
- i_c

Supponiamo che l'alveo sia a debole pendenza $\Rightarrow i_f < i_c$ e $y_u > y_c$.

Se non la disturbiamo, l'acqua prosegue con moto uniforme (altezza y_u); ^{«senza problemi»} supponiamo che ci sia qualcosa che la disturbi (paratoia).

Qual è il profilo qualitativo che si viene a stabilire nell'alveo?

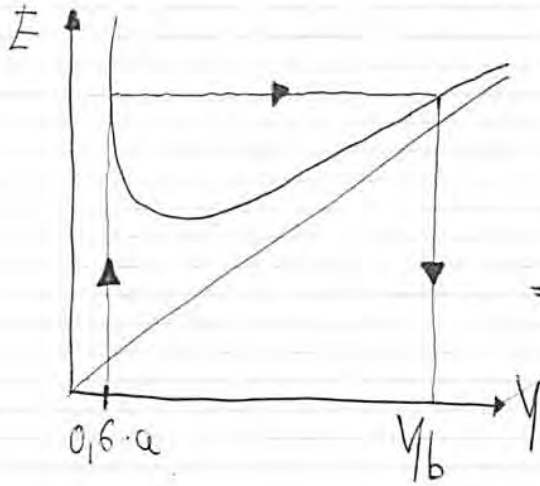
Nei conosceremo gli integrali generali:

- il vale de Saint Venant \Rightarrow vale: $\frac{dy}{ds} = \frac{i_f - J}{1 - Fr^2}$, questa equaz., nel

caso di alveo a debole pendenza fornisce: \rightarrow



Per vedere cosa accade a monte, usa il diagramma dell'energia specifica della portata:



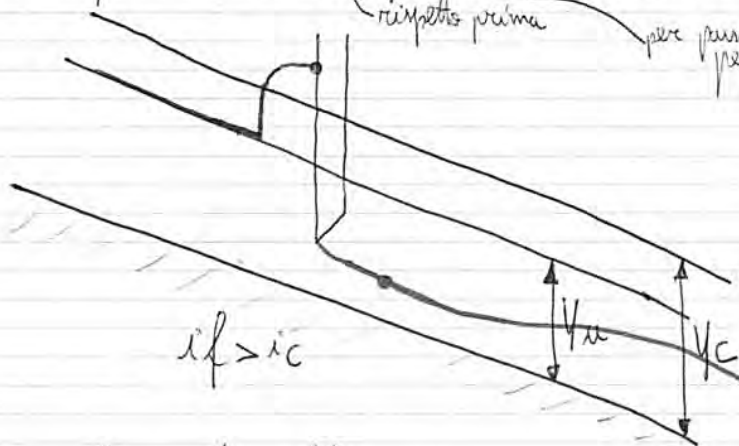
Considero le sezioni (B) e (C);
tra esse ho la stessa
en. specifica (perché
il tratto è corto); nella
sez. contratta coprolo
la $Y_{(0,6 \cdot a)}$ rincarò la E, vedo
in corso e trovo Y_b .

⇒ no dissipazioni

La Y_b mi attendo che sia
maggiore dell'altezza indisturbata,
perché la corrente, a monte, tende a rigurgitare!

L'unico profilo che posso avere a monte è quello detto "di rigurgito"
to (verde) perché il punto blu è un punto a valle di una corrente
lenta

Immaginiamo ora di avere un alveo a forte pendenza (non
cambiamo né la forma né Q , però lo incliniamo un po' di più).
rispetto prima per passare da debole a forte pendenza



Gli integrali generali questa volta sono:

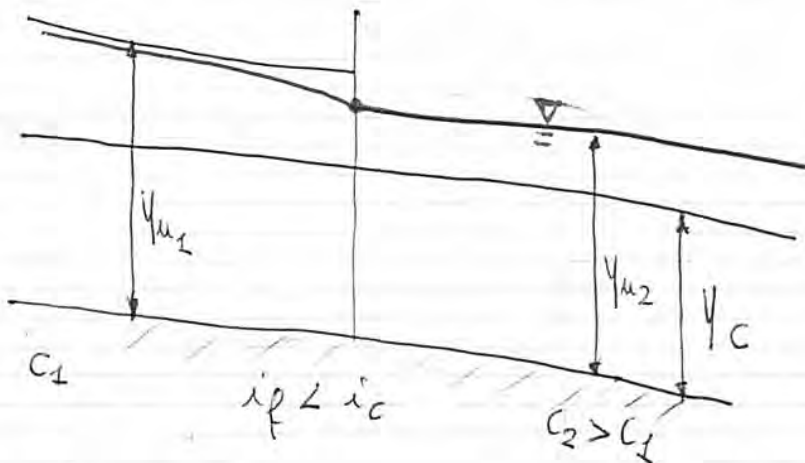


Fino al punto dove la sez. contratta è come prima.
L'unico possibile andamento dopo il punto dove è (che tende
asintoticamente al moto uniforme)

2° ESEMPIO

un certo valore di scabrezza

cambio di scabrezza: a monte ho C_1 , a valle ho $C_2 > C_1$



Alveo a debole pendenza

Ricordiamo che:

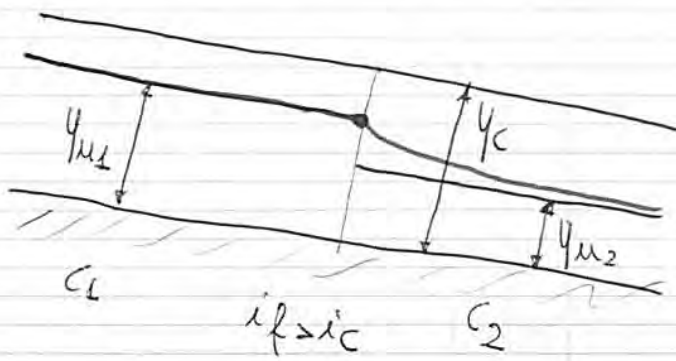
- y_c non dipende dalla scabrezza \Rightarrow c'è un'unica alterosa critica per tutto l'alveo!
- y_u : tanto più cresce C e tanto più è meno scabro! (non è che C scabrezza \uparrow)

$$Q = \sum R^{1/5} \Omega \sqrt{R i_f}$$

se Q è costante e C cresce \Rightarrow per mantenere $Q =$ costante, deve essere qualche cosa che diminuisca la scabrezza il fluisce in più veloce, e dunque Q rimane costante ($\Rightarrow C \uparrow$ scabrezza \uparrow).
 (il livello diminuisce)

Nel tratto che ho C_2 ho che il moto uniforme \bar{v} è dunque \bar{v} più veloce, e dunque Q rimane costante ($\Rightarrow C \uparrow$ scabrezza \uparrow).
 comandato da valle; a valle supponiamo che non ci sia niente e dunque per tutto C_2 , il profilo corrisponde con y_{u2} .
 punto rosso e compreso tra y_c e y_{u1}

\Rightarrow l'unico possibile profilo è quello blu (vedi integrali generali).
 Se l'alveo era a forte pendenza



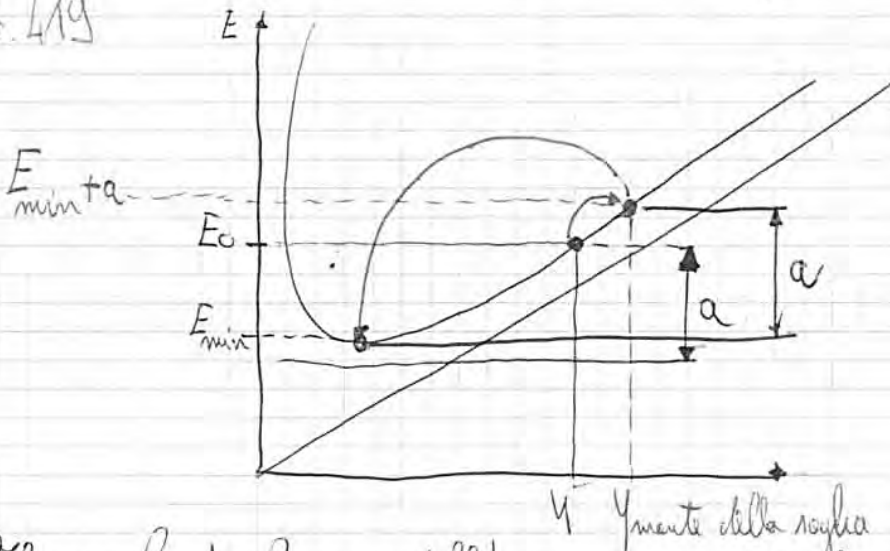
buo entrambe correnti veloci
 A monte non c'è niente \Rightarrow scivola fino al punto blu con cardine indisturbato.

A valle cambio scabrezza \Rightarrow guarda gli integrali generali e l'unico possibile è quello rosso.

Quindi la corrente scende di livello (livello) (molto "controintuitivo",)
 la sezione si riduce \Rightarrow la V cresce \Rightarrow si potrebbero avere problemi
 di erosione (la quale è funzione della velocità al quadrato)

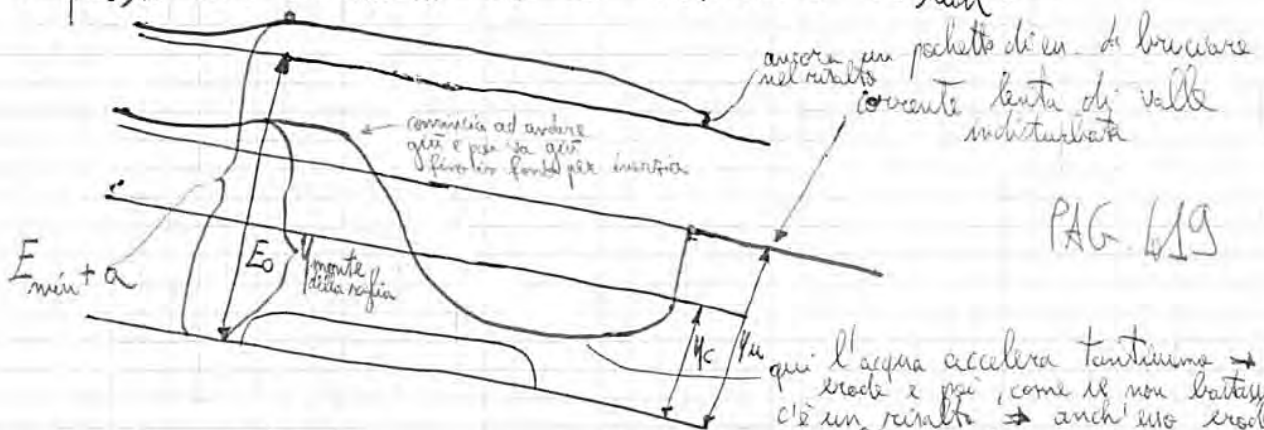
Potrebbe accadere un'altra situazione sempre in questo diagramma:

PAG. 419



Supponiamo che E_0
 è il funzionamento
 di moto uniforme piano
 quelli $(E_0 - V)$
 dando di a , ma
 non interseca
 più la curva.

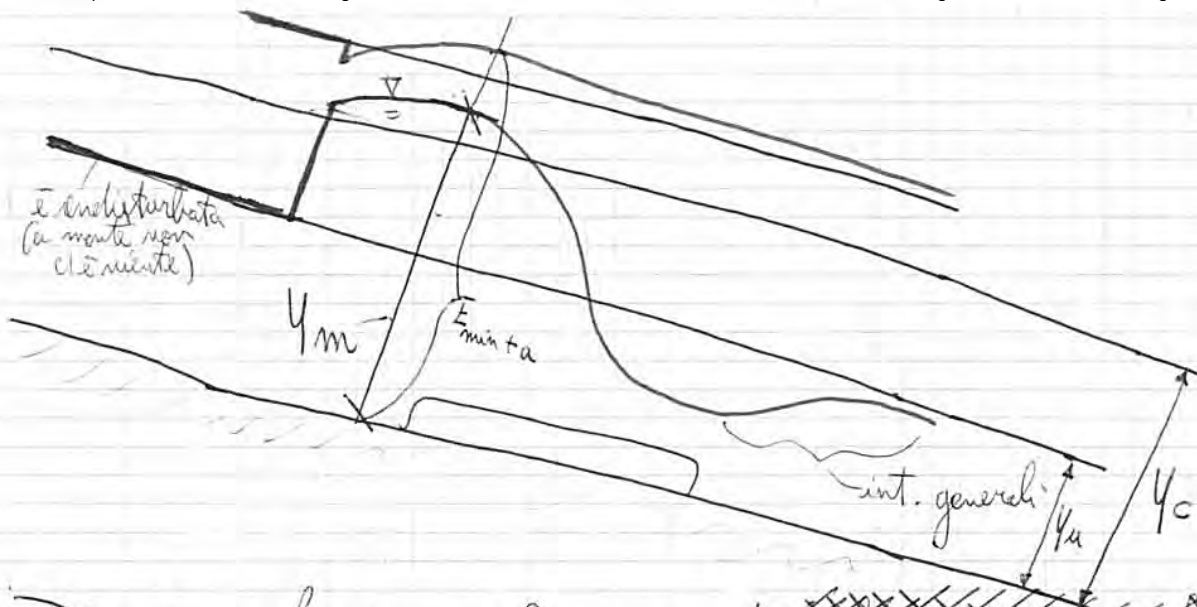
Il significato fisico dell' en. minima è che la faccio passare
 in condizioni critiche; se voglio far passare una portata, con un' en.
 superiore a quella minima, non si può fare \Rightarrow assegnata (perché il grafico
 ha a $Q = \text{cost.}$)
 \Rightarrow la corrente non ce la fa più a passare sopra la
 soglia e dunque la corrente deve accumulare a monte l'energia
 per passare dal punto nero al rosso all' inizio della soglia così che
 se da questa en. scende di a e intersechi E_{min} .



PAG. 419

Quindi abbiamo trovato una C.C.: devi arrivare alla soglia con
 l'altezza V_{monte} della soglia.

Conosciamo gli int. gen. dell'alveo a debole pendenza \Rightarrow mi aspetta a monte
 il profilo di regurgito (infatti, se ci penso, è l'unico modo
 di V_{monte} della soglia per risparmiare energia: diminuire la velocità, e come fa
 a diminuirla? Alzando il livello).



quando noi facciamo qualcosa a monte ~~perché la soglia è a valle~~, ma noi a monte non stiamo facendo niente (la soglia è a valle).
 Affinché la corrente risparmi energia, deve scendere lenta, perché così si può accogliere di ciò che c'è a valle \Rightarrow il salto qui non è quello nero, ma quello rosso \Rightarrow ricavo la Y_{monte} e so che lì passerà il profilo. A monte di tale Y_{monte} si ha:
 siamo sopra all'atterraggio critica \Rightarrow l'unica possibile profilo è quello blu (vedi integrali generali)
 Ancora più a monte ho che la corrente è veloce ($Y_u < Y_c$) \Rightarrow è comandata da monte, ma a monte non c'è niente \Rightarrow andamento indisturbato.
 Allora, ad un certo punto esce un risultato. A valle del punto blu è come prima.

Per quanto riguarda il profilo dell'energia:

- fino al risalto, l'energia è quella che compete al moto uniforme
- in corrispondenza del risalto si ha un calo (dissipazione di energia)
- dopo il risalto, poiché il livello aumenta, c'è un graduale risparmio di energia che mi permette di arrivare in corrispondenza della soglia con un'energia pari a $E_{min} + a$
- da qui in poi l'energia ~~si dissipa~~ tenderà verso la linea dell'energia del moto uniforme.

Nel caso **(A)**, quanto sono fuori delle pile del ponte b_0 :

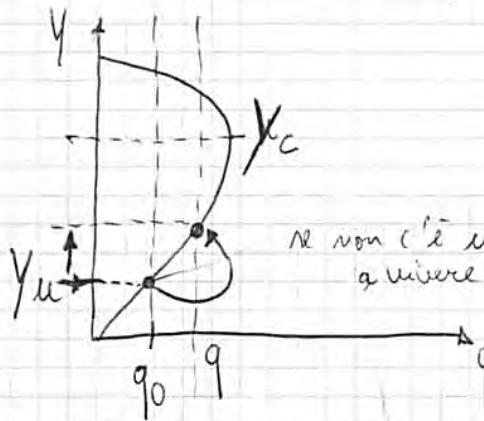
$$q_0 = \frac{Q}{b_0}$$

quanto siamo nei panni della pila $\Rightarrow q = \frac{Q}{b}$

Dunque: $q > q_0$ (poiché $b < b_0$ e Q è sempre la stessa)

Cio che varia è la q e non la Q se c'è un restringimento!

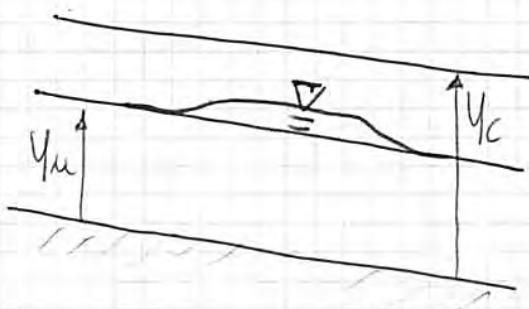
Guardiamo il caso di alveo a forte pendenza



se non c'è un restringimento, il sistema continua a vivere in questo punto.

se invece c'è un restringimento, passo da q_0 a q e avrò una Y maggiore di Y_u

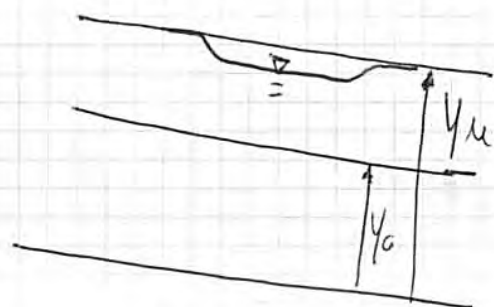
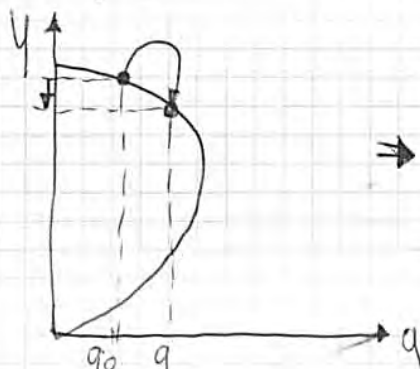
la corrente tende ad alzarsi:



Le correnti veloci sono intuitive!!!

Alveo a debole pendenza:

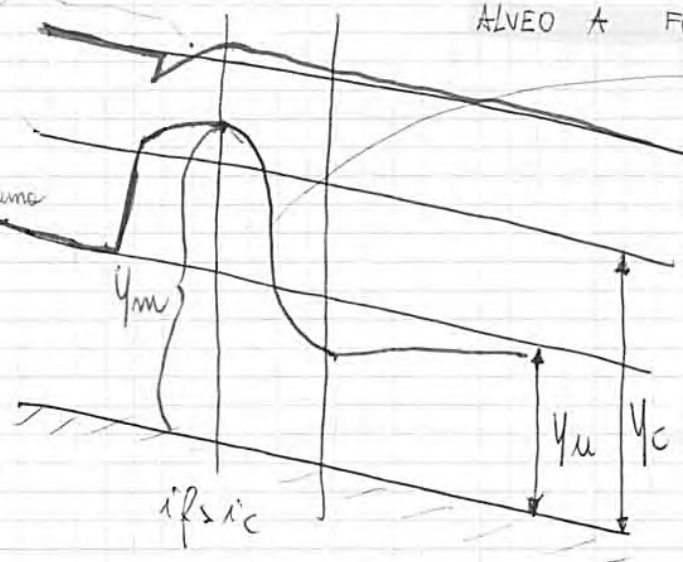
la corrente si restringe \Rightarrow il livello si abbassa e la corrente va ancora + veloce \searrow



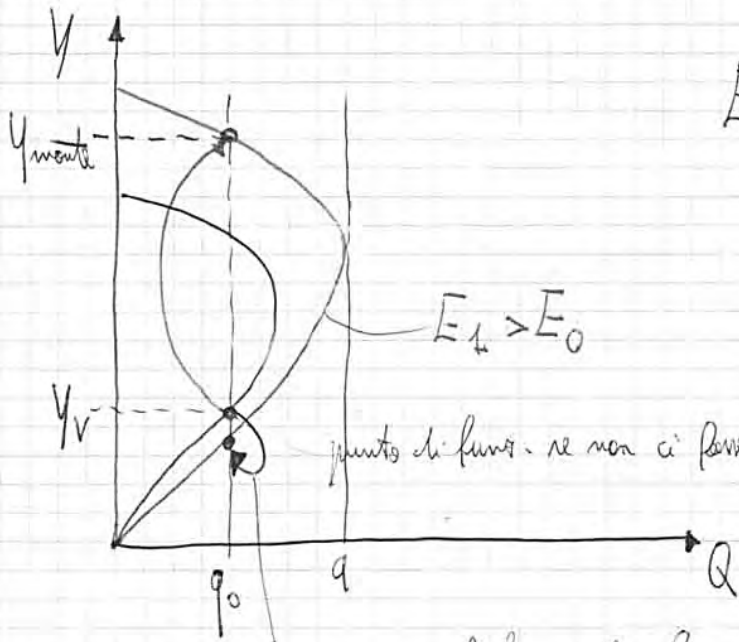
ALVEO A FORTE PENDENZA

il livello u è
 abbato \Rightarrow la
 velocità è così
 alta che si sprigiona
 energia

corrente veloce
 non ci risulta
 ci mette che
 distanzia \Rightarrow



però sotto
 l'altezza critica e
 poi, per inerzia,
 anche sotto al
 punto al
 moto uniforme



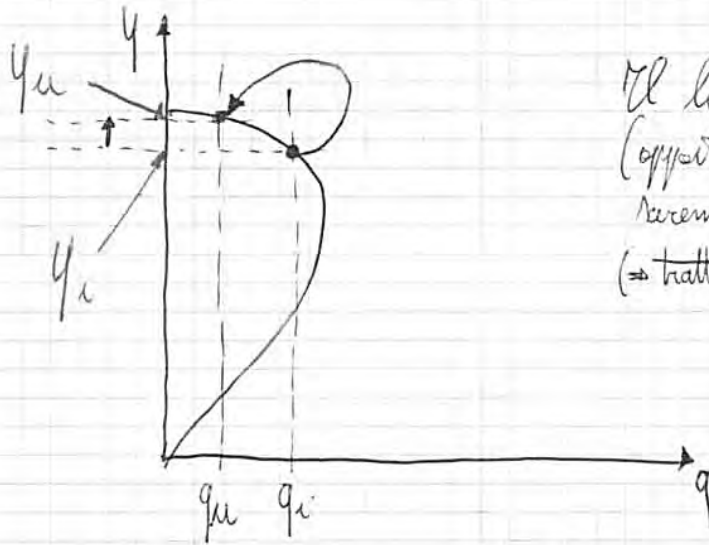
$E_0 = \text{cost}$

$E_1 > E_0$

punto di fuori - se non ci fosse il restringimento

non è possibile perché la corrente diventerebbe
 ancora più veloce e non si accorgerebbe di ciò
 che c'è a valle \Rightarrow verde.

il passaggio quindi è quello



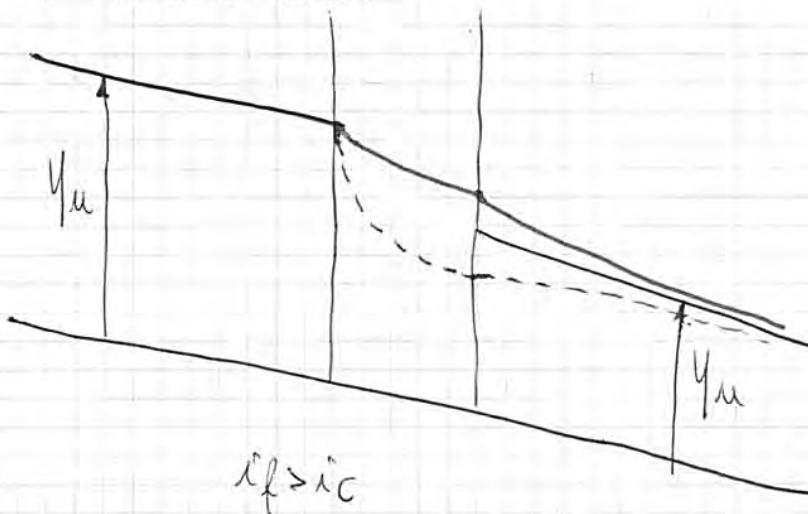
Il livello è cresciuto!
 (oppsto di quello che ci
 saremmo aspettati)
 (→ tratto verde centrale)

Cosa succede a monte? ricordando gli int. generali, siamo
 nella zona intermedia ⇒ il profilo è quello blu.

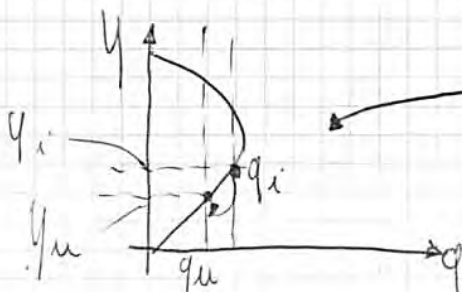
Quindi la corrente raggiunge l'obiettivo previsto: raggiungere il
 moto uniforme a valle con altezza minore del moto
 uniforme di monte.

N.B.: gli integrali generali sono usati dove $Q = \text{cost}$ (cioè dove
 vale il Saint Venant) infatti non l'abbiamo usato nel
 tratto verde intermedio).

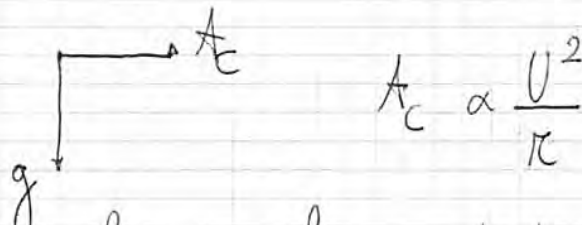
ALVEO A FORTE PENDENZA



Se formi scuro
 sotto il moto
 uniforme (trattato
 blu) avrei dovuto
 usare l'integrale
 generale + basso e
 non quello
 intermedio.



Il livello scende.



Se U scende quando il raggio sale: passando da r_1 a r_2 , il raggio sale \Rightarrow la acc. centripeta diminuisce e quindi,

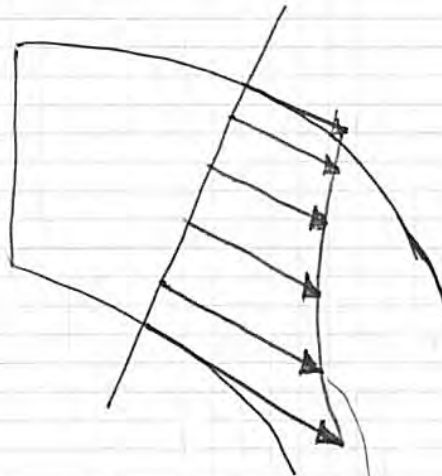
tra g e A_c (vedi disegno precedente) la risultante diventa sempre più verticale \Rightarrow la tangente diventa sempre più orizzontale e la curva giunta deve dunque essere quella nera.

(cioè lungo la dir. trasversale)

MOTO ROTAZIONALE:



la particella è fatta sempre uguale (non ripeta se stava come invece fa il bambino nella girata (prima vede la ruota, poi la faccia, ...))



Come è fatto l'andamento trasversale della velocità longitudinale? è quella blu (lo dimostreremo nei MOTI A POTENZIALE)

Chi si muove più vicino al centro di rotazione va più veloce

ciò è proprio il centro di un solido (disco in rotazione)



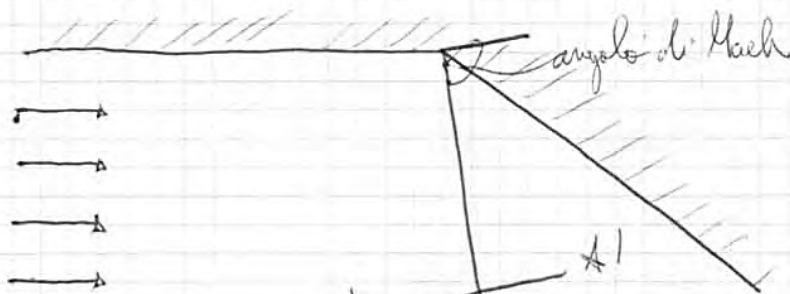
MOTO ROTAZIONALE: le particelle ruotano su se stesse (bambino nella girata)

giunta è una forma di tipo iperbolico ($\frac{\text{costante}}{\text{raggio}}$)

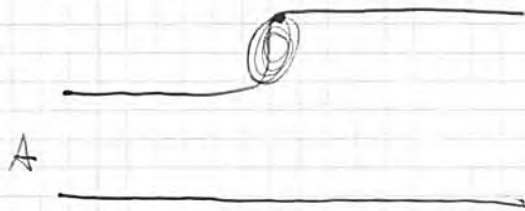
Daunque $U = \frac{C}{r}$ (per il solido avremmo scritto $U = C r$)

$$\Rightarrow A_c = \frac{U^2}{r} = \frac{C^2}{r^3}$$

Consideriamo una SPONDA che fa un angolo, una deviazione:

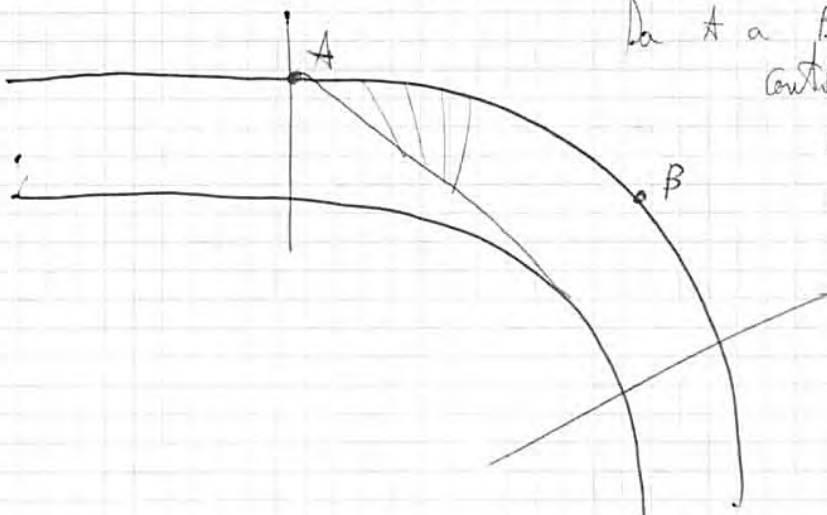


si forma questa LINEA FRANGENTE (linea di Mach), viene detta linea lungo cui si propagano le informazioni.



Zona con un gradino frangente; onda che sta ferma

Una curva ha poco valore come successione di infinite deviazioni infinitesime.



Da A a B c'è una continua deviazione con sovrapposizioni! quando arriva in B si accorge

Se riappa l'istradato:



IDRAULICA

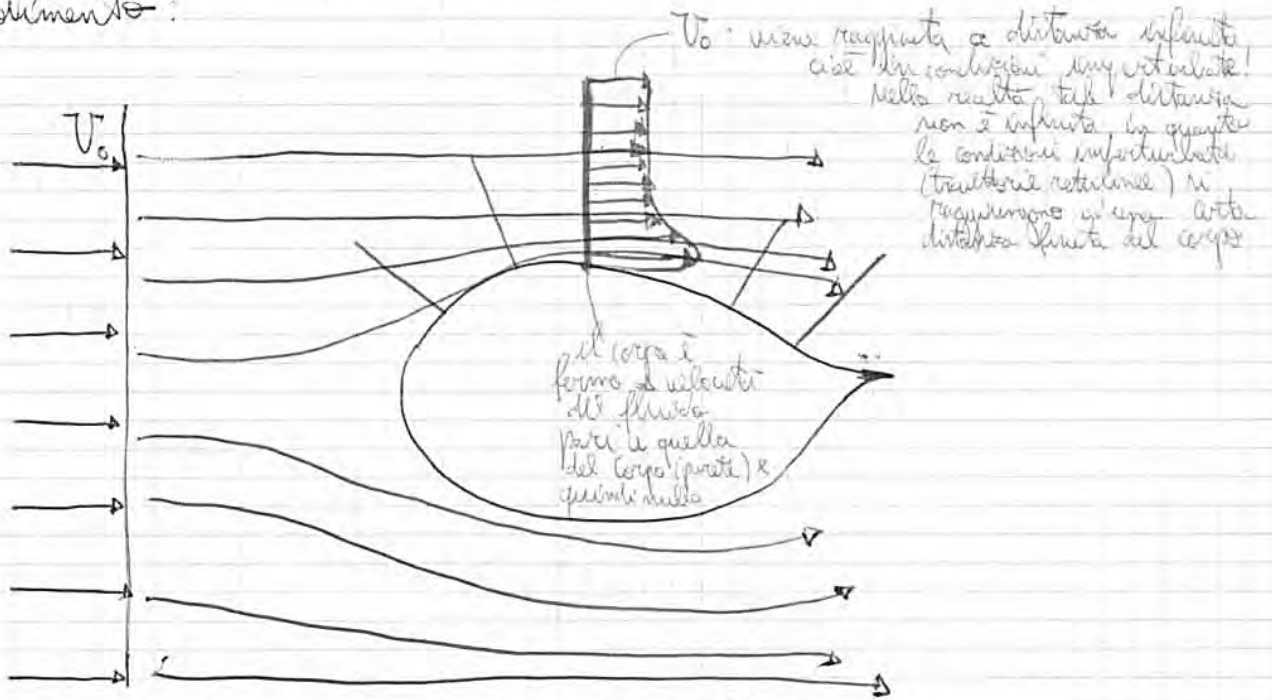
13-12-2011

MOTI A POTENZIALE (MOTI IRROTAZIONALI)

È un capitolo molto importante per 2 ragioni:

- permette di studiare fenomeni di un grosso impatto nell'ingegneria;
- è una teoria elegante, cioè riusciamo a scrivere equazioni che sappiamo risolvere.

Consideriamo un corpo che si muove all'interno di un fluido, o equivalentemente un corpo fermo che viene investito da un fluido in movimento:



Avendo supposto il corpo impermeabile, le traiettorie subiscono delle deviazioni ~~che~~ tanto più accentuate quanto più sono vicine al corpo.

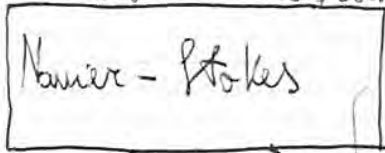
Focalizziamo ciò che accade vicino al corpo. Prendiamo una qualunque normale rispetto alla sup. del corpo (rossa) e tracciamo l'andamento del profilo di velocità (rosso).

- È un fortissimo grad. di vel. vicino al corpo (attaccato al corpo la velocità nulla; appena sopra la velocità finita ed elevata).
- È questo gradiente perché:
 - vicino al corpo deve esserci un'accelerazione perché la portata che passava senza il corpo, deve ora passare in una zona più stretta (in quanto il corpo).
 - sul corpo la velocità deve essere pari a 0.

Cosa è che costringe la velocità ad andare a 0 sul corpo (parete)?

Il fatto che il fluido è reale $\Rightarrow \mu \neq 0$. A contatto della parete (corpo)

Prandtl decompose il dominio in due domini:



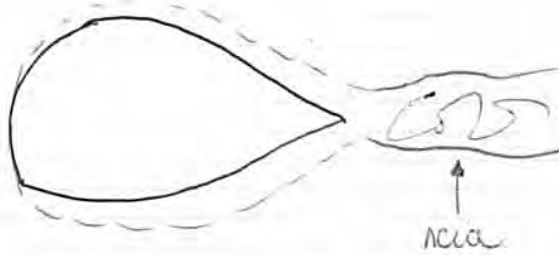
considero il corpo un po' più grande (inglobando lo strato limite) e dunque tutto il fluido ha:

- $\mu = 0$
- posso trattare tutto l'esterno come un fluido perfetto

Strato limite:

- $\mu \neq 0$
- geometria "semplice"

Quindi fuori dal dominio resta fuori lo strato limite ed inoltre la scia (dietro al corpo gli strati limite si uniscono e formano la scia).



Se poi si vuole studiare lo strato limite, lo studio di tutto il fluido in generale mi fornisce poi le c.c. da applicare all'interfaccia scia \Rightarrow grazie a tali c.c. posso poi studiare lo strato limite.

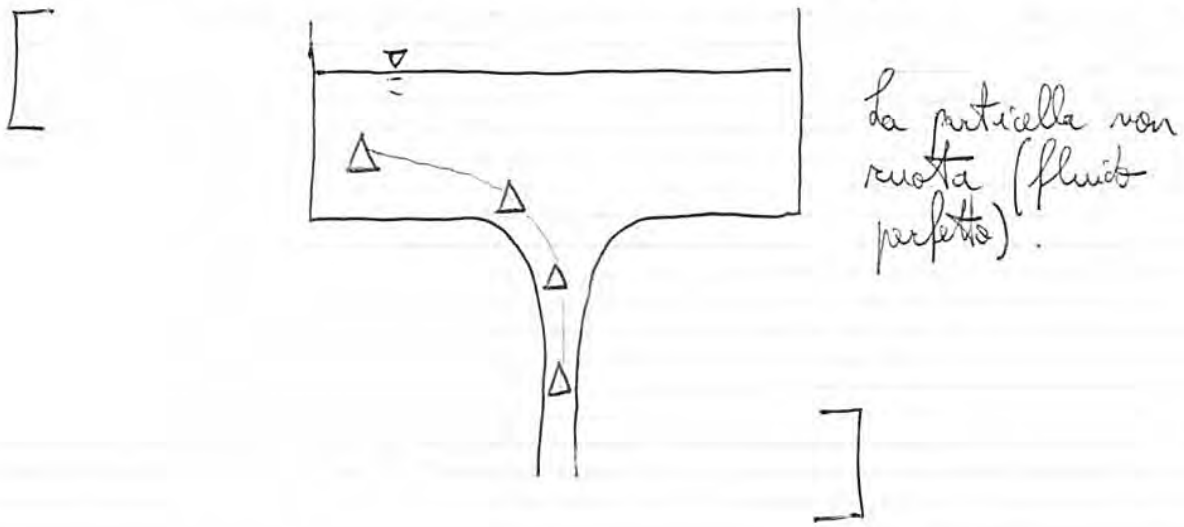
Quindi studiamo tutto il fluido in generale (cioè il fluido escluso il corpo, lo strato limite e la scia):

- fluido perfetto (\Rightarrow eq. di Eulero)
- supponiamo il fluido incomprimibile: $\rho = \text{cost}$ (tutte le volte in cui la velocità delle onde di pressione è infinita) può dire che $\rho = \text{cost}$
- consideriamo problemi 2D (non 3D)

Se ci mettiamo sotto queste 3 ipotesi \Rightarrow entriamo nel capitolo dei MOTI A POTENZIALE.

Lucerna d'ora in poi sempre sotto queste 3 ipotesi.

particelle possono dilatarsi, comprimersi, ma non possono ruotare (non esiste una coppia che può ruotare la particella (la coppia risultante data proprio dalle tensioni tangenziali))



Se le particelle non ruotano, vuol dire che il rotore è nullo:

$\text{rot}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\text{rot } \vec{u} = 0$ (moto irrotazionale)

↓
(rotore del campo di moto è uguale a 0)

Il rotore ha una sola componente, poiché viviamo in un moto 2D:

$\text{rot } \vec{u} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

↑
moto 2D

In Analisi II avevamo visto il teorema Poincaré: necessaria e suff. affinché un campo vettoriale sia irrotazionale è che il campo ammetta potenziale:

$\text{rot } \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \text{grad } \varphi$ ($\varphi = \varphi(x, y)$)

↓
potenziale

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (C)

Consideriamo la φ : è venuta fuori dall'ipotesi $\text{rot } \vec{v} = 0$.
 Ora mettiamo la (c) nella (b):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0} \quad (2)$$

Osservazioni

- ψ e φ sono descritte dalla stessa struttura matematica. Le equazioni (1) e (2) sono lineari (somma di derivate seconde) \rightarrow vale il principio di sovrapposizione degli effetti
- le equaz. del 2° ordine si dividono in:
 - ellittiche (a,b)
 - paraboliche
 - iperboliche: (fronti d'onda): sono complicate

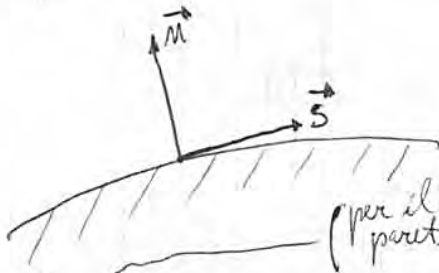
C'è un teorema che ci dice che nel caso (a,b), la soluzione è più semplice delle c.c.

Le (1) e (2) sono ellittiche. Le eq. ellittiche hanno però un vincolo: si devono dare le c.c. su TUTTO il contorno (c'è un teorema che dice che: in qualunque punto del dominio ti trovi, ricenti di TUTTE le c.c. \Rightarrow si devono dare le c.c. su TUTTO il contorno).

[Es: tamburo (membrana tesa che è descritta da un'eq. ellittica): se cambio anche una c.c., ne ricento tutta la membrana].

Lezione "nuova":

Le C.C. sono sempre semplici da dare:



\vec{n} : normale al corpo
 \vec{s} : tangente al corpo

(per il quale la velocità del fluido a contatto della parete è quella della parete, e cioè 0)

velocità = 0 sulla parete non è giusta come c.c., perché non consideriamo un fluido viscoso, ma consentiamo che le particelle di fluido abbiano una certa velocità anche a contatto con la parete; imponiamo invece l'impermeabilità della parete (il fluido non penetra né esce dalla parete) $\Rightarrow u_n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_s \neq 0 \\ u_n = 0 \end{cases}$$

la gradiente lungo la direzione sn

si traduce matematicamente in:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 ; \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (1) \quad (1^\circ \text{ c.c.})$$

L'altra c.c. sarà all'infinito:

$$u_{\text{distante dalla parete}} = u_\infty \quad (2) \quad (2^\circ \text{ c.c.})$$

In analisi le (2) si chiamano c.c. di Dirichlet.
 le (1) "Neumann."

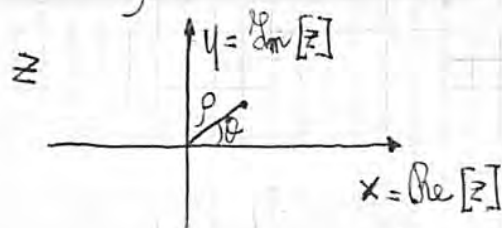
Kelvin ha fatto questa considerazione: il tuo dominio è lo spazio $x, y \Rightarrow$ per dare le informazioni in due dimensioni in un colpo solo è usare i numeri complessi, comodo

Questo piano chiamato piano complesso Z :

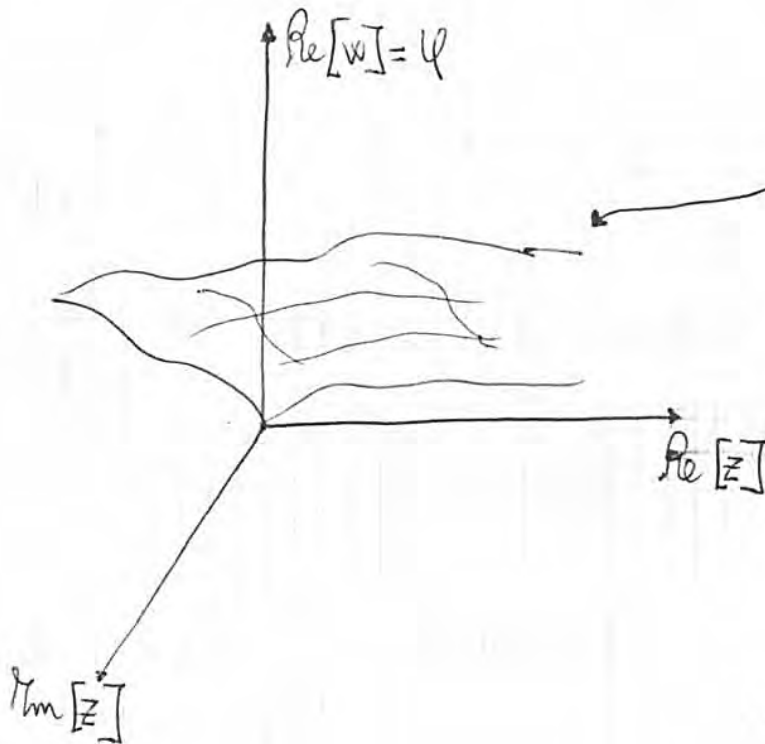
$$Z \in \mathbb{C}$$

$$Z = x + iy = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\theta = \arctan \frac{y}{x}$



4
 la parte immaginaria: $z \rightarrow \text{Re}[w]$
 $\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}$



Superficie.
 Sono su una superficie
 e quindi la derivata
 dipende in generale
 dalla direzione.

L'operazione di derivazione in campo complesso non è una banalità, eccetto
 per una classe di funzione, le **FUNZIONI ANALITICHE**, per le quali
 la derivata non dipende dalla direzione.

(particolare classe appartenente
 alla famiglia delle funz. complesse)

Esempio: $w = z^2 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = 2z$

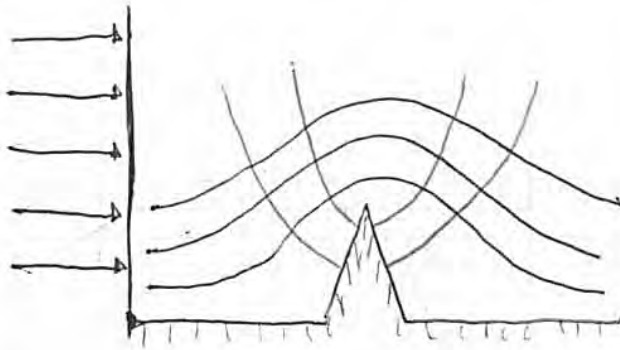
Calcoliamo dunque quanto vale $\frac{dw}{dz}$:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} + i \frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i v$$

non conta
 la direzione \Rightarrow
 può scegliere
 la direzione che
 voglio (es: x)

Come sono fatte le ISO- ψ ? ψ è il potenziale di un campo vettoriale e come tale, cioè come funzione potenziale, è perpendicolare al relativo campo vettoriale* (cioè il campo di velocità). Quindi le linee equipotenziali sono ortogonali al campo di moto. (linea equipotenziale)

E quindi il campo di moto è parallelo alle ISO- ψ e cioè le linee del campo di moto sono tangenti alle ISO- ψ (blu disegno precedente).



curve nere: ISO- ψ (rappresentano le linee equipotenziali)
 curve nere: ISO- ψ (rappresentano le traiettorie, perché le linee del campo di moto sono tangenti alle traiettorie e nel nostro caso le linee del campo di moto sono tangenti alle ISO- ψ \Rightarrow le ISO- ψ rappresentano le traiettorie).

* dato il campo gravitazionale, la superficie equipotenziale (orizzontale) è ortogonale alle linee del campo.

tempo:

$$W(z) = A z^n \quad (n \geq \frac{1}{2})$$

tutto il campo di moto è racchiuso nella sola funzione $W(z)$.

$$W(z) = A (x + iy)^n \quad : \text{strada da cui non ne esce} \Rightarrow \text{sbagliata!!!}$$

STRADA GIUSTA:

$$W(z) = A (\rho e^{i\theta})^n = A \rho^n e^{in\theta}$$

$$\text{Re}[W] = \varphi = A \rho^n \cos(n\theta)$$

$$\text{Im}[W] = \psi = A \rho^n \sin(n\theta)$$

$$\text{Se } \psi = \text{cost} \Rightarrow A \rho^n \sin(n\theta) = \text{cost} \quad : \text{ho le traiettorie}$$

$$\text{Poi } \text{cost} = 0 \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{n} \end{cases}$$

$$\text{Prendiamo } n=3 \text{ (che } \bar{e} > \frac{1}{2}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$



Quindi la funzione descrive il moto di un fluido dentro un angolo di apertura $\pi/3$.

Se voglio conoscere il campo di moto, faccio la derivata:

$$\frac{dW}{dz} = A_m z^{m-1}$$

(ciò non nei punti 0)

$z=0 \Rightarrow$

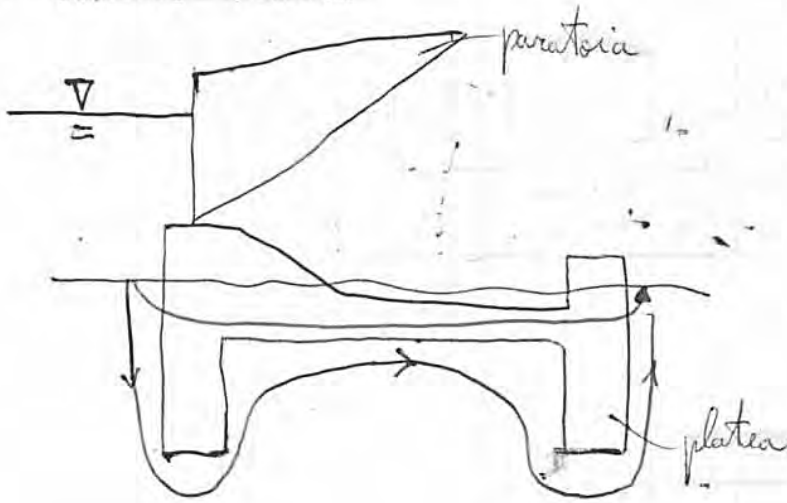
$0 < \pi$: $\frac{dW}{dz} = 0$ (nella realtà, in prossimità di $z=0$ in senso verticale)

$0 > \pi$: $\frac{dW}{dz} \rightarrow \infty$: (nella realtà non cambia a $\frac{d-1}{dz}$ ma con z varia una velocità molto alta \Rightarrow PROBLEMI DI RAGIONE)

a seconda dei valori di m varia che $0 < \pi$ o $0 > \pi$

l'ultimo caso ($n = \frac{1}{2}$) avviene nel caso dei MOTI DI FILTRAZIONE:

sempre TRAVERSE FLUVIALI

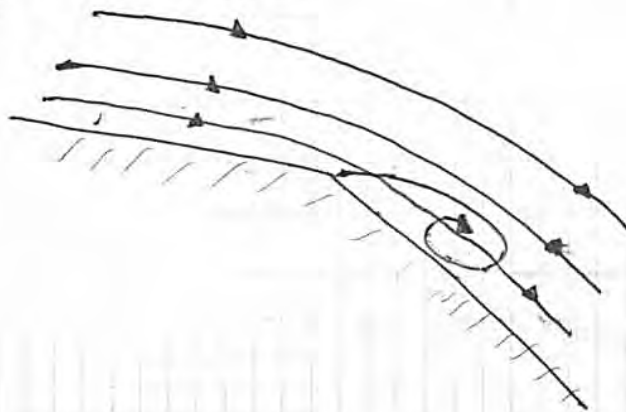


del livello di acqua

(l'è un dislivello) tra monte e valle \Rightarrow MOTI DI FILTRAZIONE \Rightarrow SIFONAMENTO. Per ridurre il sifonamento, si cerca di allungare il percorso del moto (in modo che le dissipazioni siano più grandi); è per questo che mette la platea.

(in assenza della platea) sarebbe quello vero il moto di filtrazione

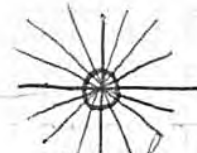
Osserviamo ora un'altra cosa:



Anche al 1° tratto \Rightarrow al 2° tratto \Rightarrow , il fluido si allontana dalla parete \Rightarrow la sezione dei tubi di flusso aumenta.

La portata che scorre nei tubi di flusso è sempre la stessa; quindi se la sezione si amplifica \Rightarrow la velocità diminuisce.

Scriviamo la portata per unità di profondità:



è la velocità radiale, cioè quella ortogonale al cilindro

cilindro con sezione circolare e profilo \pm ; quando la portata che passa all'interno:

$$q = 2\pi r \cdot \pm \cdot u_r = 2\pi r \cdot \pm \cdot \frac{m}{2\pi r} = m$$

m è la stessa portata che intercorre per qualunque circonferenza qualunque sia il raggio.

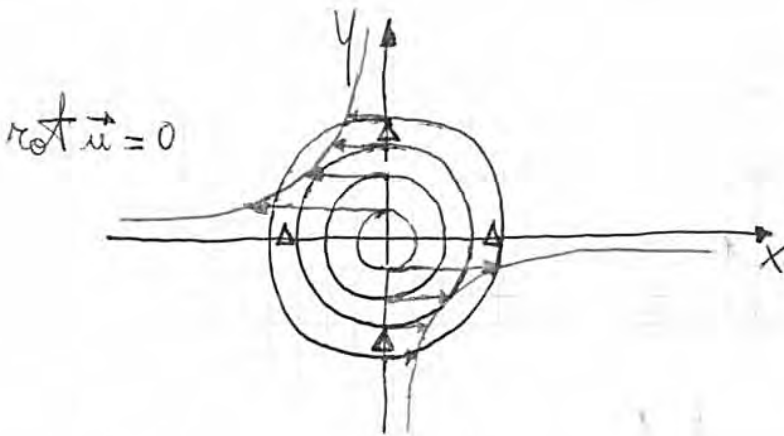
Esempio

$$W = - \frac{i \Gamma}{2\pi} \ln z$$

Il numero complesso ha la funzione di corrente ψ e χ .

Si ricava (con un po' di passaggi):

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

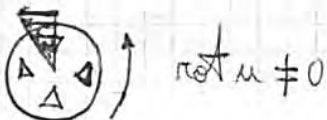


Scriviamo dunque un VORTICE (le traiettorie sono circonferenze)

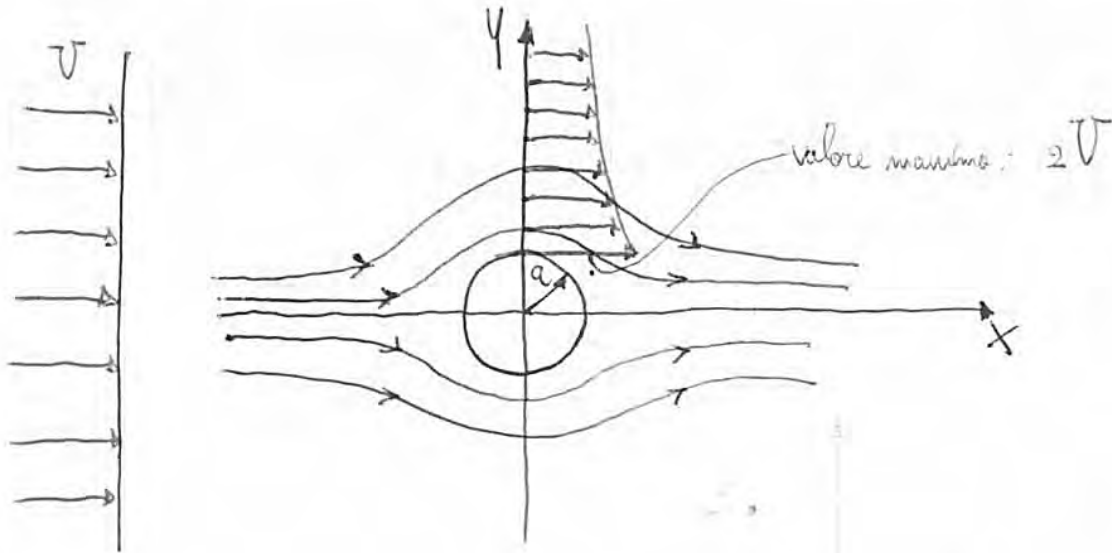
$$\frac{dw}{dz} = - \frac{i \Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = - \frac{i \Gamma}{2\pi} \frac{1}{x + iy}$$

Se $x=0 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = - \frac{\Gamma}{2\pi y}$: la velocità varia anche qui in maniera iperbolica (linee rette)

Approssimazioni:



il solido è rotazionale, il fluido irrotazionale



Per costanti > 0 , abbiamo le traiettorie libere.

Quindi $w(z)$ descrive il moto di un fluido che passa intorno a un cilindro.

$$\frac{dw}{dz} = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = u - iv$$

per $z \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{dw}{dz} \rightarrow U$ ^{di base}
 velocità che ha il fluido lontano dal cilindro (cioè come se il cilindro non ci fosse) (rotta)

Mi metto sull'asse y:

$$x + iy \Big|_{x=0} = iy \Rightarrow \text{sostituisco nella } z=a \text{ e ottengo: } u = U \left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right)$$

Qualunque sia la dimensione del cilindro, sul bordo del cilindro ho SEMPRE la velocità $2U$.

Se il cilindro fosse libero di muoversi, come si muoverebbe? Cioè come è la quinta esercitata dal fluido?

La quinta è la risultante di tutte le pressioni esercitate dal fluido sul cilindro.

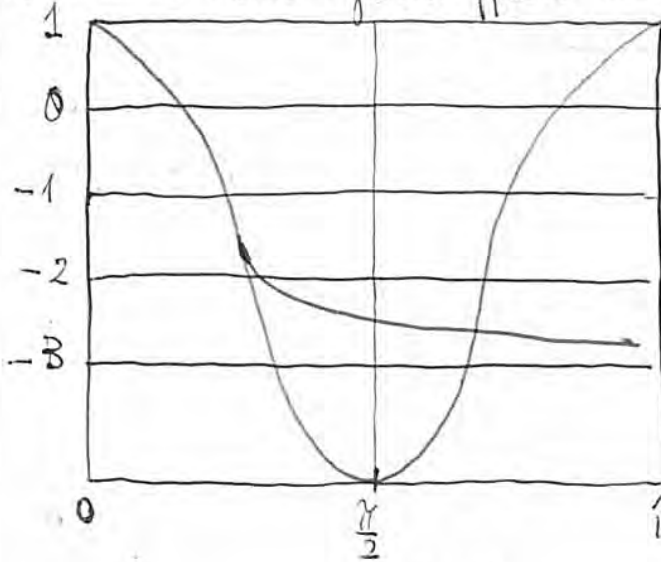
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$



$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$: è la linea rossa seguente (quella verde la disegniamo dopo):

Zona di
pararaffione
(il fluido
si muove)

dipressione
(la parete del
cilindro è
tirata verso
l'esterno)



Nella zona
grigia il
fluido viene
spinto lateral-
mente (verde)
vieni tirato.

lateralmente il corpo tende a essere tirato; da davanti viene tirato: camion con telo, panno vicino e il telo viene tirato.

Ho simmetria \Rightarrow la risultante è 0 (il cilindro sta fermo); questo è perché i moti a potenziale non tengono conto della scala, cioè che c'è a valle e dunque in realtà il cilindro va

in realtà sbagliato, ma otteniamo questo risultato

in realtà verso valle. Il cilindro crea un gradiente di pressione (la pressione a valle è minore di quella a monte) \Rightarrow va verso valle.

Ragionamento più elegante:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad : \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Se non ci sono c.c. asimmetriche (e qui non ci sono), l'equazione non è in grado di introdurre delle asimmetrie, poiché le derivate sono pari $\Rightarrow x' = -x$.

Il tempo ha la derivata dispari (non si riesce a girare!)

Se faccio gli esperimenti con un fluido che va un po' veloce, ho il verde, cioè non si forma la scia (quindi vale ovunque la descrizione del moto a potenziale) tutte le volte che $Re < 4$ e ho corpo simmetrico \Rightarrow esso non si muove (es: ghiacciaio (inscanta altissimo)).

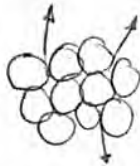
$$Re = \frac{Ua}{\nu}$$

IDRAULICA

10-01-2012

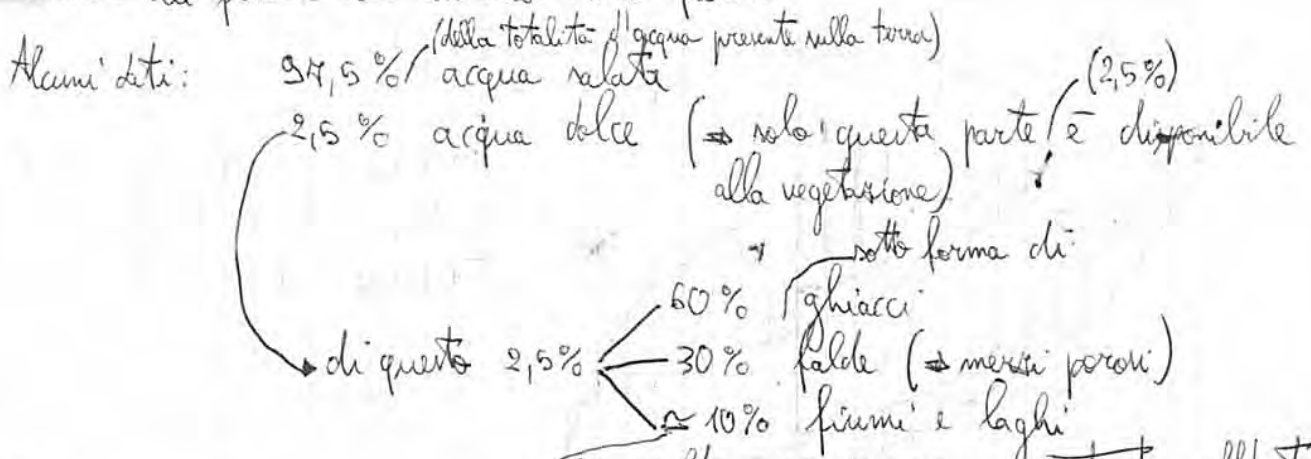
MOTI SI FILTRAZIONE (MOTI NEI MEZZI POROSI) Pg. 4/51

Abbiamo un sistema fatto di tante particelle solide a contatto tra loro; ci sono spazi lasciati liberi dalle particelle e sono occupati da fluidi che, sotto opportuni gradienti, possono muoversi nei suddetti spazi.



IMPORTANZA DEI MOTI NEI MEZZI POROSI:

→ moto dei fluidi all'interno delle falde

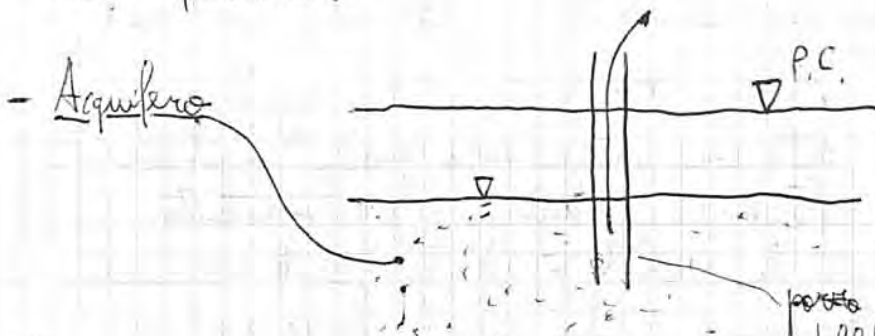


QUINDI:

Essenzialmente la vegetazione vive grazie ad acqua che si muove nel suolo (falda).

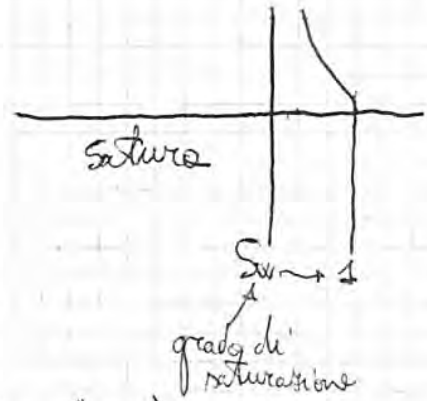
(prende acqua)

La parte di suolo interessata dal moto del fluido potrebbe ^{non essere} saturata, ma insatura; il moto di un fluido in un mezzo insatura è molto difficile da descrivere, e noi non lo facciamo.



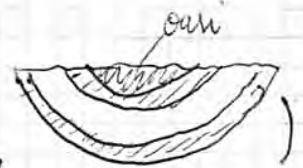
pozzo che preleva l'acqua dall'aquifero

L'acqua a 200 m di profondità è ^{molto} ~~forse~~ ^{forse} ~~è~~ ^è ~~lt da tanti anni~~ ^è ~~ed è~~ ^è ~~fortemente~~ ^{fortemente} ~~mineralizzata~~ ^{mineralizzata} → ha bisogno di trattamenti per essere usata nell'acquedotto → costi elevati.



nella parte superiore (poro più corto in figura)
 Se facciamo un pozzo, troviamo acqua quando intersechiamo la
 sup. libera. d'acqua però rimane lì, non sale \Rightarrow l'acquifero
 non è in pressione \Rightarrow ACQUIFERO FREATICO (tutti gli superficiali
 sono freatici).
 Al pozzo più lungo: ^{una volta oltrepassata la lente di argilla} troviamo acqua e essa sale fino al livello
 del p.c.i. (liba): ACQUIFERO IN PRESSIONE
 Talvolta la pressione è tale che l'acqua non sale solo fino al p.c.i., ma
 anche fino al P.C. \Rightarrow ACQUIFERI ARTESIANI.

(Deserto del Sahara: le oasi sono acqua che è risalita



PAG 453

dal punto di vista della meccanica dei fluidi

La domanda è: dove inventarmi delle leggi nuove per descrivere i
 moti di filtrazione?

Quali leggi spiegano il moto del fluido tra le particelle? Le solite!!!

- Navier-Stokes; inoltre se i pori sono molto piccoli posso pensare
 che il moto sia laminare (no turbolento).

[Questo perché il Re all'interno dei pori è...]

I pori sono piccoli \Rightarrow moto lento \Rightarrow moto laminare.

in moto preciso

Avrei conosciuta la geometria dei granelli e come sono incastrati, ma
 conoscere la geometria è impossibile!

La turbolenza era difficile da studiare non perché la geometria
 importa sia difficile, ma perché il fluido faceva quello che voleva.

Ora il moto è laminare, ma la geometria è complicatissima \Rightarrow
 troviamo le stesse complicazioni che troviamo nella turbolenza.

Le mi avvicina vedo che ci sono i pori, ... \Rightarrow però come detto non siamo in grado di descrivere in dettaglio ciò che avviene.

Da lontano: velocità fittizia V molto più bassa di quella reale, ma il fluido ^{che} si muove in tutta la sezione del tubo. _{considero}

IN PRATICA DARCY DICE:

"Il mezzo poroso c'è, fa sentire i suoi effetti, ma noi li vogliamo modellare come se lui non ci fosse".

LEGGE DI DARCY: $V = K J$ (1)

simbolo che troviamo nei libri seri \rightarrow (che non tiene conto di piani e metri)
 \rightarrow la velocità di Darcy è proporzionale al gradiente di carico piezometrico.

con $J = \frac{h_m - h_v}{L}$

2 Osservazioni:

- La pendenza motrice non coinvolge i carichi totali, ma piezometrici \Rightarrow il termine cinetico non ha importanza: nei mezzi porosi non è la differenza di termine cinetico a muovere il fluido.
 far

- K : COEFF. DI CONDUCEBILITÀ IDRAULICA

$K = f(\text{tipo mezzo poroso, tipo di fluido})$

tipo di mezzo poroso
 (es: più le particelle sono fini, più i pori sono piccoli, più K è piccolo)

le portate cambieranno a seconda del tipo di fluido (a parità di mezzo poroso e a parità di dislivello)

La (1) è scritta per un moto monodimensionale, ma possiamo estenderla anche in 3 dimensioni: $(\text{in 3 dimensioni } V \text{ e } J \text{ diventano vettori } \Rightarrow K \text{ diventa un tensore})$

$\vec{V} = K \nabla h = K \nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$

TENSORE DI CONDUCEBILITÀ IDRAULICA $\rightarrow K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$

Ordini di grandezza:

- ARGILLE: $K = 10^{-9} \div 10^{-13} \text{ m/s}$
 ↑
 conduttività
 idraulica

- LIMI (o sabbie molto molto fini): $K = 10^{-6} \div 10^{-9} \text{ m/s}$

- SABBIE GHIAIOSE: $K = 10^{-2} \div 10^{-5} \text{ m/s}$

- GHIAIE: $K = 10^{-1} \div 10^{-2} \text{ m/s}$

Se la conduttività è maggiore vuol dire che i pori sono più grandi \Rightarrow si rimedia la turbolenza e quindi cade la validità della Legge di Darcy \Rightarrow si passa ad un'altra legge:

LEGGE DI FORCHHEIMER: $grad h \propto V + \beta V^2$

Per sapere quando abbiamo una Darcy e quando Forchheimer, definiamo Re come:

numero di Reynolds $\Rightarrow Re = \frac{V \sqrt{K}}{\nu}$

V: velocità di Darcy (velocità tipica del fluido che sta uscendo)

ho bisogno di una lunghezza tipica (che cioè tenga conto della natura del mezzo poroso) $\Rightarrow \sqrt{K}$ (poiché $[K] = m^2$)
 come lunghezza tipica prendo

se $Re < 1 \div 10 \Rightarrow$ Darcy va bene

se $Re > 100 \Rightarrow$ no Darcy ma Forchheimer

Tra 10 e 100 devo decidere (se è 15 può tirare il collo a Darcy; se è di più meglio di molto!)
 a usare Darcy

(Quindi i ∇h diventano troppo forti \Rightarrow non si hanno più Darcy, ma al esempio Forchheimer)
 c'è dipendenza anche da $v^2 \Rightarrow$

(Messi porosi Darciani: messi su cui il moto dei fluidi è regolato dalla legge di Darcy).

del moto di filtrazione

(Il problema si è semplice; ciò che lo complica sono le condizioni al contorno dell'aquifero e la mancanza di dati).

$\nabla^2 h = 0$ è di tipo ellittico \Rightarrow abbiamo bisogno, per risolverla, di tutte le c.c. -

Inoltre, essendo del 2° ordine, ha bisogno di 2 c.c. lungo ciascuna direzione.

Ricordiamo che siamo sempre nei messi naturali.

LA LEGGE DI DARCY È UNA LEGGE EMPIRICA:

legge empirica: ciò che è stata dimostrata sperimentalmente
 Solo 3-4 anni fa è stata dimostrata partendo dall'approccio microscopico, integrando, ... matematicamente

- la legge di Darcy dice che il movimento è proporzionale, in maniera anisotropa, ai gradienti di uno scalare: più la differenza è alta e più il moto è veloce.

Tutti i processi di trasporto nei fluidi (es: diffusione) sono descritti così: il movimento è legato al gradiente.

(Anche la migrazione $\Rightarrow \uparrow \nabla$ di ricerca \Rightarrow migrazione)

Separo le variabili e integro:

$$\int_{\pi_0}^{\pi_{ext}} \frac{d\pi}{\pi} = \int_{h_0}^H \frac{2\pi s k}{q} dh$$

π_{ext}
 $\frac{D_p}{2}$
 π_{porto}
 (diametro
 porto/2)

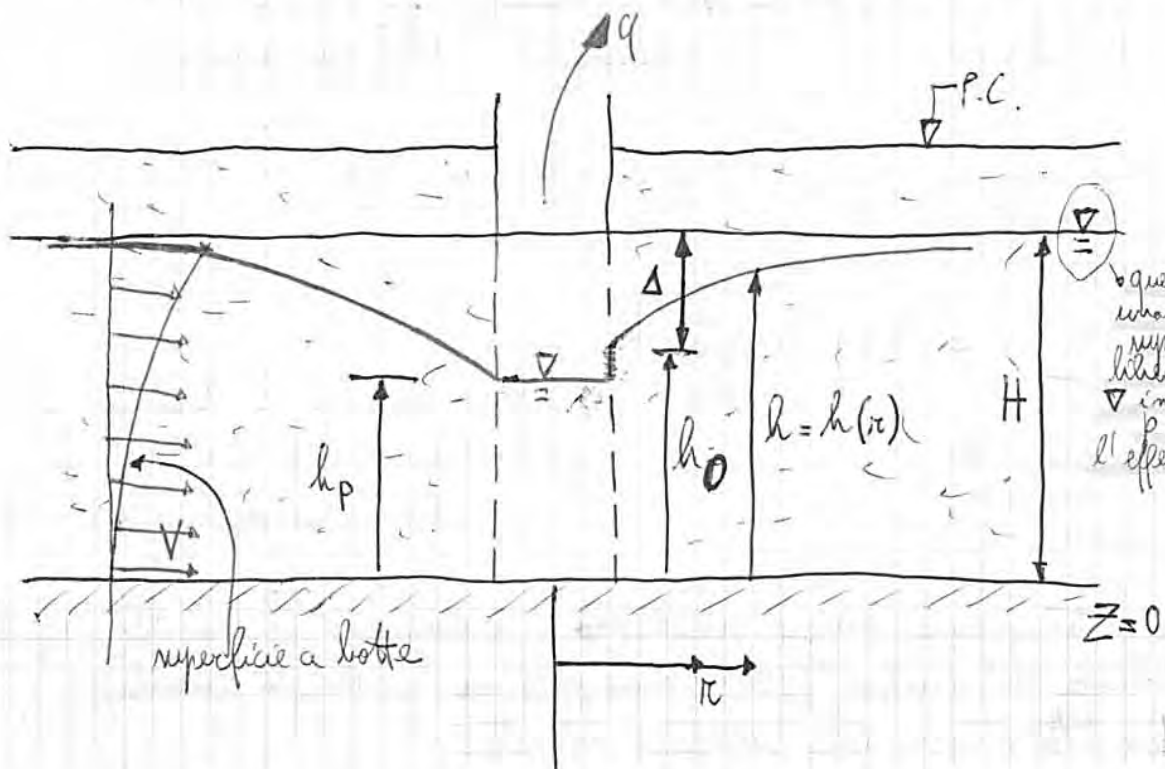
raggio sufficientemente grande, cioè tale per cui per quel valore del raggio, l'altezza del conoide di depressione è pari ad H (cioè pari all'altezza nel porto in condizioni senza emungimento)

$$\ln \frac{2\pi_{ext}}{D_p} = \frac{2\pi s k}{q} (H - h_0)$$

$$\Rightarrow q = \frac{2\pi s k (H - h_0)}{\ln 2\pi_{ext} - \ln D_p}$$

Segue tra la portata che tiriamo fuori dal pozzo e la geometria (D_p), la depressione che creiamo ($H - h_0$), lo spessore dell'acquifero (s), e k .

Facciamo lo stesso problema nel caso in cui l'acquifero sia freatico:



questa è una effettiva superficie libera. Prima ∇ indicava il P.C. e non l'effettiva superficie libera.

Supponiamo che la situazione di regime, durante il pompaggio, sia quella

Iniziamo la portata di emungimento:

$$q = V \cdot 2\pi r h$$

↑ non va bene, perché non è l'area \perp alla velocità.
 ↓ Per prendere la superficie blu (superficie a botte)

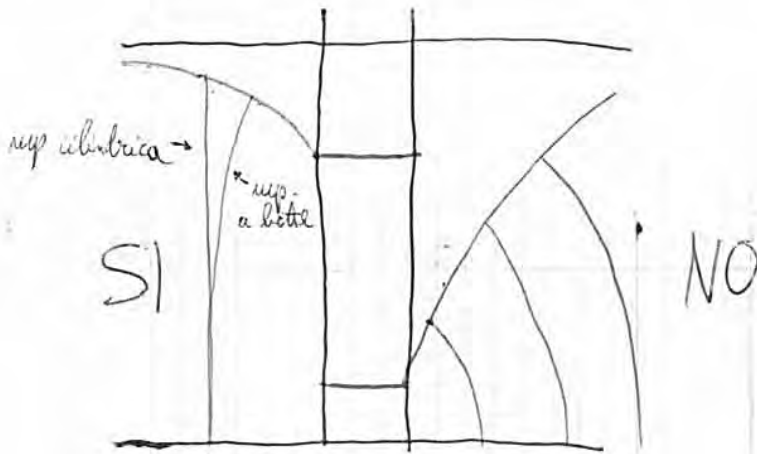
il moto è assialsimmetrico e tridimensionale.

Però era bidimensionale.

la V è orizzontale sul fondo; poi mano a mano si inclina andando verso l'alto

(vedi figura in basso 2 pagine).

le non prendiamo dislivelli troppo grandi; cioè se il conoide non è troppo pronunciato, allora:
 ⇒ possiamo confondere la superficie a botte con la superficie cilindrica:
 (cioè se la depressione è piccola rispetto H ;



$$q = V \cdot 2\pi r h = K \frac{dh}{dr} 2\pi r h$$

separo le variabili; integro e infine si ottiene:

$$q = \pi K \frac{H^2 - h_0^2}{\ln 2 \cdot r_{ext} - \ln D_p}$$

le si ipotizza che $r_{ext} \gg \frac{D_p}{2}$ (come accade sempre) ⇒

$$\Rightarrow \boxed{q = \pi K \frac{(H-h_0)(H+h_0)}{\ln 2 \cdot r_{ext}}} = \pi K \frac{\Delta(2H-\Delta)}{\ln 2 \cdot r_{ext}} \quad \text{con } \Delta = H-h_0 \quad \textcircled{a}$$

IDRAULICA

23-01-2012

ACQUA E FORME NATURALI (seminario)

Geometrie con molte scale spaziali: non esprimibili con la geometria euclidea

Molte scale
 Autosimilitudine
 Forme complesse } geometrie frattali

autosimilitudine: forme ^{simili} ripetute, annidate l'una nell'altra

Perché le geometrie non così complicate? Non linearità!

LINEARITÀ = SOMMA (non c'è interazione tra le componenti)

NON LINEARITÀ = INTERAZIONE TRA COMPONENTI (tutte le scale interagiscono, non possono essere separate)

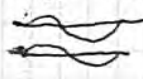
- solo 3 gradi di libertà, che però interagiscono
- segnale aperiodico
- continua creazione di nuova informazione

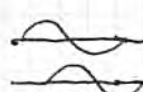
La non linearità produce traiettorie complesse ⇒ TURBOLENZA

Moto dei fluidi ⇒ in un amplissimo intervallo di scale (vortici) interagiscono fra di loro non linearmente.

Strutture vorticosi nei primi millimetri di una corrente d'acqua a contatto di una parete.

Al crescere del numero di Reynolds ⇒ cresce la velocità della fiamma ⇒
 ⇒ cresce no le scale

Disturbazione del fondo e ambiente erosiore / deposito sono in fase: il contorno piatto è STABILE. 

u NON sono in fase: il contorno piatto è INSTABILE. 

Nell'esercizio 2, per calcolare la differenza di carica piezometrica si usa:

$$S = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

→ differenza di quota tra i due menischi

differenza di carica piezometrica → somma di quota geodetica e altezza piezometrica

$$\left(z_S + \frac{p_S}{\gamma_S} \right) - \left(z_D + \frac{p_D}{\gamma_D} \right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

→ peso specifico del liquido che viene misurato (o liquido sinistro o liquido destro)

Il punto di applicazione è C (centro di spinta).

Il momento \overline{CG} è fornito da:

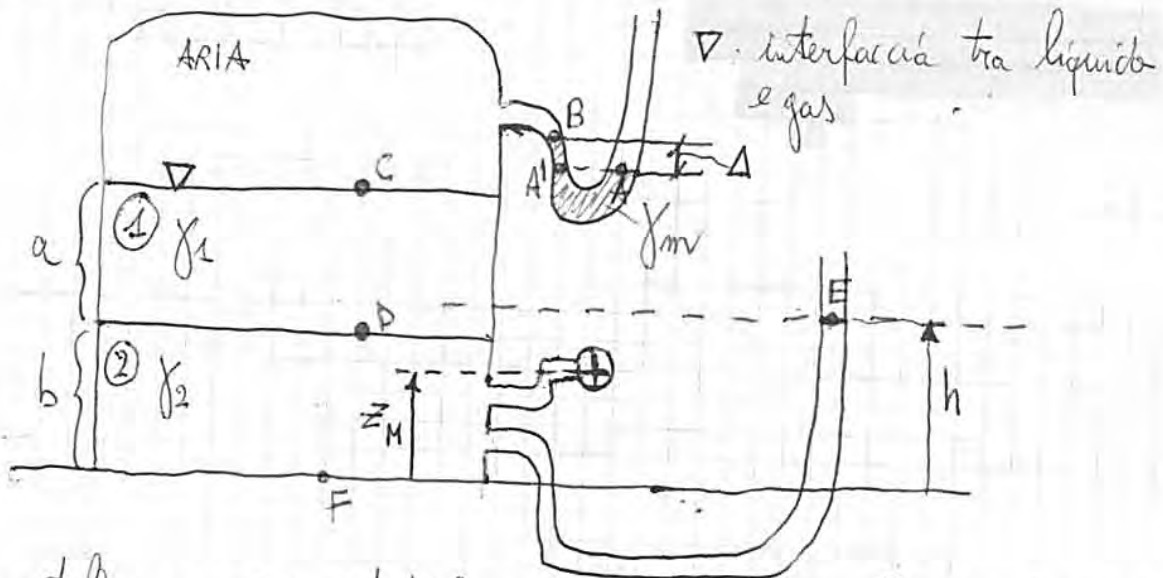
$$\overline{CG} = \frac{I_{Oy}}{x_G A} \leftarrow \begin{array}{l} \text{momento d'inerzia fatto rispetto ad un'asse passante per} \\ \text{il baricentro e parallelo l'alla linea di spinta} \end{array}$$

M
momento statico (non fatto rispetto al baricentro, perché per deflessione sarebbe 0) rispetto alla linea di spinta

interazione tra p.c.i.p. e il primo che contiene la superficie.

$$= \frac{I_{Oy}}{x_G A}$$

esercizio 1



Manometro metallica: non è importante la quota alla quale viene collegato al reservoir, ma è importante la quota su cui va a fare la misura (in questo caso z_M).

DATI: $\Delta, a, b, z_M, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_m$

DOMANDE: $?m, ?h, ?p(z)$

diagramma (distribuzione) delle pressioni
 ↑
 pressione misurata dal manometro metallico

(diviselli)

La pressione cambia poco all'interno del gas (fino ad altezza) di circa perché il peso specifico è molto basso. E' vero il peso specifico molto basso che il peso specifico è il coeff. angolare della retta che descrive l'and. Nell'aria il diagramma delle pressioni è costante.

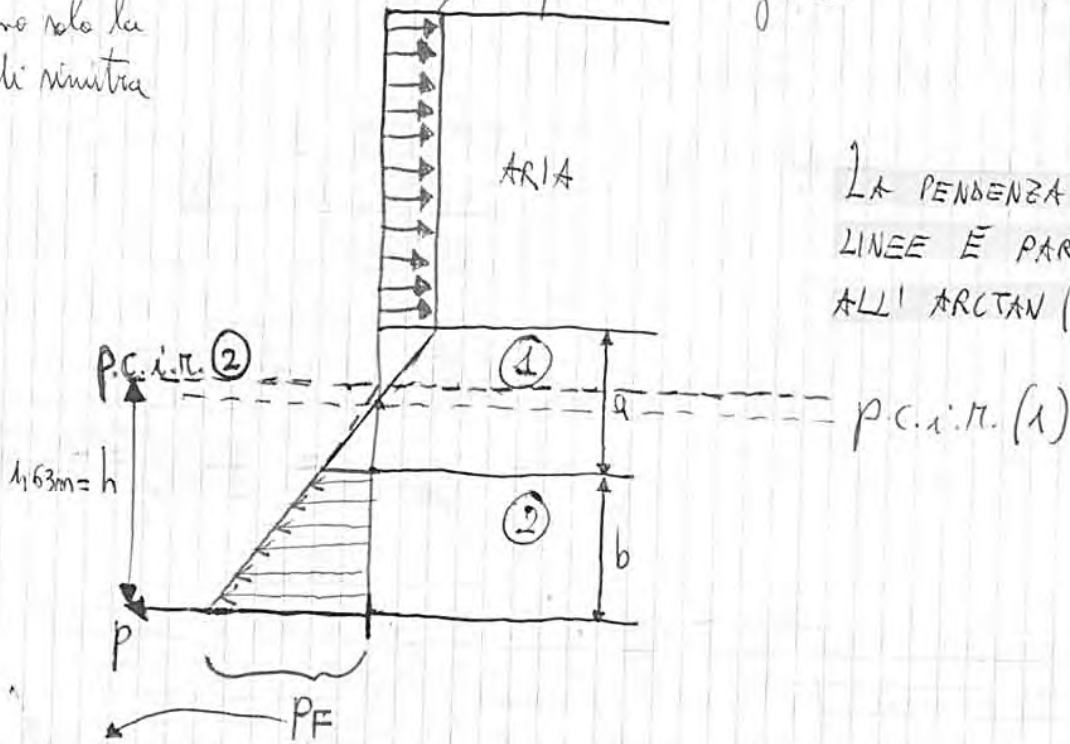
h
 ↓
 carico piezometrico

$$h = z_0 + \frac{-\gamma_m \Delta + \gamma_1 a = b + -\gamma_m \Delta + \gamma_1 a}{\gamma_2} = 1,63 \text{ m}$$

$b=1$ mentre $h=1,63 \Rightarrow$ a $1,63$ ho il p.c.i.m. del liquido 2.
 siamo in un caso in cui p.c.i.m. non coincide con l'interfaccia liquido-liquido, cioè con il condotto per libero.

DISEGNAMO IL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI
 disegniamo solo la parete di sinistra

la metto con frecce orientate a destra, perché la pressione è negativa.



LA PENDENZA DELLE LINEE È PARI ALL' ARCTAN (peso specifico)

$$P_F = P_D + \gamma_2 b$$

Ora: ? pressione alla quota z_M

$$P(z_M) = \gamma_2 (h - z_M) = 10509,4 \text{ Pa}$$

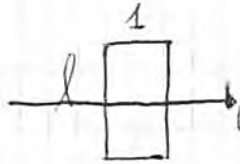
$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

↑
 unità di misura sistema internazionale

$$\Rightarrow P(z_M) = 0,103 \text{ atm}$$

Dobbiamo trovare C :

$$\bar{c} = \frac{I_{oy}}{M} = \frac{l^3 \cdot 1}{12} \cdot \frac{1}{M} = \frac{\frac{l^3}{12}}{\frac{\rho l^3}{\left(\frac{a}{\sin \alpha} + \frac{l}{2}\right) l}} = 0,292 \text{ m}$$



Coordinate del baricentro rispetto alla linea di spinta (il s.d.c. è allineato con la superficie piana).

asse y entrante nel foglio

Dobbiamo imporre un bilancio di momento angolare (tra \vec{P} e \vec{F}):

$$M_{\vec{P}} + M_{\vec{F}} = 0$$

condizione di equilibrio statico



quindi:

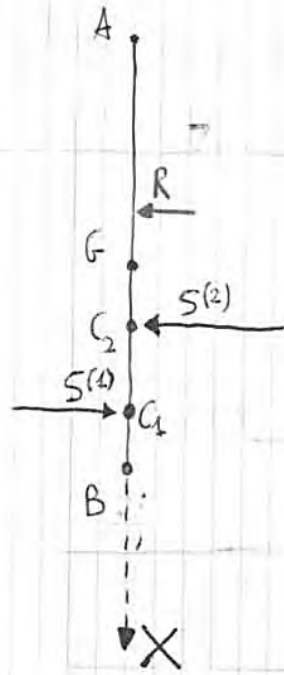
$$P \cos \alpha \frac{l}{2} - |F| \bar{c} = 0 \Rightarrow P = \frac{|F| \left(\frac{l}{2} + \bar{c}\right)}{(\cos \alpha) \frac{l}{2}} = 28902 \text{ N}$$

È se la paratoia fosse ancorata in B??? Quanto deve valere il peso (P')?

Favrei un braccio minore che rispetto ad A \Rightarrow la paratoia potrà avere un peso minore

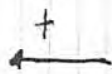
$$P' \left(\frac{l}{2} \cos \alpha\right) = F \left(l - \frac{l}{2} - \bar{c}\right)$$

$$P' = \frac{F \left(\frac{l}{2} - \bar{c}\right)}{\frac{l}{2} \cos \alpha} = 15837,99 \text{ N}$$



R la direziona più corta di $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ perché è data dalla risultante (differenza) tra $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ appunto.

$$\vec{R} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$$



prende come positive le forze applicate da destra verso sinistra.

$$|R| = -|S_1| + |S_2| = 1970 \text{ N}$$

Dove è applicata \vec{R} ?

La somma dei momenti di \vec{S}_1 e \vec{S}_2 deve uguagliare il momento di \vec{R} (rispetto ad un punto qualsiasi (ad esempio rispetto al baricentro)).

$$\oplus M_{S^{(1)}} = -|S^{(1)}| \overline{GC_1}$$

rispetto al baricentro

$$\oplus M_{S^{(2)}} = |S^{(2)}| \overline{GC_2}$$

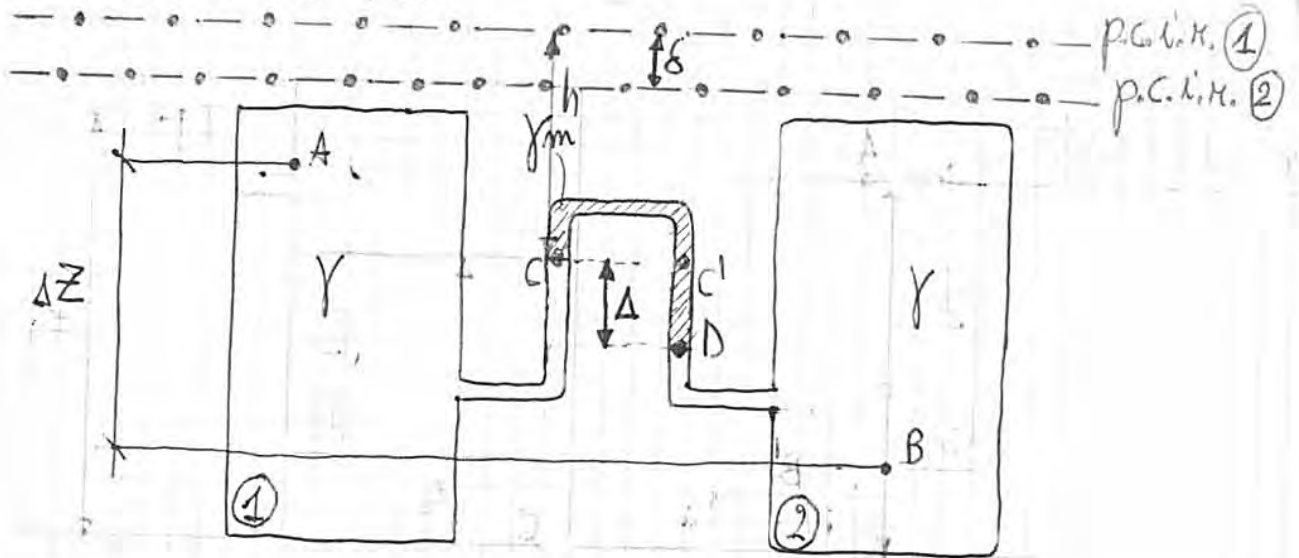
$$\oplus M_R = |R| x$$

è l'incognita: distanza del punto di applicazione della dal baricentro.

$$M_{S^{(1)}} + M_{S^{(2)}} = M_R \Rightarrow -|S^{(1)}| \overline{GC_1} + |S^{(2)}| \overline{GC_2} = |R| x$$

$$\rightarrow x = \frac{|S^{(2)}| \overline{GC_2} - |S^{(1)}| \overline{GC_1}}{|R|} = -0,0423 \text{ m applica}$$

Esercizio 4 FATTO DA ME



$$P_c = \gamma h$$

$$P_{c'} = P_D + \gamma_m (z_D - z_{c'}) = \underbrace{\gamma (h + \Delta - \delta)}_{P_D} - \gamma_m \Delta$$

$P_c = P_{c'}$ (poiché si trovano alla stessa quota) \Rightarrow

$$\Rightarrow \cancel{\gamma h} = \cancel{\gamma h} + \gamma \Delta - \gamma \delta - \gamma_m \Delta \rightarrow \gamma \delta = \Delta (\gamma - \gamma_m) \Rightarrow \delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$

Quota piezometrica del punto A: $z_A + \frac{P_A}{\gamma}$

Quota piezometrica del punto B: $z_B + \frac{P_B}{\gamma}$

Poiché la differenza tra i p.c.i.r. (e quindi delle quote piezometriche) è pari a δ :

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \delta \Rightarrow z_A - z_B + \frac{1}{\gamma} (P_A - P_B) = \delta \Rightarrow$$

$$(z_A - z_B) + \frac{(P_A - P_B)}{\gamma} = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \Rightarrow \frac{\Delta P}{\gamma} = (z_B - z_A) + \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta P = \gamma (z_B - z_A) + \Delta (\gamma - \gamma_m) \Rightarrow P_A - P_B = - 9500 \frac{N}{m^3} [0,5 [m] + 0,15 [m]] [9,81 \frac{m}{s^2}]$$

$$= - 4615 \frac{N}{m^2}$$

OSSERVAZIONE: la P_B è $>$ P_A poiché B si trova a quota più bassa di A. A parità di altezza della pressione in un peraltatore si registra nel punto del peraltatore. Questo poiché la pressione nel peraltatore è costante.

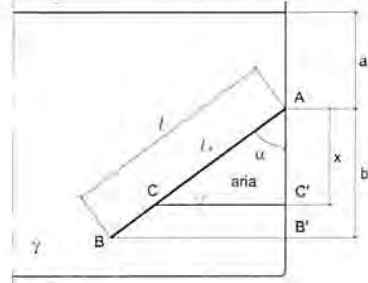
Esercitazione n. 2 (Idrostatica: spinte su pareti curve)

Altri esercizi

4 Valutare in grandezza e segno il momento all'incastro di un deflettore su una parete piana verticale, in una vasca che è stata riempita in maniera graduale ed isoterma con acqua (fare riferimento ad un metro di profondità normalmente al piano del disegno).

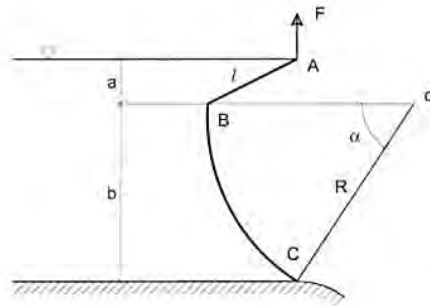
Dati:
 $l = 2 \text{ m}$ $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$
 $a = 1 \text{ m}$ $p_a = 101.300 \text{ Pa}$
 $b = 1,5 \text{ m}$
 $[M = 7144 \text{ Nm}]$

$pV = \rho g h \Rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2$ (bisogna avere le pressioni ASSOLUTE)



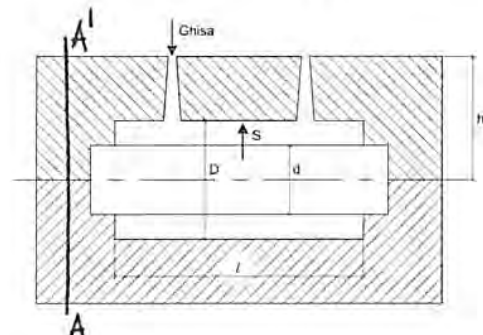
5 Il disegno allegato rappresenta la sezione di una traversa fluviale. Per la paratoia a settore, con la soprastante ventola, lo schema e le dimensioni possono essere assunte come segue:

$a = 2,50 \text{ m}$ $R = 24,00 \text{ m}$
 $b = 14,00 \text{ m}$ $l = 5,00 \text{ m}$
 Calcolare, con riferimento ad una larghezza unitaria, le seguenti forze:
 1. la spinta sulla paratoia piana AB;
 2. lo sforzo nel tirante F, ammettendo la paratoia AB incernierata in B;
 3. la spinta sulla paratoia a settore BC.
 $[S_{AB} = 61250 \text{ N}; F = 23566 \text{ N}; S_{BC} = 1407000 \text{ N}]$



6 A formare, con asse orizzontale, un tubo di ghisa di diametro esterno D, spessore $(D-d)/2$ e lunghezza l viene versata della ghisa fra l'anima di diametro d e la forma di diametro D. Il carico di ghisa sull'asse del tubo è h.

Detti γ_f il peso specifico della ghisa e γ_a quello del materiale dell'anima, determinare il peso minimo G che deve avere la parte superiore della forma per non sollevarsi.
 Dati:
 $D = 420 \text{ mm}$ $h = 38 \text{ cm}$
 $d = 380 \text{ mm}$ $\gamma_f = 70.560 \text{ N/m}^3$
 $l = 1800 \text{ mm}$ $\gamma_a = 13.720 \text{ N/m}^3$
 $[G = 23076 \text{ N}]$



Bisogna tener conto che l'anima è un po' più leggera della forma. La sua spinta verso l'alto che rappresenta una spinta aggiuntiva sulla forma.

IDRAULICA ESERCITAZIONE

10-10-2011

ESERCITAZIONE N.2

SPINTE SU SUPERFICI CURVE

Il metodo che utilizzeremo fa riferimento all'equazione globale della statica:

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0 \rightarrow \text{si applica ad un generico volume di controllo } W$$

In condizioni statiche (ancora di moto) le forze applicate al volume di controllo devono dare risultante nulla.



$$\vec{F}_c = \int_{\Omega} p \cdot \vec{n} d\Omega \quad ; \text{risultante delle forze} \text{ la superficie di contorno}$$

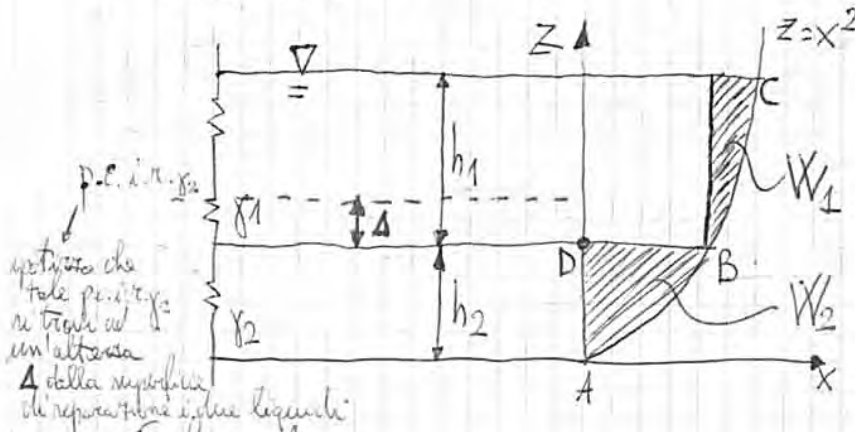
applicato al liquido all'esterno attraverso

Bisogna scegliere un volume di controllo tale per cui tutte le superfici del volume di controllo siano piane ad eccezione di quella in cui voglio calcolare la spinta.

Nella realtà pratica si vuole calcolare la spinta esercitata dal liquido sulla parete (cioè l'opposto di \vec{F}_c).

Esercizio n.1

DUE LIQUIDI, IMMISCIBILI: quello con γ maggiore sta sotto per una condizione di stabilità dei liquidi.



Dati:
 $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$
Calcolare:
 \vec{S}

spinta complessiva che la parete riceve per l'effetto combinato dei due liquidi!

Svolgimento

la prima cosa da fare in idrostatica è sempre individuare la posizione del piano dei carichi.

Calcoleremo \vec{S}_1 e \vec{S}_2 e poi le sommeremo vettorialmente.

$$|F_1| = \rho_{G_1} (\overline{OB} \cdot 1) = \left(\gamma_1 \frac{h_1}{2} \right) (h_1) = \gamma_1 \frac{h_1^2}{2}$$

$$\overline{C_1 C_1} = \frac{I_{Oy}}{\overline{C_1 O} A} = \frac{\frac{h_1^3 \cdot 1}{12}}{\frac{h_1}{2} \cdot \underbrace{h_1 \cdot 1}_A} = \frac{h_1}{6}$$

affondamento

ABBIAAMO $\frac{1}{6}h$ solo quando la distribuzione delle pressioni è triangolare, cioè quando l'estremo superiore del tratto OB coincide con il polo libero

(in questo caso 0)

$$|S_1| = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1z}^2} = \sqrt{F_1^2 + P_1^2} = 5625,3 \text{ N}$$

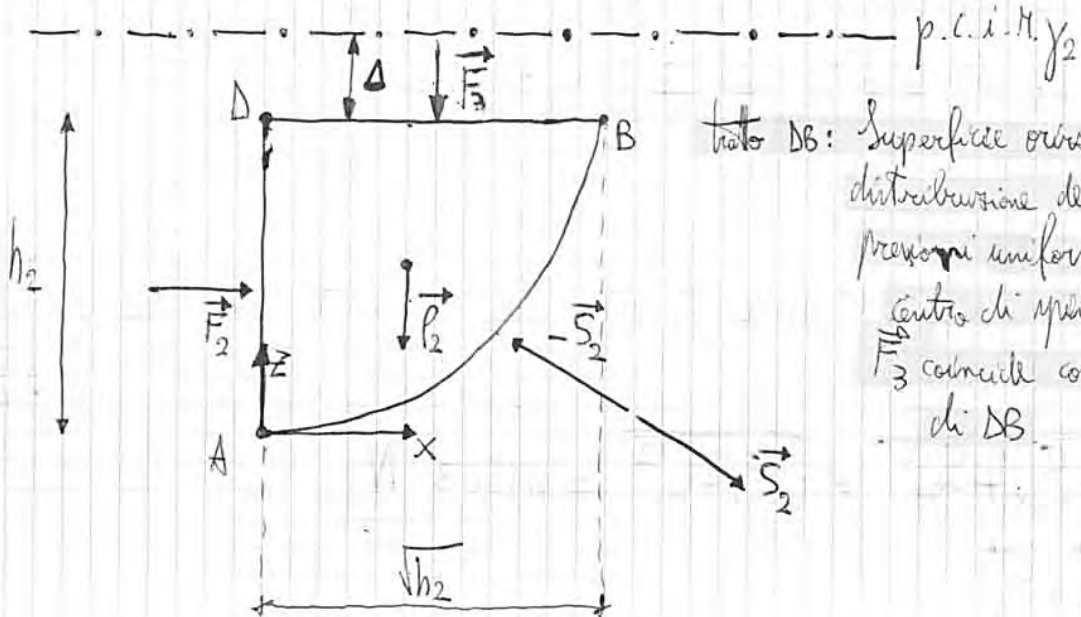
Calcolo della spinta \vec{S}_2

Come calcolo Δ ?

si considera il punto D all'interfaccia, che quindi può vedere E ad entrambi i liquidi:

$$\begin{aligned} \text{se } D \in \gamma_1 &\Rightarrow P_D = \gamma_1 h_1 \\ \text{se } D \in \gamma_2 &\Rightarrow P_D = \gamma_2 \Delta \end{aligned} \Rightarrow \gamma_1 h_1 = \gamma_2 \Delta \Rightarrow \Delta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1$$

dunque Δ è sicuramente $< h_1$, ma sicuramente > 0 .



tratto DB: Superficie orizzontale; distribuzione delle pressioni uniforme \Rightarrow centro di spinta di F_2 coincide con baricentro di DB.

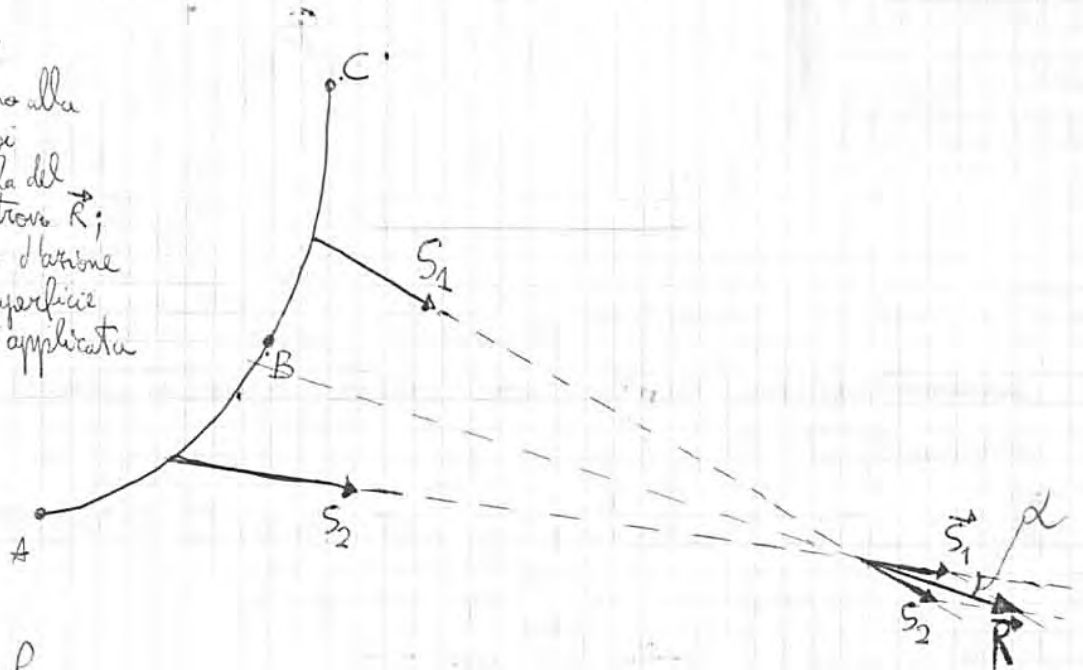
$$R_x = S_{1x} + S_{2x}$$

$$R_z = S_{1z} + S_{2z}$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}$$

RISOLUZIONE GRAFICA:

prolunga S_1 e S_2 fino alla loro intersezione, poi li somma con la regola del parallelogramma e si trova \vec{R} ; prolungando la retta d'azione di \vec{R} fino alla superficie curva si trova dove \vec{R} è applicata



$$\alpha = \arctan \frac{R_z}{R_x} = 47^\circ$$

OSSERVAZIONI FINALI:

Dimostriamo come sia corretto sostituire F_3 con la colonna di fluido fino al p.c.i.r. È ciò che abbiamo fatto nella STRADA PIÙ VELOCE

$$|F_3| = \rho_g A = \gamma_2 \Delta DB \cdot 1 = \gamma_2 W$$

calcolo ρ_g come se Δ appartenesse a γ_2

è esattamente il volumetto che ho aggiunto

$\Delta \cdot DB \cdot 1$ è un volume

W è il volume di γ_2 che mi fornisce un peso pari a F_3

nel nostro caso è $\rho_g \Delta DB \cdot DB$

$$\vec{P} - \vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{S} = \vec{P}$$

$$P_1 = \gamma W^1 = 47,81 \text{ N}$$

somma del volume del cono e di quello del cilindro

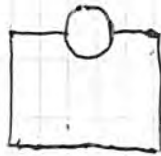
VOLUME CONO:

$$V = \pi R^2 \frac{h}{3} = \pi \frac{0,4 \text{ [m]}}{3} \left[0,4 \text{ [m]} \tan\left(\frac{60^\circ}{2}\right) \right]^2 = 3,49 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

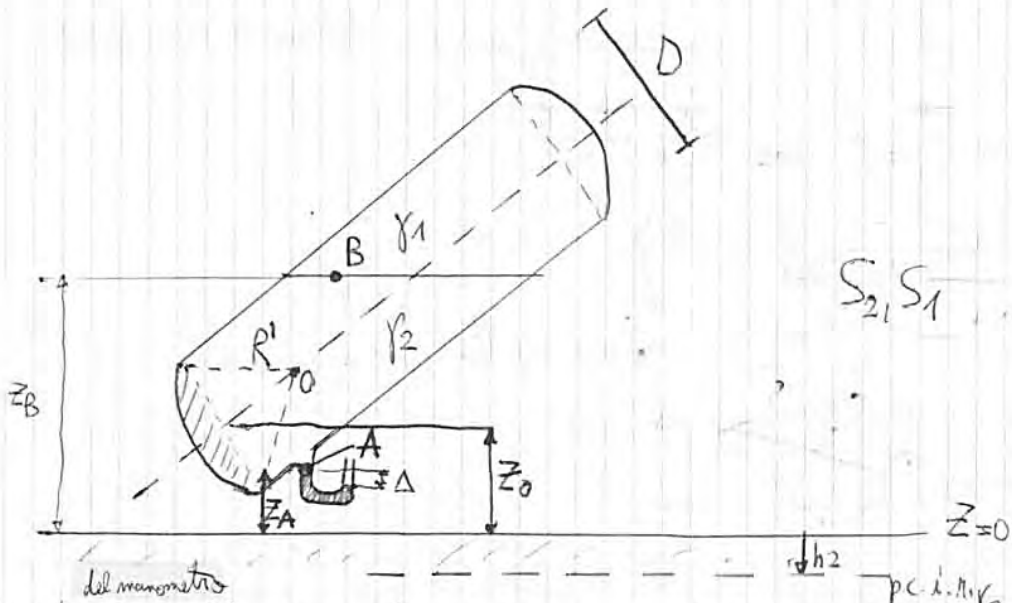
VOLUME CILINDRO:

$$V = \pi R^2 h = \pi \left[0,4 \tan\left(\frac{60^\circ}{2}\right) \right]^2 0,4 \text{ [m]} = 4,19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Cercare di fare l'esercizio sostituendo la valvola conica con quella sferica



Esercizio 3



La curva sinistra γ più alta di quella di destra \Rightarrow il γ_2 è ad una pressione inferiore a quella atmosferica (\Rightarrow in termini di pressione relativa γ_2 è in depressione).

$$P_A = -\gamma_m \Delta < 0$$

perché l'affondamento è verso l'alto in questo caso (rispetto p.c.i.r. γ_2)

$$h_2 = z_A + \frac{P_A}{\gamma_2} = -\frac{\gamma_m}{\gamma_2} \Delta + z_A = -1,97$$

Quindi il p.c.i.r. γ_2 è sotto a $z=0$.

$$S_{2V} = F_v = -F \sin \alpha + P = -126490 \text{ N}$$

\uparrow verticale
 \uparrow selgo positive le forze dirette verso il basso

$$|S_2| = \sqrt{S_{20}^2 + S_{2V}^2} = 280320$$

$$\alpha' = \arctan\left(\frac{S_{2V}}{S_{20}}\right)$$

Il verso esatto di S_2 sarà quello verde in figura precedente (all'inizio dell'esercizio ho messo α il verso di S_2 (quello con freccia nera) casualmente)

TROVAMO ORA p.c.i.r. γ_1 :

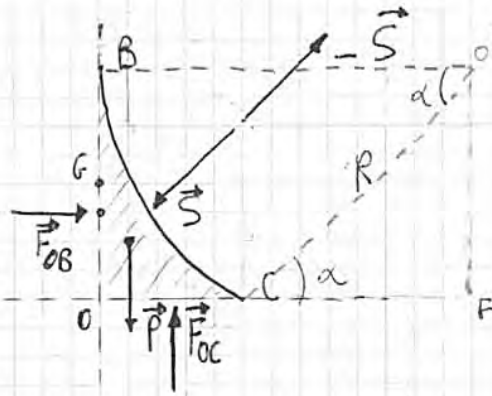
Consideriamo il punto $B \in \gamma_1$ e $E \in \gamma_2$

$$\text{se } B \in \gamma_2 \Rightarrow p_B = \gamma_2 (z_B + |h_2|)$$

$$\text{se } B \in \gamma_1 \Rightarrow p_B = \gamma_1 (h_1 - z_B) \quad \text{--- } B \text{ è sopra il p.c.i.r. } \gamma_2$$

$$p_B = p_B \Rightarrow h_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} (|h_2| + z_B) + z_B = -3,5 \text{ m}$$

Quindi p.c.i.r. γ_1 si trova ancora più sotto di p.c.i.r. γ_2



$$\vec{F}_{OB} = P_{OB} A_{OB} = \gamma \left(a + \frac{b}{2} \right) h \cdot 1 = 9800 \left(2,5 + \frac{14}{2} \right) 14 = 1303400 \text{ N}$$

$$P = \gamma W = \gamma \left\{ \underbrace{\left[b (l \cos \beta + R \cos \alpha) \right]}_{\substack{\text{area di tutto il} \\ \text{rettangolo a matita} \\ BO'FO}} - \left[\underbrace{\frac{b R \cos \alpha}{2}}_{\substack{\text{area triangolo} \\ CO'F}} + \underbrace{\frac{1}{2} R^2 \alpha}_{\substack{\text{area settore} \\ \text{circulari O'CB}}} \right] \cdot 1 = \right.$$

inverso in radianti
 $\Rightarrow \alpha = 0,6231$

$$\text{Area} = \pi R^2 \frac{\theta}{2\pi} = R^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

$$= \gamma \left[333,48 - (136,43 + 179,45) \right] = 9800 (17,6) = 172452,56 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{OC} = P_{OC} A_{OC} = \gamma (a+b) l \cos \beta = 9800 (2,5+14) 5 \cos(30^\circ) = 400484,5 \text{ N}$$

$$\vec{S} + \vec{F}_{OB} + \vec{F}_{OC} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} S_y + P - F_{OC} = 0 \\ S_x - F_{OB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_y = F_{OC} - P \\ S_x = F_{OB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_y = 527728,9 \text{ N} \\ S_x = 1303400 \text{ N} \end{cases}$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(1303400)^2 + (527728,9)^2} = 1406182,546 \text{ N}$$

Risostituendo x_2 nella (1) troviamo:

$$P_2 = 125064,001 \text{ Pa} \Rightarrow P_2 = P_2 - P_{atm} = 23764 \text{ Pa}$$

↑
pressione
relativa

$$\vec{F}_2 = P_2 A_{AC} = P_2 \left(\frac{x}{\cos \alpha} \cdot 1 \right) = 42740 \text{ N}$$

↑
spinta
dell'aria

$$l_x = \frac{x}{\cos \alpha} = 1,0 \text{ m}$$

~~$$C_{AC} G_a = \frac{I_{ox}}{x_a A} = \frac{\frac{l_x^3}{12}}{\frac{l_x + a}{2} \frac{l_x}{\cos \alpha}} = 0,42 \text{ m}$$~~

Calcolo della spinta dell'acqua nel tratto BC

~~$$\vec{F}_2 > \vec{F}_1 \Rightarrow R = F_2 - F_1 = 13223 \text{ N}$$~~

~~$$M = R \cdot l_{braccio} = 13223 \left(\frac{l_x}{2} + C_{AC} G_a \right) =$$~~

\vec{F}_2 è applicata nel baricentro perché nell'aria non c'è variazione della pressione (è piccolissima)

GIUSTO

$$\textcircled{M} = F_1 \left(\frac{l_x}{2} + C_{AC} G_a \right) - F_2 \left(\frac{l_x}{2} \right) = 8325 \text{ N} \cdot \text{m}$$

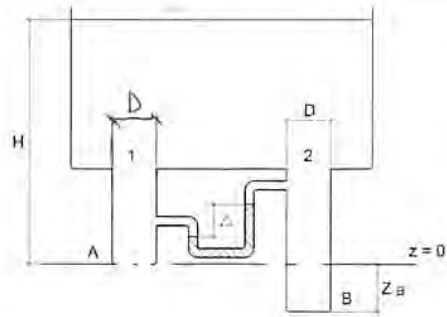
Peripico ha calcolato la pressione dell'aria diversamente, cioè come pressione esistente nel punto c (quando all'interfaccia lo posso anche considerare come appartenente al liquido).

$$\vec{F}_{aria} = P_c A = \gamma \underbrace{(a+x)}_{\text{altezza}} \underbrace{l_x}_{\text{area}} = 44454 \text{ N}$$

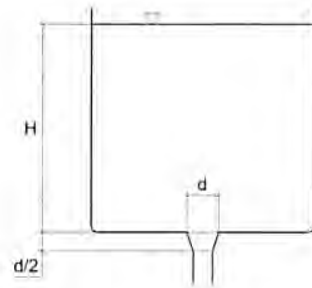
↑
tanto P_c liquido è all'interfaccia

Esercitazione n. 3 (Teorema di Bernoulli)

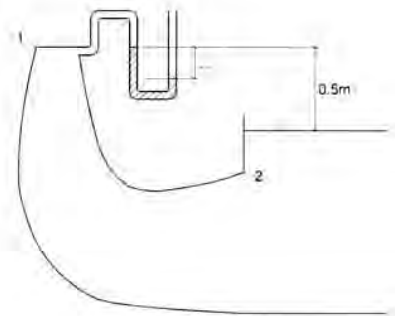
- 1 Da un serbatoio a livello costante si staccano due tubazioni verticali, ad imbocco raccordato, dalle quali effluisce a bocca piena liquido perfetto di peso specifico γ . Noti il carico H nel serbatoio rispetto al piano $z = 0$ e l'indicazione del manometro differenziale a mercurio si chiede, in valore e segno, sempre rispetto al piano $z = 0$, la quota della sezione di sbocco della seconda tubazione e la portata fluente in essa.
- $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$ $\Delta = 0,10 \text{ m}$ $D = 0,10 \text{ m}$
 $\gamma_m = 133300 \text{ N/m}^3$ $H = 5 \text{ m}$
 $[z_B = -1,26 \text{ m}; Q = 0,087 \text{ m}^3/\text{s Nm}]$



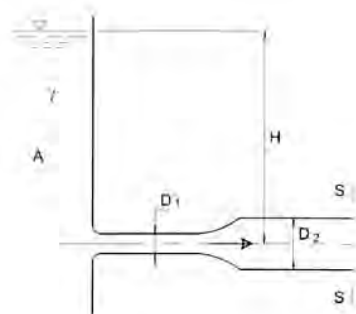
- 2 Calcolare il tempo necessario allo svuotamento del serbatoio di sezione Ω e livello H , che alimenta una luce in parete sottile di diametro d praticata sul fondo ($H \gg d$: liquido perfetto).
- $\Omega = 7,00 \text{ m}^2$ $H = 3 \text{ m}$ $d = 0,15 \text{ m}$
 $[T = 500 \text{ s} \approx 8 \text{ min}]$



- 3 Il diffusore di una turbina funzionante a $100 \text{ m}^3/\text{s}$ ha le seguenti caratteristiche: sezione d'ingresso $\Omega_1 = 13,5 \text{ m}^2$; sezione d'uscita $\Omega_2 = 62,5 \text{ m}^2$. Un manometro a mercurio ($\gamma_m = 133,300 \text{ N/m}^3$) è inserito nella sezione iniziale del diffusore, posta $0,50 \text{ m}$ sopra il livello del bacino di scarico, ed ha il menisco superiore in corrispondenza della stessa. Valutare il carico che si recupera rispetto ad una uguale turbina che lavora a pari portata e scarica all'aria a quota $+0,5 \text{ m}$ rispetto al pelo libero del bacino di scarico, e l'indicazione Δ del manometro a mercurio (trascurare le dissipazioni di energia nel diffusore).
- $[\Delta H = -3,17 \text{ m}; \Delta = -0,23 \text{ m}]$



- 4 Nel sistema in figura defluisce un liquido perfetto di peso specifico γ . Determinare la portata Q effluente e la pressione relativa p_1 lungo l'asse del primo tronco di tubazione.
- $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$ $H = 2 \text{ m}$ $D_1 = 0,05 \text{ m}$ $D_2 = 0,075 \text{ m}$
 $[Q = 27,71 \text{ l/s}; p_1 = -79900 \text{ Pa}]$



IDRAULICA ESERCITAZIONE

25-10-2011

ESERCITAZIONE N. 3

Richiamo del Teorema di Bernoulli

IPOTESI FONDAMENTALI

- fluido pesante (cioè soggetto al campo gravitazionale \vec{g})
- fluido perfetto (ipotesi più importante di tutte), cioè in cui gli sforzi tangenziali vengono annullati pari a 0, cioè non dissipa energia meccanica in calore e non ci sono attriti.
- fluido incompressibile (i liquidi generalmente sono considerati incompressibili)
- moto permanente: quando si trascurano le derivate temporali

(moto uniforme: quando si trascurano anche le derivate spaziali (ad esempio lungo)

una condotta si trascurano le derivate temporali e la derivata lungo la direzione dell'asse della condotta (\vec{s}))
direzione

Il teorema di Bernoulli, sotto queste ipotesi, è costante lungo le traiettorie (cioè lo applichiamo ad una particella e ad una traiettoria)

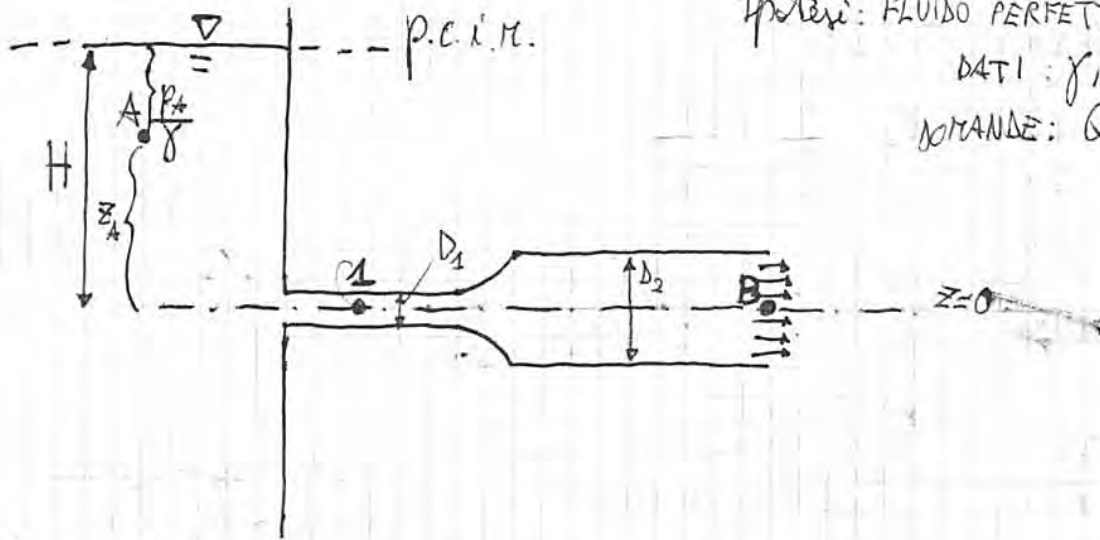
$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

energia per unità di peso specifica (infatti dividendo un'energia per un peso ottengo un'altrezza: H è un'altrezza).

Il γ di Bernoulli non può essere applicato tra due traiettorie diverse.

due traiettorie diverse hanno H diversi.

Esercizio 4



Ipotesi: FLUIDO PERFETTO

DATI: γ, H, D_1, D_2

DOMANDE: Q, P_B

Tutte le volte che il tratto di condotta considerato non è esattamente lungo \Rightarrow posso fare l'ipotesi di fluido perfetto. Infatti gli attriti sono proporzionali alla lunghezza del condotto.

Prendo un punto A sufficientemente lontano dalla condotta e un punto B alla fine della condotta. Ci sarà una traiettoria che unisce A e B.

La velocità di A è trascurabile (tanto più il serbatoio è grande e tanto più posso trascurarla)

Immaginiamo che il pelo libero sia costante $\left\{ \begin{array}{l} \text{perché rimbocco il} \\ \text{serbatoio man mano} \\ \text{e perché il livello si abbassa} \\ \text{con lentamente che posso} \\ \text{considerarlo costante} \end{array} \right.$

Flusso permanente, perché ipotizziamo un livello abbastanza costante, quindi non ci sono variazioni temporali.
Acqua \Rightarrow incompressibile e pesante.

Applichiamo Bernoulli:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_H$

poiché B è a contatto con l'atmosfera

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2gH}$$

$$Q = V_B \underbrace{\gamma D_2^2}_{\substack{\text{area} \\ \text{trasversale}}} = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2gH} = 0,027 \text{ m}^3/\text{s} = 27 \text{ l/s}$$

Bernoulli:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma} + \frac{V_{A'}^2}{2g}$$

come A' e A sono parti parallele della stessa res. tangenziale, per l'invarianza della portata $\Rightarrow V_A = V_{A'}$

Quindi: $z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma} = 0$

$$h_1 = 0$$

per tutti i punti sulla traiettoria individuata da A e A', il carico piezometrico è nullo. Quindi, poiché il carico piezometrico è costante (in questo caso 0), allora ha una distribuzione idrostatica delle pressioni.

In A' avrà pressione negativa (z è positiva, quindi affinché h sia nullo, allora la p dovrà essere negativa).

$$z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} = z_{B'} + \frac{P_{B'}}{\gamma} + \frac{V_{B'}^2}{2g}$$

$V_B = V_{B'}$

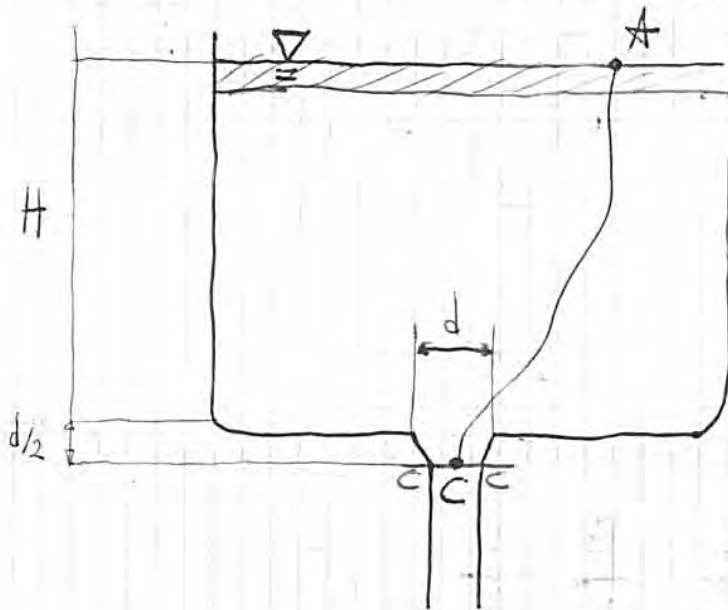
(con abbiamo ipotizzato che si trovi B)

$$h_2 = z_{B'} + \frac{P_{B'}}{\gamma} = z_B$$

Se z_B deve essere negativo \Rightarrow il carico piezometrico della 2° condotta è negativo.

Non importa dove pesca il manometro differenziale; più perare dove vuole perché il carico piezometrico è costante lungo la condotta. Tale costanza deriva dall'ipotesi di fluido perfetto. Se il fluido invece fosse stato reale e non perfetto, allora il carico piezometrico verrebbe diminuito a mano a mano andando verso il basso.

Esercizio 2 LUCE IN PARETE SOTTILE (porta sul fondo del serbatoio)



Dati: Ω, H, d
 Domanda: $? T$
 tempo di svuotamento del serbatoio

Il moto varia e non moto permanente: il pelo libero si abbassa nel tempo!!!

Approssimiamo ad una successione di stati permanenti: assumiamo che, poiché le dimensioni del foro sono piccole rispetto a quelle del serbatoio, il livello si abbassa molto lentamente. ^{dirà ch} _{Quando il pelo, in base a questo, è istantaneo} per istanti ha un moto permanente \Rightarrow successione di stati permanenti.

Consideriamo un volumetto ^(blu) infinitesimo T come quel volumetto infinitesimo di liquido che viene perso in un intervallo infinitesimo di tempo dt :

$V = \text{volume}$ $\rightarrow V(t+dt) = \Omega \left(H - \frac{dH}{dt} dt \right)$

$V(t) = \Omega H$

volume al tempo t

$dV = - \frac{dH}{dt} dt \Omega$ ①

↓
 Variazione di volume

diminuzione di carico

portata (è un volume per unità di tempo)

La conservazione della massa ci dice che: $dV = Q dt$ ②

Uguagliando la ① e la ② si ottiene:

$$-\frac{dH}{\sqrt{H}} = A\sqrt{2g} dt$$

integrando:

$$-2\sqrt{H} = A\sqrt{2g} t + C \quad (a)$$

Condizioni iniziali: $H = H_0 = 3 \text{ m}$ per $t = 0$

$$\Rightarrow C = -2\sqrt{H_0}$$

↓
sostituendo nella (a)

$$\Rightarrow 2\sqrt{H} = 2\sqrt{H_0} - A\sqrt{2g} t \Rightarrow H = \left(\sqrt{H_0} - \frac{A}{2}\sqrt{2g} t \right)^2$$

H dipende dal tempo in termini quadratici.

tempo di svuotamento: quanto deve valere t affinché $H(t)$ sia zero?

$$\sqrt{H_0} - \frac{A}{2}\sqrt{2g} T = 0 \Rightarrow$$

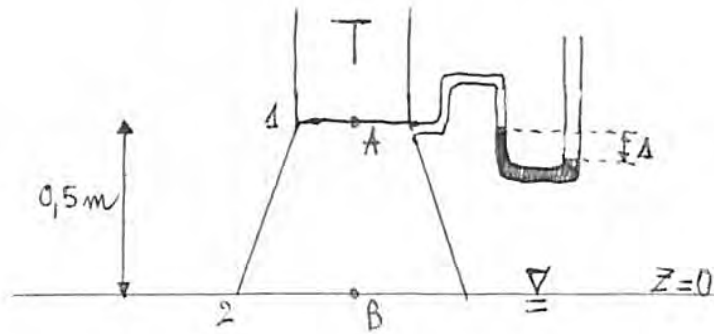
$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{H_0}{2g}} \frac{2}{A}, \quad A = \frac{C_c u d^2}{4\Omega}$$

$$\Rightarrow T \approx 0 \text{ min}$$

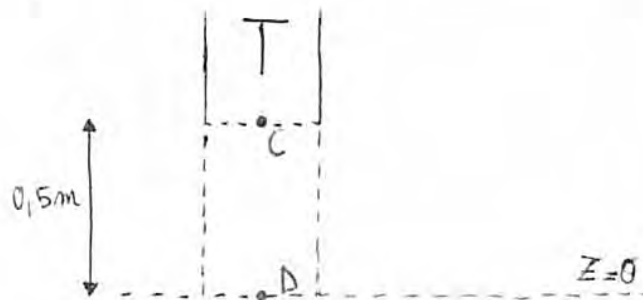
Osservazioni:

- La relazione di stato permanente vale finché il livello è alto.
(prossimo alla luce)
Quando il livello è basso T non vale più la relazione di stato permanente, ma di solito si fa questa approssimazione

- Fluido perfetto: per gran parte del moto le velocità sono basse \Rightarrow posso trascurare gli attriti (le velocità sono proporzionali al quadrato della velocità)
Però quando il livello è prossimo al foro \Rightarrow non è più vero che le vel. sono basse \Rightarrow non posso trascurare gli attriti, ma lo facciamo ugualmente.



$$H_A \approx H_B = 0 + \frac{V_B^2}{2g}$$



$$H_C = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g}$$

$$\Delta H = H_A - H_C = \frac{V_B^2}{2g} - \left(z_c + \frac{V_c^2}{2g} \right) = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\Omega_2} \right)^2 - \left[z_c + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\Omega_1} \right)^2 \right] =$$

$$= -3,17 \text{ m}$$

Ora calcolo l'indicazione Δ del manometro a mercurio:

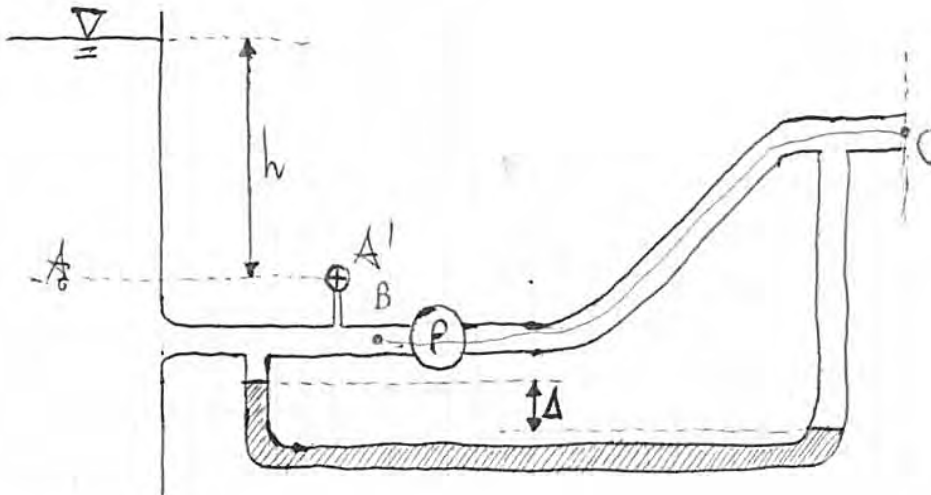
Applico Bernoulli tra A e B:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = \cancel{z_B} + \cancel{p_B} + \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow p_A = \gamma \left(\frac{V_B^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} - z_A \right) =$$

$$= \gamma \left[\frac{1}{2g} \left(\left(\frac{Q}{\Omega_2} \right)^2 - \left(\frac{Q}{\Omega_1} \right)^2 \right) - z_A \right] = -31028,2 \text{ Pa}$$

$$p_A = \gamma_m \Delta \Rightarrow \Delta = \frac{p_A}{\gamma_m} = -0,23 \text{ m}$$

ESERCIZIO 6 FATTO DA ME



La potenza della pompa è:

$$P = \gamma \Delta H Q$$

$\Delta H = \text{PREVALENZA}$: differenza di carico totale tra monte e valle della pompa

Applico Bernoulli alla tranche B → C:

$$\underbrace{z_B + \frac{P_B}{\gamma}}_{h_B} + \frac{v_B^2}{2g} = \underbrace{z_C + \frac{P_C}{\gamma}}_{h_C} + \frac{v_C^2}{2g} \Rightarrow \underbrace{\Delta H}_{H_B - H_C} = \underbrace{\delta}_{h_B - h_C} \quad (a)$$

poiché la portata deve rimanere costante e l'area è la stessa $\Rightarrow v_B = v_C$

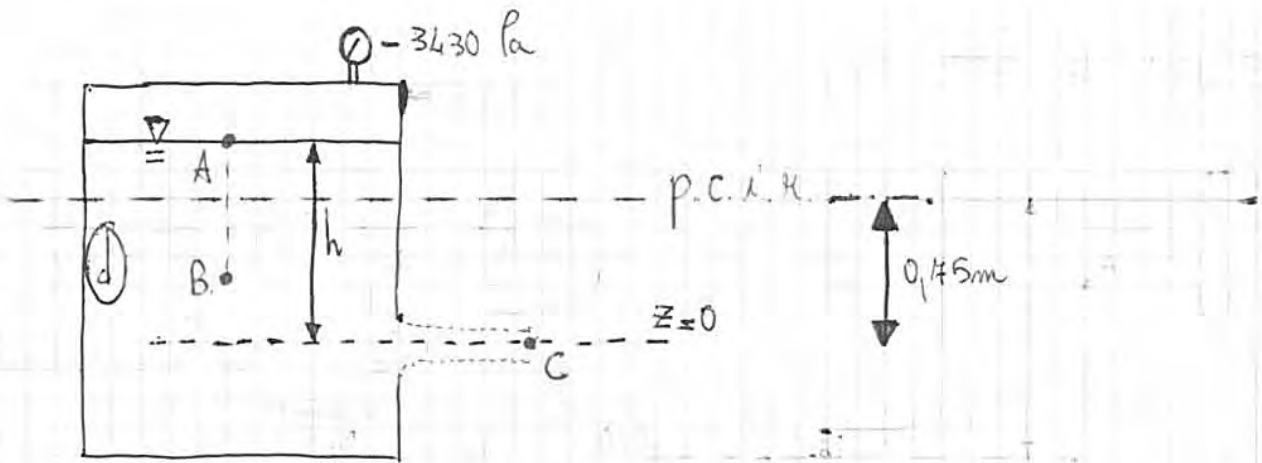
Si può calcolare anche così:

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \quad (b)$$

Uguagliando (a) e (b) ottengo:

$$\Delta H = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = 17,78 \text{ m}$$

$$\underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g}}_{\text{uguali}} = \underbrace{z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma} + \frac{u_{A'}^2}{2g}}_{\text{uguali}} \Rightarrow u_{A'} = \sqrt{\quad} = 3,43 \text{ m/s}$$



Considero i punti A e B sufficientemente lontani dalla luce, così da poterli considerare in condizioni statiche (fermi); applico dunque Stevino:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

Io voglio trovare la posizione del p.c.i.r. e dunque dove la $p_B = 0$.
Imponendo $p_B = 0$, si ottiene:

$$z_B = z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h + \frac{p_A}{\gamma} = 4,10 \text{ m} + \frac{-3430 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}} = 0,75 \text{ m}$$

Disegno il p.c.i.r. (verde)

Applico Bernoulli alla traiettoria B → C:

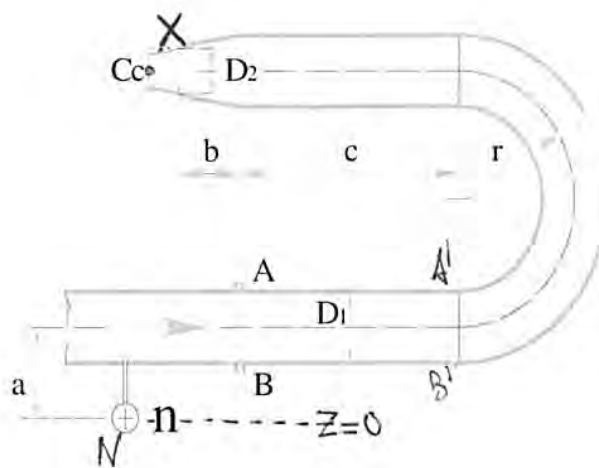
$$z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g}$$

$0,75$

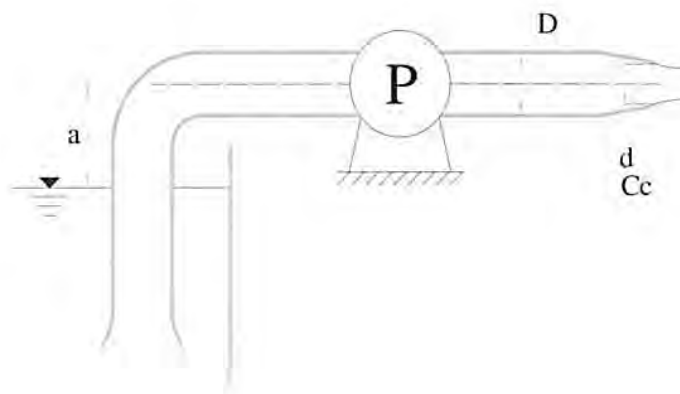
$$v_C = \sqrt{2 \cdot 0,75 \cdot g} = 3,836 \text{ m/s}$$

$$Q = v_C \cdot \Omega_C = v_C \cdot C_c \cdot \Omega = v_C \cdot 0,6 \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 4,52 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 4,52 \frac{\ell}{\text{s}}$$

- 4 Nel sistema in figura, posto in un piano verticale, defluisce olio che si può ritenere si comporti come un liquido perfetto. Determinare le componenti S_o orizzontale e S_v verticale della spinta che si scarica sulla flangia A-B.
 ($\gamma = 9316 \text{ N/m}^3$) $D_1 = 0,3 \text{ m}$; $D_2 = 0,2 \text{ m}$; $C_c = 0,85$;
 $a = 0,5 \text{ m}$; $b = 0,3 \text{ m}$; $c = 1 \text{ m}$; $r = 0,55 \text{ m}$; $n = 1 \text{ Kg/cm}^2$
 [$S_o = 13738 \text{ N}$; $S_v = 2589 \text{ N}$]

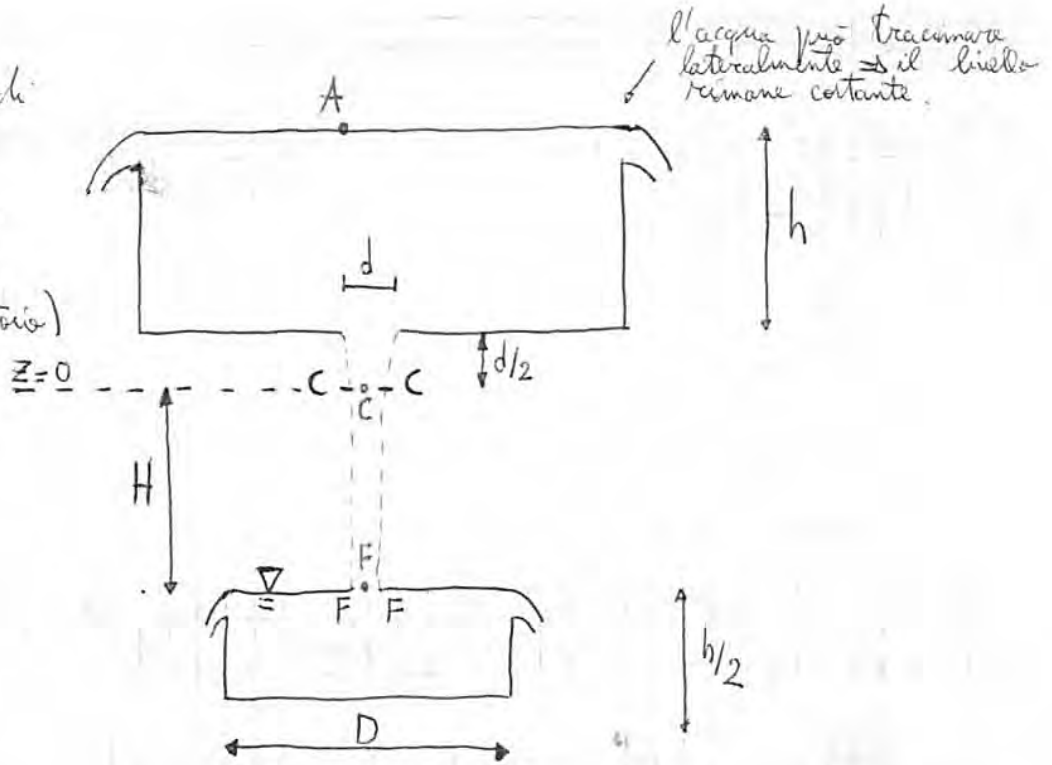


- 5 Una pompa solleva acqua da un serbatoio come mostrato in figura. Ammesso che il liquido si comporti come perfetto, determinare la componente orizzontale S_o della spinta sul supporto della pompa, quando la sua potenza teorica è P .
 $P = 10 \text{ kW}$; $a = 1,5 \text{ m}$; $D = 0,15 \text{ m}$; $d = 0,07 \text{ m}$; $C_c = 0,90$
 [$S_o = 2932 \text{ N}$].



Esercizio 1

hanno in presenza di un foro in parete sottile (non c'è un tubo cavitazionale nel fondo del serbatoio)



Indicimento
Le traiettorie non sono mai parallele, perché c'è continua convergenza del getto, però possiamo, ai fini dei calcoli, assumere che da C-C in poi le traiettorie sono parallele => distribuzione idrostatica delle pressioni.

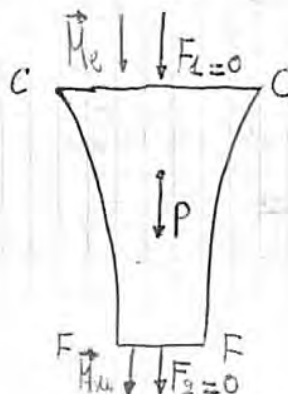
(infatti la loro curvatura è molto debole)

Calcoliamo il peso del getto; due strade:

- $P = \gamma W$. a trovare il volume del getto, ma esso è un solido di rotazione (non è un cilindro) => dovremmo usare il teorema di Guldino => strada molto laboriosa con i calcoli.

- equazione globale dell'equilibrio dinamico:

Dobbiamo applicare l'eq. globale ad un volume di controllo (in tal caso scegliamo il liquido compreso tra C ed F).



sulla sup. laterale non bisogna far forza perché il getto è a contatto con l'atmosfera => forza nulla.

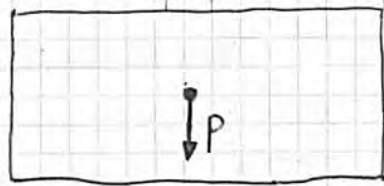
Eq. globale

$$P + F_C + M_e - M_u = 0 \Rightarrow P = M_u - M_e = 100 \text{ N}$$

Calcoliamo ora la spinta sul fondo del reattore: prendiamo un volume di controllo come il reattore, ma che taglia gli stramassi laterali:

$\downarrow M_e$ (flusso di quantità di moto entrante, dovuto al getto che sta entrando)

Seogliamo tale volume di controllo, il flusso di quantità di moto uscente dagli stramassi laterali, che solo componenti orizzontali che sono uguali e opposte \Rightarrow si annullano.
 Se invece prendo questo volume di controllo: $\Rightarrow M_u$ avere anche con componenti verticali uguali e non opposte \Rightarrow si sommano



$\uparrow -S$ (è quella che compare nell'equazione globale)

$\downarrow S$ (è la spinta incognita)

L'equaz. globale diventa:

$$P + F_C + M_e = 0 \Rightarrow P - (-S) + M_e = 0 \Rightarrow$$

\uparrow \uparrow
 $\vec{x} - S$ \vec{x} diretta verso l'alto

$$\Rightarrow P + S + M_e = 0 \Rightarrow S = -P - M_e$$

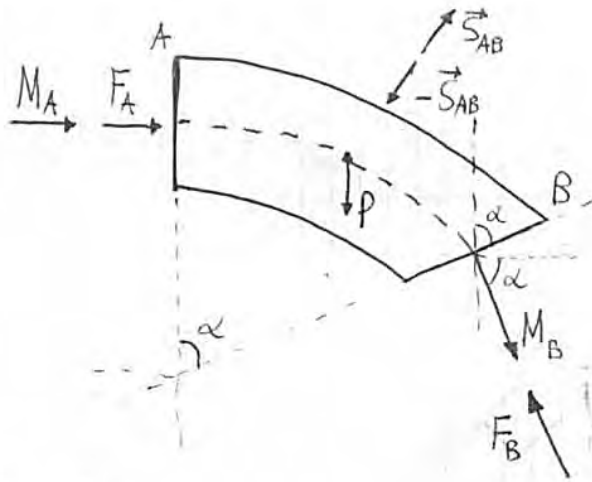
$$|S| = P + M_e$$

$$P = \gamma W = \gamma \frac{\pi D^2}{4} \frac{h}{2} = 3040,5 \text{ N}$$

$$M_e = M_u = 1087,52$$

\downarrow
 M_u calcolata prima

$$\Rightarrow |S| = 4046 \text{ N}$$



$$\vec{F}_C = \vec{F}_A + \vec{F}_B - \vec{S}_{AB}$$

l'eq globale scivola:

$$\vec{P} + (\vec{F}_A + \vec{F}_B - \vec{S}_{AB}) + \vec{M}_A - \vec{M}_B = 0$$

$$P = \gamma W = \gamma \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \left(\frac{2\pi}{360} R_{AB} \alpha \right) = 225366 N$$

↑
 area della sezione ↑
 lunghezza dell'arco di circonferenza A-B

A' lo stato viene appartenente al posto piezometrico, che è in condizioni statiche:

$$H_A' = z_A$$

$$h_A'' = h_A' \text{ (perché c'è distribuzione idrostatica delle pressioni)}$$

$$H_A'' = H_A' = z_A \text{ (la velocità è la stessa } \Rightarrow \text{ termine cinetico uguale)}$$

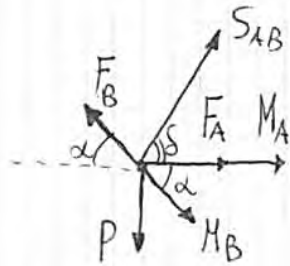
~~trascurando le dispersioni, applico Bernoulli:~~

trascurando le dispersioni, applico Bernoulli:

$$H_A'' = H_A'$$

$$z_A = H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g}$$

Proiettiamo ora l'equazione globale:



$$\rightarrow : (S_{AB})_X + F_A - (F_B \cos \alpha) + M_A - M_B \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

è il - nell'equazione di partenza: $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + (-\vec{S}_{AB}) + \vec{M}_A - \vec{M}_B = 0$

$$\Rightarrow (S_{AB})_X = 254663 \text{ N}$$

$$\uparrow : (S_{AB})_Z + F_B \sin \alpha - P - (-M_B \sin \alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$(F_B + M_B) \sin \alpha - P = \underbrace{445000 \text{ N}}_{(S_{AB})_Z}$$

$$|S_{AB}| = \sqrt{(S_{AB})_X^2 + (S_{AB})_Z^2} = 512716,5 \text{ N}$$

$$\delta = \arctan \left(\frac{(S_{AB})_Z}{(S_{AB})_X} \right) = 60^\circ$$

Riportiamo ora i risultati che dovremmo trovare:

$$p_c = 883599 \text{ Pa} \quad (8,8 \text{ bar}) : \text{ siamo cresciuti di } 6 \text{ bar}$$

$$F_c = 3057253 \text{ N}$$

$$M_c = 564000 \text{ N}$$

$$F_D = 3125069 \text{ N}$$

$$P = 152586 \text{ N}$$

a causa del peso della colonna di liquido nella condotta $\Rightarrow F_c$ e F_D sono più grandi di F_A e F_B

$S_{CD} = 3095410 \rightarrow$ è molto grande perché le pressioni in C e D sono molto più grandi \Rightarrow è il tratto CD che deve essere rafforzato

Applico Bernoulli tra le sezioni 1 e 2:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \frac{\Delta P}{\gamma} + \frac{\Delta z}{1} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \Rightarrow \Delta p = \gamma \Delta H$$

= 0, poiché la condotta non si inclina, ma rimane orizzontale

la condotta non cambia diametro \Rightarrow ipotizzando che Q sia costante \Rightarrow vel. di ingresso = vel. di uscita.

$$P = \gamma \Delta H Q$$

$$S_0 = \Delta p \Omega = \gamma \Delta H \Omega = \gamma \Delta H \frac{Q}{U} = \frac{P}{U}$$

$\Delta p = \gamma \Delta H$ U vel. media

Dobbiamo dunque calcolarci la vel. media:

Applichiamo Bernoulli tra A e C (a rigore non potremmo farlo perché c'è una pompa di mezzo):

$$H_C - H_A = \Delta H = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{P}{\gamma U \Omega} \quad (1)$$

$$H_C - H_A = \left(z_C + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{u_C^2}{2g} \right) - \left(z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{P}{\gamma U \Omega}$$

$$\Rightarrow a + \frac{u_C^2}{2g} = \frac{P}{\gamma U \Omega} \quad (a)$$

Esprimiamo la portata Q:

$$Q = U \Omega = U \frac{\pi D^2}{4} \quad (1)$$

la possiamo anche scrivere come:

$$Q = u_C \Omega_C = u_C \frac{\pi d^2}{4} C_C \quad (2)$$

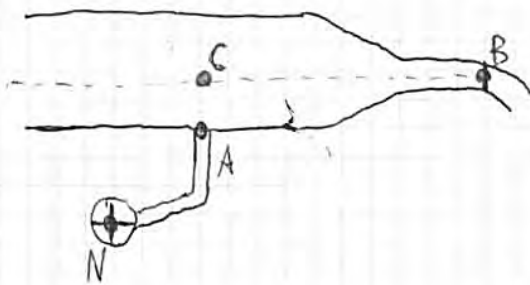
Uguagliando (1) e (2) si ottiene:

$$\Rightarrow u_C = U \left(\frac{D}{d} \right)^2 \frac{1}{C_C} \quad (b)$$

$$299,51 + \frac{Q^2}{4,96} = \frac{Q^2}{6,87 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 299,51 = Q^2 \left(\frac{1}{6,87 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{4,96} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 299,51 = Q^2 (143,25) \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{299,51}{143,25}} = 1,45 \text{ m}^3/\text{s}$$

* RISOLUZIONE GIUSTA DELLA PARTE DELL'ESERCIZIO NELLA PAG. SEGUENTE



$h_N = h_A$ (l'acqua nel tratto N-A è ferma)

$h_A = h_C$ (poiché le traiettorie sono rettilinee e parallele \Rightarrow distribuzione)
 idrostatica

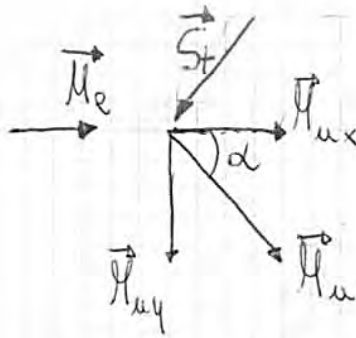
Applico Bernoulli tra C e B.
 B è a p nulla

$$z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{w_C^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{w_B^2}{2g}$$

$h_C = h_N$

$$z_N + \frac{p_N}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} = \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^2}$$

$$-0,80 + \frac{30 \cdot 10000 \cdot 9,81}{9800} + \frac{Q^2}{2 \cdot 9,81 \left(\frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} \right)^2} = \frac{Q^2}{2 \cdot 9,81 \left(\frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} \cdot 0,6 \right)^2}$$



~~$$M_{u_x} = M_u \cos \alpha = 111123,9$$

$$M_{u_y} = M_u \sin \alpha = 111123,9$$

$$R_x = M_e + M_{u_x} = 288246,9 \text{ N}$$

$$R_y = M_{u_y} = 111123,9 \text{ N}$$

$$|R| = |S_+| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$~~

$$\vec{S}_+ + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$\rightarrow -S_{+x} + M_e - (M_{u_x}) = 0 \Rightarrow S_{+x} = M_e - M_u \cos \alpha = \textcircled{a}$$

$$\uparrow -S_{+y} - (-M_{u_y}) = 0 \Rightarrow S_{+y} = M_{u_y} = \textcircled{b}$$

$$\textcircled{a} = 46029,1 \text{ N}$$

$$\textcircled{b} = 111123,9 \text{ N}$$

$$|S_+| = \sqrt{S_{+x}^2 + S_{+y}^2} = 120249,7 \text{ N}$$



$$S_{+x} = S_{+y} \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{S_{+x}}{S_{+y}} = 22,5^\circ$$

La spinta sul tavolo è il vettore opposto a \vec{S}_+

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{P_F}{9316} - 0,131 u_F^2 = 1,4 \\ \frac{P_F}{9316} + \frac{u_F^2}{10,62} = 0,553 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{sottrai} \\ \text{la } 2^{\text{a}} \\ \text{alla } 1^{\text{a}}}} \begin{cases} \text{a Roberto: } p_F = 81554,94 \text{ Pa} \\ u_F = 5 \text{ m/s} \\ -0,182 u_F^2 = 0,544 \end{cases}$$

Calcola la componente verticale di S_2 che è data dal peso del liquido contenuto nel:



Questo fluido contenuto qui carica il suo peso nella sezione A'B'.

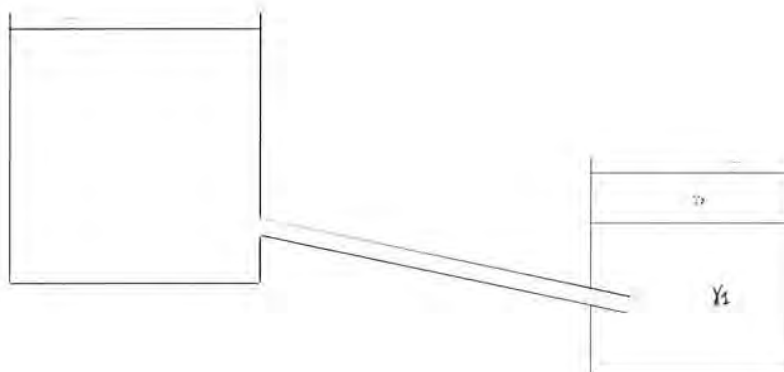
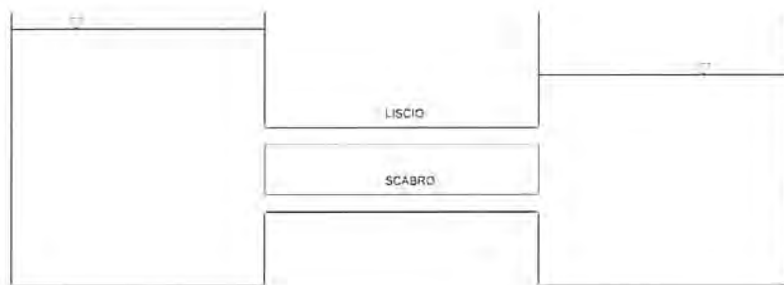
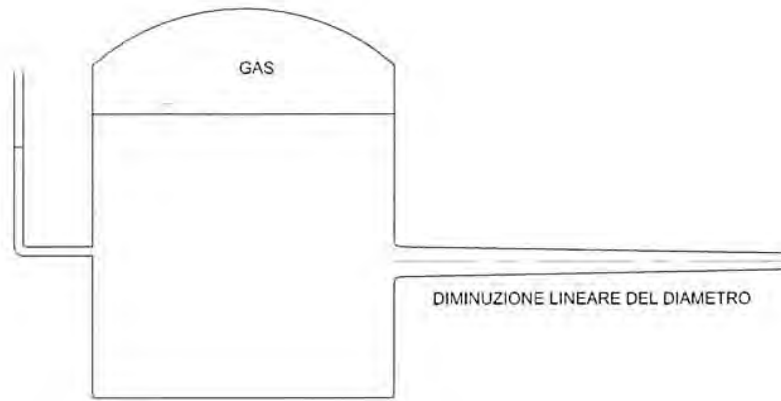
$$S_{2y} = \gamma \left(\underbrace{\frac{\pi D_1^2}{4} \cdot \pi R}_{\text{area semicorona}} + \underbrace{\frac{\pi D_1^2}{4} \cdot C}_{\text{area cilindro}} + \underbrace{\frac{1}{3} \pi b \left(\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_1}{2} \frac{D_2}{2}\right) + \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 \right)}_{\text{volume tronco di cono}} \right) = 1935,35 \text{ N}$$

$$= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + rR + r^2) =$$

Dunque la componente verticale della spinta è:

$$S_V = P + S_{2y} = 658,51 + 1935,35 = 2594 \text{ N}$$

5 Tracciare qualitativamente le linee dei carichi totali e dei carichi piezometrici relative alle condotte riportate nelle seguenti figure.



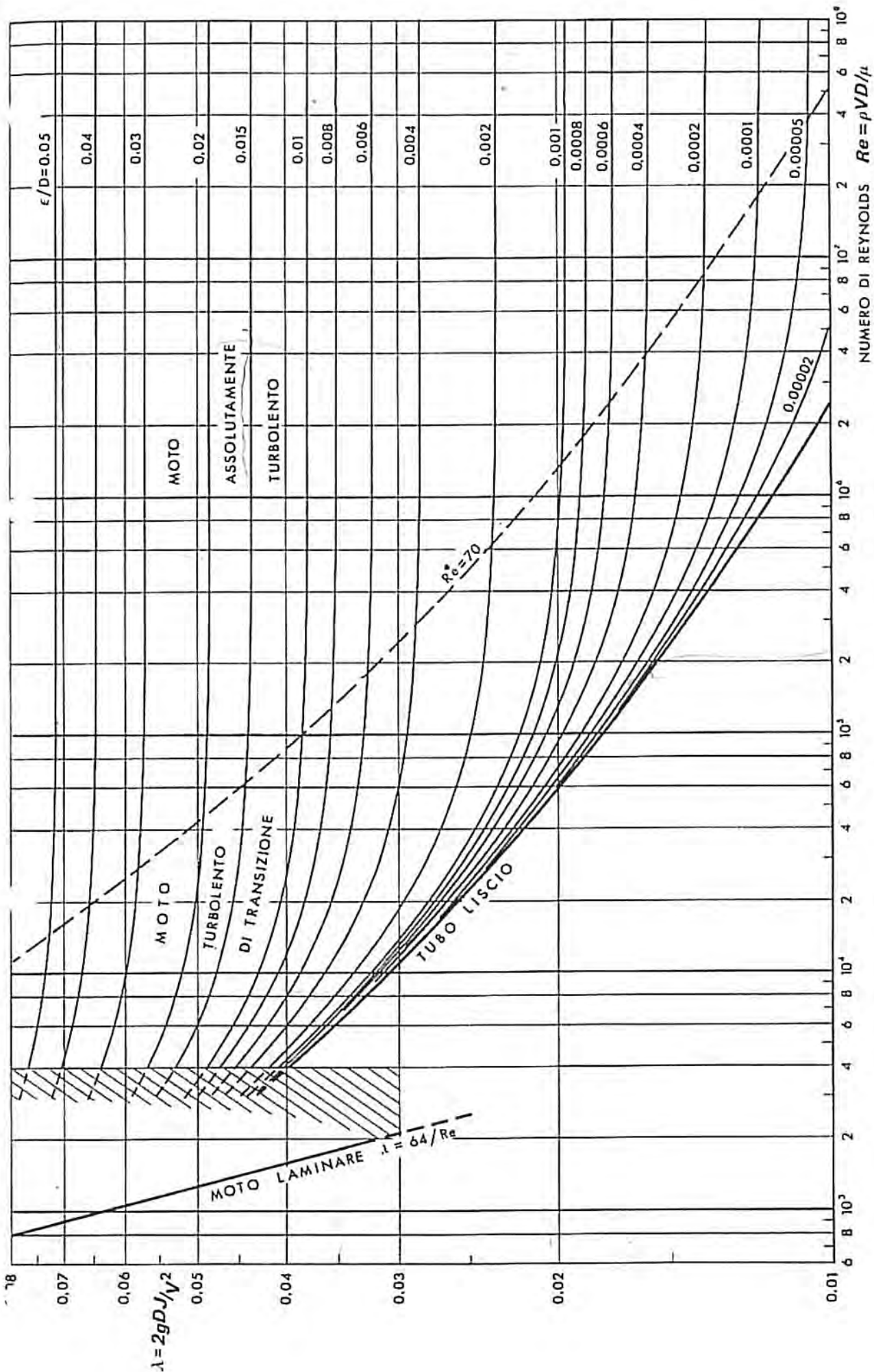


Fig. 7.II

Per valutare la λ ci serve dell'abaco di Moody:

$Re < 2000$ $\lambda = \frac{64}{Re}$ Moto laminare

$2000 < Re < 4000$ (non a nostra amora formula giusta) Zona di transizione

FORMULA DI COLEBROOK e WHITE

Moto turbolento di transizione
(che dipende sia da Re che da $\frac{\epsilon}{D}$)
di λ

FORMULA DI PRANDTL-KARMAN

Moto turbolento pienamente sviluppato
quando $Re^* > 10$
nel di attrito, $\mu_* = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\rho}}$
 $Re^* = \frac{\mu_* \epsilon}{\nu}$

(l'indice di resistenza dipende solo da $\frac{\epsilon}{D}$ e non da Re)

• Il TUBO LISCIO è quando $Re^* < 5$: si intende idraulicamente liscio perché la ruggine è tutta sommersa nel sottile strato viscoso e non dà resistenza offerta al moto. Abbiamo, per il tubo liscio, due formule:
dunque contributo in termini di

formula di Blasius $\lambda = 0,3164 Re^{-0,25}$
formula di Prandtl-Karman per tubo liscio

hanno un moto permanente \Rightarrow non c'è accumulo di portata locale \Rightarrow
 \Rightarrow per ~~la continuità~~ continuità, la portata che trasceva dallo
 stamazzo deve essere pari a quella che entra tramite la
 condotta:

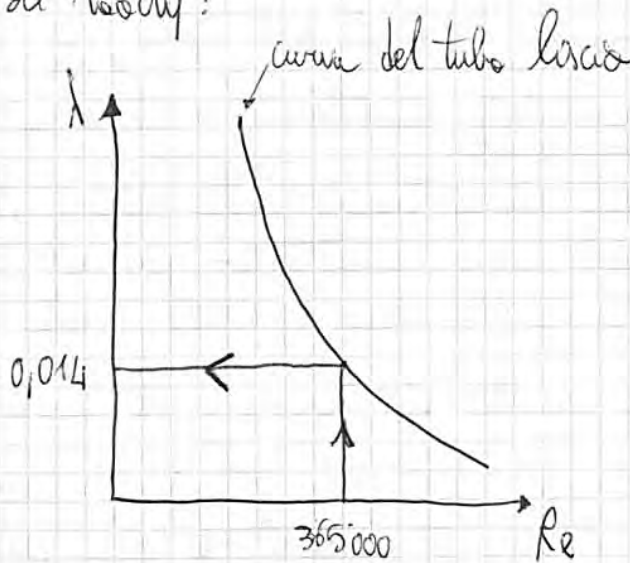
$$Q = L \cdot H \cdot 0,41 \sqrt{2gH} = 0,0284 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{4 \cdot Q}{\pi D^2} = 3,55 \text{ m/s}$$

Il testo del problema ci dice che è un tubo liscio.

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = 365000$$

dal diagramma di Moody:



la formula di

Charnoff-Blancius per verificare il valore trovato: $\lambda = 0,3164 Re^{-0,25} = 0,0129$

~~la formula di Charnoff-Blancius per verificare il valore trovato:~~

$$\Delta Y = \sum l + \frac{u^2}{2g} \overset{\substack{\text{formula} \\ \text{di Darcy-Weisbach}}}{=} \lambda \frac{u^2}{2g D} l + \frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{D} + 1 \right) = 1,55 \text{ m}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{2g \Delta \frac{\rho_m - \rho}{\rho}}$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g \Delta \frac{\rho_m - \rho}{\rho}}$$

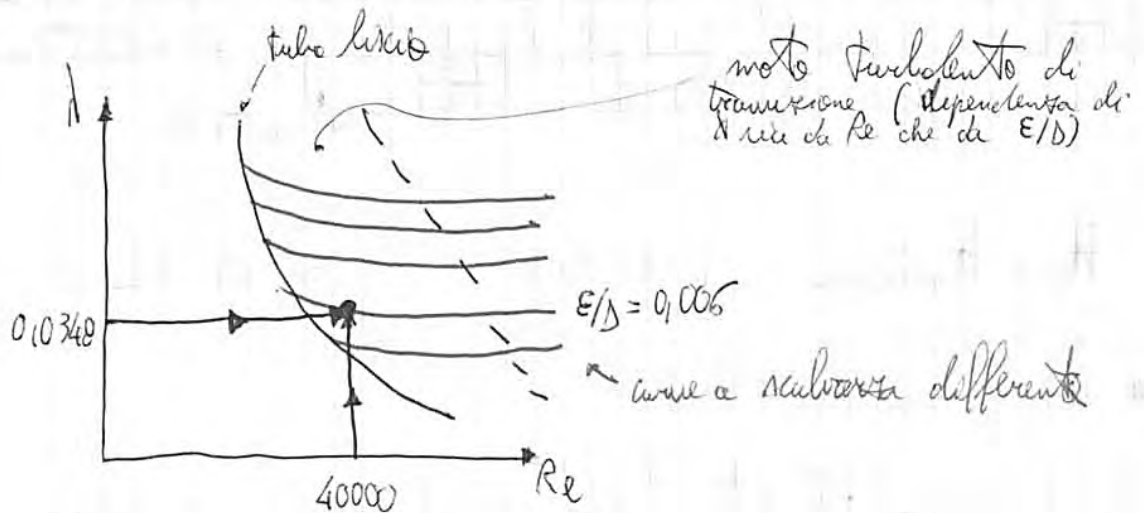
Calcoliamo ora ε :

$$\gamma = \lambda L + \frac{u^2}{2g} = \lambda \frac{u^2 L}{2g D} + \frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \left(\lambda \frac{L}{D} + 1 \right) \Rightarrow$$

↑
legge di
Darcy-Weisbach

$$\Rightarrow \lambda = \frac{D}{L} \left(\frac{2g \gamma}{u^2} - 1 \right) = 0,0348$$

$$Re = \frac{u D}{\nu} = 39250 \approx 40000$$



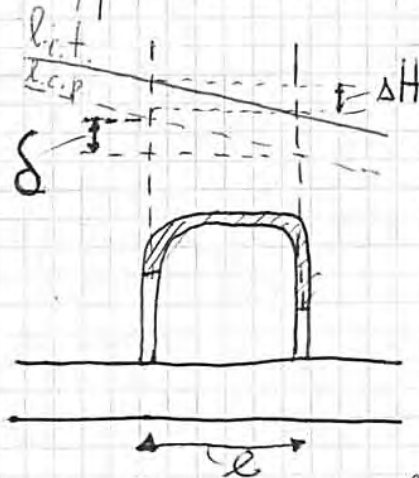
$$\varepsilon = 0,0006 \cdot D = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$Q = \underbrace{\frac{\pi d^2}{4}}_{\Omega_c} C_c \quad w_c = 0,046 \text{ m}^3/\text{s}$$

Quindi posso scrivere l'equaz. di bilancio energetico:

$$z_1 - h_A = \sum L + \frac{u^2}{2g}$$

\sum non lo conosciamo, per calcolarlo usiamo il manometro differenziale.



$$\Delta H = \delta \quad (\text{le due linee sono parallele})$$

per definizione: $\Delta H = \sum l$

$$\Rightarrow \sum l = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \quad \Rightarrow \sum = \frac{\Delta}{l} \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} = 0,04$$

formula del manometro differenziale a U ribaltata.

Nonque alibiamo:

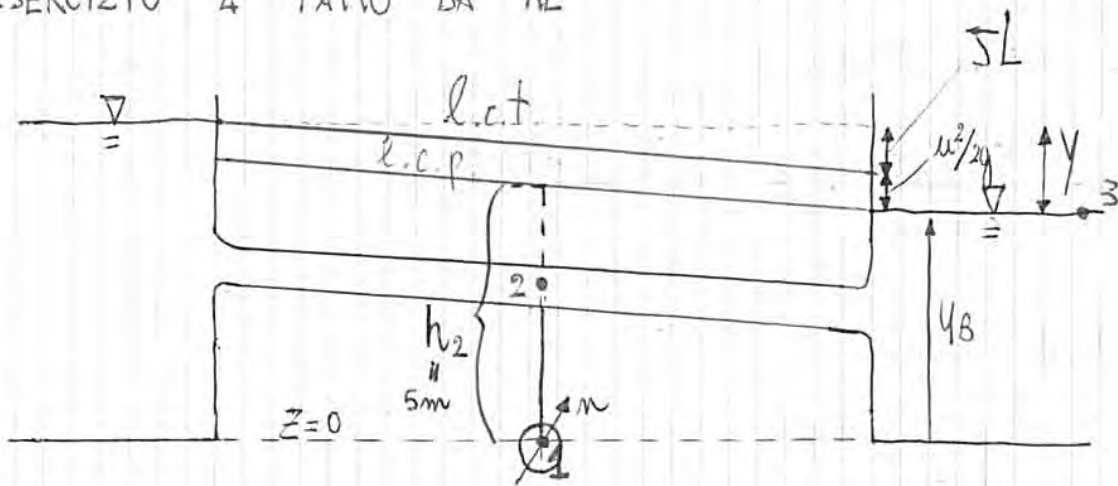
$$z_1 - h_A = 0,04L + \frac{u^2}{2g}$$

Non alibiamo la velocità u del liquido nello condotto.

$$z_1 - h_A = 0,04L + \frac{Q^2}{g \pi^2 D^2} \quad (1) \quad \text{Alibiamo in la portata, ma non il diametro.}$$

Devo dunque aggiungere a questa formula, la formula di

ESERCIZIO 4 FATTO DA ME



Svolgimento

$h_1 = h_2$: distribuzione idrostatica delle pressioni (trattoria rettilinea e parallela)

$$h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = 0,5 \cdot 10000 \cdot 9,8 \left[\frac{N}{m^2} \right] \cdot \frac{1}{9800} \left[\frac{m^3}{N} \right] = 5 \text{ m}$$

BILANCIO ENERGETICO: $(h_2 - y_B) = \frac{S}{2} \Rightarrow S = \frac{5 - 4,9}{1} = 2 \cdot 10^{-3}$

Usa la formula di Colebrook-White (che è la formula più generale di tutte):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

Quanto vale $Re \sqrt{\lambda}$?

$$Re = \frac{u D}{\nu} ; \quad S = \lambda \frac{u^2}{2gD} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{2gDS}}{u} \Rightarrow Re \sqrt{\lambda} = \frac{u D}{\nu} \frac{\sqrt{2gDS}}{u} = \frac{D \sqrt{2gDS}}{\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{3,7 \cdot 0,50} + \frac{2,51}{\frac{0,50}{1,3 \cdot 10^{-5}} \sqrt{2 \cdot 9,84 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} \right) = 6,998$$

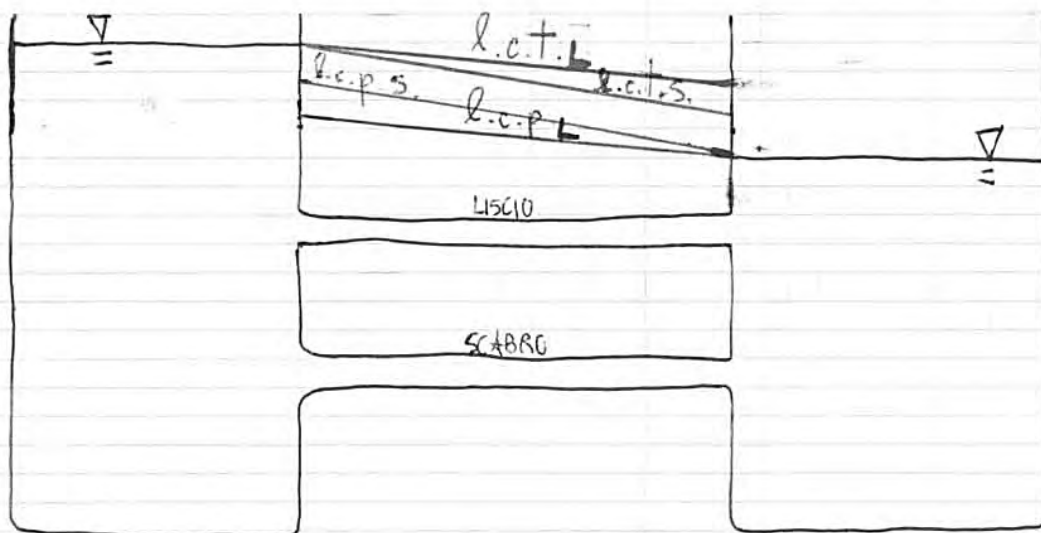
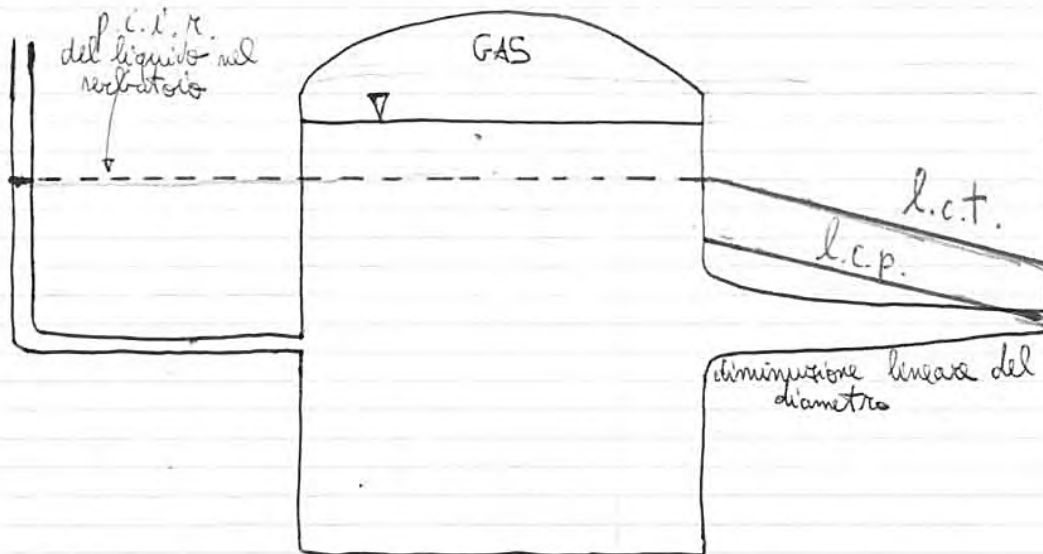
$$\text{ma } \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{2gDS}}{u} \Rightarrow \frac{u}{\sqrt{2gDS}} = 6,998 \Rightarrow u = 6,998 \sqrt{2gDS} = 0,980 \text{ m/s}$$

$$Q = u \cdot \Omega = u \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 0,194 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu} = \frac{0,988 \text{ [m/s]} \cdot 0,5 \text{ [m]}}{1,3 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s}]} = 380 \text{ 000}$$

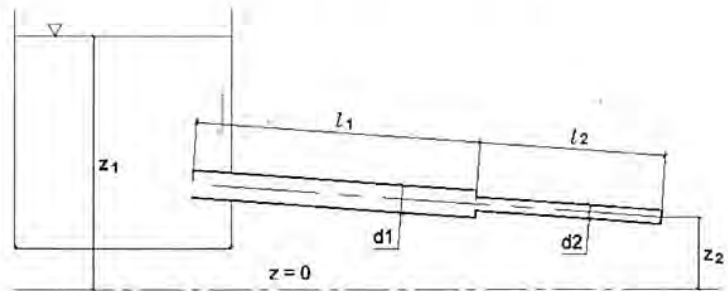
$$Y = \sum L + \frac{u^2}{2g} = \lambda \frac{u^2}{2gD} L + \frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \left(\lambda \frac{L}{D} + 1 \right)$$

ESERCIZIO 5 FATTO DA ME



Esercitazione n. 6 (Piezometriche brevi condotte: perdite localizzate e formule pratiche)

1 La condotta indicata in figura è costituita da due tronchi di diametri rispettivamente d_1 e d_2 , lunghezza l_1 e l_2 e scabrezze corrispondenti ai coefficienti di Darcy β_1 e β_2 . Noti il carico z_1 nel serbatoio e la quota z_2 del centro della sezione di sbocco, determinare la portata Q effluente all'aria. [$J = \beta Q^2 D^{-5}$]
 Dati: $l_1 = 45$ m; $l_2 = 25$ m; $d_1 = 470$ mm;
 $d_2 = 300$ mm; $z_1 = 10$ m; $z_2 = 5$ m.
 [$Q = 0.367$ m³/s]



Tubi nuovi acciaio/ghisa ($d < 500$ mm):
 $\beta = 0.00164 + 0.0000462/d$

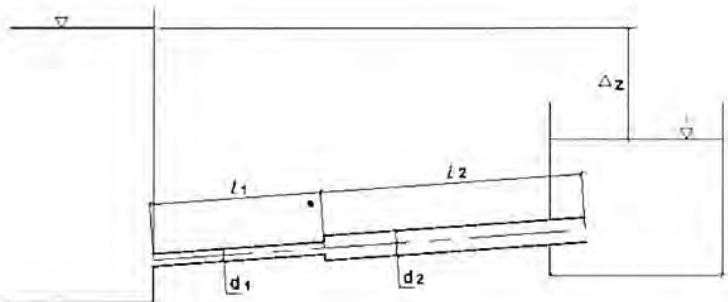
Valori sperimentali del coefficiente ξ (brusco restringimento) $d \bar{e}$ in [m]

D_2/D_1	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	
ξ	0,50	0,477	0,452	0,425	0,396	
D_2/D_1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ξ	0,358	0,31	0,243	0,166	0,086	0

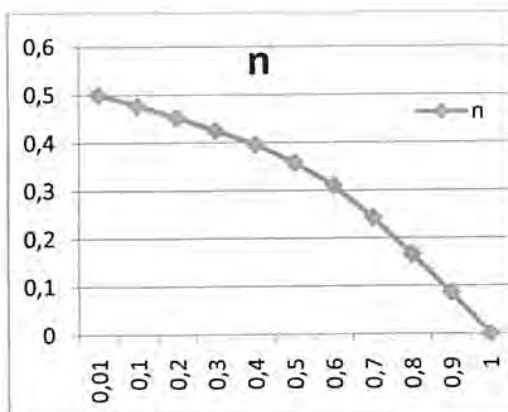
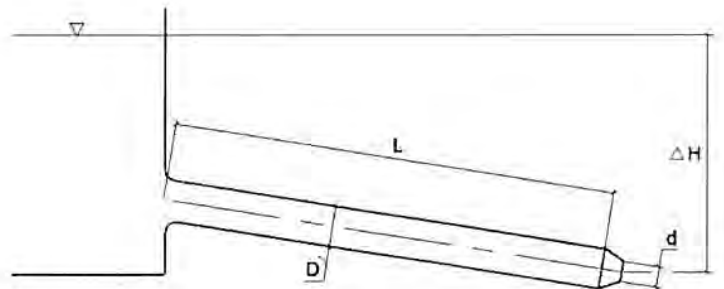
→ VEDI GRAFICO IN FONDO ALLA PAGINA

sarebbe n

2 Determinare quale portata passa fra due serbatoi collegati da due tronchi di tubazione in serie come indicato in figura. Tracciare le linee dei carichi totali e piezometrica. [$J = \beta' Q^2 D^{-5,33}$]
 Dati: $D_1 = 125$ mm; $D_2 = 200$ mm; $L_1 = 5$ m;
 $L_2 = 10$ m; $\Delta z = 1,2$ m; $\beta' = 0,0019$ s² m^{-2,33}
 [$Q = 0,033$ m³/s]



3 Calcolare la portata effluente all'aria sotto il carico ΔH attraverso il condotto di lunghezza L e diametro D e tracciare le linee dei carichi totali e piezometrici nei due casi [$J = U^2 / (C^2 R)$]:
 a) efflusso con bocchello terminale di diametri D e d ; [$Q = 4,6$ l/s]
 b) efflusso senza bocchello. [$Q = 14,8$ l/s]
 Dati: $D = 8$ cm; $d = 4$ cm; $L = 3$ m; $C_c = 0,85$;
 $\Delta H = 1$ m; k (Strickler) = 93 m^{1/3} s⁻¹.



IDRAULICA ESERCITAZIONE

29-11-2011

PERDITE DI CARICO LOCALIZZATE - Esercitazione n. 6
 Ce le ho quando considero un tratto di condotta che si discosta molto dalla condizione uniforme (→ bruschi allargamenti, restringimenti...)
 Bisogna usare formule empiriche:

$$\Delta H = n \frac{V^2}{2g}$$

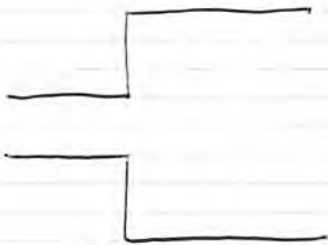
velocità a valle dell'ostruzione

perdita di carico localizzata

Brusco allargamento:

$$\Delta H = \frac{(V_m - V_v)^2}{2g} = n \frac{V_v^2}{2g}$$

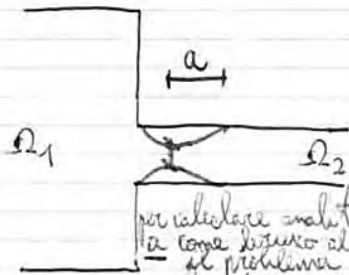
m : monte, v : valle



$$n = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \quad \textcircled{1}$$

1: monte
2: valle

Brusco restringimento: $\Delta H = n \frac{V_v^2}{2g}$



$$n = f \left(\frac{D_2}{D_1} \right)$$

non abbiamo espressioni analitiche → abbiamo fatto riferimento a tabelle

per calcolare analiticamente n avrei potuto considerare il tratto in zona di pieno allargamento e quindi usare la formula $\textcircled{1}$; il problema è che io non so quanto vale di preciso la sezione reale e quindi per calcolare n devo usare tabelle

