Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 195

DATA : 10/01/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Barbero

MATERIA : Financial Markets and Instruments

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 24

FINANCIAL MARKETS AND INSTRUMENTS

Barbero Andrea

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 24

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 24

Risk avversion and capital allocation to risky assets

Misure del Rischio		
Value at Risk (VaR)	*"Noi siamo X % sicuri che non perderemo più di V € nei prossimi N giorni."* Il VaR è un quantile della distribuzione delle perdite.	$\boldsymbol{VaR = \sqrt{N} * z_{X\%} * Volatility * W_0}$
Problemi: non dice nulla sulle code (simile al SL1); non è subattittivo (al contrario del CTE)		$\min x_\alpha \mid F_x(x) \geq \alpha$
Conditional Tail Expectation (CTE)	*"Assumendo che il valore finale del portafoglio cada nel 5% più basso dei possibili risultati, qual è il suo valore atteso?"*	Valore atteso che tiene conto dell'intera coda della distribuzione, in particolare degli scenari peggiori.
Lower Partial Standard Deviation (LPSD)	È la deviazione standard calcolata soltanto sui valori al di sotto del renditmento atteso. È una misura del "downside risk"	

Avversione al rischio e Utilità		
Utilità	Assumiamo che ogni investitore possa assegnare un benessere, o utilità, basato sul rendimento atteso e sul rischio di un portafoglio.	
Von Neumann-Morgenstern utility	$U(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$	Es.: lotteria → Con probabilità p vinco x, ed assicio un'utilità u all'avere x soldi.
U(-): utilità attesa **u(-):** utilità payoff certo	- È una funzione crescente (preferiamo avere più ricchezza che meno) - È una funzione concava → $u(E[X]) > E[u(X)]$ - Utilità ordinale: conta l'ordinamento delle preferenze - Una trasformazione affine (ax+b) dell'utilità non ha effetto sull'ordinamento	
Risk premium $\rho_u(X)$	$u\big(E[X] - \rho_u(X)\big) = U(X)$	Il premio per il rischio è il minimo spread che voglio per correre il rischio e quindi spostarmi dal CE a μ
Certo equivalente	$CE = E[X] - \rho_u(X)$	

Facendo lo sviluppo di Taylor (I grado a destra e II grado a sinistra)	$U(X) = E[u(X)] = E[u(x+\epsilon)] = E\left[u(x) + \epsilon u'(x) + \frac{1}{2}\epsilon^2 u''(x)\right]$ $= u(x) + E[\epsilon]u'(x) + \frac{1}{2}E[\epsilon^2]u''(x)$ $= u(x) + 0 * u'(x) + \frac{1}{2}Var(\epsilon)u''(x)$ $= u(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x)$
$u\big(E[X] - \rho_u(X)\big) \simeq u(x) - \rho_u(X)u'(x)$	
$u(x) - \rho_u(X)u'(x) = u(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x)$	
$\rho_u(X) = -\frac{1u''(x)}{2u'(x)}\sigma^2 \rightarrow (rischio\ soggettivo * rischio\ oggettivo)$	
$u''(x) < 0 \rightarrow concava$ $u'(x) > 0 \rightarrow crescente$	$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = R_u^a(x)$ → **coefficiente di avversione al rischio assoluto**
Usando una trasformazione moltiplicativa invece che additiva: $X = x(1+\epsilon)$	$-\frac{u''(x)x}{u'(x)} = R_u^r(x)$ → **coefficiente di avversione al rischio relativo**

Utilità logaritmica	$u(x) = \log(x)$	$R_u^a(x) = \frac{1}{x}$	$R_u^r(x) = 1$
Utilità quadratica	$u(x) = x - \frac{\lambda}{2}x^2$	$R_u^a(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda x}$	$\frac{dR_u^a(x)}{dx} > 0 \rightarrow IARA$
Massimizzando l'utilità quadratica trovo un portafoglio sulla frontiera efficiente. La fz di utilità ha senso solo $[0,1/\lambda]$			

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 24

Optimal risky portfolios		
Con n titoli		
$\bar{r}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$	$\bar{\sigma}^2{}_P = \sum_{i,j=1}^{n} w_i^2 w_j^2 cov(r_i r_j)$	Se voglio creare un portafoglio all'interno di un mercato formato da titoli con pesi w_n, per trovare i pesi del nuovo portafoglio ω_n, con $Cov(r_P, r_M) = 0$
Forma matriciale		
$r_p = [\bar{r}_1 \quad \dots \quad \bar{r}_n] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$	$\sigma_p^2 = [w_1 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$	$\sigma_p^2 = [\omega_1 \quad \dots \quad \omega_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ ω_n: pesi del portafoglio; w_n: pesi mercato
Trovare i pesi del portafoglio di minima varianza	$\min \quad \frac{1}{2} w^T \Sigma w$ $s.t. \quad i^T w = 1$	Risolvere il modello significa trovare la condizione di I ordine $\left(\frac{d\sigma_p^2}{dw_1} = 0\right)$ da cui ricavo w_1. In forma matriciale la derivata I di $w^T \Sigma w = 2\Sigma w$
Sharpe ratio Reward-to-volatily ratio	$S_P = \frac{E(r_P) - r_f}{\sigma_P}$	Maximize the slope of the CAL for any possible portfolio, *p* → The objective function is the slope S: Per massimizzare lo sharpe ratio bisogna risolvere:
$\boldsymbol{\Sigma x = f}$	f= gradiente della funzione lineare = vettore dei coefficienti dei risk premia x= vettore dei pesi di un portafoglio fully invested	Risolvendo il sistema trovo il portafoglio di tangenza, il port. Rischioso ottimale (NB: i pesi che trovo non sommano a 1 quindi dovrò normalizzare→ trovo w)
Trovare varianza di un portafoglio efficiente con un rendimento fissato	$E(r_c) = r_f + S_p \sigma_c$	Se voglio trovare la proporzione y del port. Rischioso: $E(r_c) = (1-y) r_f + y r_p$
Per trovare i pesi assets risky all'interno del portafoglio completo	$Pesi = y * w_i$	

Traynor-Black Model

1. Initial position of security *i* in the active portfolio	$w_i^0 = \frac{\alpha_i}{\sigma^2(e_i)}$
2. Scaled initial positions	$w_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sigma^2(e_i)}}$
3. Alpha of the active portfolio	$\alpha_A = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i$
4. Residual variance of the active portfolio	$\sigma^2(e_A) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma^2(e_i)$
5. Initial position in the active portfolio	$w_A^0 = \frac{\frac{\alpha_A}{\sigma^2(e_A)}}{\frac{E(R_M)}{\sigma_M^2}}$
6. Beta of the active portfolio	$\beta_A = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$
7. Adjusted (for beta) position in the active portfolio	$w_A^* = \frac{w_A^0}{1+(1-\beta_A)w_A^0}$
8. Final weights in passive portfolio and in security *i*	$w_M^* = 1 - w_A^*; \quad w_i^* = w_A^* w_i$
9. The beta of the optimal risky portfolio and its risk premium	$\beta_P = w_M^* + w_A^* \beta_A = 1 - w_A^*(1-\beta_A)$ $E(R_P) = \beta_P E(R_M) + w_A^* \alpha_A$
10. The variance of the optimal risky portfolio	$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + [w_A^* \sigma(e_A)]^2$
11. Sharpe ratio of the risky portfolio	$S_P^2 = S_M^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\sigma(e_i)}\right)^2$

$w_M = peso\ componente\ passiva$
$w_A = peso\ componente\ attiva$
$w_i = peso\ assets\ nel\ portafoglio\ attivo$

1. $SR = \frac{E[r_P - r_f]}{\sigma_P} = \frac{\alpha_P + \beta_P E[r_m]}{\sqrt{\sigma_M^2 \beta_P^2 + \sum w_i^2 \sigma_{ei}^2}}$
2. Derivando SR e ponendo uguale a zero trovo: $\boldsymbol{\Sigma x = f}$
3. Trovo i pesi non normalizzati della componente attiva e passiva

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 24

Black-Litterman model step by step…

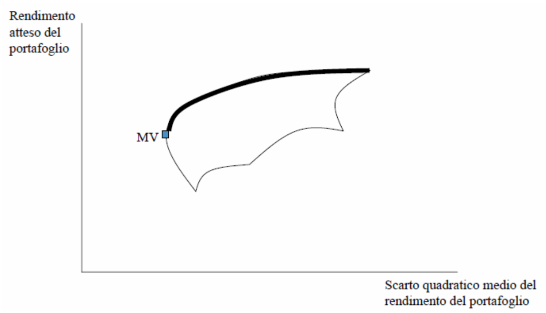
1. Stimare la matrice di covarianza
2. Costruire una previsione di base:
    a. Trovare la varianza di mercato σ_M^2 utilizzando i pesi di mercato
    b. Trovare il market risk premium → $E[r_M] - r_f = A\sigma_M^2$
    c. Trovo i rendimenti attesi dei singoli asset → $E[r_A] = \beta_A E[r_M]$
        i. $\beta_A = \frac{cov(r_A, r_M)}{\sigma_M^2}$
        ii. $cov(r_A, r_M) = cov(r_A, w_A r_A + w_B r_B) = w_A \sigma_{AA} + w_B \sigma_{AB}$
    d. Pongo $\tau = 0.01 \rightarrow \tau\Sigma$
3. Integro le visioni personali dei managers
    a. Sapendo il vettore $q = \Delta\mu$ trovo la matrice P
    b. Se ho due assets q è uno scalare.
    c. Calcolo: $\Omega = var(q) = var(\mu_A - \mu_B) = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2cov(r_A, r_B)$
4. A posteriori
    a. $\boldsymbol{\mu} = ((\boldsymbol{\tau\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P^T\Omega^{-1}P})^{-1}((\boldsymbol{\tau\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{P^T\Sigma^{-1}q})$
    b. Confronto i risultati così ottenuti con il vettore dei rendimenti del CAPM (2.c)
        i. confronto $\Delta\mu$ ottenuti con il CAPM e quelli ottenuti inserendo le visioni soggettive

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 24

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 24

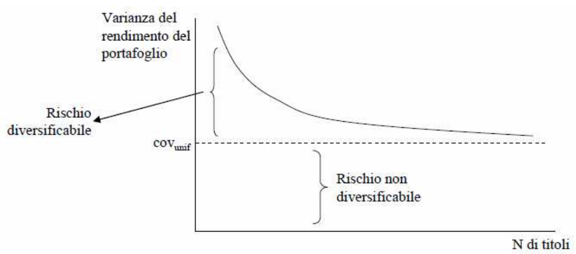
Frontiera efficiente per un portafoglio di n titoli

Prendendo l'inviluppo di tutte le possibili curve ottengo la frontiera dei portafogli. Tutte le possibili combinazioni si trovano all'interno dell'area. Ogni punto sotto la frontiera efficiente ha un rendimento atteso inferiore con lo stesso SQM, di conseguenza scelgo un livello di rischio (SMQ) e individuo la combinazione migliore sulla curva efficiente.



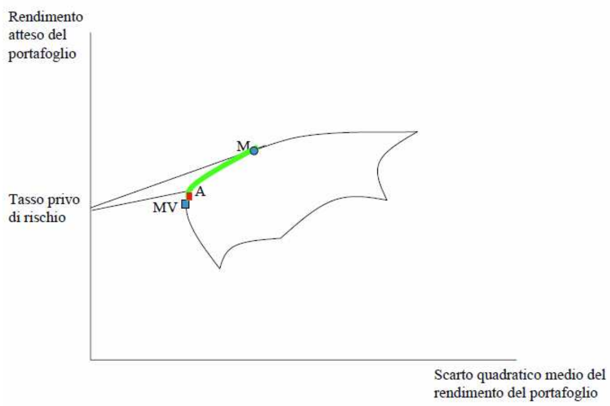
La varianza del rendimento di un portafoglio con molti titoli dipende in misura maggiore dalle covarianze tra i titoli che dalle varianze dei singoli titoli (come possiamo notare dalla forma matriciale per il calcolo della varianza di portafoglio) infatti se tutti i titoli hanno stessa var e stessa cov tra loro, *la Var(P) quando n→∞ è uguale alla Cov*.
Rischio totale = rischio specifico (diversificabile) + rischio sistematico (non diversificabile).

$$VAR = COV + (VAR - COV)$$



Se investo anche in titoli privi di rischio $r_f = rate\ free\ risk$ ottengo un segmento corrispondente alle possibili ripartizioni tra il rendimento privo di rischio e gli altri titoli. Il punto M rappresenta il Market Portfolio, è dato dal punto di tangenza della curva uscente dal titolo risk free. Dal punto rf a M la retta domina la frontiera, posso andare oltre M se faccio short selling → tale segmento è chiamato **Capital Market Line** (CML) e indica il rendimento atteso dei portafogli efficienti.
r_m et $\sigma_m = rendimento$ et $SQM\ del\ punto\ M$

CML $$\boldsymbol{r_p = r_f + \left[\frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\right]\sigma_p}$$



Equilibrio di mercato

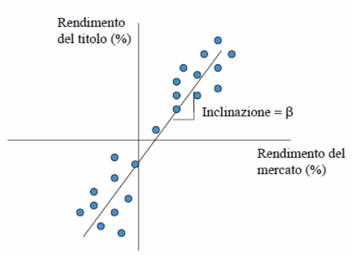
Hp → Aspettative omogenee: tutti gli investitori hanno le stesse opinioni a proposito di rendimenti, varianze e cov.

→ Portafoglio di mercato: portafoglio ponderato per il valore di mercato di tutti il titoli esistenti. (proxy: S&P 500)

La migliore misura del rischio di un titolo in un ampio portafoglio è il beta del titolo:

$$\boldsymbol{\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{im}\sigma_i}{\sigma_m}}$$

Beta misura la reattività del singolo titolo rispetto alla variazione del rendimento di mercato. Indica la tendenza di un titolo a variare nella stessa direzione del mercato. Per il CAPM è la misura di rischio appropriata



$$\beta_i > 1 \rightarrow r_i > r_m$$

$$\beta_i = 1 \rightarrow r_i = r_m$$

$$\beta_i < 1 \rightarrow r_i < r_m$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 24

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 24

APT

1. Rendimenti delle securities descritti da un modello multifattoriale (tanti beta quanti assets)	2. Ci sono sufficienti Securities per annullare il rischio specifico (diversificabile) (non conto ε)	3. Non persistono opportunità di arbitraggio

Opportunità di arbitraggio	Si genera quando un investitore fa profitto senza rischio e senza investimento netto	Non essendoci arbitraggio i portafogli (se ci sono 3 fattori) giacciono tutti sullo stesso piano (trovo i coefficienti del piano risolvendo il sistema lineare di eq: $\boldsymbol{R_i = \alpha_i + \sum_j \beta_{ij} F_j}$) il rendimento del portafoglio sarà anch'esso sul piano (combinaz.lin. con pesi a 1)

…se non c'è arbitraggio…	$x^T i = 0; x^T \beta_i = 0 \rightarrow x^T \mu = 0$
Per vedere se c'e opportunità di arbitraggio	Guardo se i ratio: $\frac{\boldsymbol{E[r] - r_f}}{\boldsymbol{\beta}}$ sono uguali per tutti, altrimenti se minore vendo short, se maggiore compro e ottengo un profitto senza rischio. $[\alpha < 0\ SHORT\ \alpha > 0\ COMPRO]$

APT	☺ non è possibile l'arbitraggio	☹ sparisce il rischio specifico
CAPM	☺ da info su tutti i singoli assets	☹ ottimizzatori in media-varianza

Introducendo $\boldsymbol{\epsilon_i}$	$\boldsymbol{R_i = \alpha_i + \sum_j \beta_{ij} F_j} + \epsilon_i$	*Scorrelati*: usando diversi fattori i rischi specifici sono diversificati *Limitati*: hanno varianza finita $(UB = S^2)$

w: costanti (→1) e limitati $< \frac{W}{n}$	$\boldsymbol{Var(\epsilon_P) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 w_i^2 = 1/n^2 \sum_{i=1}^{n} W^2 S^2 = \frac{1}{n} W^2 S^2 \rightarrow 0\ (n \rightarrow \infty)}$
APT equation $\boldsymbol{E[R_i] = \lambda_0 + \sum_j \beta_{ij} \lambda_j}$	$\boldsymbol{\lambda_0}$: se costruisco un fattore neutrale ai rischi sistematici → $\boldsymbol{\beta_{ij} = 0}$ → il rendimento è deterministico → $\boldsymbol{r_f}$ $\boldsymbol{\lambda_1}$: costruisco un portafoglio ben diversificato con sensibilità $\boldsymbol{\beta_1 = 1}$ e neutrale agli altri fattori ottengo il premio per il rischio sul fattore 1: $\boldsymbol{E[R_p] - r_f}$

Se ho una variazione del tasso di cambio dei fattori la variazione dei rendimenti	$\boldsymbol{\sum \beta_i \Delta F_i = \Delta R_i}$

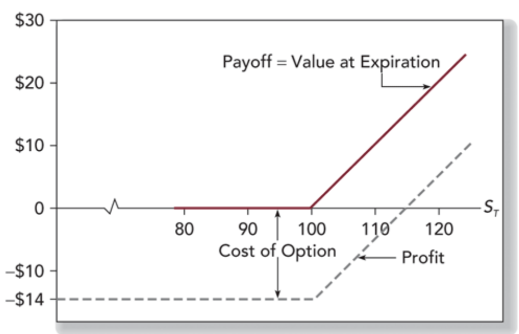
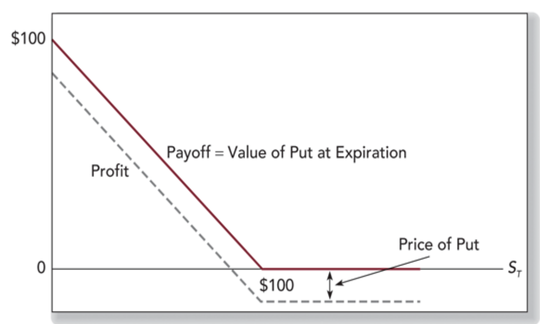
Se ho un rendimento che segue una determinata equazione $\boldsymbol{E[R_i] = \lambda_0 + \sum_j \beta_{ij} \lambda_j}$ e voglio vedere se è over/under-priced stimo il rendimento usando l'equazione e lo confronto con il rendimento ottenuto mettendo a zero i beta (valore atteso delle 'sorprese' è zero per definizione); se quest'ultimo è minore di quello stimato allora è overpriced (mi trovo al di sotto della retta)

Usare APT per stimare il costo del capitale	- Stimo beta con la regressione multipla - Stimo i RP con una regressione dei rendimenti azioni sui beta e trovo un coefficiente che è la stima dei RP (RP>0 per i fattori a cui voglio espormi, RP<0 per quelli a cui non voglio espormi (Es. inflazione) - Cost of capital = $\boldsymbol{r_f + \sum_j \beta_{ij} RP_j}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 24

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 24

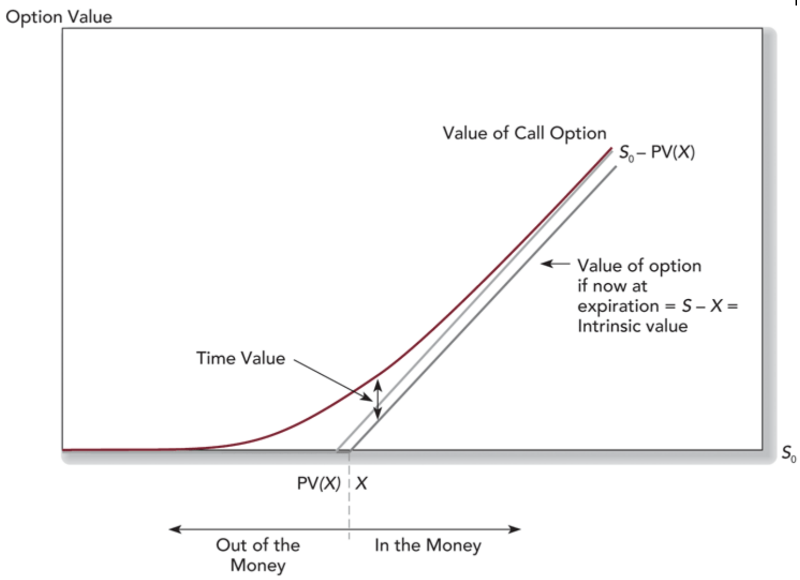
Part VI: Options: Trading Strategies and Pricing

	CALL	**PUT**
Diritto a:	acquistare a prezzo strike	Vendere a prezzo strike
In the money:	$S_t > X$	$S_t < X$
Out of the money:	$S_t < X$	$S_t > X$
Valore intrinseco	$S_t - X$	$X - S_t$
Valore temporale	$S_t - (valore\ intrinseco)$ Se il valore è positivo mi conviene esercitare in futuro l'opzione (non adesso)	
Payoff to Holder	**$(S_T - X)$ if $S_T > X$** **0 if $S_T \leq X$**	**0 if $S_T \geq X$** **$(X - S_T)$ if $S_T < X$**
Profit to Holder	Payoff - Purchase Price	Payoff - Premium
Payoff to Writer	**$-(S_T - X)$ if $S_T > X$** **0 if $S_T \leq X$**	**0 if $S_T \geq X$** **$-(X - S_T)$ if $S_T < X$**
Profit to Writer	Payoff + Premium	Payoff + Premium
Payoff and profit to holder		
Put Call Parity	Per determinare il valore teorico di un'opzione devo determinare l'incertezza del sottostante (stocasticamente). Comparando due portafogli con lo stesso payoff dovrei avere lo stesso valore attuale altrimenti c'è opportunità di arbitraggio.	
	PAYOFF	**Stesso payoff → stesso Valore**
PUT PROTETTIVA	$\max[X - S_T; 0] + S_T = \max[X; S_T]$	$C + \frac{X}{(1+r_f)^T} = S_0 + P$
CALL + T-BILL	$\max[S_T - X; 0] + X = \max[X; S_T]$	
Exotic Options (path dependent: dipende dal percorso del sottostante)	**Barriera:** il contratto è cancellato (knock-out) o si attiva (knock-in) quando il sottostante ha lo stesso valore della barriera	**Stile asiatico**: payoff dipende dal prezzo medio lungo la vita del derivato **Loockback**: dipende dal max o min valore del prezzo del sottostante

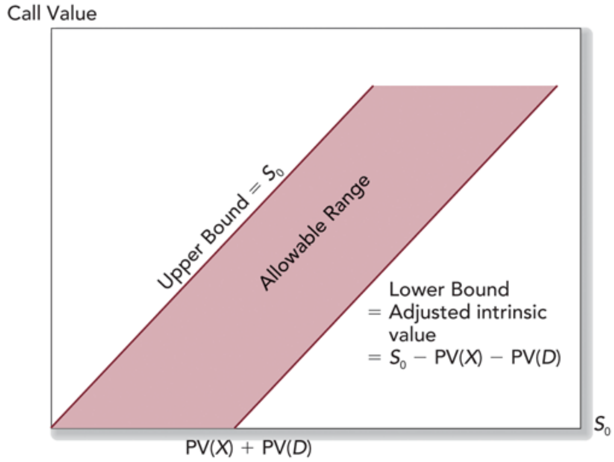
OTC option	**European-Style:** esercito solo alla maturità	**American-Style:** esercito entro la maturità	**Bermudan-Style:** esercito in un set di date fisse

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 24

Call Option Value before Expiration



If This Variable Increases . . .	The Value of a Call Option
Stock price, S	Increases
Exercise price, X	Decreases
Volatility, σ	Increases
Time to expiration, T	Increases
Interest rate, r_f	Increases
Dividend payouts	Decreases



UB: il prezzo opzione non può superare quello del sottostante

LB: considerando un portafoglio con un'azione comprata prendendo a prestito $\frac{X+D}{(1+r_f)^T}$ → dovrò restituire X+D

Il payoff di tale portafoglio sarà uguale al valore dell'azione $(S_T + D)$ meno il payback del prestito $(X + D)$ → $S_T - X$

Essendo uguale al payoff di una call, per la legge del prezzo unico, i prezzi attuali dovranno essere uguali, inoltre poiché il payoff dell'opzione è sempre maggiore o uguale della posizione leveraged, il prezzo opzione sarà >:

$$C \geq S_0 - \frac{(X+D)}{(1+r_f)^T} \geq S_0 - PV(X+D)$$

Americane e Europee hanno la stessa funzione di valore

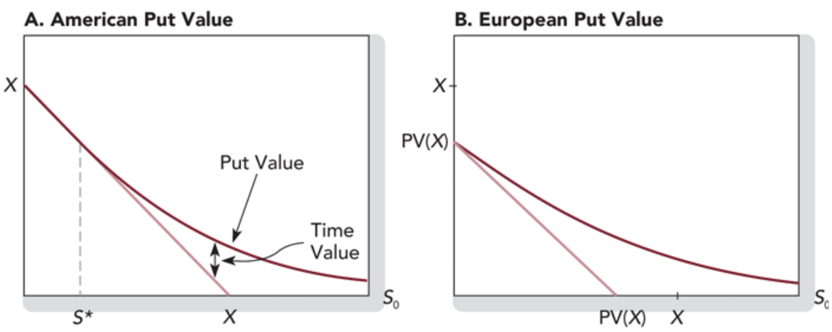
Put Option Values

Americana: payoff parte da X perchè posso esercitare l'opzione in qualunque momento. Il valore critico S*(pto di tangenza valore opzione con valore intrinseco):

- S < S* è ottimale esercitare
- S*< S < X sarebbe ottimale non esercitare perché valore opz > valore intrinseco

All'avvicinarmi della scadenza S* si sposta verso X (t=T → S*=X)

Europea: se sottostante = 0 (bancarotta) riceverò alla maturità X, ora vale PX(X)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 24

Per passare dal tempo discreto al tempo continuo…

Per catturare l'incertezza uso modello moltiplicativo perché se usassi additivo dovrei ammettere valori negativi, senza avere garanzia che $S_t > 0$	$S_{t+1} = S_t * u_t$
Non possiamo dire che lo shock moltiplicativo sia normalmente distribuito, ma possiamo considerare il logaritmo naturale del prezzo dell'azione dove z_t è l'incremento nel log del prezzo e per assunzione è distribuita normalmente, quindi u_t è distribuito lognormalmente	$logS_{t+1} = \log S_t + \log u_t = \log S_t + z_t$

La distribuzione lognormale può essere intesa come il limite del prodotto di tante variabili casuali	$logS_{t+1} = \log S_t + \sum z_k$	Usando come notazione: $E[z_t] = \nu$ $\quad Var(z_t) = \sigma^2$
Facendo valore atteso e varianza del logaritmo di S	$E[logS_t] = \log S_0 + \nu t$	$Var(\log S_t) = t\sigma^2$

Prendendo il limite di un'equazione con una differenza otteniamo una eq differenziale e al tendere di delta_t a zero l'incremento del logaritmo del prezzo è = νdt	Per capire qual è incremento in un intervall [0,t] integro il differenziale tra 0 e t e ottengo: $$\log S(t) - \log S(0) = \nu t$$ Facendo l'esponenziale: $$S(t) = S(0)e^{\nu t}$$
Introducendo un disturbo posso riscrivere l'equazione differenziale nella forma: $$dlogS(t) = \nu\, dt + \sigma\, dW(t)$$	Il primo termine è il risultato dell'eq differenziale nel caso deterministico a cui vado a sommare una componente casuale, in cui σ gioca il ruolo di una volatilità che moltiplica l'incremento di un processo stocastico *dW(t).* la soluzione di tale equazione sarà un processo stocastico.

Nel processo di Wiener la var cresce linearmente con il tempo, di conseguenza la dev std cresce con la radice quadrata, se ϵ_t è una sequenza di variabili indipendenti normali $N(0,1) \rightarrow \epsilon_t\sqrt{dt}$. Sotto l'Hp dei mercati efficienti ϵ_t sono indipendenti.

Il processo è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

- Il processo parte da 0: $W_0 = 0$
- Le traiettorie (ossia, tutte le funzioni $W(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, realizzazioni di un processo di Wiener) sono continue
- Per $0 < s < t$: $W_t - W_s \sim N\left(0, (t-s)\right)$ dove $N(\mu, \sigma^2)$ denota una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2
- Per ogni t, W_t si distribuisce normalmente con media 0 e varianza t;
- Per $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ (i due intervalli $[s,t[$ e $[u,v[$ non si sovrappongono): $W_t - W_s$ e $W_v - W_u$ sono variabili casuali indipendenti. I due incrementi sono stazionari: non conta dove è posizionato l'intervallo di tempo ma solo la sua ampiezza.

Sia $x(t)$ un processo di Itō (o processo di Wiener generalizzato); $x(t)$ soddisfa quindi l'equazione differenziale stocastica: $$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dW_t$$	Nel processo di Ito l'integrale è un path integral che possiamo approssimare partizionando in tanti piccoli intervalli e considerare la somma: $$\sum_{k=o}^{n-1} X(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$
Se n tende a infinito la serie converge all0'integrale in senso di Ito, il suo valore atteso finale è = 0 perché se le variabili sono indipendenti il valore atteso degli incrementi della componente casuale è uguale a 0.	$$\sum_{k=o}^{n-1} E[X(t_k)] * E[W(t_{k+1}) - W(t_k)] = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 24

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 24

Risolvendo l'equazione (*) e applicando le condizioni al contorno ottengo la formula di BLACK-SCHOLES

BLACK-SCHOLES

$C_o = S_o N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$

$d_1 = [\ln(S_o/X) + (r + \sigma^2/2)T] / (\sigma T^{1/2})$

$d_2 = d_1 + (\sigma T^{1/2})$

where

C_o = Current call option value

S_o = Current stock price

$N(d)$ = probability that a random draw from a normal distribution will be less than d

Osservazioni: il termine N(d1) rappresenta probabilità che l'opzione call sia in the money alla maturità (→1, allora eserciterò l'opzione). Il termine del ln rappresenta la percentuale per cui l'opzione è i.t.m. (se ln>0 → i.t.m e la % è rappresentata dal valore del ln, se ln<0 →o.t.m.). al denominatore $\sigma\sqrt{T}$ serve per aggiustare la % inserendo la volatilità dell'azione e la vita rimanente dell'opzione.

Assunzioni:
1. No dividendi
2. Tassi d'interesse e varianze costanti
3. Stock prices continui (no jumps)

In pratica:
1. Calcolo i d e guardo i valori sulle tabelle
2. Calcolo C

Per trovare il numero di azioni per hedging:

$$\frac{dC}{dS} = N(d_1) = \Delta$$

Valore di una PUT

$$P = Xe^{-rT}[1 - N(d_2)] - S_0[1 - N(d_1)]$$

LE GRECHE

DELTA: *sensitività del prezzo opzione rispetto al valore del sottostante; numero di azioni che dovrei comprare per costruire un portafoglio privo di rischio*

$$\frac{dC}{dS} = N(d_1) = \Delta_{CALL}; \quad N(d_1) - 1 = \Delta_{PUT}$$

GAMMA: *sensitività di delta rispetto al valore del sottostante (>0 infatti la fz. Della option value è convessa)*

$$\Gamma = \frac{d^2 f}{dS^2} = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

VEGA: *sensitività rispetto alla volatilità(>0 infatti un'incremento della volatilità fa aumentare il prezzo delle opzioni)*

$$\nu = \frac{df}{d\sigma} = S\phi(d_1)\sqrt{T}$$

Volatilità implicita

Qual'e la standard deviation necessaria affinchè il prezzo opzione osservato sul mercato sia consistente con quello trovato nel modello di BS? Devo quindi imporre l'uguaglianza tra i due prezzi con l'incognita la std.dev.

La volatilità implicita è una misura predittiva basata sul consenso del mercato. Un'opzione con un alta v.i. sarà abbastanza costosa in quanto una std.dev. alta è rischiesta per giustificare il prezzo. Comprare un opzione con bassa v.i. e scriverne una con alta v.i.

VaR - DELTA

Approssimando il valore Call con Taylor al second'ordine:

$$\delta C = \Delta\delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\delta S)^2$$

Al prim'ordine $\delta C = \Delta\delta S$ e sostituendo $\delta x = \frac{\delta S}{S}$ inteso come rendimento giornaliero $N(0, \sigma_d)$

$$\delta C = \Delta S \delta x$$

Al prim'ordine però sovrastimo il VaR perché retta del valore intrinseco sta sotto la curva del option value

Considerando un portafoglio con N opzioni la variazione del valore del portafoglio:

$$\delta P = \sum_i N_i \Delta_i S_i \delta x$$

Posso approssimare il VaR di un portafoglio operando lo sviluppo al II ordine del valore di un'opzione (utilizzando delta e gamma)

$$VaR_{95\%} = N * \left(\Delta * S * z_{0,95} * \sigma_d - \frac{1}{2}\Gamma\left(S * z_{0,95} * \sigma_d\right)\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 24