NUMERO : 186

DATA : 03/12/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Melania

MATERIA : Analisi Matematica I
Prof. Camporesi

[illegible] (INSIEME $\mathbb{C}$)

(PER POTER RISOLVERE OGNI EQ. ALGEBRICA)

- OGNI n° REALE È ANCHE UN n° COMPLESSO

- $x = \mathrm{Re}\, z$ PARTE REALE $\qquad y = \mathrm{Im}\, z$ PARTE IMMAGINARIA $\qquad z = x + y \cdot i$ $(z = a + b \cdot i)$, (con $x, y \in \mathbb{R}$)

$z = x + iy$ FORMA CARTESIANA O ALGEBRICA DI $z = (x, y)$ (n° complesso)

i = UNITÀ IMMAGINARIA $\Rightarrow \boxed{i^2 = -1} \Rightarrow i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

- SOMMA: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

- PRODOTTO: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

- SOTTOINSIEME DEI n° COMPLESSI $(x, 0) \Rightarrow$ SONO I n° REALI $\Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- SOTTOINSIEME DEI n° COMPLESSI $(0, y) \Rightarrow$ SONO IMMAGINARI PURI

a). $a + i \cdot 0 = a \Rightarrow \mathrm{Im}\, z = 0$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0\}$

b). $0 + ib = ib \Rightarrow \mathrm{Re}\, z = 0$, $b \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ: $\Rightarrow \mathbb{C}$ = CAMPO O CORPO COMMUTATIVO, PERCHÉ i n° COMPLESSI FORMANO UN CAMPO O CORPO COMMUTATIVO

- ASSOCIATIVA
- DISTRIBUTIVA
- COMMUTATIVA
- $\exists$ ELEMENTI NEUTRI $\Rightarrow 0 + i0 = 0$; $1 + i0 = 1$
- $\exists$ DEGLI OPPOSTI $\Rightarrow a + ib$ è $-a - ib$
- $\exists$ RECIPROCI $\Rightarrow \forall z \neq 0$ se $z = a + ib \neq 0$ $(a \neq 0 \text{ o } b \neq 0)$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \quad \text{infatti} \Rightarrow \frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2} =$$

$$\frac{a^2 - (ib)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - (i)^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\cancel{a^2 + b^2}}{\cancel{a^2 + b^2}} = 1$$

- ORDINAMENTO DI $\mathbb{R} \Rightarrow$ NON È ESTENDIBILE A $\mathbb{C}$

es). $z_1 > 0$ e $z_2 > 0 \Rightarrow z_1 z_2 > 0$ non è vero in $\mathbb{C}$!

- CAMPO NON ORDINATO

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, dato che $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (i^2 y^2) = x^2 + y^2$

$\Rightarrow |z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$

$|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0 \iff z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ (analogo per $\operatorname{Im} z$)

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

In generale la distanza tra z e w $= d(z,w) = |z-w|$

$z - w = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \Rightarrow |z-w| = \sqrt{\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{a^2} + \underbrace{(y_1-y_2)^2}_{b^2}}$

PROPRIETÀ IMPORTANTI

$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$

$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$

$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$

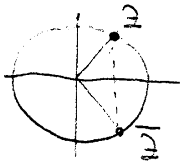
$z = \bar{z} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z = x + i0 \ (= x \in \mathbb{R})$

$\overline{(\bar{z})} = z$;

$\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$; $\overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

se $|z| = 1$, $z = x + iy \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + (yi)^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$



$|\bar{z}| = |z|$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

se $z = x + i0 = x \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$

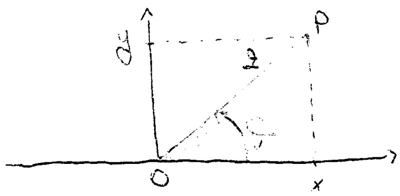
$z=(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ = distanza $\overline{OP}$

θ = argomento di $z \Rightarrow Arg(z)$

↳ definito per multipli di 2π

$\Rightarrow \boxed{\theta + 2k\pi}$ (interi) $(k \in \mathbb{Z})$



INVERSE:

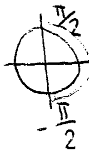
$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

N.B.!

$\theta = \arctg\dfrac{x}{y}$ non vale sempre, solo per $x>0$

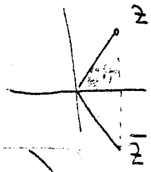
$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$



$(x,y) \rightarrow (r,\theta) \Rightarrow$ VALORE PRINCIPALE DI $Arg(z) \Rightarrow \boxed{0 \le \theta \le 2\pi}$ opp $\boxed{-\pi < \theta \le \pi}$

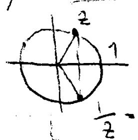
$\boxed{z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(\theta n)]}$ PRIMA BISOGNA TROVARE r e θ

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \boxed{\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)}$



$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \boxed{\dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)}$

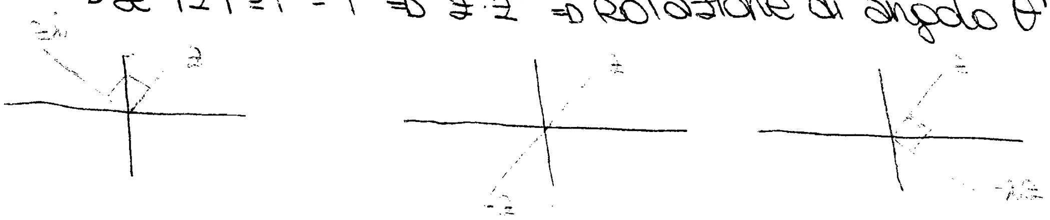
se $|z| = r = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \bar{z}$



$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \boxed{\dfrac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]}$

$z \cdot z' \Rightarrow$ rotazione di θ' seguita da dilatazione (se $r'>1$), compressione (se $r'<1$).

$\Rightarrow$ se $|z'| = r' = 1 \Rightarrow z \cdot z' \Rightarrow$ ROTAZIONE di angolo θ'



se n è dispari $\Rightarrow P(z)$ ha almeno una radice reale

$\Rightarrow$ polinomi irriducibili $\Rightarrow$ quelli di 1° grado (divisibili x costanti o se stessi)

$\Rightarrow$ polinomi irriducibili $\Rightarrow$ quelli di 1° grado
di 2° grado con $\Delta < 0$

LEGA TRA LORO UNA FUNZIONE $y=y(x)$, la sua derivata fino all'ordine "n" e la variabile indipendente x $\Rightarrow F(x, y, y', \dots y^{(n)})=0$ EQUAZ. DIFF. ORDINARIA

dove F = funzione reale di $n+2$ variabili reali

SOLUZIONE = $y: I \to \mathbb{R}$, derivabile n volte t.c. $\boxed{F(x, y(x), y'(x) \dots y^{n}(x))=0}$ $\forall x \in I$

FORMA NORMALE = se è possibile esplicitare $y^{(n)}$ in funzione delle altre variabili $\Rightarrow$ $\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})}$

AUTONOMA = se l'eq. diff. non dipende dalla variabile indipendente x

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

es.
$$y''' = 0$$
$$y'' = k$$
$$y' = kx + b$$
$$y = \frac{1}{2}kx^2 + bx + c$$

$y' = f(x, y)$ UNA SOLUZIONE DELL'EQ. DIFF. $\Rightarrow$ è una f. derivabile in I $y=y(x)$ t.c. $y'(x) = f(x, y(x))$ $\forall x \in I$

CURVA INTEGRALE = IL GRAFICO DI OGNI SOLUZIONE $y'=f(x,y)$. DIPENDE DA 1 PARAMETRO "C".

INTEGRALE GENERALE = INSIEME DI TUTTE LE SOLUZ. DI 1 EQ.

INTEGRALE PARTICOLARE = UNA QUALSIASI SOLUZIONE

FAMIGLIA DI SOLUZIONI = INTEGRALE GENERALE DI 1 EQ. DIFF. DI 1° ORDINE $\Rightarrow$ DIPENDE DA 1 COSTANTE ARBITRARIA
$y = y(x, c)$, $[c \in \mathbb{R}]$ se al variare di c si ottengono tutte le soluzioni.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA = IN OGNI PUNTO (x,y) DEL PIANO IN CUI LA f SIA DEFINITA, IL VALORE $f(x,y)$ È IL COEFF. ANGOLARE DELLA RETTA TANG. ALLA CURVA INTEGRALE PASSANTE PER (x,y) $\Rightarrow$ l'eq. diff. DEFINISCE UN CAMPO DI DIREZ. NEL PIANO

8

$\Rightarrow$ 1). CERCARE ZERI DI $h(y)$

2). $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx \Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x)\,dx$

$y' = y \Rightarrow y(x) = C \cdot e^x$

$y' = 1 + y^2 \Rightarrow y(x) = tg(x+c)$, $c \in R$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' + y = 0 \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow y(x) = C_1 \cdot \cos x$, $C_2 \cdot \sin x$ $(C_1, C_2 \in R)$

$y' = 2xy \Rightarrow y(x) = C \cdot e^{x^2}$ $(C \in R)$

$y^2 + y'^2 = 1 \Rightarrow y(x) = \cos(x+c)$, $\sin(x+c')$, $(c, c' \in R)$

$y' = -2xy^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^2}$ $(R^+ \text{ o } R^-)$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^2+c}$ $(c>0, R$; $c<0$ $(-\infty; -\sqrt{c})$ opp. $(-\sqrt{c}; +\infty))$

$\Rightarrow y(x) = 0$ (R)

$y' = g(x)$, $g(x)$ continua su $I \Rightarrow y(x) = \int g(x)\,dx$

$y^2 + y'^2 + 1 = 0$ $\nexists$ soluzioni se $y: R \to R$

$a(x)$ continua in intorno di x_0
$b(y)$ continua in intorno di y_0 $\Rightarrow$ Il problema di Cauchy ha almeno una soluzione, ma non è detto che sia unica!

$a(x)$ continua in intorno di x_0 (classe C_0)
$b(y)$ è di classe C^1 in intorno di $y_0 \Rightarrow b(y)$ è derivabile con derivata continua

$\Rightarrow$ Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x) \cdot b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha UNA SOLA soluzione in intorno di x_0

UNICITÀ $\Rightarrow \exists$ intorno di x_0 dove 2 soluz. qualsiasi del sistema coincidono)

è il + grande intervallo contenente il dato iniziale $x_0 = 2$ sul quale la y risolve l'eq. iniziale!

$\Rightarrow \begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \quad (y_0 \in \mathbb{R} = k) \end{cases}$ ha soluz. unica

ES) $\begin{cases} y' = y + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad a(x) = 1 \Rightarrow \int 1\, dx = x = A(x)$ $\quad b(x) = x^2$ $\quad a(x), b(x)$ continue su $\mathbb{R}$

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx = e^{x} \int e^{-x} \cdot x^2\, dx = -x^2 - 2x - 2 + ke^{x}$$

$y(0) = -0 - 0 - 2 + k = 0 \Rightarrow -2 = -k \Rightarrow \underline{k = 2}$

$\Rightarrow y(x) = -x^2 - 2x - 2 + 2e^{x}$

$n=1 \Rightarrow y' + ay = f(x)$

$n=2 \Rightarrow y'' + ay' + by = f(x)$

$n=3 \Rightarrow y''' + ay'' + by' + cy = f(x)$

....

$a, b, c, \Rightarrow$ costanti

$f(x) \Rightarrow$ continua su I

$\Rightarrow$ TERMINE FORZANTE

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ l'eq non è OMOGENEA

$\Rightarrow f(x) = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

sono lineari $\Rightarrow Ly = f(x)$:

$n=1 \quad Ly = y' + ay = \left(\frac{d}{dx} + a\right) y$

$n=2 \quad Ly = y'' + ay' + b = \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a\left(\frac{d}{dx}\right) + b\right] y$

L'integrale generale dell'eq. non OMOGENEA $Ly = f(x)$ è la somma dell'int. gen dell'eq. omogenea associata $Ly = 0$ + una soluz. particolare qualsiasi y_p di $Ly = f(x)$:

$$\boxed{y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)}$$

Se y_1, y_2 risolvono $y_{om}(x) = Ly = 0 \Rightarrow$ ogni loro combinaz. $c_1 y_1 + c_2 y_2$ è ancora soluzione

$n=1 \Rightarrow y' + ay = f(x)$ caso particolare dell'eq. diff. del 1° ordine

$\Rightarrow$ risultato $g(x)$ = RISPOSTA IMPULSIVA caso non omogeneo (y_p)

si usa solo se $f(x) = \begin{cases} P(x) \\ e^{\alpha x} \\ \cos\alpha\beta ; \sin\alpha\beta \\ P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \\ \text{opp } P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x \end{cases}$

$\Rightarrow y'' + ay' + by = P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ opp $\sin\beta x$

con P = polinomio di grado k e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y_p(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \left[Q_1(x) \cdot \cos\beta x + Q_2(x) \cdot \sin\beta x \right]$$

Q_1, Q_2 = polinomi di grado k

$m = \begin{cases} 0 & \text{se } P(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ \text{molteplicità di } (\alpha + i\beta) & \text{se } P(\alpha + i\beta) = 0 \end{cases}$

se $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$

Trovo y_{p_1} e y_{p_2} separatamente

$\Rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ ($\Rightarrow$)

In generale se $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ opp $\sin\beta x$ si va a vedere se $e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ è già soluz. dell'eq. om.

- se è radice $[P(\alpha + i\beta) = 0]$ $\Rightarrow y_p = x e^{\alpha x} \left[Q_1(x) \cdot \cos\beta x + Q_2(x) \cdot \sin\beta x \right]$
- se non è radice $[P(\alpha + i\beta) \neq 0]$ $\Rightarrow y_p = e^{\alpha x} \left[Q_1(x) \cdot \cos\beta x + Q_2(x) \cdot \sin\beta x \right]$

es). $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

- omogenea: $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ $\Rightarrow \lambda <^1_2$ $\Rightarrow y_{om}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$\Rightarrow e^{5x}$ non è soluz. dell'omogenea!

$\Rightarrow y_p(x) = c \cdot e^{5x}$ $\Rightarrow \begin{cases} y'_p(x) = 5c \cdot e^{5x} \\ y''_p(x) = 25c e^{5x} \end{cases}$ $\Rightarrow$ si sostituisce nell'eq. diff.: $25c \cdot e^{5x} - 3(5c e^{5x}) + 2(c \cdot e^{5x}) = e^{5x}$

$\Rightarrow c = \frac{1}{12}$ $\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{12} e^{5x}$

$\Rightarrow$ L'int. generale della non omogenea è: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$

es). $y'' - 3y' + 2y = \cos x$ ($\rightarrow$ non è soluz)!

cerco $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$

Trovo A e B $\Rightarrow y_{om} + y_p = y(x)$

In generale vale

TEOREMA (formula di Taylor di ordine n col resto di Peano)

Se f è derivabile n volte in x_0 allora si ha:

$f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$ dove $P_{f,x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$

$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Inoltre tra tutti i polinomi $g(x)$ di grado $\leq n$

$P_{f,x_0,n}$ è l'unico che ha un contatto di ordine n con la funzione in x_0 cioè:

$$(*)\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \\ f^n(x_0) = g^n(x_0) \end{cases}$$

A sua volta $(*)$ equivale per f, g derivabili n volte in x_0 a

$(*) \iff f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n)_{x \to x_0}$

Dim si applica l'Hopital $n-1$ volte nel limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{f,x_0,n-1}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P'_{f,x_0,n-1}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{0}{0}$$

$$\dots \overset{H \; n-1 \text{ volte}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - P^{(n-1)}_{f,x_0,n-1}(x)}{n(n-1)\dots 3\cdot 2(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f^n(x_0)}{n!} \Rightarrow f(x) - P_{f,x_0,n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

$$f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$$

· Resto n-esimo

$R_{f,x_0,n}(x) = f(x) - P_{f,x_0,n}(x)$

La forma di Peano del resto è: $R_{f,x_0,n}(x) = o((x-x_0)^n)$

· Forma di Lagrange

Una forma alternativa per $R_{f,x_0,n}(x)$ è data dal seguente teorema

TEOREMA formula di Taylor col resto di Lagrange. Ricordiamo che se

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$

- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$= \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$

dove per $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^+$

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$

Sviluppo binomiale $\binom{\alpha}{k}$ = coeff binomiale generalizzato

- $\alpha = \frac{1}{2}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

- $\alpha = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$

Dimostrazione

- $f(x) = e^x \Rightarrow f^n(x) = e^x \ \forall k \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$

$$f^{n}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-3)\dots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

Oss Il polinomio di McLaurin di una funzione polinomiale coincide all'ordine desiderato con la funzione stessa. Cioè se

$f(x) = Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

si ha che il polinomio di McLaurin:

$$P_{Q,0,k}(x) = \begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_kx^k & \text{se } k \leq n \\ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n & \text{se } k \geq n \end{cases}$$

Se invece $x_0 \neq 0$, $P_{Q,x_0,n}$ si calcola o direttamente cioè

$$P_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

oppure più semplicemente si fa il cambio di variabile:

$x - x_0 = t \Rightarrow x = t + x_0$, si scrive $Q(x) = Q(x_0+t)$ e si sviluppa in potenze di $t = (x-x_0)$ e si prendono le potenze di t fino all'ordine richiesto

Es) 1) Calcolare lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 della funzione $Q(x) = 3 + 2x + x^2 + 5x^3$. 2) Calcolare poi lo sviluppo analogo di Taylor però centrato in $x_0 = 1$

1) $Q(x) = 3 + 2x + x^2 + o(x^2)$

2) $\underset{(x_0=1)}{x-1=t} \overset{P_{Q,0,2}}{\Rightarrow} x = t+1$

$$Q(1+t) = 3 + 2(1+t) + (1+t)^2 + 5(1+t)^3 = 3 + 2 + 2t + 1 + t^2 + 2t + 5 + 5t^3 + 15t + 15t^2 = 11 + 19t + 16t^2 + 5t^3$$

$$Q(x) = 11 + 19(x-1) + 16(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Oss Dallo sviluppo di $f(x)$ segue lo sviluppo di $f(\alpha x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 260

$f(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}x^3$

4) $f(x) = \sin x - x \cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ pp?

$\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x\left(\cancel{1} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{9} + o(x^4)\right)$

$= -\cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{x^5}{\underset{5\cdot 4!}{120}} + \cancel{\frac{1}{6}x^3} - \frac{x^5}{4!9} + o(x^5) \sim x^5\left(\frac{1}{5\,4!} - \frac{1}{4!\,9}\right) = \frac{x^5}{4!}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)$

$= \frac{x^5}{4!}\left(\frac{9-5}{45}\right) = \frac{4x^5}{4!\,45} = \frac{x^5}{270}$

b) Lo sviluppo di Taylor o di McLaurin di un prodotto è il prodotto degli sviluppi

1) Calcolare McLaurin al 5° ordine di $f(x) = e^x \sin x$

Calcolare $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$

$\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] \cdot \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^2 +$

$+ \left(-\cancel{\frac{x^4}{6}}\right) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \cancel{\frac{x^4}{6}} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{x^5}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$

$f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(0) = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{1}{30} = -\frac{120}{30} = -4$

2) Lo stesso di 5°

$f(x) = (e^x - 1)^2$

$\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$

$= x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + o(x^5)$

c) Per calcolare lo sviluppo di McLaurin di $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(0) \neq 0$ si scrive $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e si applica lo sviluppo del prodotto riconducendo

In generale: $\boxed{P^{(k)}_{f,x_0,n} = P_{f^{(k)},x_0,n-k}} \quad \forall\, 0 \le k \le n$

Quindi se f derivabile n volte in $x_0 \Rightarrow f'$ è derivabile $n-1$ volte e lo sviluppo di McLaurin di f' di ordine $n-1$ sarà $f'(x) = P_{f',x_0,n-1}(x) + o(x^{n-1}) =$
$= P'_{f,x_0,n}(x) + o(x^{n-1})$

Quindi se f è derivabile n volte in x_0 $\quad f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + o(x^n) \Rightarrow$
$f'(x) = P'_{f,x_0,n}(x) + o(x^{n-1})$ $\forall n \geq 1$ se $f^{(n)}$ $\exists$ in x_0 ed è continua in x_0
$\forall n > 1$ se $f^{(n)}(x_0)$ esiste.

In particolare se $x_0 = 0$ e $P_{f,0,n}(x) = 0\ \forall x$
cioè se $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n) \Rightarrow f'(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n-1})$$

esempi:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (dispari) $= a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$
$\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$

$$\Rightarrow \underbrace{1 - x^2 + x^4 + o(x^4) = \frac{d}{dx}\left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)\right)}$$
$$\Rightarrow = a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 + x^4 + o(x^4) = + a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + o(x^4) =$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 & a_1 = 1 \\ 3a_3 = -1 & a_3 = -\frac{1}{3} \\ 5a_5 = 1 & a_5 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

2) $f(x) = \arcsin x \quad = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$
$\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \hookrightarrow 1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + o(x^4) = f'(x)$
$\qquad \hookrightarrow (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (1+t)^{\alpha}$

$$\hookrightarrow 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + o(x^4)$$

$= 1-(x-x^2)+(x-x^2)^2-(x-x^2)^3+(x-x^2)^4+o(x^4) \cancel{-1}-x-x^2-x^3-x^4+o(x^4) =$

$= -x+\cancel{x^2}+x^2+x^4-2x^3-x^3+3x^4+\cancel{x^4}-x-\cancel{x^2}-x^3-\cancel{x^4}+o(x^4) =$

$= -2x+x^2-4x^3+4x^4+o(x^4)$

f) Polinomio di Taylor della funzione inversa

esempi

1) $\arcsin x = a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)$

$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x(-1,1)$

$\sin\underbrace{(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))}_{t\to 0} = x$

$\sin t = a_1x+a_3x^3+a_5x^5 - \frac{1}{3!}(\ldots)^3+\frac{1}{5!}(\ldots)^5+o(x^5) = x$

$\to a_1x+a_3x^3+a_5x^5-\frac{1}{6}\left(a_1^3x^3+3a_1a_3x^5\right)+\frac{1}{120}\left(a_1^5x^5+o(x^5)\right) = x \quad \forall x$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 - \frac{1}{6}a_1^3 = 0 \\ a_5 \frac{1}{2}a_1a_3 + \frac{1}{120}a^5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{1}{6} \\ a_5 &= \frac{1}{12}-\frac{1}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40} \end{aligned}$$

Per esercizio. Per casa

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x^5)+\sh^2 x-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}} = e^{2/3}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^{x/3}}{\log(\log(e+x^2))} = -\frac{e}{6}$

4) $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2+2x^4\cdot\log\left(\cos\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{6}$

es). $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}x^2} & x\geq 0 \\ \cos x & x<0 \end{cases}$ Dire fino a quale ordine è derivabile in $x=0$

Metodo veloce: scrivi gli sviluppi di McLaurin per $x>0$ e $x<0$

$f(x)$ sarà derivabile in $x=0$ fino a che i 2 sviluppi saranno uguali

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - e^{x/3}}{\log(\log(e+x^2))} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x} - e^{x/3} \cdot \dfrac{1}{\log(\log(e+x^2))}$

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)x^2}{2!} = 1+\frac{1}{3}x + \dfrac{\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)x^2}{2} = 1+\frac{1}{3}x - \dfrac{\frac{2}{9}}{2}x^2 = 1+\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$

$e^{x/3} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9\cdot 2!}x^2 + \left(\frac{x^3}{27\cdot 3!}\right) + o(x^2)$

$\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{9}x^2 - \cancel{1} - \cancel{\frac{x}{3}} - \frac{1}{18}x^2 = \frac{-2-1}{18}x^2 = -\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{18}\,6} = -\frac{1}{6}x^2$

$\dfrac{1}{\log(1+\underbrace{\log\left(\frac{x^2}{e}+1\right)}_{\frac{x^2}{e}-\frac{x^4}{2e^2}+o(x^4)})} = \dfrac{1}{\log(1+\underbrace{\frac{x^2}{e}-\frac{x^4}{2e^2}}_{t})}$

$= \frac{x^2}{e} - \frac{x^4}{2e^2} - \dfrac{\left(\frac{x^2}{e}-\frac{x^4}{2e^2}\right)^2}{2} + o(t^2) = \frac{x^2}{e} + o(x^2)$

$\left[-\frac{1}{6}\cancel{x^2} + o(x^2)\right] \cdot \frac{e}{\cancel{x^2}} + o(x^2) = -\frac{e}{6}$ non serie!

4) $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + 2x^4 \cdot \log\left(\cos\frac{1}{x}\right)\right) = \quad \frac{1}{x}=t \quad t\to 0 \quad x=\frac{1}{t}$

$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t^2} + 2\frac{1}{t^4}\cdot\log(\underbrace{\cos t}_{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)})\right) =$

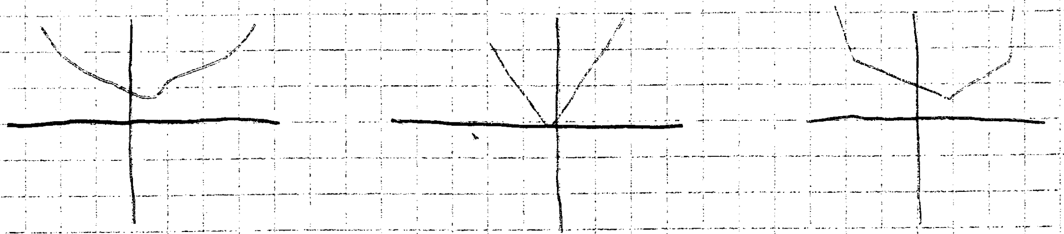
$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dfrac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(\frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$

$-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{1-3}{24}x^4 = -\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{24}\,12}$

$-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4$

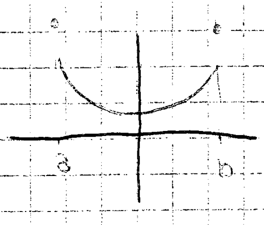
È immediato che f convessa $\Leftrightarrow$ $-f$ concava

<u>Oss</u> le funz convesse ma non strettamente sono quelle che hanno tratti rettilinei nel G_f.



Proprietà: se f è convessa per corde su $I \Rightarrow$

1) f è continua in ogni punto interno a I. Agli estremi non è detto.



è convessa ma non è continua agli estremi

2) $\forall x_0 \in I$, la funzione rapporto incrementale $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ definita su $I \setminus \{x_0\}$ è crescente su I.

3) Ogni f ha derivate laterali $f'_\pm(x_0)$ $\forall x_0$ interno a I.
Quindi f può avere solo punti angolosi di non derivabilità

Definizione: $f: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>convessa per tg.</u> su I vale

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in I$$

cioè se il grafico di f sta sopra le rette tang in ogni punto. Se vale "$>$" strettam. convessa per tg, se vale "$\leq$" concava per tg, se vale "$<$" strettam. concava per tg.

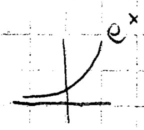
Teorema $f: I \to \mathbb{R}$ sia derivabile almeno una volta in I allora le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti

1) f è convessa per corde su I
2) f è convessa per tang su I
3) f' è crescente su I. Inoltre se f è derivabile almeno 2 volte su I allora
 1) 2) 3) sono equivalenti a
4) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Analogo Teorema vale per f concava.

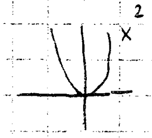
<u>Oss.</u> se $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ e se f'' si annulla solo in punti isolati $\Rightarrow f$ è strettam. convessa su I

es) $f(x) = e^x$



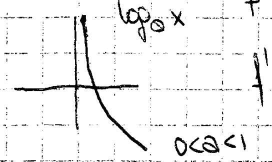
$f''(x) = e^x > 0$

$f(x) = x^2$



$f''(x) = 2 > 0$

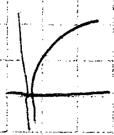
$f(x) = \log_a x$ con $a<1$



$f' = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x} \quad = \underbrace{\frac{1}{\log a}}_{<0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0 \quad \forall x>0$

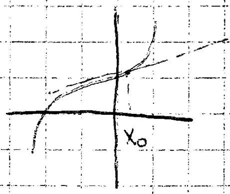
$f(x) = \log x$

$f(x) = \log_a x$ $a>1$

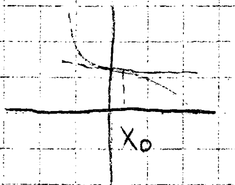


$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Il "verso" della concavità può cambiare. Tali punti sono punti di flesso secondo la definizione più generale seguente



x_0 = punto di flesso ascendente



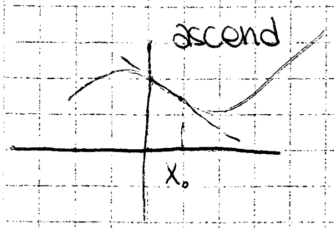
x_0 = punto di flesso discendente

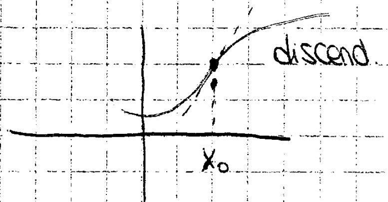
Definizione $f: I \to \mathbb{R}$ sia derivabile x_0 interno a I si dice punto di flesso ascendente se in un intorno di x_0 vale:

$$\begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & \text{per } x<x_0 \\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & \text{per } x>x_0 \end{cases}$$

Si dice punto di <u>flesso discendente</u> se vale

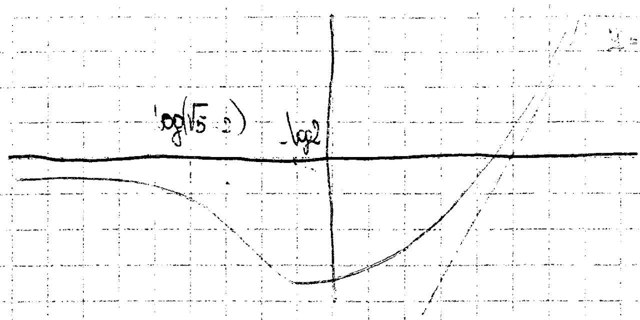
$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & x<x_0 \\ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & x>x_0 \end{cases}$$





TEOREMA $f: I \to \mathbb{R}$ sia derivabile 2 volte in I e sia x_0 interno a I

1) se x_0 è punto di flesso $\Rightarrow f''(x) = 0$



• dom $1+e^{2x}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

• limiti

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^{2x}) - \text{arctg}(e^x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{2x}}\, 2e^{2x} - \frac{1}{1+e^{2x}}\, e^x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}-e^x}{1+e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}(2e^x-1)}{\cancel{e^x}(\frac{1}{e^{2x}}+1)} = \frac{2\cancel{e^x}(1-\frac{1}{2e^x})}{\cancel{e^x}} = 2 \quad m=2x$

$\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{2x}) - \text{arctg}(e^x) - 2x = +\infty - \frac{\pi}{2} - \infty$ f.i.

$\cancel{\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{2x}}\, 2e^{2x} - \frac{1}{1+e^{2x}} - 2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} - 2 = 0}$

$\log e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}}) - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow$

~~q≠0~~

$\boxed{y=2x-\frac{\pi}{2}}$ $\quad 2x(1) - \frac{\pi}{2} - \cancel{2x} = -\frac{\pi}{2}$ as. obliquo destro

$\lim_{x\to-\infty} 0-0=0 \quad y=0$ as. orizz. sx

• monotonia $\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot 2e^{2x} - \frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2e^{2x}-e^x}{1+e^{2x}} > 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$N>0 \quad e^x(2e^x-1)>0 \quad e^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$e^x>\frac{1}{2} \quad x>\ln\frac{1}{2} = \ln(2)^{-1} = -\ln 2$

$-\ln 2 \Rightarrow$ min assoluto

• $f''(x) = \frac{(4e^{2x}-e^x)\cdot(1+e^{2x}) - (2e^{2x}-e^x)(2e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} = [4e^{2x} + \cancel{4e^{4x}} - e^x - e^{3x} - (\cancel{4e^{4x}} - 2e^{3x})] / (1+e^{2x})$

$= 4e^{2x} - e^x + e^{3x} = \frac{e^x(4e^x - 1 + e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$

$D>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$N \quad e^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$e^x \le -2-\sqrt{5}$ e $e^x \ge -2+\sqrt{5}$

$x \le \ln(\cancel{-}2-\sqrt{5})$

$x \ge \ln(\sqrt{5}-2)$

$\cap \to \cup$

mo il seguente metodo delle derivate successive

es). Se $f(x) = a_0 + a_2 x^2 + o(x^2)$ si va a vedere il segno della $f''(x_0) = 2! a_2$

Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo, se $f''(x_0) < 0$ x_0 è punto di massimo relativo

In generale vale

~~TEOREMA~~: $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 interno a I e f sia derivabile n volte in x_0 e sia $f'(x_0) = 0$ con $n \geq 2$

1) se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo rel,
se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo rel.
Se invece $f''(x_0) = 0$ ma $f'''(x_0) \neq 0$ allora x_0 è un punto di flesso ascendente se $f'''(x_0) > 0$, discendente se $f'''(x_0) < 0$

2) Se $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ mentre $f^n \neq 0$ allora

- se n pari $\Rightarrow \begin{cases} f^n(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo rel forte} \\ f^n(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di max rel forte} \end{cases}$
- se n dispari $\Rightarrow$ x_0 punto di flesso $\begin{cases} \text{ascendente se } f^n > 0 \\ \text{discendente se } f^n < 0 \end{cases}$

Dim. Applico Taylor con ordine n col resto di Peano

$$f(x) - f(x_0) = \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \cancel{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} + \dots + \cancel{\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x$$

$$f(x) - f(x_0) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ Quindi se n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad \forall x \neq x_0$ in un intorno di x_0 $\Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow x_0$ punto di minimo relativo forte. Se $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ analogo.

Se invece n dispari si ha che $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ cambia segno in $x_0 \Rightarrow$ x_0 non è punto di estremo e sarà un punto di flesso perché sarà

se $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0 & x > x_0 \\ < 0 & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ punto di flesso ascend.

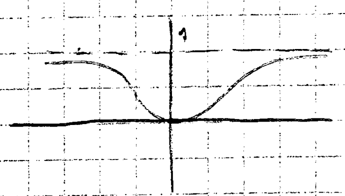
se $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \begin{cases} < 0 & x > x_0 \\ > 0 & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ punto di flesso discend.

(a tg. orizzontale)

$\Rightarrow f$ è positivo in un intorno di $\varnothing$. Inoltre $x=0$ è punto di minimo relativo.

Oss. Il teorema è inefficace nel caso in cui $f^{(n)}(x_0)=0 \; \forall n$.

es) $\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$



È facile verificare che $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f^n(0)=0 \; \forall n \in \mathbb{N}$!

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \qquad \frac{1}{x^2}=t \quad \begin{matrix} x \to 0 \\ t \to +\infty \end{matrix} \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t \to +\infty} e^{-t}\sqrt{t} = 0$$

$f'(0)=0$

In generale vale che $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \; \forall n$

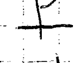
$\Rightarrow f^n(0)=0 \; \forall n$ cioè f ha un contatto di ordine infinito in $\varnothing$ con la funzione $g(x)=0$ (asse x)

Sia ora $f''(x_0)=0$ mentre $f'(x_0)$ può essere qualsiasi. Per vedere se x_0 è punto di flesso posso studiare il segno di $f''(x)$ oppure applico il seguente teorema:

TEOREMA

Sia f derivabile n volte in x_0 con $n \geq 3$ e sia $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^n(x_0) \neq 0$. Allora

1) se n dispari $\Rightarrow x_0$ punto di flesso $\begin{cases} \text{ascendente} & f^n(x_0)>0 \\ \text{discendente} & f^n(x_0)<0 \end{cases}$

2) se n pari $\Rightarrow x_0$ non è punto di flesso e precisamente
   - se $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow f$ è convessa in un intorno di x_0 
   - se $f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow f$ è concava in un intorno di x_0 

Dim. Applico Taylor di ordine n con Peano

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ $\Rightarrow$ Concludo ragionando nei vari casi

Questo si può interpretare come $\frac{d}{dx}\,o(x^n) = o(x^{n-1})$. Questa vale solo se f ha n derivate in $\emptyset$. In generale non vale, cioè <u>non</u> si può derivare un o.

es) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f(x) = o(x^2)$ ①, $(x \to 0)$ Però $f'(x)$ <u>non</u> è $o(x)$ per $x \to 0$

Infatti per $x \neq 0$ $f'(x) = \underbrace{3x^2 \sin\frac{1}{x}}_{0} + \underbrace{x^{\cancel{3}} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}_{\nexists} =$

$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \nexists \Rightarrow$ succede che $f'(0) = 0$ ma $f''(0) = \nexists$

non è derivabile 2 volte in zero.

$\Rightarrow$ la ① non è lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 di f e quindi non si può derivare

es) $x_0 = +\infty$

$f(x) = x^2 \sin x = o(x^3)$ $(x \to +\infty)$

$f'(x) = \underbrace{2x \sin x}_{0} \cdot \underbrace{x^2 \cos x}_{\nexists} \;\; \nexists\; o(x^2)$ $(x \to +\infty)$

es) $f(x) - x^2 - 3x \sin x$ $(x \to +\infty)$

$= x^2 + o(x^2)$ $(x \to +\infty)$

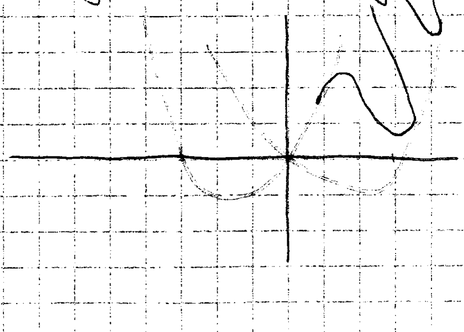
$f'(x) = 2x - 3\sin x - 3x\cos x = x(2 - 3\cos x) - 3\sin x \;\; \nexists\; 2x + o(x)$ $(x \to +\infty)$

notiamo che $f(x) \sim x^2$ $(x \to +\infty)$

f avrà lo stesso segno di x^2 in un intorno di $+\infty$ ma non è detto che abbia la stessa monotonia né convessità di x^2 in un tale intorno

$f''(x) = 2 - 3\cos x + 3x\sin x - 3\cos x$

f oscilla tra $y = x^2 - 3x$ e $y = x^2 + 3x$



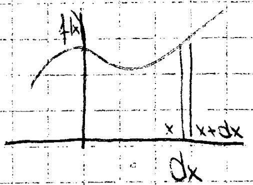
$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k$ e superiori: $M_1 h + M_2 h + \dots + M_n h = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1} M_k$

Definizione: f limitata in $[a,b]$ si dice integrabile (secondo Riemann) in $[a,b]$ se $\exists$ finiti e sono uguali i limiti delle successioni s_{n_1} e S_n. In tal caso il valore comune di tali limiti si chiama integrale definito di f su $[a,b]$ e si indica con:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} s_{n_1} = \lim_{x\to\infty} S_n$$

Notazioni:

- $\int$ è una deformazione di Σ (sommatoria)



$dA = f(x)\,dx$ = area infinitesima

$\int$ = somma di tutte le aree

x = è una variabile "muta"

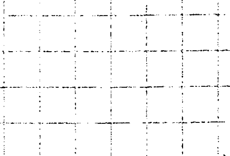
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(s)ds$$

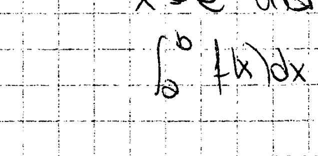
Oss: si può dimostrare che ogni somma inferiore è $\leq$ di ogni somma sup. $s_{n_1} \leq S_n \quad \forall n, n'$. Da questo si può dimostrare che se $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_{n_1}) = 0$ allora s_{n_1} e S_n devono avere limiti finiti e uguali, cioè sono entrambe convergenti.

Quindi f rimane integrabile in $[a,b] \iff \lim_{n\to\infty} (S_n - s_{n_1}) = 0$

Interpretazione geometrica dell'integrale

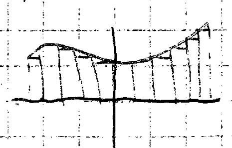
Definiamo per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ il trapezoide di f in $[a,b]$ come l'insieme



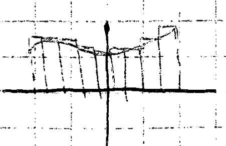


$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,$ e $0 \leq y \leq f(x)$ se $f(x) \geq 0$, mentre $f(x) \leq y \leq 0$ se $f(x) \leq 0$

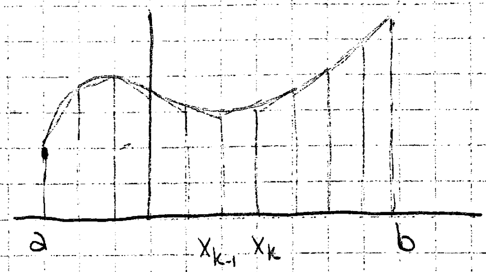
- se $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx$ rappr. una definizione rigorosa dell'area di T.



s_n approssima area di T per difetto



S_n approssima area di T per eccesso



$$A_{\text{TRAPEZIO}} \quad \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

Classi di funzioni integrabili

TEOREMA Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è monotona (crescente o decrescente) su $[a,b]$ allora f è integrabile su $[a,b]$

<u>Dim</u> Se f è crescente su $[a,b]$ f è limitata essendo $f(a)\le f(x)\le f(b)$ $\forall x$

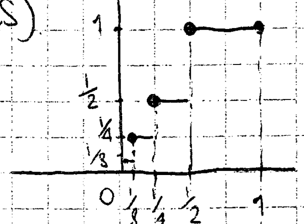
Vale sempre se f crescente $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1})$ e $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k)$

$$\Rightarrow S_n - s_n = \frac{b-a}{n}(M_1+M_2+\dots+M_n) - \frac{b-a}{n}(m_1+m_2+\dots+m_n) = \frac{b-a}{n}\Big[\cancel{f(x_1)}+\cancel{f(x_2)}+\dots+f$$
$$- f(x_0) - \cancel{f(x_1)} - \dots - \cancel{f(x_{n-1})}\Big] = S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_n)-f(x_0)\right]$$

$$= S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\left[f(b)-f(a)\right]$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n - s_n = 0$ f è integrabile in $[a,b]$

es)



$f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1/2 & 1/2\le x\le 1 \\ 1/4 & 1/4\le x< 1/2 \\ 1/8 & 1/8\le x<1/4 \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^{n+1}}\le x<\frac{1}{2^n}\end{cases}$$

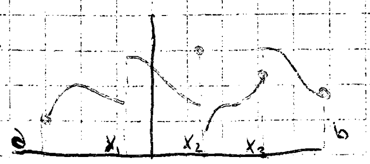
f è crescente su $[0,1]$ $\Rightarrow$ f è integrabile su $[0,1]$ Notiamo che f è discontin[ua] in ogni punto $x=\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ \frac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\dots+ = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$$ serie geometrica

TEOREMA Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$

Questo si estende subito alle funzioni <u>continue a tratti</u> in $[a,b]$, cioè f è continua in $[a,b]$ escluso al più un numero <u>finito</u> di punti di discontinuità di tipo salto.

es) (x_1, x_2, x_3)



• Integrabilità su sottointervalli

Se f è integrabile in $[a,b]$ e se $a \le c < d \le b$ allora f è integrabile in $[c,d]$

• Additività rispetto all'intervallo di integrazione.

Se f è integrabile in $[a,b]$ e se $a<c<b$ allora

$$\text{①} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Si definisce

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{per } a<b \quad \text{e} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Con queste definizioni è facile verificare che la ① vale $\forall a,b,c$

• Monotonia rispetto la funzione integranda

Siano f e g integrabili sull'intervallo $[a,b]$ con $a<b$

1) Se $f \geq 0$ in $[a,b]$ allora l'integrale è ≥ 0 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2) Se $f \geq g$ in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

3) Di $|f|$ è integrabile in $[a,b]$ e vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a<b)$$

Infatti ogni numero $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Integrando termine a termine $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

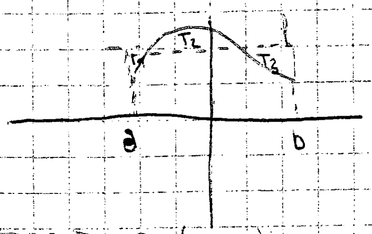
che è la 3) Ricordando che $|t| \leq a \Leftrightarrow -a \leq t \leq a$

Media integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$ Si chiama media integrabile di f su $[a,b]$ il numero $\ell = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

Questo è una specie di valore medio di f. Se $f \geq 0$ in $[a,b]$ essendo

$$(b-a)\ell = \int_a^b f(x)\,dx$$



Area rettangolo di base $(b-a)$ e altezza ℓ è $= \int_a^b f(x)\,dx = A($

$\Rightarrow A(T_2) = A(T_1) + A(T_3)$

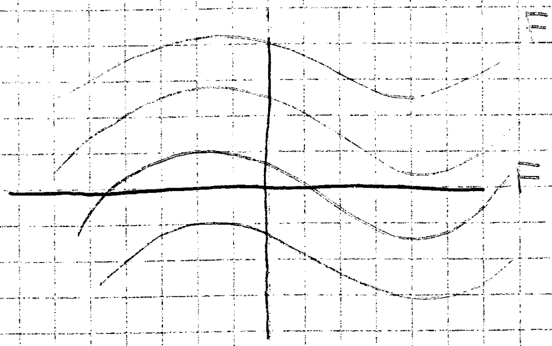
TEOREMA (media integrale)

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ allora $\exists c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$\Rightarrow H(x) = k \quad \forall x$

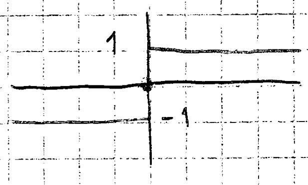
Quindi se f ammette una primitiva F su I, allora tutte le primitive di f su I sono della forma $F(x)+k$ con $k \in \mathbb{R}$ cioè si ottengono traslando il G_F in su o in giù



Per determinarne una posso richiedere che valga una condizione iniziale del tipo $F(x_0)=y_0$, cioè che il suo grafico passi per il punto (x_0, y_0)

<u>Oss</u> Non tutte le funzioni ammettono una primitiva

es) $f(x) = \mathrm{sgn}\, x$



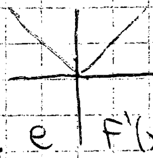
$I = \mathbb{R}$

non esiste una funzione F <u>derivabile</u> su tutto $\mathbb{R}$ tale che $F' = f$. Infatti se ciò fosse, F' avrebbe una discontinuità di tipo salto in $x=0$ essendo

$\lim_{x \to 0^+} F'(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} F'(x) = -1 \Rightarrow F'_+(0) \neq F'_-(0)$

$\Rightarrow F$ non è derivabile in zero.

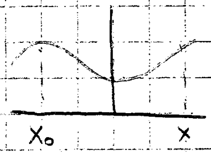
Il "meglio" che posso fare è definire $F = |x|$



Questa è continua su $\mathbb{R}$, derivabile su $\mathbb{R}-\{0\}$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$

Questa F si chiama una <u>primitiva generalizzata</u> di f (sempre per le funzioni continue a tratti)

Sia f da $I \to \mathbb{R}$ una funzione <u>continua</u> nell'intervallo I. Per ogni $a, b \in I$ fissati esiste il numero integrale $\int_a^b f(x)dx$. Fissato $x_0 \in I$ consideriamo la funzione $F: I \to \mathbb{R}$ $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. F si chiama la <u>funzione integrale</u> di f relativa al punto x_0. Geometricamente se $f \geq 0$ si ha che $F(x)$ per $x > x_0$ è l'area del trapezoide di f sull'intervallo $[x_0; x]$, mentre



se $x < x_0$ $F(x)$ è l'opposto del valore di tale area. Se $x = x_0 \Rightarrow F(x_0) = 0$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

(mette in relaz. la teoria degli integrali con quella delle primitive)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo I e sia $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ la funzione

- $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$

$\int_0^1 x^p \, dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \left[\log x\right]_1^2 = \log 2 - 0 = \log 2$

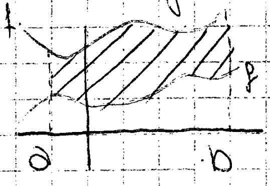
- Calcolo di aree

Proposiz: Siano f, g continue in $[a,b]$ t.che $g \leq f \ \forall x \in [a,b]$ e sia

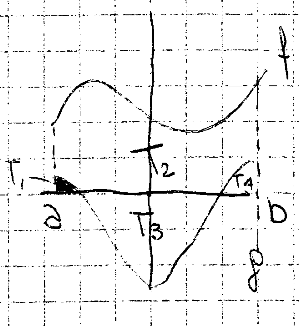
$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{array}\right\}$

Allora l'area $A(B) := \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

__Dim__ Se $0 \leq g(x) \leq f(x)$ è evidente



Sia ad es. $f > 0$ mentre g cambia segno in $[a,b]$



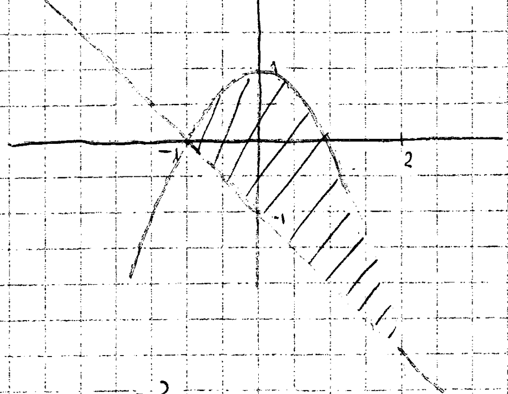
$\text{Area}(B) = A(T_2) + A(T_3)$

$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

$= \cancel{A(T_1)} + A(T_2) + \cancel{A(T_4)} - (\cancel{A(T_1)} - A(T_3) + \cancel{A(T_4)}) =$

$= A(T_2) + A(T_3)$

es) Calcola l'area di $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 - x \leq y \leq 1 - x^2\}$



$1 - x^2 = -1 - x \Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}\right.$

$\text{Area}(B) = \int_{-1}^2 \left[1 - x^2 - (-x - 1)\right]dx$

$= \int_{-1}^2 \left[-x^2 + x + 2\right]dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$

$\Rightarrow \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{5}{6} = \frac{48 - 16 - 5}{6} = \frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{9}{2}$

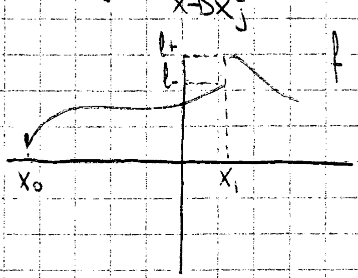
deve invece sempre > 0

inoltre vale che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$, $x \neq x_1, x_2, x_k$ vale il seguente

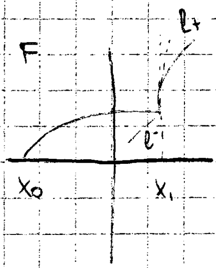
* TEOREMA

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua a tratti su I, sia $x_0 \in I$ e sia $F(x)$ la funzione integrale relativa a x_0 $= F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. Allora F è una primitiva generalizzata di f su I e precisamente F è continua su I derivabile $\forall x \neq x_1, x_2 \dots x_k$ dove x_1, x_2, x_k = i punti di salto di f con $F'(x) = f(x)$ $\forall x \neq x_1, x_2 \dots x_k$ e inoltre i punti $x_1, x_2 \dots x_k$ sono punti angolosi di F con derivate laterali $F'_+(x_j) = \lim_{x \to x_j^+} f(x) = l_j^+$

$F'_-(x_j) = \lim_{x \to x_j^-} f(x) = l_j^-$



$\Rightarrow$

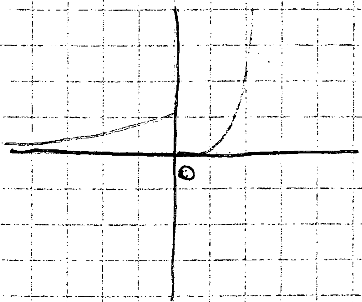


Vale ancora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ se $G(x)$ è una qualsiasi primitiva generalizzata di f su I. Infatti per le primitive generalizzate vale ancora il teorema della costante additiva.

es) Data

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$$

Calcolare la primitiva generalizzata di f che si annulla in $x=0$

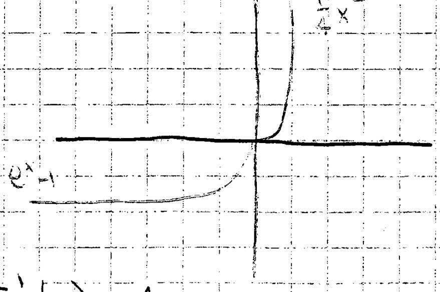


1° metodo: $F(x) = \begin{cases} \text{primitiva di } x^3 & x \geq 0 \\ \text{primitiva di } e^x & x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + k_1 \\ e^x + k_2 \end{cases}$

F continua in $x=0 \Rightarrow 0 + k_1 = \overset{1}{e^0} + k_2 \Rightarrow k_1 = 1 + k_2$

$F(0) = 0 \Rightarrow F(0) = k_1 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = -1$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 & x \geq 0 \\ e^x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



Notiamo che $F'_+(0) = 0$ e $F'_-(0) = 1$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{settsh} x + k = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{settch} x + k \quad (x>1) = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+k \quad (x>1 \text{ opp } x<-1)$$

In generale sono "immediati" i seguenti tipi di integrali:

$$\int f(x)^{\alpha}\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\left[f(x)\right]^{\alpha+1}+k \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\left|f(x)\right|+k$$

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)}+k$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin[f(x)]+k$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)]+k$$

$$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = -\cos[f(x)]+k$$

es)

$$\int x e^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+k$$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \log\left|e^x-1\right|+k$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}+k =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+k$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+k$$

$$\int \frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}\log^2 x+k$$

$$\int \frac{1}{x\log x} = \log\left|\log(x)\right|+k$$

Oss. Il simbolo dx viene detto differenziale di x. Ponendo $x = \varphi(t)$, il differenziale di x (dx) diventa $f'(t)dt$. Quindi $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt =$
$= \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$

es) $\int_0^1 \sqrt{1+4x}\, dx \Rightarrow 1+4x = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{4} \Rightarrow dx = \left[\frac{t-1}{4}\right]' dt = \frac{1}{4} dt$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow t = 1$
$x = 1 \Rightarrow t = 5$ $\Rightarrow \int_1^5$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{4}\int_1^5 t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{4}\int_1^5 \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{3/2}\, dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[t^{3/2}\right]_1^5 =$
$= \frac{2}{12}\left(5^{3/2} - 1\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{125} - 1\right)$

es) $\int \frac{1}{(2x+3)^4}\, dx$ $\quad 2x+3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4}\, dt = \frac{1}{2}\int t^{-4}\, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-4+1} t^{-4+1} + k = -\frac{1}{6} t^{-3} + k = \frac{1}{6}\frac{1}{(2x+3)^3}$

Il cambio di variabile si effettua spesso ponendo $\psi(x) = t$, poi si inverte ottenendo $x = \varphi(t)$ etc. A volte è più semplice procedere come segue:
$\psi(x) = t$ poi prendo il differenziale di ambo i membri $dt = \psi'(x)dx$
Questo è utile se nell'integrale di partenza compare l'espressione "$\psi'(x)dx$"

es) $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$ $\quad 1+x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t-1}$
$\Rightarrow dt = 2x\, dx \Rightarrow dx\, x = \frac{dt}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2}\log|t| + k = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + k$

opp $1+x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t-1}$, $x>0$ $\quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt$

$\int \frac{\cancel{\sqrt{t-1}}}{t}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{t-1}}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt$

es) $\int x\cdot e^{-x^2}\, dx$ $\quad -x^2 = t \quad dt = -2x\, dx \Rightarrow dx\cdot x = -\frac{1}{2}dt$

$-\frac{1}{2}\int e^t\, dt = -\frac{1}{2}e^t + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

$tgx = t \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\log|t| + k \Rightarrow$

$\int \frac{1}{\sin(2x)} dx = \frac{1}{2}\log|tgx| + k$

es) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \quad x = 2t \quad t = \frac{x}{2} \quad dx = 2dt \quad = 2\int \frac{1}{\sin 2t} dt = 2 \cdot \frac{1}{2}\log|tg\,t| + k$

$= \log|tg\frac{x}{2}| + k$

es) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} dx \quad x + \frac{\pi}{2} = t \quad dx = dt$

$\int \frac{1}{\sin(t)} dt = \log|tg\frac{t}{2}| + k = \log|tg(\frac{x}{2} + \pi)| + k$

Integrazione per decomposizione in somma

$$\boxed{\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx}$$

es) $\int (1+2x^2)^3 dx = \int (1 + 8x^6 + 6x^2 + 12x^4) dx = \int 1\,dx + \int 8x^6 dx + \int 6x^2 dx +$

$+ \int 12x^4 dx = x + \frac{8}{7}x^7 + \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}}x^3 + \frac{12}{5}x^5 + k$

es) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + k = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + k = \frac{x - \sin x\cos x}{2} + k$

es) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + k$

$\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + k = \frac{2x + \sin 2x}{4} + k$

$\frac{2x + 2\sin x\cos x}{4} + k = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + k$

es) $\int \underset{f'}{x} \cdot \underset{g}{\log x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \log x - \frac{1}{2}\int x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + k$

es) $\int \underset{f'}{x^\alpha} \underset{g}{\log x}\, dx \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq -1$

$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \log x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \log x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} + k$

es) $\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \int_1^e \underset{f'}{x^{-\frac{1}{5}}} \underset{g}{\log x}\, dx = \frac{1}{-\frac{1}{5}+1} x^{-\frac{1}{5}+1} \log x - \int \frac{5}{4} x^{-\frac{1}{5}+1} \frac{1}{x}\, dx$

$\frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} \log x - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot x^{4/5} + k \Rightarrow \int_1^e = \left[\frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} \log x - \frac{25}{16} x^{\frac{4}{5}}\right]_1^e =$

$\frac{5}{4}e^{4/5} - \frac{25}{16}e^{4/5} + \frac{25}{16} = -\frac{5}{16}e^{4/5} + \frac{25}{16}$

es) $\int \underset{f'}{x} \cdot \underset{g}{\operatorname{arctg} x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx$

" " $-\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + k$

A volte si riottiene dopo qualche integraz. per parti l'integrale iniziale ma con un coeff $\neq 1$. Questo permette di risolvere l'integrale.

es) $\int \underset{f'}{e^x} \cdot \underset{g}{\sin x}\, dx = e^x \sin x - \int \underset{f'}{e^x} \underset{g}{\cos x}\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-)$

$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx \Rightarrow \cancel{2}\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + k$

$\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + k$

es) $\int \underset{f'(x)}{e^x} \underset{g}{\cos x}\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + k \Rightarrow e^x \cos x + \int \underset{f'(x)}{e^x} \underset{g(x)}{(+\sin x)}\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$

$- \int e^x \cos x = \cancel{2}\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$

Allo stesso modo si fanno

$\int e^{ax} \sin bx\, dx$, $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$ etc.

es) $\int \underset{f'}{e^{2x}} \underset{g}{\cos 3x}\, dx = \frac{4}{13}e^{2x}\left[\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{3}{4}\sin 3x\right] + k \Rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \cos 3x - \frac{1}{2}\int \underset{f'}{e^{2x}} \underset{g}{(-\sin 3x) \cdot 3}$

$\sqrt{ch^2t-1} = \sqrt{sh^2t} = sht \qquad dx = sht\, dt$

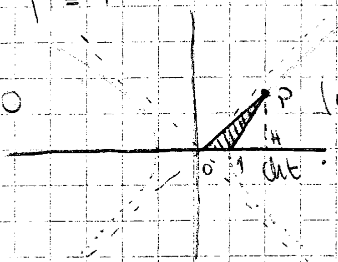
$\int sht \cdot sht\, dt = \int sh^2t\, dt = \int \frac{ch2t-1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int ch2t\, dt - \frac{1}{2}\int dt$

$\frac{1}{4} sh2t - \frac{1}{2}t + k = \frac{1}{2} sht \cdot cht - \frac{1}{2}t + k = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\,sett\,ch\,x + k$

$x^2 - y^2 = 1$

$y = \sqrt{x^2-1}$

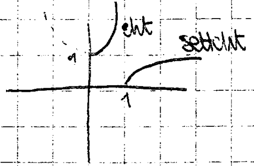
$y > 0$

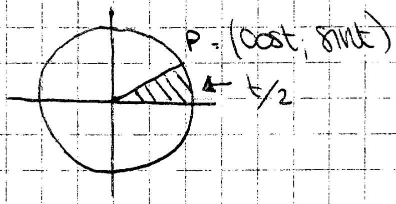


Area = area triangolo $\overset{\Delta}{OPH} - \int_1^{cht} \sqrt{x^2-1}\, dx$

$\frac{1}{2} sht\, cht - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\,sett\,ch x\right]_1^{cht} = \cancel{\frac{1}{2} sht\, cht} - \left(\frac{1}{2} cht\sqrt{sht^2} - \frac{1}{2}\underbrace{sett\,ch\,cht}_{t} - \right.$

$\left. -0 - 0\right] = \frac{1}{2}t$





$\int f(\sqrt{1+x^2})\, dx$ si può tentare $x = sht$ & $\sqrt{1+x^2} = cht$

$\int f(\sqrt{x^2-1})\, dx \qquad x = cht$

$\int f(\sqrt{1-x^2})\, dx \qquad x = sint$ opp $x = cost$

es) $\int (\sin x)^n (\cos x)^m\, dx$

1° caso se almeno uno dei 2 esponenti è dispari la sostituzione $\cos x = t$ opp. $\sin x = t$ si ottiene l'integrale di un polinomio in t

es) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx \qquad \sin x = t \quad dt = \cos x\, dx$

$\int t^2(1-t^2)\, dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + k = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + k$

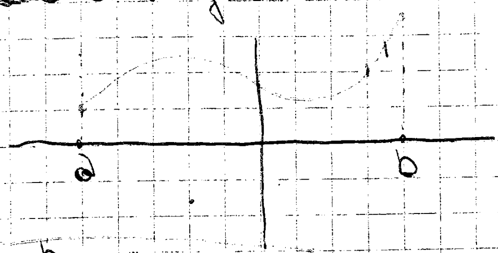
es) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{12} \qquad \sin x = t \to dt = \cos x\, dx$

$\int_0^{\pi/2} t^3(1-t^2)\, dt = \int t^3 - t^5\, dt = \int t^3 dt - \int t^5\, dt \qquad x=0 \to t=0 \quad x=\frac{\pi}{2} \to t \to 1$

$3\int_0^1 t^2 \cdot e^t \, dt$ per parti $3\left[e^t t^2 - \int e^t \cdot 2t \, dt\right]_0^1 = 3\left[e^t t^2 - e^t \, 2t + \int e^t \, 2 \, dt\right]_0^1$

$3\left[e^t t^2 - e^t \, 2t + 2e^t\right]_0^1 = 3(e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2) = 3e - 6$

A). lunghezza di un grafico

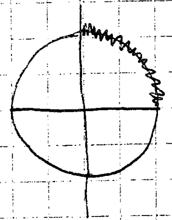


$dl^2 = dx^2 + dy^2$

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

es) lunghezza circonferenza



$l = 4$

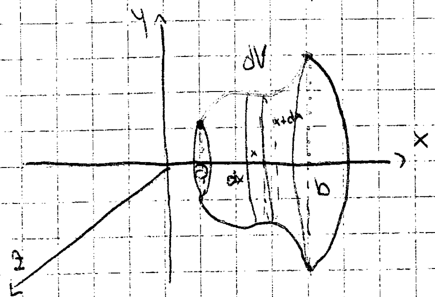
$f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$

$l = 4\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \, dx = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} \, dx$

$4\left[\arcsin x\right]_0^1 = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$

es) Calcolare la lunghezza del grafico di $y = x^2$ in $[0,1]$

B). Volume di un solido di rotazione



$dV = \pi f(x)^2 \cdot dx$

$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$

es). Calcolare il V dell'ellissoide di eq $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ottenuto ruotando l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ attorno all'asse x

B) quando Q = 2

$$\int \frac{dx+e}{ax^2+bx+c}\,dx$$

3 casi $\Delta = b^2 - 4ac \gtreqless 0$

B1) $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Trovate $x_{1,2}$ si applica la seguente decomposizione di $\frac{P}{Q}$ in fratti semplici:

$$\frac{dx+e}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right)$$ dove A, B = costanti da determinare

Trovate A e B $\Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{A}{x-x_1}\,dx + \frac{1}{a}\int \frac{B}{x-x_2}\,dx = \frac{A}{a}\log|x-x_1| + \frac{B}{a}\log|x-x_2| + k$

es) 1) $\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx \qquad x_{1,2} = 2, 3$

$\Rightarrow x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$3x+1 = A(x-3) + B(x-2)$ vale $\forall x \in \mathbb{R}$

1° metodo

$x = 3 \Rightarrow 10 = B$

$x = 2 \Rightarrow -7 = A$

2° metodo

$3x+1 = x(A+B) - 3A - 2B$

$$\begin{cases} A+B = 3 \\ -3A-2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3-B \\ -9+3B-2B = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 10 \quad \begin{cases} A = -7 \\ B = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{-7}{x-2}\,dx + \int \frac{10}{x-3}\,dx = -7\log|x-2| + 10\log|x-3| + k$$

B2) $\Delta = 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$ dove $x_1 = -\frac{b}{2a}$ (Radice doppia di $Q(x)$)

$\frac{1}{a}\int \frac{dx+e}{(x-x_1)^2}\,dx \qquad x-x_1 = t \Rightarrow x = t+x_1$, $dx = dt$ $\Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{d(t+x_1)+e}{t^2}\,dt$

$$= \frac{a}{2} \log(1+t^2) + \frac{b-a\alpha}{\beta} \operatorname{arctg} t + k = \frac{a}{2} \log\left[1+\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right] + \frac{b-a\alpha}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

$$= \frac{a}{2} \log\left[\frac{\beta^2+(x+\alpha)^2}{\beta^2}\right] + \dots + k$$

$$= \frac{a}{2} \log(x^2+px+q) + \frac{b-a\alpha}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x+\alpha}{\beta} + k$$

es) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+3x+7}\, dx \qquad \Delta = 9-28 < 0$

$$x^2+3x+7 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \underbrace{7-\frac{9}{4}}_{\frac{19}{4}} \quad \int \frac{5x+2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}\, dx = \frac{1}{\frac{19}{4}} \int \frac{5x+2}{1+\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{19/4}}\right)^2}\, dx$$

$$\frac{x+3/2}{\sqrt{\frac{19}{4}}} = t, \quad x = \sqrt{\frac{19}{4}}\, t - \frac{3}{2} \qquad dx = \sqrt{\frac{19}{4}}\, dt$$

$$\frac{1}{\frac{19}{4}} \sqrt{\frac{19}{4}} \int \frac{5\left(\sqrt{\frac{19}{4}}\, t - \frac{3}{2}\right)+2}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{\cancel{\sqrt{\frac{19}{4}}}} \int \frac{5\cancel{\sqrt{\frac{19}{4}}}\, t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{\sqrt{\frac{19}{4}}} \int \frac{-\frac{15}{2}+2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{5}{2} \log(1+t^2) + \frac{2}{\sqrt{19}}\left(-\frac{11}{2}\right) \operatorname{arctg} t + k = \frac{5}{2} \log\left[1+\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{19/4}}\right)^2\right] - \frac{11}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{19/4}}\right) + k$$

$$= \frac{5}{2} \log\left[1+\frac{(2x+3)^2}{19}\right] - 11 \dots$$

$$= \frac{5}{2} \log\left[1+\frac{4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{19}\right] \quad " \quad " \quad = \frac{5}{2} \log\left[\frac{4}{19}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\right]\right] \dots$$

$$= \frac{5}{2} \log(x^2+3x+7) - \frac{11}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{19}}\right) + k'$$

es) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2-2x-6}{x^2+x+1}\, dx \qquad \Delta = 1-4 < 0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2-2x-6 & x^2+x+1 \\ \hline x^3+x^2+x & x-5 \\ \hline / \quad -5x^2-3x-6 & \\ \quad -5x^2-5x-5 & \\ \hline / \quad\quad 2x-1 & \end{array}$$

$$x-5+\frac{2x-1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \int \left(x-5+\frac{2x-1}{x^2+x+1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2-5x+\int \frac{2x-1}{x^2+x+1}\, dx$$

$$\int \frac{2x-1+1-1}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx - 2\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \log|x^2+x+1| - 2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx$$

completam. del quadr.

$Ax^3 + \cancel{Ax^2} - \cancel{Ax^2} - \cancel{Ax} + \cancel{Ax} + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx + Cx^3 + Dx^2 + Cx^2 + Dx$

$\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} = \log|x| - \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log|x^2-x+1| + k$

$A = 1$

$B = -\frac{1}{3}$

$C = -\frac{2}{3}$

$D = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \log x - \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\overset{\log}{|}x^2-x+1| + k$

TEOREMA (Decomposizione in fratti semplici di una funzione razionale propria)

Data la frazione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove P e Q polinomi con grado $P <$ grado Q e con grado $Q = n$ e coeff di x^n in $Q = 1$, se Q si scompone in fattori irriducibili su R come $Q(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \dots (x-x_k)^{m_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \dots (x^2+p_Rx+q_R)^{n_R}$ dove $m_1 + \dots + m_k + 2n_1 + \dots + 2n_R = n$

allora $\frac{P}{Q}$ ammette la seguente decomposizione:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \dots + \frac{B_1}{x-x_k} + \frac{B_2}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{B_{m_k}}{(x-x_k)^{m_k}} + \frac{a_1x+b_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{a_2x+b_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}$$

$$+ \dots + \frac{a_{n_1}x+b_{n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_1x+d_1}{x^2+p_Rx \cdot q_R} + \dots + \frac{c_{n_R}x+d_{n_R}}{(x^2+p_Rx+q_R)^{n_R}}$$

Le costanti $A_1 \dots A_{m_1} \dots B_1 \dots B_{m_k} \dots a_1, b_1 \dots a_{n_1}, b_{n_1} \dots$

Sono n e si determinano univocamente risolvendo un sistema lineare $n \times n$

A questo punto per fare $\int \frac{P}{Q}$

- gli integrali $\int \frac{1}{(x-x_1)^s} dx \rightarrow$ sono immediati
- gli integrali $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ si trattano come si è visto cioè si riducono a $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx$, $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ (vedi ieri)
- analogamente gli integrali della forma $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} dx$ si riducono a integrali del tipo $\underbrace{\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx}_{\text{immediati}}$, $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}$ quindi, completando il quadrat

es) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ $\quad A = 1/4 \quad B = -1/4 \quad C = -1/4 \quad D = -1/2 \quad E = -1/2$

$\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}{(x^2+1)} + \int \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\log|x-1| + \int \frac{-2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\frac{1}{4}\log|x-1| - \log(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + k$

es) $\int \frac{1}{x^6-1}\,dx \Rightarrow (x^6-1) = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1}$

A volte si fa un cambio di variabile prima di fare i fratti semplici

es) $\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^3)^2-1}\,dx \Rightarrow x^3 = t \Rightarrow dt = 3x^2\,dx \Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2-1}\,dt$

$\frac{1}{3}\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\,dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+1}\,dt$

$\frac{1}{6}\log|t-1| - \frac{1}{6}\log|t+1| + k =$

$\frac{1}{6}\log|x^3-1| - \frac{1}{6}\log|x^3+1| + k$

es) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}} \cdot dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + k = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + k$

es) $\int \frac{1}{\sin x - \cos x + 1} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}} \cdot dt = \int \frac{1}{2t - 1 + t^2 + 1 + t^2} \, 2 \, dt$

$\int \frac{1}{\cancel{2}t + \cancel{2}t^2} \cancel{2} \, dt = \int \frac{1}{t^2+t} dt = \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)} dt \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

$\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \log|t| - \log|t+1| + k = \log \frac{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|} + k$

D) A volte $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ porta a calcoli molto lunghi se compaiono $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{tg} x$, $\sin x \cos x$ si pone $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

es) $\int \frac{1}{\cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} dx \quad \operatorname{tg} x = t \Rightarrow \int \frac{1}{\frac{1}{\cancel{1+t^2}}\left(1 + \frac{t}{1+t^2}\right)} \frac{1}{\cancel{1+t^2}} dt$

$\int \frac{t^2+1}{t^2+t+1} dt = \int \frac{t^2+t+1-t}{t^2+t+1} dt = t - \int \frac{t}{t^2+t+1} dt =$

$t - \int \frac{t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = t - \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{t}{1 + \left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2} dt \quad \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = s \quad t = \sqrt{\frac{3}{4}} s - \frac{1}{2}, \ dt = \sqrt{\frac{3}{4}} ds$

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{4} \sqrt{\frac{3}{4}} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} s - \frac{1}{2}}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \log(1+s^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} s + k$

E) A volte è suffic. porre $\sin x = t$ opp $\cos x = t$

se abbiamo $\int f(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, dx \quad \sin x = t, \ \cos x dx = dt$

$\int f(t, 1-t^2) \, dt$

es) $\int \frac{\cos x (1 + \sin^2 x)}{2 + \sin^2 x \cos^2 x} dx \Rightarrow \sin x = t \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

$\int \frac{1+t^2}{2+t^2(1-t^2)} dt = -\int \frac{t^2+1}{t^4-t^2-2} dt = -\int \frac{\cancel{t^2+1}}{(t^2-2)(\cancel{t^2+1})} dt = -\int \frac{1}{t^2-2} dt = -\int \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}}$

es) $\int \frac{1}{x^{3/2}+x^{5/4}}\,dx \quad x^{3/2}+x^{5/4} \Rightarrow x = t^4 \quad dx = 4t^3\,dt \quad t=\sqrt[4]{x}$

$\int \frac{1}{t^{4\cdot 3/2}+t^{4\cdot 5/4}}\cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{1}{t^6+t^5}\,t^3\,dt$

$4\int \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{t^3}(t^3+t^2)}\,dt = 4\int \frac{1}{t^3+t^2}\,dt \Rightarrow t^2(t+1) \Rightarrow \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1} = \frac{\overbrace{At(t+1)}^{At^2+At}+Bt+B+Ct^2}{t^2(t+1)}$

$t^2(A+C)=0 \quad C=4$
$t(A+B)=0 \quad A=-4$
$=B=4$

$-4\int\frac{1}{t}+4\int\frac{1}{t^2}+4\int\frac{1}{t+1} =$

$-4\log|t|+4\left(-\frac{1}{t}\right)+4\log|t+1| = -4\log|\sqrt[4]{x}|+4\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)+4\log|\sqrt[4]{x}+1|$

G) A volte integrando per parti si ottiene un integrale razionale

es) $\int \underset{f'}{x}\,\underset{g}{\log(x^2-x-2)}\,dx = \frac{1}{2}x^2\log|x^2-x-2| - \frac{1}{2}\int x^2\,\frac{(2x-1)}{x^2-x-2}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2 & x^2-x-2 \\ \hline 2x^3-2x^2-4x & 2x+1 \\ / \quad x^2+4x & \\ \quad x^2-x-2 & \\ / \quad 5x+2 & \end{array}$$

$2x+1+\frac{5x+2}{x^2-x-2} = \int 2x\,dx+\int 1\,dx+\int\frac{5x+2}{x^2-x-2}\,dx$

$\int\frac{5x+2}{(x+1)(x-2)}\,dx = 5\int\frac{x+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}}{(x+1)(x-2)} \quad \frac{3}{5}\int\frac{}{(x+1)(x-2)} \qquad \frac{+1\mp\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\mp3}{2}\left\langle\begin{array}{l}-1\\2\end{array}\right. \quad \Delta>0$

$= -3\int\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)} = Ax-2A+Bx+B=-3$
$x(A+B)=0 \Rightarrow A=-B$
$-2A+B=-3 \Rightarrow 3B=-3$
$B=1$ e $A=-1$

$-\int\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx =$

$\frac{1}{2}x^2\log|x^2-x-2|-\frac{1}{2}\left(x^2+x+5\log|x-2|-\log|x+1|+\log|x-2|\right)+k$

es) $\int_1^2 \underset{f'}{x}\,\underset{g}{\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}\,dx = \frac{1}{2}x^2\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\int^2 x^2\,\frac{1}{\frac{x+2}{x+1}}\left(\frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)^2}\right)dx =$

$\ldots+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{(x+2)(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx \qquad \begin{array}{l|l} x^2 & x^2+3x+2 \\ \hline x^2+3x+2 & 1 \\ / \quad -3x-2 & \end{array} \qquad 1+\frac{-3x-2}{x^2+3x+2}$

$x-\int\frac{3x+2}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = Ax+A+Bx+2B = 3x+2$

$x = A+B = 3 \quad \& \quad A+2B=2$

es) $f(x) = \frac{x e^{|x+1|}}{e^x}$ TROVARE la PRIMITIVA che si annulla in ZERO

$F : F(0) = 0$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{x+1}}{e^x} & x \geq -1 \\ \frac{x e^{-x-1}}{e^x} & x < -1 \end{cases}$ $\begin{cases} xe & x \geq -1 \\ xe^{-(2x+1)} & x < -1 \end{cases}$ $F(x) \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 e + k_1 & x \geq -1 \\ -xe^{-(2x+1)} - \frac{1}{4}e^{-(2x+1)} + k_2 & x < -1 \end{cases}$

$g f'$ $\quad 2x+1 = t \quad x = \frac{t-1}{2} \quad dx = \frac{1}{2}dt$

$-e^{-(2x+1)}\left(x + \frac{1}{4}\right) + k_2$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{2}x^2 e + k_1 = \frac{1}{2}e + k_1$

$\lim_{x \to -1^-} -e^{-(2x+1)}\left(x + \frac{1}{4}\right) + k_2 = -e\left(-\frac{1}{4}\right) + k_2 = \frac{1}{4}e + k_2$

$\frac{1}{2}e + k_1 = \frac{1}{4}e + k_2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}e + k_2 = \frac{e - 2e}{4} + k_2 = \frac{-e}{4} + k_2$

$F(0) = \frac{1}{2} \cdot 0\, e + k_1 = k_1 = 0 \Rightarrow -\frac{e}{4} + k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{e}{4}$

es) $f(x) = \frac{8}{(|x|+2)^2}$ TROVARE $F(0) = 0$

$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{(x+2)^2} & x \geq 0 \\ \frac{8}{(-x+2)^2} & x < 0 \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 8\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\ -8\int \frac{-1}{(-x+2)^2}\,dx \end{cases} = \begin{cases} -8\frac{1}{(x+2)} + k_1 & x \geq 0 \\ 8 \cdot \frac{1}{(x+2)} + k_2 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{-8}{x+2} = -\frac{8}{2} = -4 + k_1$

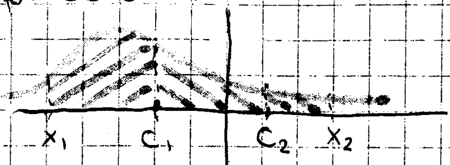
$\lim_{x \to 0^-} \frac{8}{x+2} = \frac{8}{2} = 4 + k_2$

$-4 + k_1 = 4 + k_2 \Rightarrow k_1 = 4 + 4 + k_2 \Rightarrow k_1 = 8 + k_2$

$F(0) = 0 \Rightarrow \frac{-8}{2} + k_1 = 0 \Rightarrow -4 + k_1 = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = 4}$

$k_2 = 4 - 8 \Rightarrow \boxed{k_2 = -4}$

La def. di $\int_{-\infty}^{+\infty}$ non dipende da c



$\underline{C_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{c_1} + \int_{c_1}^{+\infty} = \lim_{x_1 \to -\infty} \int_{x_1}^{c_1} + \lim_{x_2 \to +\infty} \int_{c_1}^{x_2} f(t)dt =$

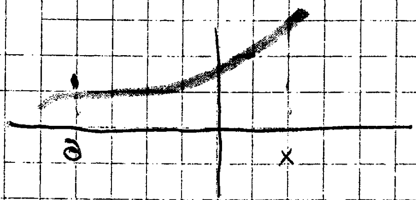
$\underline{C_2} = \int_{x_1}^{c_2} = \int_{x_1}^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2}$

sono uguali

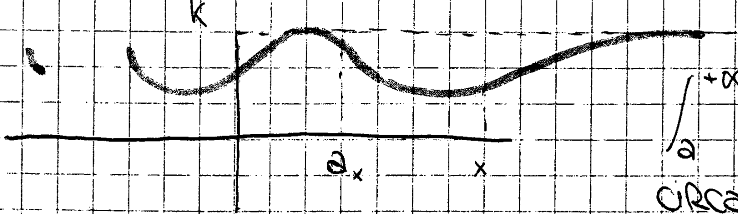
e $\int_{c_2}^{x_2} = \int_{c_1}^{x_2} - \int_{c_1}^{c_2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \int_{x_1}^{c_2} + \lim_{x_2 \to +\infty} \int_{c_2}^{x_2} = \lim_{x_1 \to -\infty} \int_{x_1}^{c_1} + \cancel{\int_{c_1}^{c_2}} - \cancel{\int_{c_1}^{c_2}} + \lim_{x_2 \to +\infty} \int_{c_1}^{x_2}$

__Oss__ Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ opp. se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k \neq 0$ è facile vedere dal del confronto ~~per~~ i limiti che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$



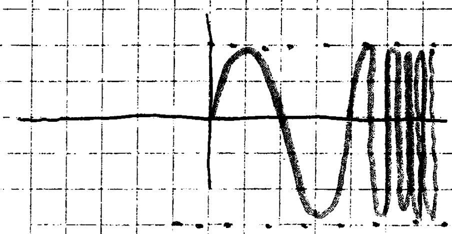
$\int_a^{+\infty} = +\infty$



$\int_a^{+\infty} = +\infty$ perché il trapezoide $\underbrace{}_{}$ su $[a, +\infty)$ sarà circa un rettangolo di altezza k e base infinita $\Rightarrow$ area $= +\infty$

Quindi se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge e __se__ $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x)$ allora necessariamente $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Però si può presentare un altro caso e cioè $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge ma $\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$

es). $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ vedremo che converge ma non $\exists$ il $\lim_{x \to +\infty} \sin(x^2)$



$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ è oscillante

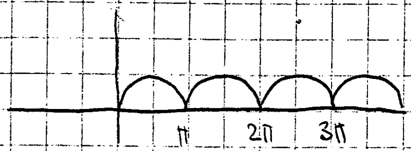
lo stesso vale per $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ o per $\int_{-\infty}^{b} \sin x \, dx$

lo stesso per $\int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$

Infatti: $\int \underset{f}{x} \underset{f'}{\sin x} \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x$

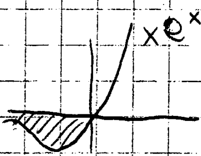
$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x \sin x \, dx = \left[\sin x - x\cos x \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} (\sin x + \cos x) = \nexists$

es) $\int_0^{+\infty} |\sin x| \, dx = +\infty$



$2 + 2 + 2 + 2 = +\infty$

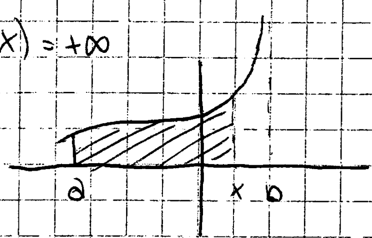
es) $\int_{-\infty}^{0} \underset{f}{x} \underset{f'}{e^x} \, dx$



$\left[xe^x - \int e^x \, dx \right]_{-\infty}^{0} = \left[xe^x - e^x \right]_{-\infty}^{0}$

$-1 - \lim_{x \to -\infty} (\underset{0}{xe^x} - \underset{0}{e^x}) = -1$

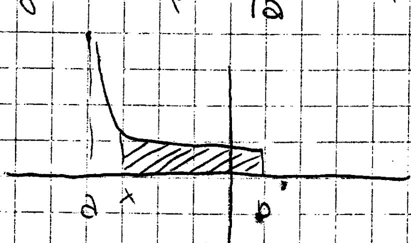
<u>caso B</u> Sia $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ una funz non limitata nell'intervallo $[a, b)$,
per esempio $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$



Supponiamo che f sia integrabile in ogni intervallo $[a, x]$ $\forall x < b$

Definiamo l'integrale improprio $\int_a^b f(x) = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t) \, dt$

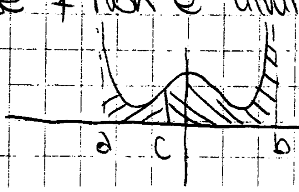
Analoga def per $\int_a^b$ di una funzione $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ non limitata



$\int_a^b f(x) = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t) \, dt$

Infine se f non è limitata nè in un intorno di a nè di b $f: (a, b) \to \mathbb{R}$

es)



definiamo $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

dove c è un punto qualsiasi compreso tra a e b

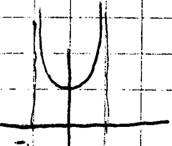
6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \underset{f'}{x^{-\frac{1}{2}}}\,\underset{g}{\log x}\,dx = \left[2\sqrt{x}\log x - 2\int \cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}\sqrt{x}}\,dx\right]_0^1$

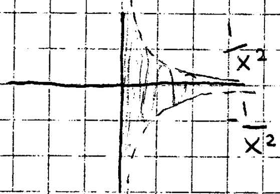
$\displaystyle\left[2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}\right]_0^1 = \underbrace{2\log(1)}_{0} - 4 - \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}\right)}_{0} = -4$

7) $\displaystyle\int_0^1 x\log x\,dx$ non è improprio perché $x\log x$ si prolunga per continuità in $x=0$ essendo $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ $\Rightarrow$ integrale di una funzione continua $\Rightarrow$ integrabile!

8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\log x}\,dx \quad \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] \quad \left[\log|\log x|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \log\left|\log\tfrac{1}{2}\right| - \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\log|\log x|}_{+\infty}$

$= -\infty$ diverge

9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$  $\displaystyle= \left[\arcsin x\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$  oscillante

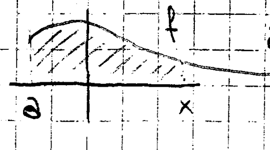
$\displaystyle\left[-\sin\frac{1}{x}\right]_0^1 = -\sin(1) - \Big(-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}}_{\nexists}\Big) \Rightarrow$ oscillante!

Nei casi in cui la primitiva non si calcola elementarmente, la domanda è: l'integrale converge o diverge o oscilla?!

TEOREMA

A) Sia f definita su una semiretta $[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ tale che $f(x)\geq 0\ \forall x$ (non negativa). Allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ o converge o diverge $(+\infty)$ ma non può essere oscillante.

Dim $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ F è una funzione crescente

$x_1 < x_2 \quad F(x_1) \leq F(x_2)$  all'aumentare di x l'area aumenta!

esempi:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^2}\,dx \qquad \underbrace{0 \le \frac{2+\sin x}{x^2}}_{\text{non negative}} \le \frac{3}{x^2}$

$3\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ = converge $\Rightarrow$ anche $\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^2}\,dx$ converge

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx$

$\underbrace{\frac{\log x}{x} \geq \frac{1}{x}}_{\text{positive}} \quad \forall x \geq e$

$\underbrace{\int_1^{e} \frac{\log x}{x}\,dx}_{\text{è un numero}} + \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx$

$\hookrightarrow \int_e^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx = +\infty$

$\Rightarrow$ integrale diverge

3) $\int_0^{1} \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad 0 \le \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \le \frac{3}{\sqrt{x}}$ e $3\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ = converge $\left(\frac{1}{2}<1\right)$

$\Rightarrow$ anche $\int_0^{1} \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge per il T del confronto

4) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \qquad 0 \le \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \le \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2}$

$\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge $(\alpha = 2 > 1)$

! Per esercizio: $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$

TEOREMA (criterio del confronto asintotico)

A). $f,g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $f,g > 0$ $(g \neq 0)$ Esiste $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ $\left(\in \mathbb{R}^*,\ \ell \geq 0\right)$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\,dx \qquad \frac{1}{\sqrt{x}+2x} \sim \frac{1}{2x} \quad (x \to +\infty)$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ diverge

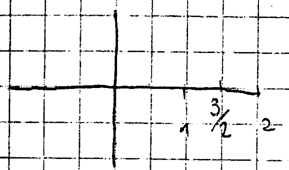
3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+5}\,dx \qquad \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+5} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad (x \to +\infty)$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx : \ \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge

4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad (x \to 0^+)$

$\frac{1}{2} < 1$ converge

5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx \qquad \frac{\log x}{x^2} = o \quad (x \to +\infty)$ ma non ha un ordine di infinitesimo rispetto a $\frac{1}{x}$

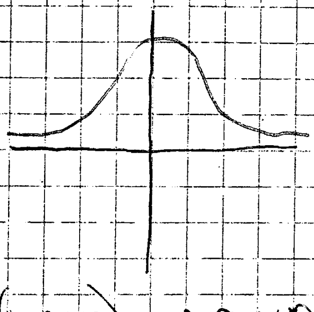


$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log x}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\,\frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\frac{\log x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \Rightarrow$ converge per il criterio del confronto asintotico $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge

esempi

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$



$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right) \quad (x \to +\infty) \quad \forall \alpha > 0$

In particolare $e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty) \Rightarrow$ converge per il confronto asintotico.

2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$

$x \to 1^-$ il campione è $\frac{1}{1-x} \Rightarrow$ si ha $1-x^2 = (1-x)(1+x) \sim 2(1-x)$ $(x \to 1^-)$

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA : TEOREMA

A) Data $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ di segno qualsiasi

Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge $\Rightarrow$ anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge e vale

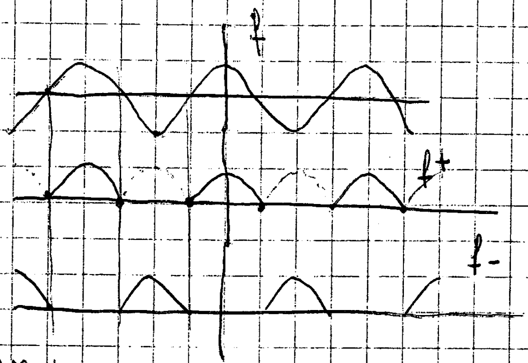
$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

B) $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ ... Analogo

<u>Dim</u>

Definisco la parte positiva f_+ e la parte negativa f_- di f

$f_+ := \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$



È immediato che $f_+ - f_- = f$

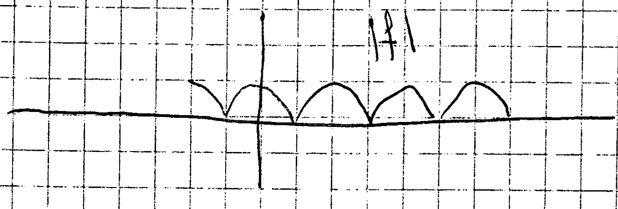
$f_+ + f_- = |f|$

Inoltre $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$

Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge allora anche $\int_a^{+\infty} f_+(x)\, dx$, $\int_a^{+\infty} f_-(x)\, dx$ convergono per il criterio del confronto $\Rightarrow$ anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge perché $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{+\infty} (f_+(x) - f_-(x))\, dx$

$$= \int_a^{+\infty} f_+(x)\, dx - \int_a^{+\infty} f_-(x)\, dx = \underbrace{\left| \int_a^{x} f(t)\, dt \right| \leq \int_a^{x} |f(t)|\, dt}\quad \forall x \geq a$$

Ponendo il limite per $x \to +\infty$ si ottiene la ↑



Oss Il teorema non si può invertire. Può succedere che $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge ma $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx = +\infty$

<u>Def</u> Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ <u>converge assolutamente</u>. (converge l'integr. e il valore assoluto)

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge

$\Rightarrow f(x)$ converge semplicemente

3) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{converge assolutam. se } \alpha > 1 \\ \text{converge semplicem se } \alpha \le 1 \end{cases}$

Infatti

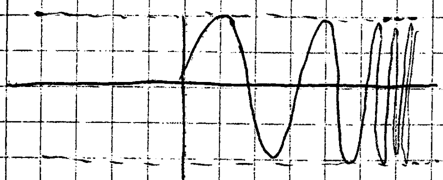
$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$ Quindi se $\alpha > 1$ converge assolutamente

se $\alpha < 1$ si integra per parti per dimostrare la convergenza come fatto per $\alpha = 1$

es) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx$

$0 = \in \mathbb{R} = 0 - \cos(1)$ converge ~~assolutam.~~ semplicemente

4) $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$ $\quad \nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(x^2)$ [si dimostra per successione successione dove vale zero e dove vale 1]

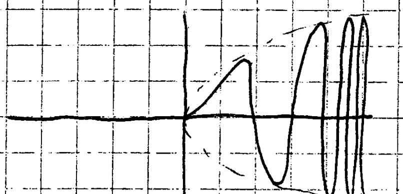


Dimostriamo che:

$x^2 = t, \ x = \sqrt{t}, \ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ $\quad \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{cases}$

$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \Rightarrow$ converge (vedi es sopra$_3$) per parti

5) $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)\, dx$



$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)$

Inoltre $\sqrt{x}\sin(x^2)$ non è limitata su $\mathbb{R}$

$x^2 = t, \ x = \sqrt{t}; \ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$\int_1^{+\infty} \sqrt[4]{t} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/4}} dt \Rightarrow$ converge (vedi es. 3) per parti

Si dimostra $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_0^1 + \int_1^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi/2+1} + \int_{\frac{\pi}{2}+1}$$

$\boxed{x=0}$

$$\frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\sin x}} \sim \frac{-\pi/2}{x^{1/2}} \quad (x \to 0^+) \qquad \frac{1}{2} < 1 = \int_0^1 \text{converge}$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos(x)\sqrt{\sin x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin x} = -1$$

f si prolunga per continuità in $x=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{x=\pi}$

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x\sqrt{\sin x}} \sim \quad (x\to\pi^-)$$

$(\pi-x)$ = campione per infinitesimi

$\pi - x = t \Rightarrow x = -t+\pi$

$\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t \sim t \Rightarrow \sin x \sim \pi - x \quad (x\to\pi^-)$

$$\Rightarrow \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\sin x}} \sim \frac{\pi/2}{-(\pi-x)^{1/2}} \quad (x\to\pi^-) \qquad \frac{1}{2}<1 \Rightarrow \text{converge}$$

$\Rightarrow \int_0^\pi$ converge

5) $$\int_{0^+}^{+\infty} \frac{\sqrt{|\sin x|}\,(1-\cos\sqrt{x})}{x^2}\,dx \quad ⊛ = \text{converge}$$

$\boxed{x=0}$ dato che si annulla sia il numeratore e il denominat. si fa il limite

si risolve con McLaurin:

$$\frac{\sqrt{|\sin x|}\,(1-\cos\sqrt{x})}{x^2} \sim \frac{\sqrt{|x|}\,\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}\cdot x}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x\to 0^+)$$

$\Rightarrow \int_0^1$ converge $\qquad \frac{1}{2}<1$ converge!

$\boxed{x=+\infty}$ $$0 \le \left|\frac{\sqrt{|\sin x|}\,(1-\cos\sqrt{x})}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2} \qquad 2>1 \text{ converge } \int_1^{+\infty} \quad ⊛$$