NUMERO : 183

DATA : 03/12/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Rombi

MATERIA : Meccanica dei Fluidi Esercitazioni
Prof. Sordo

Il Teorema π o teorema di Buckingham

Ogni grandezza fisica ha opportune dimensioni rispetto alle unità di misura delle <u>grandezze fondamentali</u> che per la meccanica sono tre.
Adottata la terna M, L, T e le corrispondenti unità *kg, m, s* una grandezza fisica Q_1 della meccanica avrà il seguente legame dimensionale:

$$[Q_1] = kg^{\alpha_1} \cdot m^{\beta_1} \cdot s^{\gamma_1}$$

- Esempio:

  Consideriamo la pressione p : $[p] = \frac{N}{m^2}$, poichè
  $[F] = kg \cdot m \cdot s^{-2}$,
  sarà
  $[p] = kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ Kg m sec^{-2} m^{-2}

ogni termine scientifico è costituito da grandezze fondamentali le quali a loro volta sono dipendenti dalla loro unità di misura

Un discorso analogo si può fare anche per altre grandezze Q_2, Q_3, ecc.

<u>Quesito preliminare:</u>
<u>è possibile assumere un'altra terna di grandezze come terna di grandezze fondamentali ?</u>
Ad esempio, scegliere F, L, T, anziché M, L, T ? (e qui se ne è cambiata una sola, M->F, ma potrei cambiarle tutte e tre)

Si può dimostrare che se fisso l'attenzione su tre grandezze Q_1, Q_2 e Q_3 che hanno rispetto M, L,T le dimensioni

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix} ,$$

si può rispondere affermativamente al precedente quesito se vale la seguente relazione

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Questo perché, non solo occorre che Q_1, Q_2 e Q_3 siano esprimibili in termini di L, M e T, ma attraverso la nuova terna di grandezze fondamentali si deve anche poter esprimere M, L e T.
Per capire questa condizione necessaria e sufficiente, scriviamo

$$\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0$$
$$\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = 0$$
$$\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r = 0$$

ma questo sistema ha soluzione non banale solo se

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

in contraddizione con la condizione di indipendenza dimensionale di Q_1, Q_2 e Q_3.

Così, ad esempio, se fisso la mia attenzione su massa specifica ρ, lunghezza L e velocità U, poiché è:

$$[\rho] = kg^1 \cdot m^{-3} \cdot s^0$$
$$[L] = kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0$$
$$[U] = kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-1}$$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{kg}{m^3} = kg_\rho^1 \cdot m^{-3} \cdot s^0$

$U = \frac{l}{sec} = L^1 \, sec^{-1}$

si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$(-1-0)-(-1-0)+(1-0)$

Ne segue che posso effettivamente assumere le tre precedenti grandezze come nuova terna di grandezze fondamentali.

Naturalmente una grandezza fisica, ad esempio la viscosità μ che ha dimensioni 1,-1,-1 rispetto a kg, m, s

$$[\mu] = kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

avrà rispetto alle unità di misura ρ, L, ed U,

$$[\mu] = [\rho]^a \cdot [L]^b \cdot [U]^c \qquad (1)$$

di dimensioni a, b, c.

Poiché la terna ρ, L, ed U è dimensionalmente indipendente, una relazione del tipo (1), vale per qualunque grandezza, nessuna esclusa. Gli esponenti a, b, c cioè le dimensioni di μ (in questo caso) rispetto alle unità di misura di ρ, L, ed U si determinano scrivendo

$$kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = \underbrace{(kg \cdot m^{-3})^a}_{\rho} \cdot \underbrace{m^b}_{L} \cdot \underbrace{(m \cdot s^{-1})^c}_{U}$$

Il primo membro dipende dimensionalmente da Q_1, Q_2, Q_3 secondo il prodotto $Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}$; per omogeneità dimensionale la dipendenza del secondo membro da Q_1, Q_2, Q_3 deve ridursi al prodotto $Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}$ possiamo allora scrivere

$$N_y \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y} \cdot \varphi(N_4, N_5)$$

da cui

$$N_y = \varphi(N_4, N_5).$$

Siamo partiti considerando un fenomeno in cui intervengono 6 grandezze; ne abbiamo scelte 3 come dimensionalmente indipendenti e abbiamo ottenuto una relazione tra numeri puri.
Il ragionamento fatto nelle 6 grandezze con la scelta di 3 grandezze come dimensionalmente indipendenti si poteva ottenere in generale partendo da "*n*" grandezze e considerando le "*m*" grandezze indipendenti (*m*=2 nei problemi di cinematica, *m*=3 nei problemi di dinamica). In questo caso si ottiene una relazione tra "*n-m*" numeri puri.

Si può allora enunciare il teorema π :

SE IN UN FENOMENO FISICO INTERVENGONO "n" GRANDEZZE E "m" È IL NUMERO DELLE GRANDEZZE FONDAMENTALI, IL LEGAME TRA LE "n" GRANDEZZE È RICONDUCIBILE AD UN LEGAME TRA "n-m" NUMERI PURI.

Il primo membro ha le dimensioni di una forza, infatti il prodotto $\rho \cdot U^2 \cdot D^2$ ha le dimensioni di una forza. Per omogeneità dimensionale anche il secondo membro deve avere le dimensioni di una forza. Risulterà quindi:

$$\frac{F}{\rho^1 \cdot U^2 \cdot D^2} \cdot \rho^1 \cdot U^2 \cdot D^2 = \rho^1 \cdot U^2 \cdot D^2 \cdot \psi(N_1)$$

con $N_1 = \frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot D}$ per cui

$$\frac{F}{\rho \cdot U^2 \cdot D^2} = \psi(N_1)$$

n = 5
m = 3,
quindi numeri puri = 2.

RESISTENZA IDRODINAMICA DI ATTRITO E DI SCIA

Se facciamo procedere il corpo con velocità maggiore ci accorgiamo però che il fenomeno non è più descrivibile solo con queste tre grandezze.
Per completare l'elenco delle grandezze influenti si deve aggiungere la massa specifica del liquido in cui ci si muove:

$$F = \varphi(\rho, U, D, \mu)$$

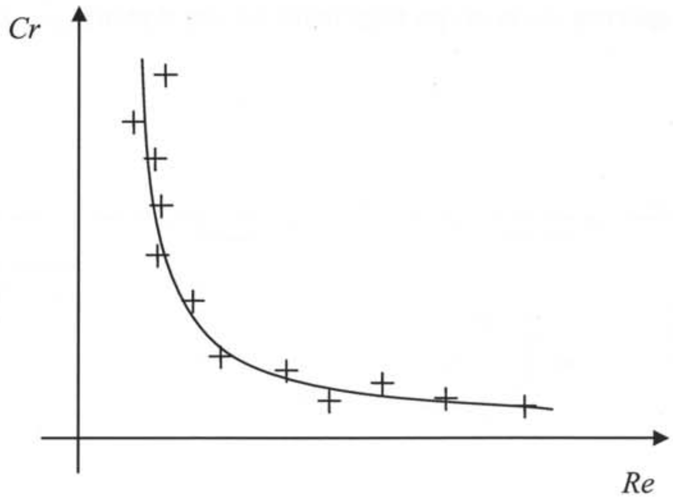
Il problema è certamente più complesso. Infatti, in questo caso le grandezze fisiche sono 5, quindi i gruppi dimensionali sono n-3= 2, tra i quali indaghiamo sperimentalmente un legame.
È consuetudine - ma non scelta vincolante - scegliere ρ, U, D come terna di grandezze fondamentali. Sarà

$$\frac{F}{\rho \cdot U^2 \cdot D^2} = \psi(\frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu})$$

Il temine al primo membro rappresenta il coefficiente di resistenza, mentre l'argomento della funzione al secondo membro è il numero di Reynolds. Perciò si può scrivere

$$Cr = \psi(\mathrm{Re})$$

Siamo ora in presenza di due variabili: non basterà quindi una sola prova per individuare il nuovo legame.
Facendo variare Re, si ricavano sperimentalmente i valori del coefficiente di resistenza.



Interpolando, si ottiene una curva, cui si può dare poi una identità analitica.
Re può essere fatto variare con le modalità più comode, nel senso che si può indifferentemente far variare una qualsiasi delle grandezze che lo generano. In particolare, è più comodo far aumentare la velocità di trascinamento U (il cui effetto è analogo ad aumentare le dimensioni della sagoma o diminuire μ).

In questo caso si deve considerare anche la GRAVITA':

$$F = \varphi(\rho, U, D, g) \qquad \text{RESISTENZA D'ONDA}$$

Prendendo ρ, U, D come terna fondamentale

$$\frac{F}{\rho \cdot U^2 \cdot D^2} = \psi\left(\frac{\rho^0 \cdot U^2 \cdot D^{-1}}{g}\right) = \psi'\left(\frac{U}{\sqrt{g \cdot D}}\right)$$

L'argomento della funzione al secondo membro è il numero di Froude Fr. Possiamo quindi scrivere:

$$Cr = \psi'(Fr)$$

Se il corpo è a <u>profondità intermedia</u>, intervengono sia μ che g. Quindi

$$F = \varphi(\rho, U, D, g, \mu)$$

e si avranno n-3=3 gruppi adimensionali:

$$Cr = \psi'(Fr, \mathrm{Re})$$

In questo caso si avrà resistenza d'attrito, resistenza di scia e resistenza d'onda.
I risultati sperimentali si riportano in coordinate spaziali e non piane.

Immaginiamo di dover valutare il coefficiente di resistenza di un corpo che avanza nelle condizioni viste.
Questo coefficiente di resistenza Cr può essere funzione di Re, del solo Fr e contemporaneamente anche di Re.
L'ideale sarebbe fare delle prove con il corpo reale, ma questo spesso è impossibile perché il corpo verrà realizzato solo quando le sue caratteristiche al trascinamento saranno certe e saremo sicuri di non doverlo modificare. Si eseguiranno allora delle prove su un modello il cui costo non è eccessivo.
Immaginiamo che il modello si debba costruire rispettando una certa scala geometrica λ, ad esempio 1/30.

➢ <u>Se Cr dipende solo da Re</u>, in modello e in originale dovremo rispettare tale numero

$$\frac{\rho_0 \cdot U_0 \cdot D_0}{\mu_0} = \frac{\rho_m \cdot U_m \cdot D_m}{\mu_m}$$

Ma, in genere, il liquido non si può cambiare, $\rho_0 = \rho_m$, $\mu_0 = \mu_m$. Per cui

$$\frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_0}}\frac{D_m}{D_0}=\frac{\upsilon_m}{\upsilon_0}$$

$$\left(\frac{D_m}{D_0}\right)^{3/2}=\frac{\upsilon_m}{\upsilon_0}$$

$$\frac{D_m}{D_0}=\left(\frac{\upsilon_m}{\upsilon_0}\right)^{2/3} \quad \text{e} \quad \frac{U_m}{U_0}=\left(\frac{\upsilon_m}{\upsilon_0}\right)^{1/3}$$

Lavorare in modelli con liquido diverso da quello dell'originale ci permette teoricamente di soddisfare le due relazioni (*).

In pratica è impossibile soddisfare le due relazioni perché è molto difficile trovare un liquido da utilizzare in modello che ci permette di soddisfare la

$$\frac{D_m}{D_0}=\left(\frac{\upsilon_m}{\upsilon_0}\right)^{2/3}$$

con scale delle lunghezze plausibili.

Se, per esempio, $\lambda = 1/30$, deve essere

$$\left(\frac{1}{30}\right)^{3/2}=\frac{\upsilon_m}{\upsilon_0}$$

$$\upsilon_m=\upsilon_0\left(\frac{1}{30}\right)^{3/2}=0{,}0061\cdot\upsilon_0$$

Se $\upsilon_0 = 1\cdot 10^{-6}\, m^2/s$ (acqua a 20°C), $\upsilon_m = 6{,}1\cdot 10^{-9}\, m^2/s$.

Esercitazione 1

: 27-10-10

FABIO BORGOGNO 0174 560867
fabio.borgogno@polito.it

TEOREMA π
Analisi dimensionale

Grandezze fondamentali
Per la precisione 3 nel nostro caso

L = metri M = kg T = secondi

Definito una qualsiasi altra grandezza come combinazione delle grandezze fondamentali

$$[Q_1] = [M]^{\alpha_1} \cdot [L]^{\beta_1} \cdot [T]^{\gamma_1}$$

pressione $[P] = \frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot m}{sec^2} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot sec^2}$ $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\gamma_1 = -2$

quindi in generale $Q_1 = \Phi(L, T, M)$
↳ funzione dimensionale

Considero 3 generiche grandezze q_1, q_2, q_3

$$\begin{cases} [q_1] = (L^{\beta_1} \cdot M^{\alpha_1} \cdot T^{\gamma_1}) \\ [q_2] = (L^{\beta_2} \cdot M^{\alpha_2} \cdot T^{\gamma_2}) \\ [q_3] = (L^{\beta_3} \cdot M^{\alpha_3} \cdot T^{\gamma_3}) \end{cases} \Rightarrow$$

Creo la matrice degli esponenti

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} \log[q_1] = \alpha_1 \log[M] + \beta_1 \log[L] + \gamma_1 \log[T] \\ \log[q_2] = \alpha_2 \log[M] + \beta_2 \log[L] + \gamma_2 \log[T] \\ \log[q_3] = \alpha_3 \log[M] + \beta_3 \log[L] + \gamma_3 \log[T] \end{cases}$$

le incognite sono i logaritmi

Utilizzando il metodo di Cramer per l'incognita $\log[M]$

$$\log[M] = \frac{\begin{vmatrix} \log|q_1| & \beta_1 & \gamma_1 \\ \log|q_2| & \beta_2 & \gamma_2 \\ \log|q_3| & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}} \Rightarrow [M] = [Q_1]^{\delta} \cdot [Q_2]^{\varepsilon} \cdot [Q_3]^{\varphi}$$

Se il denominatore è uguale a zero non ha senso il rapporto e noi non possiamo esprimere l'unità di misura di [M]

Combinando grandezze fondamentali non ottengo un numero puro

$$[Q_1]^p \cdot [Q_2]^q \cdot [Q_3]^r \neq n° \text{ puro}$$

ottengo numero puro se $p = q = r = 0$

Dimostrazione:

$$([M]^{\alpha_1} \cdot [L]^{\beta_1} \cdot [T]^{\gamma_1})^p \cdot ([M]^{\alpha_2} [L]^{\beta_2} [T]^{\gamma_2})^q \cdot ([M]^{\alpha_3} \cdot [L]^{\beta_3} \cdot [T]^{\gamma_3})^r = n° \text{ puro}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 120

B primo

$$\boxed{\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}}} \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f'(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

$= N_y$ numeratore e denominatore devono avere stessa unità di grandezza

$$\underset{\text{n° puro}}{N_y} = \underbrace{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}}_{[y]} = f'(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{N_4, N_5}_{\text{n° puri}})$$

primo membro deve avere le stesse grandezze del 2° membro

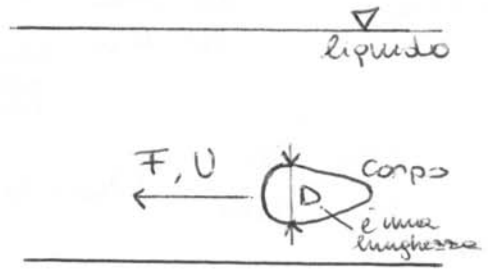
$$N_y \cdot \cancel{Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}} = \underbrace{\cancel{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}}}_{\text{unico modo per combinare i due membri}} \cdot \varphi(N_4, N_5)$$

$$N_y = \varphi(N_4, N_5)$$

sono partito da 6 grandezze e sono arrivato allo studio di 3 grandezze pure ottenendo lo stesso fenomeno.

$h = 6$
$m = 3$ $(h - m = 3)$

Esempio di pg 10



μ, ρ caratteristiche del fluido

$$F = f(\rho, \mu, D, U)$$

Applicando il teorema di π posso eliminare questo legame e sostituirlo con h-m n° puri

$n = 5$ $m = 3$ $\Rightarrow$ $n - m = 2$

ρ, L, U terne di grandezze fondamentali

$$\underbrace{\frac{F}{\rho^{\alpha} \cdot D^{\gamma} \cdot U^{\beta}}}_{N_F} \cdot \rho^{\alpha} \cdot U^{\beta} D^{\gamma} = f\left(\rho, U, D, \underbrace{\frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} \cdot U^{\beta_1} D^{\gamma_1}}}_{N_4 = \frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot D}} \cdot \rho^{\alpha_1} U^{\beta_1} D^{\gamma_1}\right)$$

$$[F] = N = kg \cdot \frac{m}{sec^2} = kg \cdot m \cdot sec^{-2}$$

unità di mis num uguale unità di mis denominatore

$$kg \cdot m \cdot sec^{-2} = (kg \cdot m^{-3})^{\alpha} \cdot (m \cdot sec^{-1})^{\beta} \cdot (m)^{\gamma}$$

$$\begin{array}{l} kg \\ m \\ sec \end{array} \begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

questo vuol dire che: $\rho \cdot U^2 D^2$

questo vuol dire che:

$$N_F \cdot \rho U^2 D^2 = f(\rho, U, D, N_4 \cdot \rho U D)$$

$$N_F \cdot \underbrace{\rho \cdot U^2 D^2}_{F} = f'(\rho, U, D, N_4)$$

a destra e sinistra devo avere stesse unità di misura

pg ②

ESERCITAZIONE 2

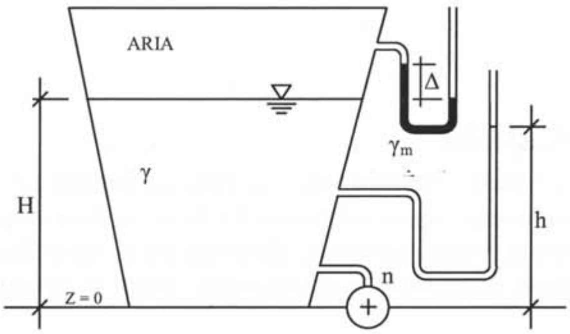
EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA STATICA DEI FLUIDI E SPINTE SU SUPERFICI PIANE

ESERCIZIO 1

Il recipiente chiuso schematizzato in figura contiene acqua per un'altezza H dal fondo e superiormente aria. L'indicazione del manometro a mercurio, con la presa nella parte occupata dall'aria, è Δ. Determinare l'indicazione n (in Kgp/cm^2) del manometro metallico il cui centro si trova alla quota del fondo del recipiente; individuare l'altezza h dal fondo a cui si porta il menisco del piezometro, e tracciare il diagramma delle pressioni lungo una parete laterale del serbatoio.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$\gamma_m = 133300$ N/m^3
H = 2 m
$\Delta = 6$ cm

Risultati:
n = 0.1184 Kgp/cm^2
h = 1.184 m

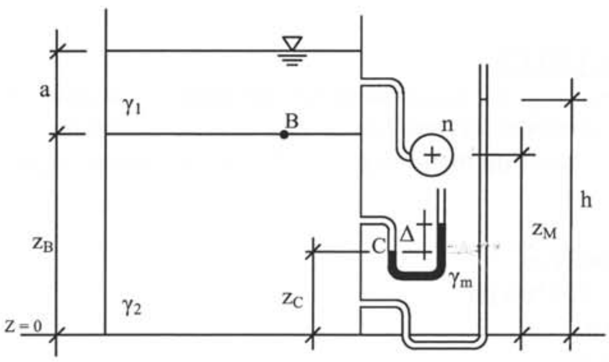


ESERCIZIO 2

Ad un serbatoio contenente due liquidi stratificati, di pesi specifici γ_1 e γ_2 noti, sono collegati un manometro metallico, un manometro a mercurio ed un piezometro, come indicato in figura. Assegnati: la quota z_B della superficie di separazione fra i due liquidi, la quota z_C del menisco inferiore del mercurio, la quota h del menisco del piezometro e la quota z_M del centro del manometro metallico, determinare lo spessore a del liquido 1, l'indicazione Δ del manometro a mercurio e l'indicazione n (in Kgp/cm^2) del manometro metallico. Tracciare inoltre il diagramma delle pressioni lungo una parete laterale del serbatoio e sul fondo.

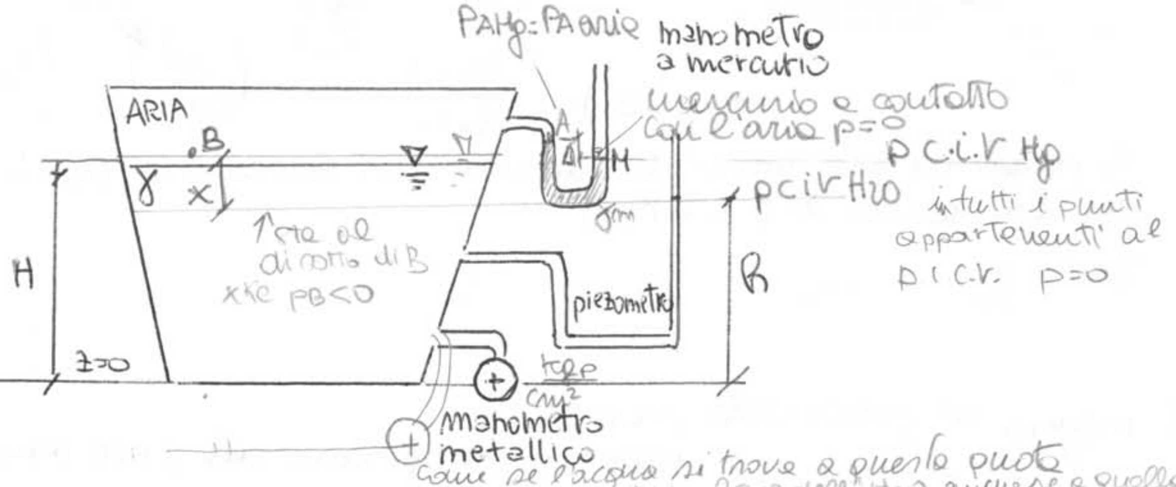
Dati:
$\gamma_1 = 7800$ N/m^3
$\gamma_2 = 9800$ N/m^3
$\gamma_m = 133300$ N/m^3
$z_B = 2.0$ m
$z_C = 0.50$ m
h = 2.80 m
$z_M = 1.80$ m

Risultati:
a = 1 m
$\Delta = 0.169$ m
n = 0.096 Kgp/cm^2



ESERCITAZIONE 2

equazione fondamentale della statica dei fluidi o spinte su superfici piane



come se l'acqua si trova a questa quota calcola la p dell'H2O anche se a quella quota non c'è acqua

lavoriamo con pressioni relative

$P_{rel.} = P_{ass} - P_{atm}$

tutti i punti che sono collegati con l'atmosfera presentano pressione nulla

$M \in Hg$ mercurio $\quad P_{M_{aria}} = 0\left(\frac{N}{m^2}\right)$ e quindi $P_{M_{Hg}} = 0\left(\frac{N}{m^2}\right)$

A ∈ aria serbatoio
A ∈ Hg

$P_{A\,aria} = P_{A\,Hg}$ (1.1) positivi al di sopra dei piani dei c. — gli affondamenti sono negativi quando sono al di sotto del piano dei carichi

$p = \gamma \cdot z$ $\quad$ quindi $P_{A\,Hg} = \gamma_m \cdot \underset{0{,}06}{(-\Delta)} = -7998\left(\frac{N}{m^2}\right)$ peso specifico, affondamento — non è una pressione assoluta xké la pass>0

p aumenta linearmente con z, ATTENZ col para

il p^nto al di sopra del p.c.i.r le pressioni sono positive
al di sotto del p.c.i.r le pressioni sono negative

quindi sono al di sotto della PCR

dalla relazione (1.1)

$P_{A\,Hg} = -7998\left(\frac{N}{m^2}\right) = P_{A\,aria}$

per ogni fluido ho il suo piano dei carichi idrostatici relativi

siccome nei gas presentano un γ piccolo la pressione non varia di molto per tratti contenuti allora considero che per il volume di gas la pressione è costante

$P_{GAS} = COSTANTE$

GAS la p del gas è costante ovunque (quindi $p^{nto}A = p^{nto}_B$)
fluido p aumenta con la profondità

xké appartengono tutti e due al gas

$\underset{lato\ aria}{P_{B\,aria}} = \underset{lato\ aria}{P_{A\,aria}} = -7998\left(\frac{N}{m^2}\right) = P_{B\,H_2O}$

$P_{B_{lato\,H_2O}} = \gamma \cdot (-x) \underset{= trovato}{=}$ che avevamo $-7998\left(\frac{N}{m^2}\right) \Rightarrow x = \frac{7998}{\gamma} = 0{,}816\,(m)$

con relazione fond. statica dei fluidi
↓
sui due lati
$P_{B\,aria} = P_{B\,H_2O}$

↓
in base al suo piano dei carichi idrostatici relativi

$h = \underset{altez\ tot}{H} - \underset{appena\ trovato}{x} = 1{,}184\,(m)$

↓
lo trovo attraverso il menisco del piezometro
↓
disegnato al di sotto di B xké ho trovato che era negativo quindi è giusto

pg 3

Calcolo Δ (diff di quote tra i due menischi)

$pc_{\gamma_2} = pc_{\gamma_m}$ in pc_{γ_m} trovo p.c.ir$_{\gamma_m}$ dove sono presenti le p=0 per Hg

ma

$pc_{\gamma_2} = \gamma_2 \cdot (h - z_C) = 22'540 \left(\frac{N}{m^2}\right)$

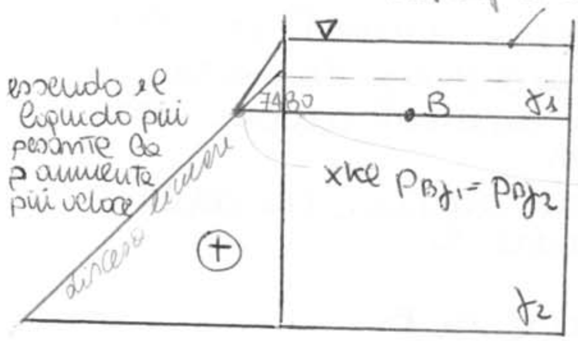
$pc_{\gamma_m} = \gamma_m \cdot \Delta = 22'540 \left(\frac{N}{m^2}\right)$ dove $\Delta = \frac{22'540 \left(\frac{N}{m^2}\right)}{\gamma_m} = 0,169 (m)$

il manometro metallico è collegato a γ_1 studiato rispetto a p.c.i.r. γ_1 anche se è al di sotto di essa

$P_M = \gamma_1 \cdot ((a + z_B) - z_M) = 9'399 \left(\frac{N}{m^2}\right)$ 360 conversione di unità

$h = \frac{P_M}{98'000} = 0,096 \left(\frac{kgp}{cm^2}\right)$

il manometro essendo collegato al petrolio e non all'H_2O non vale la regola $h = 10 \cdot h$ xké da un valore diverso



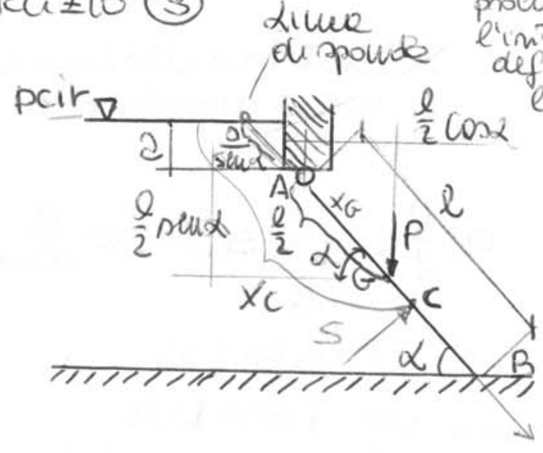
p c i r γ_2 dove vale p=0 per γ_2

nel punto di separazione per γ_1 p=7430 $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

avendo due liquidi avrò due diagrammi

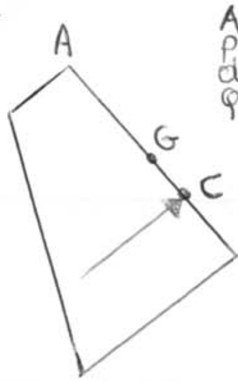
se le p negative le disegno a destra

ESERCIZIO 3



prolungo (l) l'intersezione Andamento pressioni definisce la linea di sponda

paratoia di forma rettangolare



A e B sono più in basso del p.c.i.r quindi in A avrò una pressione definita con l'affondamento idem per B

C si trova sempre più in basso rispetto al baricentro

la risultante delle pressioni risulterà più in basso rispetto al baricentro applicato nel centro di spinta C.

Spinta su superficie piana $S = p_G \cdot \Omega = 15'819 \, N$ con Ω Area sup. piana

Con la relazione fondamentale della statica dei fluidi (xké fluido FERMO) $p_G = \gamma \cdot z_G = \gamma \left(a + \frac{l}{2} sen\alpha\right) = \cancel{15'819}$ 7'909,5 $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

Area paratoia $\Omega = 1 (m) \cdot l = 2 (m^2)$

ESERCITAZIONE 2

ESERCIZIO 5

DATI:

l=2m

a=1m

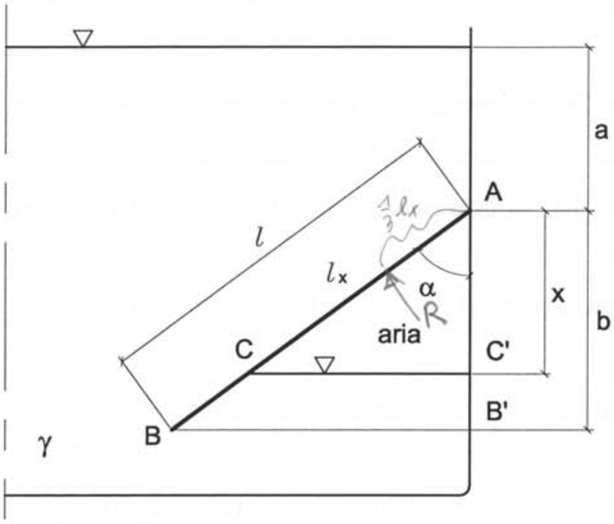
b=1.5m

γ=9800N/m^3

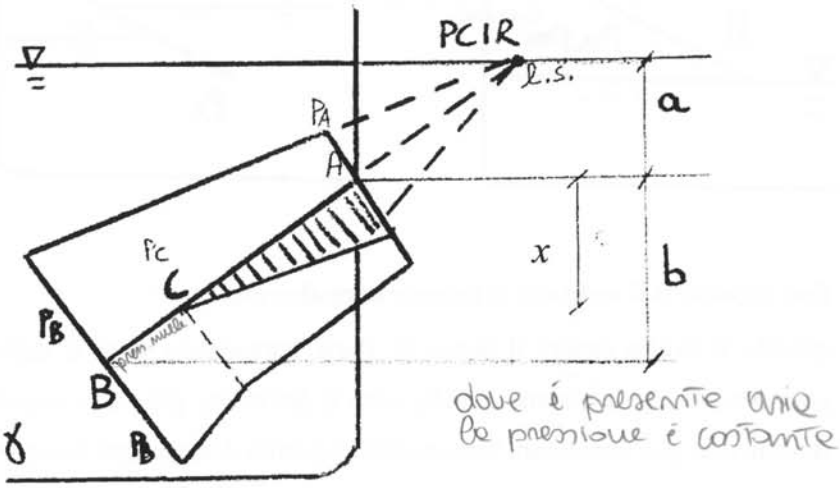
p_{atm}=101300Pa

Profondità unitaria

M_A= ?



Per prima cosa si disegna il diagramma delle pressioni sui due lati del deflettore:



Sul lato superiore le pressioni valgono:

$p_{A,sup} = \gamma \cdot a$ perché l'andamento delle pressioni è di tipo idrostatico

$p_{B,sup} = \gamma \cdot (a+b)$ perché l'andamento delle pressioni è di tipo idrostatico

$p_{C,sup} = \gamma \cdot (a+x)$ perché l'andamento delle pressioni è di tipo idrostatico

Sul lato inferiore invece:

$p_{B,inf} = p_{B,sup}$ perché nel tratto BC ho liquido e l'andamento delle pressioni è di tipo idrostatico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 120

$V_B = \dfrac{b \cdot b \tan\alpha}{2} \cdot 1m$ è il volume occupato dal gas nella condizione iniziale;

$Vc = \dfrac{x \cdot x \tan\alpha}{2} \cdot 1m$ è il volume occupato dal gas nella condizione finale.

Sostituendo nella [1] si ottiene:

$$p_{atm} \cdot \frac{b^2 \cdot \tan\alpha}{2} = [\gamma(a+x) + p_{atm}] \cdot \frac{x^2 \cdot \tan\alpha}{2}$$

$$p_{atm} \cdot b^2 = \gamma(a+x) \cdot x^2 + p_{atm} \cdot x^2$$

$$p_{atm} \cdot b^2 = \gamma \cdot a \cdot x^2 + \gamma \cdot x^3 + p_{atm} \cdot x^2$$

$$\gamma \cdot x^3 + (\gamma \cdot a + p_{atm}) \cdot x^2 - p_{atm} \cdot b^2 = 0$$

Risolvendo numericamente tale equazione di terzo grado si ottiene:

$$x = 1.35m$$

Nota x è possibile calcolare i valori delle pressioni relative in C ed A e determinare l'altezza del triangolo delle pressioni risultanti. Infatti:

$$p_C = \gamma(a+x) = 23030 \, N/m^2$$

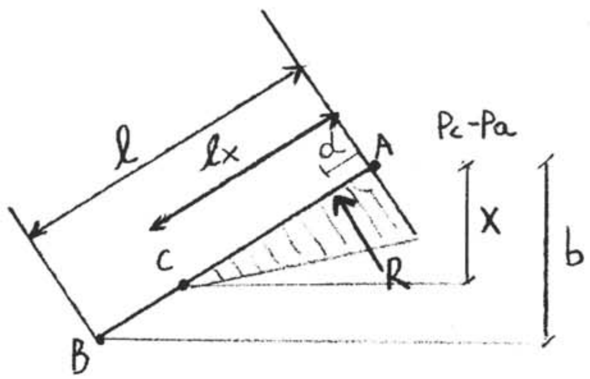
$$p_A = \gamma \cdot a = 9800 \, N/m^2$$

$$p_C - p_A = 13230 \, N/m^2$$ Altezza per trovare l_x

Tramite una proporzione tra triangoli, si calcola quanto vale l_x:

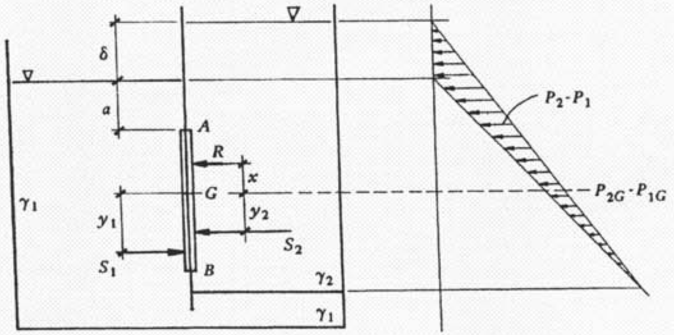
$$b : l = x : l_x$$

$$l_x = \frac{l \cdot x}{b} = 1.8m$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 120

ESERCIZIO 7.1



Nel serbatoio parallelepipedo è inserito un setto verticale che separa il liquido 1 dal liquido 2, lasciando una fessura sul fondo. La distanza fra la superficie libera del liquido 2 e quella del liquido 1 è δ. Trovare la spinta risultante sulla porzione di superficie verticale quadrata (di lato l) di traccia AB il cui lato superiore, orizzontale, è affondato di *"a"* sotto la superficie libera del liquido 1.

Dati:

$\gamma_1 = 9800 \text{ N/m}^3$ $\quad \gamma_2 = 8830 \text{ N/m}^3$
$\delta = 0{,}30 \text{ m}$ $\quad a = 0{,}20 \text{ m}$
$l = 1 \text{ m}$

TRACCIA DI SOLUZIONE

La superficie di traccia AB riceve una spinta dal liquido 1 ed una dal liquido 2. Tracciando i diagrammi delle pressioni per i due liquidi, si osserva che la pressione nel baricentro del quadrato di lato l risulta maggiore dalla parte del liquido 2 (di peso specifico minore), e che quindi la risultante avrà il verso di S_2. I moduli delle due spinte saranno dati dalla nota formula generale:

area affondamento

$S = P\,\Omega$
γ aff Ω

$$S_1 = \gamma_1 \Omega x_{G1} = \gamma_1 l^2 \left(a + \frac{l}{2}\right)$$

$$S_2 = \gamma_2 \Omega x_{G2} = \gamma_2 l^2 \left(\delta + a + \frac{l}{2}\right)$$

le distanze dei punti di applicazione dal baricentro saranno:

$$y_1 = \frac{I_0}{\Omega x_{G1}} \qquad y_2 = \frac{I_0}{\Omega x_{G2}}$$

Per trovare il punto di applicazione della risultante R, basterà scrivere:

$$R \cdot x = M_2 - M_1$$

$$x = \frac{1}{R}(S_1 y_1 - S_2 y_2) = \frac{1}{R}\left(\gamma_1 \Omega x_{G1} \frac{I_0}{\Omega x_{G1}} - \gamma_2 \Omega x_{G2} \frac{I_0}{\Omega x_{G2}}\right) =$$
$$= \frac{I_0}{R}(\gamma_1 - \gamma_2)$$

Essendo $\gamma_1 > \gamma_2$, sarà $M_1 > M_2$, quindi il momento della risultante avrà lo stesso segno di M_1; ora, poichè la risultante agisce, come detto, dalla parte del liquido 2, essa dovrà essere applicata al di sopra del baricentro (risultato non intuitivo).

Sarà quindi:

$$x = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{S_2 - S_1} I_0$$

RISULTATI:

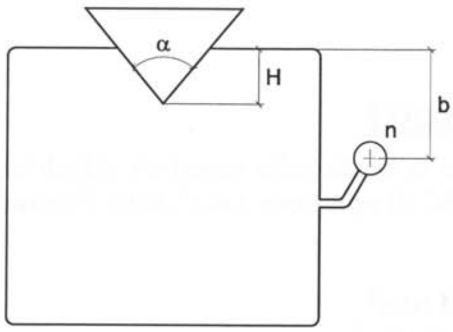
$R = S_2 - S_1 = 1962 \text{ N}$
$x = 0{,}052 \text{ m}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 120

ESERCIZIO 3

Nella parete superiore di un serbatoio chiuso pieno di acqua, è praticata una luce in cui è inserita una valvola conica. Note la geometria del sistema e l'indicazione *n* del manometro metallico, determinare la forza *S* che deve agire sulla valvola per garantirne la chiusura.

<u>Dati:</u>
$\gamma = 9800$ N/m^3
n = 0.07 Kgp/cm^2
b = 0.30 m
H = 0.10 m
$\alpha = 60°$

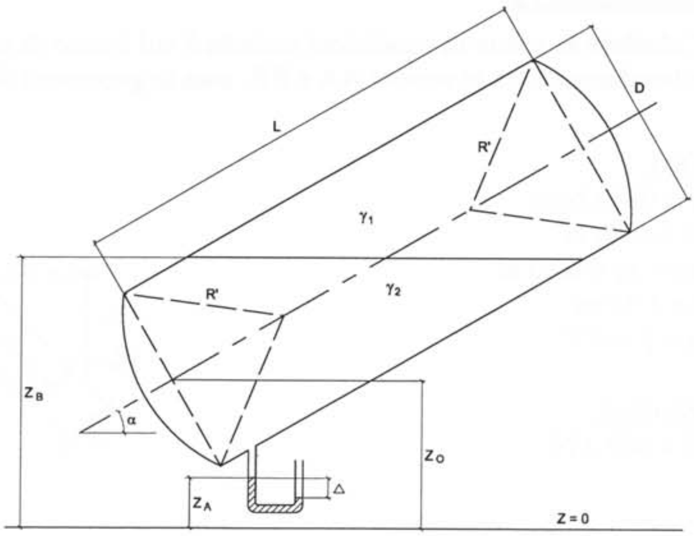


<u>Risultati:</u>
S = 44.5 N

ESERCIZIO 4

Dato un serbatoio cilindrico chiuso da due calotte sferiche e pieno di due liquidi di peso specifico γ_1 e γ_2, note la geometria dello stesso, la posizione del piano di separazione dei due liquidi e quella dei menischi del manometro a mercurio, determinare:
1. le spinte sulle due calotte sferiche;
2. il piano dei carichi idrostatici assoluti per il liquido con $\gamma = \gamma_1$.

<u>Dati:</u>
$\gamma_1 = 7800$ N/m^3
$\gamma_2 = 9800$ N/m^3
$\gamma_m = 133300$ N/m^3
D = 3.0 m
R' = 2.5 m
L = 7.0 m
$\Delta = 0.2$ m
$z_A = 0.75$ m
$z_B = 4.0$ m
$z_O = 2.2$ m
$\alpha = 30°$

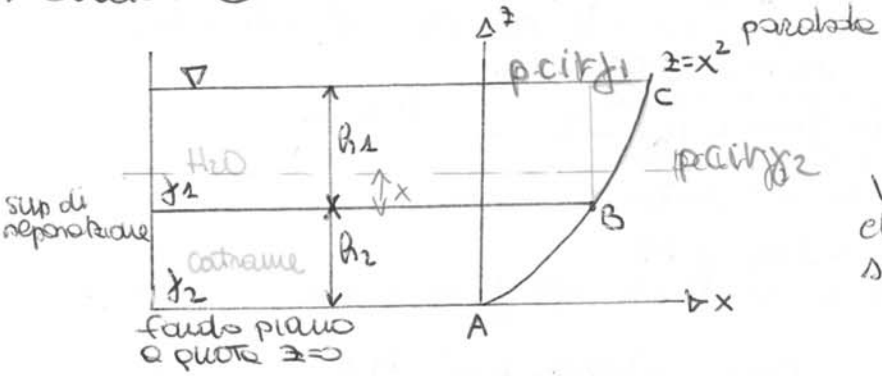


<u>Risultati:</u>
$S_1 = 514.5$ KN, $\alpha_2 = 31°$
$S_2 = 282$ KN, $\alpha_1 = 27°$
$h_{ass,1} = 9.48$ m

ESERCITAZIONE 3

STATICA DEI FLUIDI: SPINTE SU SUPERFICI CURVE

Esercizio ①:



z e x assi con origine in A

profondità di 1 metro

Voglio trovare la spinta che i due fluidi esercitano sulla parete

$S_{ABC} = ?$

$\gamma_1 = 9800\ N/m^3$ $h_1 = 1{,}0\,m$
$\gamma_2 = 1176\ N/m^3$ $h_2 = 0{,}5\,m$

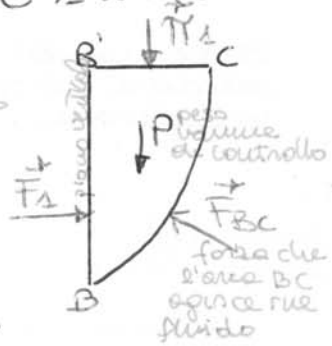
Ho due liquidi immiscibili
γ_1 è H_2O — hanno differente γ
γ_2 è catrame

La spinta $\boxed{S_{ABC}}$ la divido in due spinte xké ho due fluidi
$\vec{S}_{ABC} = \vec{S}_{AB} + \vec{S}_{BC}$ (somma vettoriale)

Calcolo $\vec{S}_{BC}$
Isolo il volume di controllo considerato, ad esso applico la relazione della statica dei fluidi e ricavo così la spinta

Descrivo una retta verticale che individua il volume di controllo $BB'C \cdot 1$ metro (superfici di traccia)

$\vec{P} + \vec{F}_C = 0$ (equazione globale dell'equilibrio statico)



N.B. Determino semplicemente il modulo e direzione delle forze e non il punto di applicazione xké complicato

ho 5 superfici che racchiudono il volume quindi 5 forze

le forze di contorno sono quelle forze che dall'esterno agiscono al contenuto (cioè sul fluido)

S è la spinta del fluido sul serbatoio

Per il principio di azione e reazione $\vec{F}_{BC} = -\vec{S}_{BC}$ (la spinta del fluido sul serbatoio)

sono le basi del prisma
Π_{L1} e Π_{L2} agiscono sulle pareti laterali, ma essendo uguali ed opposte si elidono

Equilibrio (continuo pg seguente)
$$\vec{P}_1 + \vec{F}_1 + \vec{\Pi}_1 + \vec{F}_{BC} + \cancel{\vec{\Pi}_{L1}} + \cancel{\vec{\Pi}_{L2}} = 0$$
tutto vettoriale

Ora: Calcolo i moduli delle forze rimaste

$P_1 = \gamma_1 \cdot V_1$ (peso volume specifico di controllo)

avendo l'equazione $z = x^2$ il volume di controllo lo trovo facendo area prisma − Area che sta sotto la curva (è una differenza)

$V_1 = S_{BB'C} \cdot 1(\text{metro})$ (base prisma)

$$S_{BB'C} = \underbrace{(x_C - x_B)}_{\text{base rettang.}}\underbrace{(h_1 + h_2)}_{\text{altezza rettang.}} - \int_{x_B}^{x_C} x^2\,dx$$
Tolgo l'area della curva che sta sotto BC

Servono x_B e x_C
↳ punto (B) da $z = x^2$
B ∈ alla parabola
$h_2 = x_B^2 \Rightarrow x_B = \sqrt{h_2}$

punto (C) da $z = x^2$
$h_1 + h_2 = x_C^2 \Rightarrow x_C = \sqrt{h_1 + h_2}$

pg ⑤

$P_B{}^{lato}_{\gamma_1} = \gamma_1 \cdot h_1$

(oppure)

$P_B{}^{lato}_{\gamma_2} = \gamma_2 \cdot$ $\left(\text{lo pongo legge}\right) = \gamma_2 \cdot x$ — oss. che non conosco

suppongo che p.c.i.r γ_2 sia al di sopra del lato di separazione di una quota x.

ottengo $x = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot h_2$

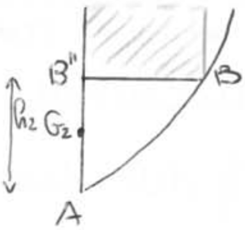
il rapporto $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} < 1$ quindi x è minore di h_1

esso mi definisce che p.c.i.r di γ_2 è al di sopra della superficie di separazione dei due liquidi e al di sotto di p.c.i.r γ_1 proprio perchè $x < h_1$

Calcolo Π_2 $(x_A = 0)$

$\Pi_2 = \overbrace{\gamma_2 \cdot x}^{P_B \gamma_2} \cdot x_B \cdot 1 (\text{metro})$

$\underbrace{\gamma_2 \cdot x \cdot x_B}_{\text{volume di un parallelepipedo compreso tra BB'' e p.c.i.r } \gamma_2}$



$x \, x_B \cdot 1$
volume di un parallelepipedo compreso tra p.c.i.r γ_2 e BB''

(oppure) volume compreso tra il pelo libero e la sup di separaz.

$\Pi_2 = \underbrace{\gamma_1 \cdot h_1}_{P_B \cdot \gamma_1} x_B \cdot 1\,m$

peso volume di fluido di γ_2

$\Pi_2 = 6.926 (N)$

Π_2 lo posso calcolare come peso di un fluido γ_1 anche se lmq nel volume c'è γ_1 quindi è un volume fittizio compreso tra p.c.i.r γ_2 e BB''

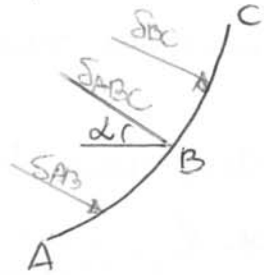
Calcolo F_2

$F_2 = p_{G_2} \cdot \Omega_{AB'} = \gamma_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2} + x\right) \cdot h_2 \cdot 1\,m = 6.363 (N)$

$\xrightarrow{+}$) $S_{AB_o} = F_2 = 6368 (N)$

$+\downarrow$) $S_{AB_v} = P_2 + \Pi_2 = 9.698 (N)$

Traccia AC



$S_{ABC_o} = S_{AB_o} + S_{BC_o} = 11.268 (N)$

$S_{ABC_v} = S_{AB_v} + S_{BC_v} = 12.461 (N)$

modulo di S_{ABC}

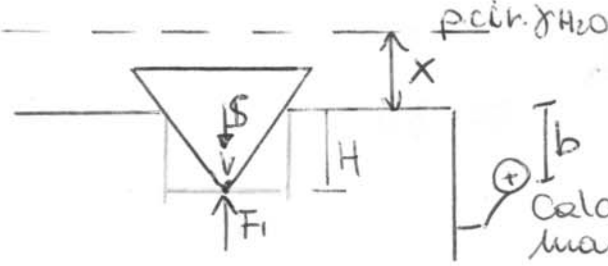
$S_{ABC} = \sqrt{S_{ABC_o} + S_{ABC_v}} = 16800 (N)$

calcolo l'inclinazione e non il punto di applicazione xke complicato

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{S_{ABC_v}}{S_{ABC_o}} = 47°,88$

pg (6)

Il vertice sta alla base del cilindro quindi il vertice avrà la pressione che è alla base del cilindro



$$F_1 = p_V \cdot \Omega = \gamma \cdot (x+H) \cdot \pi \frac{D^2}{4}$$

Calcolo x attraverso la lettura del manometro metallico

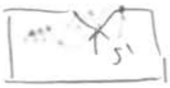
Supponiamo che se utilizzato con H_2O posso scrivere $h = 10 \cdot h$

Allora $10 \cdot h = \underbrace{x}_{\text{affondamento rispetto p.c.i.r.}} + b \Rightarrow x = 10h - b = 0{,}40\,(m)$

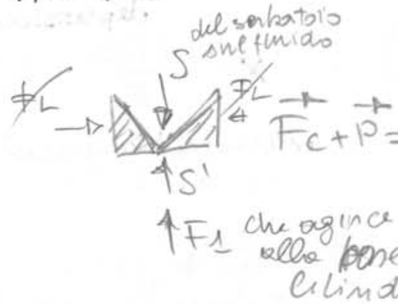
x positivo allora posso posizionare il p.c.i.r. γ al di sopra della superficie superiore del serbatoio

$S = F_1 - P = 44{,}5\ (N)$

All'esame:



S' spinta che il fluido applica al cono



$\vec{F_c} + \vec{P} = 0$

$P + F_1 + \vec{S} = 0$ ma io voglio $\vec{S'}$ che è esattamente uguale e contrario

$\vec{S} = -\vec{S'}$

$P + F_1 - \vec{S'} = 0$

$\vec{S} = \vec{P} + \vec{F_1}$ la proietto in direzione verticale in alto $\uparrow$)

$\uparrow$) $S' = F_1 - P$ (che è uguale all'ex 3 cioè la S del tappo sul fluido mentre qui è il fluido sul tappo)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 120

Avendo tutti i dati geometrici calcolando il punto p noto che la p.c.i.a γ_1 e > di D (in verde quota z_3)

Calcolo le spinte sulle calotte

(superiore)

Applicando la $\vec{P}+\vec{F_c}=0$ applicata sul volume

Calcolo $P_1 = \gamma_1 \cdot V_1$

forze al contorno (forze che dall'esterno agiscono sul volume di controllo). le superfici sono due.

Calcolo il volume

(Tabella delle formule) = $V_1 = 1{,}833 (m^3)$

dove trovo $P_1 = 14'294 (N)$

Dall'equazione di equilibrio

$$\vec{P_1}+\vec{F_1}+\vec{F_x}=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ Spinta su superficie piana $S = p_G \Omega$

$$\vec{F_1} = p_{G_1} \cdot \Omega = p_{G_1} \pi \frac{D^2}{4}$$ (il baricentro sta sull'asse)

siccome si tratta di spinta piana e per convenzione l'asse per la linea di sponda è rivolta verso il basso per punti al di sotto del p.c.i.r., in questo caso trattando una depressione il verso è opposto e anche x_c rispetto a x_G

Calcolo p_G con l'eq. fond. stat. fluidi

$$p_{G_1} = \gamma_1 \cdot z_{G_1}$$ rispetto al p.c.i.r. γ_1

Allora

baricentro della calotta inferiore (arrivo alla quota 0)

$$z_{G_1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{xke il punto è al di sopra del piano } \gamma_1}}{-}\Big[\underbrace{(y - z_B) + z_0}_{\text{arrivo al piano } z=0} + \underbrace{L \cdot \operatorname{sen}\alpha}_{\text{quota aggiunta per arrivare a } G_1 \text{ tra } 0 \text{ e } G_1}\Big] = -9{,}2 (m)$$

Posso calcolare così $\vec{F_1}$, siccome l'affondamento è negativo lo è F_1

$$\vec{F_1} = -507'242\ N$$

la spinta su una superficie piana è negativa quindi il fluido è in depressione e allora la forza sta tirando e era positiva spingeva $\nearrow F_1$

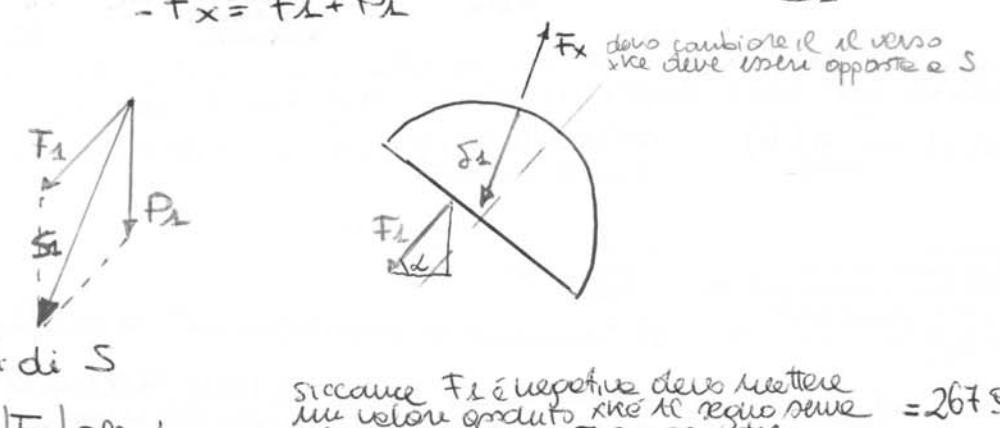
F_1 l'ho disegnata più in alto rispetto a G_1, in questo caso sono in depressione e il p.c.i.r. γ_1 è in basso, è come se il ragionamento fosse ribaltato, quindi la distanza x_c dovrà sempre essere maggiore di x_G

$x_C = x_G + \left(\frac{I_o}{M}\right)$ quantità sempre positiva per questo $x_C > x_G$

Ricavo F_x

$$-\vec{F_x} = \vec{F_1} + \vec{P_1}$$

xke so che $\vec{S_1} = -\vec{F_x}$



F_x devo cambiare il verso xke deve essere opposta a S

Componenti di S

$\downarrow) S_{1V} = P_1 + |F_1| \operatorname{sen}\alpha$ siccome F_1 è negativa devo mettere un valore assoluto xke il segno serve solo per capire se F spinge o tira $= 267'915\ N$

$\leftarrow) S_{1O} = |F_1| \cdot \cos\alpha = 439'284 N$

ESERCITAZIONE 4

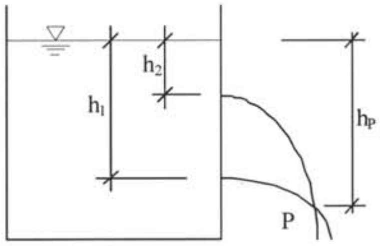
CINEMATICA DEI FLUIDI E APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI

ESERCIZIO 1

Riconoscere l'ordinata del punto P di intersezione di due getti effluenti da due luci puntiformi in parete sottile, praticate nella parete verticale di un serbatoio ed affondate rispettivamente di h_1 e h_2 metri al di sotto della superficie libera.

Dati:
$h_1 = 0.60$ m
$h_2 = 0.25$ m

Risultati:
$y_P = 0.85$ m

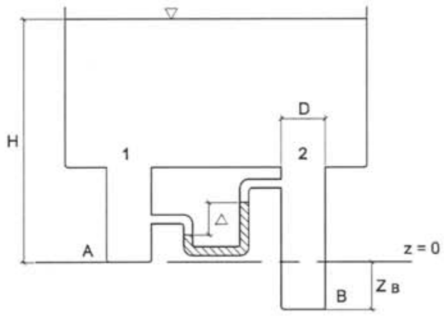


ESERCIZIO 2

Da un serbatoio a livello costante si staccano due tubazioni verticali, ad imbocco raccordato, dalle quali effluisce a bocca piena liquido perfetto di peso specifico γ. Noti il carico H nel serbatoio rispetto al piano z=0 e l'indicazione del manometro differenziale a mercurio Δ si chiede, in valore e segno, sempre rispetto al piano z=0, la quota z_B della sezione di sbocco della seconda tubazione e la portata fluente in essa.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$\gamma_m = 133300$ N/m^3
$\Delta = 0.10$ m
$D = 0.10$ m
$H = 5.0$ m

Risultati:
$z_B = -1.26$ m
$Q = 0.087$ m^3/s

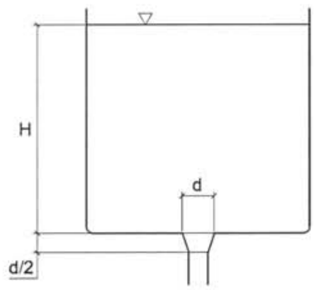


ESERCIZIO 3

Calcolare il tempo necessario allo svuotamento del serbatoio di sezione Ω e livello H, che alimenta una luce in parete sottile di diametro d praticata sul fondo ($H >> d$; liquido perfetto).

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$\Omega = 7.00$ m^2
$H = 3.0$ m
$d = 0.15$ m
$c_c = 0.61$

Risultati:
$T = 434$ s

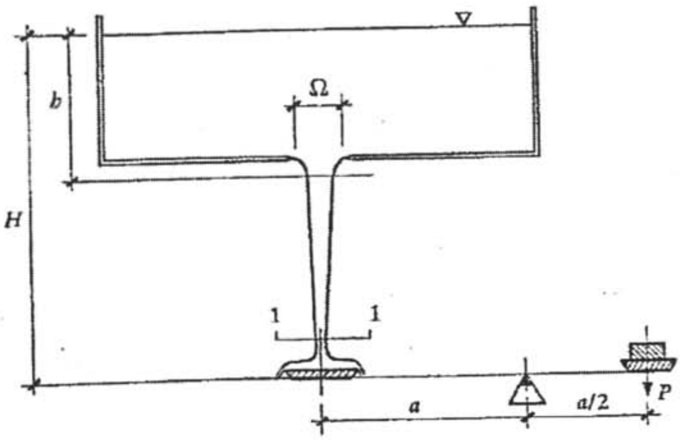


ESERCIZIO 4

La bilancia schematizzata in figura è in equilibrio sotto l'effetto del peso P e della spinta F ricevuta dal getto che effluisce dalla luce di area Ω, ricavata sul fondo del serbatoio. Noti gli affondamenti h ed H, rispettivamente della sezione contratta e del piatto della bilancia, rispetto alla superficie libera, calcolare il peso P.

Dati:
$\gamma = 9800\ N/m^3$
$\Omega = 10\ cm^2$
$h = 0.50\ m$
$H=2\ m$
$c_c=0.61$

Risultati:
$P= 23.94\ N$



ESERCITAZIONE 4

ESERCIZIO 1

Riconoscere l'ordinata del punto P di intersezione di due getti effluenti da due luci puntiformi in parete sottile, praticate nella parete verticale di un serbatoio ed affondate rispettivamente di h_1 e h_2 metri al di sotto della superficie libera.

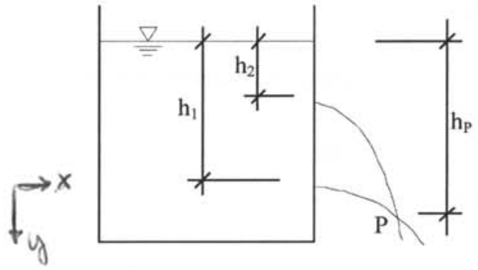
Dati:

$h_1 = 0.60$ m

$h_2 = 0.25$ m

Risultati:

$h_P = 0.85$ m



Si suppone che le luci siano puntiformi e che quindi i getti possano essere considerati monodimensionali; la loro sezione trasversale può quindi essere trascurata. Il livello del serbatoio si mantiene costante, pertanto il moto è permanente.

Si definisce un sistema di riferimento avente asse x in direzione orizzontale e asse y in direzione verticale. Si scrivono le equazioni del moto in direzione verticale ed orizzontale relative a particelle che appartengono ad un getto generico. Si ottiene la seguente soluzione generica:

Direzione y:

$A_y = \dfrac{d^2 y}{dt^2} = g$ perché le particelle sono soggette alla forza di gravità;

Integrando si ottiene:

$\dfrac{dy}{dt} = V_y = gt + c_1$ V_y è la componente verticale della velocità.

Si ricerca il valore della costante c_1:

$t=0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = V_{y,0} = c_1 = 0$ perché il fluido quando esce dalla luce è diretto in direzione orizzontale

Integrando nuovamente si ottiene:

$y = \dfrac{1}{2} g t^2 + c_2$

Si ricerca il valore della costante c_2:

$\frac{u_A^2}{2g} \cong 0$ perché in corrispondenza del pelo libero le particelle sono praticamente ferme.

Si ottiene quindi:

$$u_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} = V_{x,0}$$

dove h = z_A-z_B

=> $x = V_{x,0} \cdot t = \sqrt{2gh} \cdot t$

Le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2gh} \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$t = \frac{x}{\sqrt{2gh}}$

$y = \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{x^2}{2\cancel{g}h} = \frac{x^2}{4h}$

ricavando t dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene:

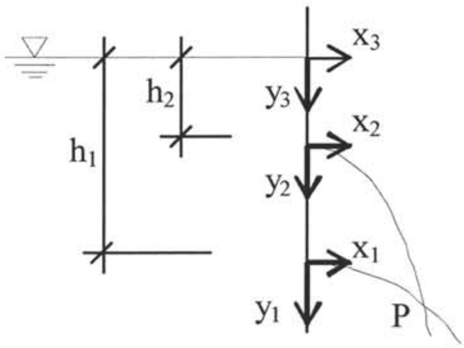
$y = \frac{x^2}{4h}$ equazione di una parabola. Soluzione generica valida solo nel caso in cui il sistema di riferimento abbia l'origine posta in corrispondenza della luce.

Si particolarizza la soluzione per ciascuna luce:

luce 1: $y_1 = \frac{x_1^2}{4h_1}$ sistema di riferimento x_1, y_1 A)

luce 2: $y_2 = \frac{x_2^2}{4h_2}$ sistema di riferimento x_2, y_2 B)

Per trovare il punto di intersezione delle due parabole è necessario riscrivere le equazioni rispetto allo stesso sistema di riferimento. Se si fissa un sistema di riferimento x_3, y_3 avente origine posta in corrispondenza del pelo libero si ottiene:



all'uscita del getto nella sezione contratta a seconda della quota piezometrica avrò varie velocità che però io considero quella calcolata sull'asse come velocità media

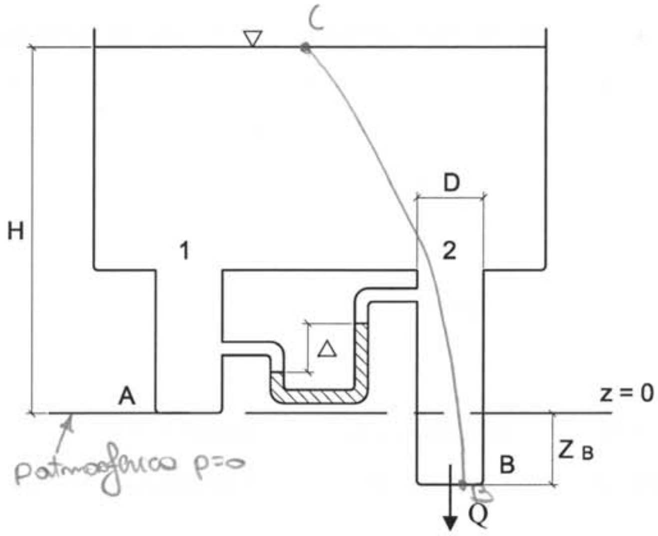
ESERCITAZIONE 4

ESERCIZIO 2

Da un serbatoio a livello costante si staccano due tubazioni verticali, ad imbocco raccordato, dalle quali effluisce a bocca piena liquido perfetto di peso specifico γ. Noti il carico H nel serbatoio rispetto al piano z=0 e l'indicazione del manometro differenziale a mercurio Δ si chiede, in valore e segno, sempre rispetto al piano z=0, la quota z_B della sezione di sbocco della seconda tubazione e la portata fluente in essa..

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$\gamma_m = 133300$ N/m^3
$\Delta = 0.10$ m
D = 0.10 m
H = 5.0 m

Risultati:
$z_B = -1.26$ m
Q = 0.087 m^3/s



Il livello nel serbatoio si mantiene costante, il moto è quindi permanente. Si considera fluido perfetto, gli imbocchi sono raccordati e quindi le perdite di carico possono essere considerate nulle. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di Bernoulli.

Si applica il teorema di Bernoulli, esteso alla corrente, in una generica sezione dei due tubi:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{u_m^2}{2g} = \text{costante}$$

dove: u_m è la velocità media della sezione

α=1 poiché la velocità è uniformemente distribuita nella sezione.

Applicando il teorema di Bernoulli è possibile osservare come il carico totale sia costante, alle differenti quote, all'interno di ciascuna tubazione

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u_m^2}{2g} = \text{costante}$$

Inoltre, essendo sia la Q che la sezione Ω del tubo costanti anche la u_m=Q/Ω sarà costante.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 120

$$z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{u_C^2}{2g}$$

$\frac{p_B}{\gamma};\frac{p_C}{\gamma} = 0$ perché a pressione atmosferica;

$\frac{u_C^2}{2g} \cong 0$ perché in corrispondenza del pelo libero le particelle sono praticamente ferme;

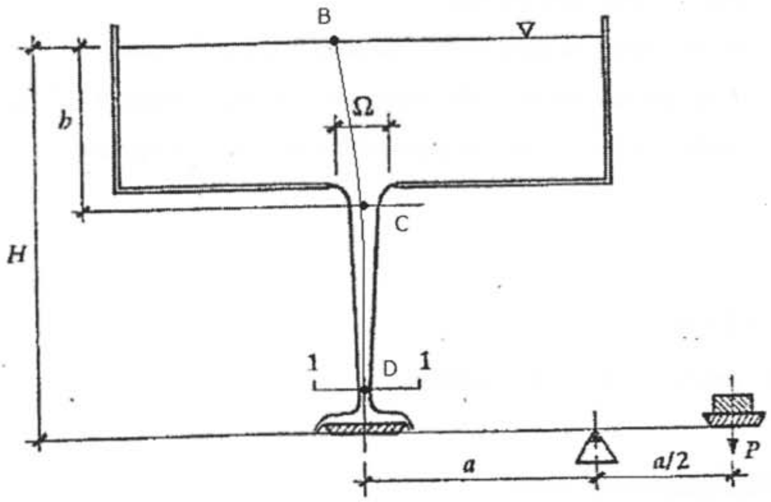
$$u_B = \sqrt{2g(z_C - z_B)} = \sqrt{2g(H - z_B)} = 11.08 m/s$$

$$Q = u_B \cdot \Omega = u_B \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 0.087 m^3/s = 87 l/s$$

ESERCITAZIONE 4

ESERCIZIO 4

La bilancia schematizzata in figura è in equilibrio sotto l'effetto del peso P e della spinta F ricevuta dal getto che effluisce dalla luce di area Ω, ricavata sul fondo del serbatoio. Noti gli affondamenti h ed H, rispettivamente della sezione contratta e del piatto della bilancia, rispetto alla superficie libera, calcolare il peso P.



Dati:

$\gamma = 9800$ N/m^3

$\Omega = 10$ cm^2

h = 0.50 m

H=2 m

c_c=0.61

Risultati:

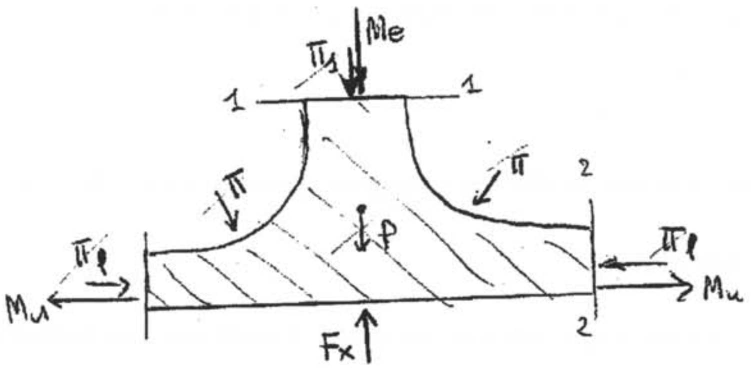
P= 23.94 N

L'equilibrio della bilancia permette di scrivere:

$$F \cdot a = P \cdot \frac{a}{2} \qquad => \qquad P = 2 \cdot F$$

Occorre quindi cercare la F, cioè la spinta che il getto esercita sul piatto della bilancia. Per fare ciò occorre applicare l'equazione globale dell'equilibrio dinamico al volume di liquido che si adagia sul piatto, compreso tra la sezione 1-1 ed il bordo del piatto stesso:

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 120

$u_C = \sqrt{2g(z_B - z_C)} = \sqrt{2gh} = 3.13 m/s$

$Q_1 = u_C \cdot \Omega_C = u_C \cdot (\Omega \cdot C_C) = 1.91 \cdot 10^{-3} m^3/s$

Calcolo di u_1: si applica il teorema di Bernoulli tra il punto B ed il punto D, ipotizzando che appartengano alla stessa traiettoria:

$$z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} = z_D + \frac{p_D}{\gamma} + \frac{u_D^2}{2g}$$

$\frac{p_B}{\gamma}; \frac{p_D}{\gamma} = 0$ perché a pressione atmosferica;

$\frac{u_B^2}{2g} \cong 0$ perché in corrispondenza del pelo libero le particelle sono praticamente ferme;

$u_D = \sqrt{2g(z_B - z_D)} \cong \sqrt{2gH} = 6.26 m/s = u_1$ (si ipotizza quindi che la sezione 1-1 sia molto vicina al piatto e quindi abbia affondamento circa uguale ad H).

La velocità appena calcolata è la u_1.

E' quindi possibile calcolare M_e:

$M_e = \rho \cdot Q_1 \cdot u_1 = 11.97 N$

Quantità di moto uscente

$\overrightarrow{M_u} = \rho \cdot Q_2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{0}$ perché il getto è a simmetria radiale e quindi la risultante delle M_u è nulla.

L'equazione globale dell'equilibrio dinamico diventa quindi:

$\overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{M_e} = 0$

$\vec{F} = -\overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{M_e}$

proiettando in direzione verticale (direzione positiva verso il basso) si ottiene:

$F = 11.97 N$

Il peso P da applicare per equilibrare la bilancia sarà quindi pari a:

$P = 2F = 23.94 N$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 120

$H_A = H_B$

il carico tot per Bernoulli si mantiene costante lungo la traiettoria rappresentata per Bernoulli

$$z_A + \cancel{\frac{p_A}{\gamma}} + \cancel{\frac{u_A^2}{2g}}^{*} = z_B + \cancel{\frac{p_B}{\gamma}} + \frac{u_B^2}{2g}$$

pelo libero

perché B è dopo sezione contratta dove p=0

* Perché le particelle su A sono ferme si suppone che essendo il piccolo solo le particelle adiacenti si muovono, comunque nessuna e il resto del serbatoio non si muovono.

Tutte le traiettorie sono parallele e rettilinee (caduta libera)

ottengo dopo i ragionamenti che

$$u_{B_0} = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2g\left(H_0 + \frac{d}{2}\right)}$$

All'istante iniziale

Vale esclusivamente nell'istante iniziale appena apro il serbatoio xke poi H diminuirà. pongo H_0

Siccome H dipende da t allora anche la velocità dipende dal t

Sappiamo che $\quad Q = u \cdot \Omega = \underset{\text{nella sez contratta}}{u_B} \cdot \Omega_c \quad$ siccome $u(t) \overset{\text{allora}}{\Rightarrow} Q(t)$

$$Q(t) = C_c \cdot \pi \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2g\left[\underset{u_B}{H(t)} + \frac{d}{2}\right]}$$

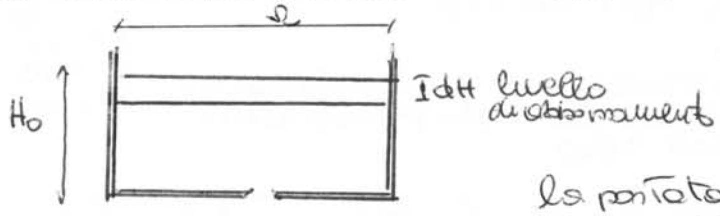
$C_c = \frac{\Omega_c}{\Omega}$

Devo fare un'equazione differenziale per ricavare il tempo

il testo ci dice che $\Omega = 7 (m^2)$

Analizzo cosa succede nel serbatoio al variare di t

equazione diff.



$dV = \Omega \, dH$

la portata per def.

$$Q = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{\Omega \, dH}{dt} \Rightarrow \underset{cost}{\Omega} \frac{dH}{dt}$$

ATTENZIONE che Q è sempre positiva mentre $\frac{dH}{dt}$ negativa

uguaglio

$$-\Omega \frac{dH}{dt} = C_c \pi \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2g\left(H + \frac{d}{2}\right)}$$

equazione differenziale a variabili differenziali

integro dopo aver separato le variabili

$$\int_{t=0}^{t=T^*} dt \cdot \underbrace{\frac{C_c \pi d^2 \sqrt{2g}}{4\Omega}}_{\text{costanti } K} = \int_{H=H_0=3(m)}^{H=0} -\frac{dH}{\sqrt{H + \frac{d}{2}}}$$

$t=T^*$ transcorso (che devo calcolare) — $t=0$ istante iniziale — $H=0$ svuotato

$$K(t)\Big|_{t=0}^{t=T^*} = -\left[2\sqrt{H + \frac{d}{2}}\right]\Big|_{H=3}^{H=0}$$

l'unica incognita è T^* che è = 434 sec

pg ⑨

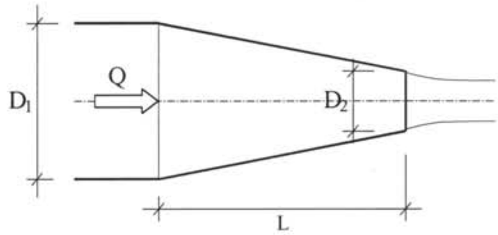
ESERCITAZIONE 5

EQUAZIONE GLOBALE DI EQUILIBRIO DINAMICO

ESERCIZIO 1

Dato lo schema indicato in figura della parte terminale di una condotta, nota la portata Q fluente in essa e nell'ipotesi di fluido perfetto, calcolare la componente orizzontale S_x della spinta che si esercita sul convergente. Ipotizzare che la sezione contratta abbia un coefficiente di contrazione Cc pari a 0.9.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$D_1 = 70$ mm
$D_2 = 20$ mm
L = 500 mm
Q = 7 l/s



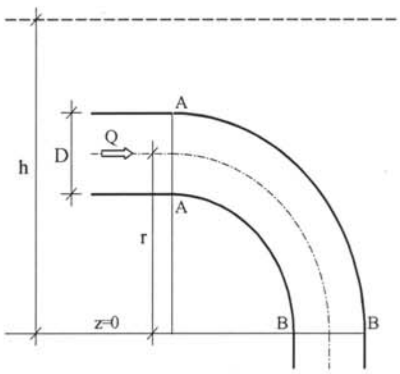
Risultati:
$S_x =$ 1011.28 N

ESERCIZIO 2

Nell'ipotesi di perdite trascurabili, determinare la spinta (componenti orizzontale e verticale, modulo, direzione e verso) sul gomito a 90° della condotta che convoglia acqua, indicata in figura, note la geometria e la portata Q, ed assegnato il carico piezometrico h della sezione A-A riferito al piano $z=0$ passante per la sezione B-B.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
D = 0.25 m
r = 2.0 m
Q = 0.10 m^3/s
h = 22 m

pg 116



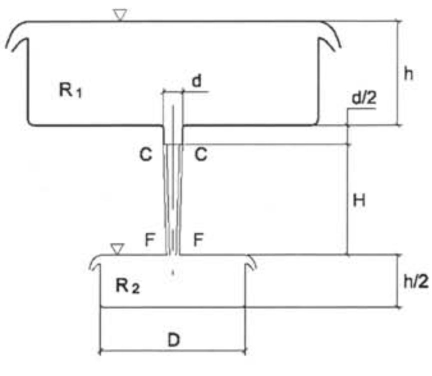
Risultati:
|S| = 13511 N
$\alpha = 43.4°$

ESERCIZIO 3

Sul fondo di un recipiente R_1, pieno d'acqua per l'altezza h, è ricavata una luce circolare di diametro d. Ad una profondità H sotto la sezione contratta, il getto si immerge nel recipiente R_2 di diametro D e pieno d'acqua per l'altezza $h/2$. Le altezze h ed $h/2$ restano costanti, il coefficiente di efflusso μ è pari a 0.62. Determinare:

1. il peso G del getto fra la sezione contratta e la sezione F-F;
2. la spinta S sul recipiente R_2.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
h = 1.0 m
H = 3.3 m
D = 1.0 m
d = 10 cm



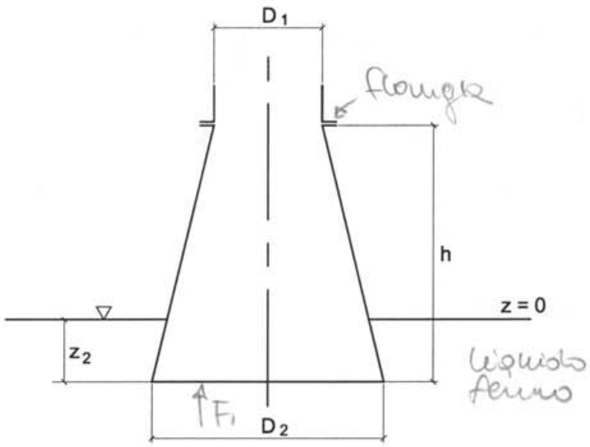
Risultati:
G = 104 N
S = 4053 N

ESERCITAZIONE 5

ESERCIZIO 5

E' data la portata Q transitante in un diffusore, ove si ammette che le perdite di carico siano trascurabili e che la velocità sia diretta verticalmente in ogni sezione. Determinare la spinta sulla flangia di attacco del diffusore.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$D_1 = 1.43$ m
$D_2 = 2.28$ m
h = 3.4 m
$z_2 = -0.8$ m
Q = 6.4 m^3/s
Risultati:
S = 26100 N



La flangia è la zona in cui viene ancorato il diffusore; la spinta a cui essa è sottoposta è quindi pari a quella che agisce sul diffusore. Il problema si riduce, quindi, al calcolo della spinta sul diffusore in condizione di moto permanente.
La spinta complessiva esercitata dal liquido sul diffusore è data dalla somma di due contributi: la spinta esercitata dal liquido contenuto all'interno del diffusore (S_A) e la spinta esercitata nella parte bassa del diffusore dal liquido circostante (F_{est}).

$$\vec{S} = \vec{S_A} + \vec{F_{est}}$$

Si calcola innanzitutto la spinta esercitata dal liquido contenuto all'interno del diffusore sul diffusore stesso; per fare ciò si applica l'equazione globale dell'equilibrio dinamico al volume di controllo costituito dall'acqua presente nel diffusore:

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$$

Dove $\vec{I} = 0$ perché condizioni di moto permanente.

Forze di massa
P è il peso del liquido nel diffusore:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 120

Π_L è la spinta esercitata dalla superficie laterale del diffusore sul liquido; ha solo componente risultante verticale (le componenti orizzontali infatti si annullano per simmetria radiale). Per il principio di azione e reazione essa è uguale ed opposta alla spinta esercitata dal liquido sul diffusore S_A, che è la nostra incognita.

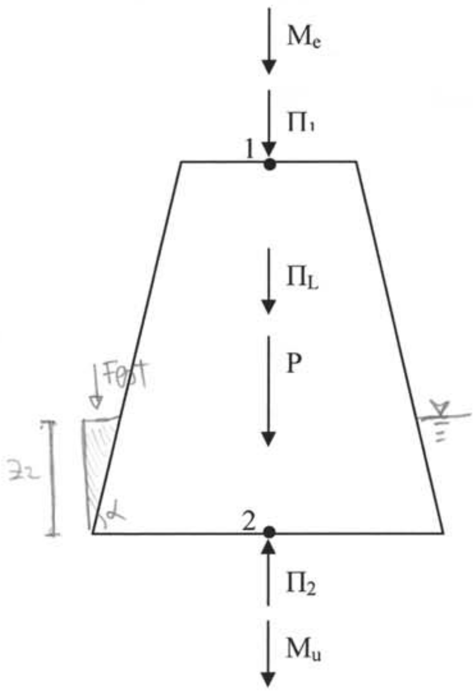
Portate di quantità di moto

M_e è la portata di quantità di moto posseduta dalla massa entrante nel volume di controllo:

$$M_e = \rho Q U_1 = \rho Q \cdot \frac{Q}{\Omega_1} = \rho \frac{Q^2}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = 25503N$$

M_u è la portata di quantità di moto posseduta dalla massa uscente dal volume di controllo:

$$M_u = \rho Q U_2 = \rho Q \cdot \frac{Q}{\Omega_2} = \rho \frac{Q^2}{\frac{\pi D_2^2}{4}} = 10032N$$



Si ottiene quindi:

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi_1} + \vec{\Pi_2} + \vec{\Pi_L} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$$

$$\vec{S_A} = -\vec{\Pi_L} = \vec{P} + \vec{\Pi_1} + \vec{\Pi_2} + \vec{M_e} - \vec{M_u}$$

Sono tutte forze che agiscono in direzione verticale, sull'asse del diffusore; se si proietta lungo la direzione verticale assumendo come verso positivo quello verso il basso si ottiene la spinta che il liquido contenuto all'interno del volume di controllo esercita sul diffusore:

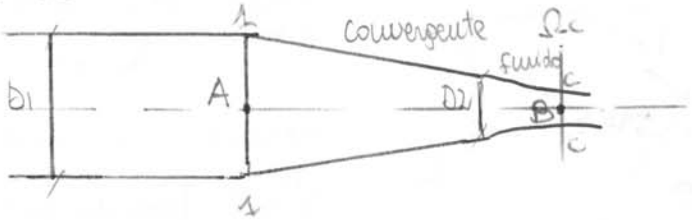
$$S_A = P + \Pi_1 - \Pi_2 + M_e - M_u = 23397N \quad \downarrow +$$

In realtà il diffusore è parzialmente sommerso quindi occorrerà considerare anche la spinta esercitata dal liquido esterno che agisce sulla parte sommersa del diffusore **F_{est}**. Tale spinta ha solo componente risultante verticale (le componenti orizzontali infatti si annullano per simmetria radiale). La risultante è quindi verticale e per effetto della simmetria assiale giace sull'asse del diffusore.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 120

$\alpha = 1$ se fluido perfetto

z, p, u vanno calcolate nel baricentro, considerando che il teorema di Bernoulli lo si calcola tra due sezioni considero A il baricentro in 1-1 e B in C-C



$z_A = z_B = 0$ xkè?

1-1 / C-C

$$\underbrace{\cancel{z_A} + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g}}_{H_{1-1}} = \underbrace{\cancel{z_B} + \cancel{\frac{p_B}{\gamma}} + \frac{U_B^2}{2g}}_{H_{c-c}}$$

xkè $p_B = 0$

Allora $p_A = \left(\frac{U_B^2}{2g} - \frac{U_A^2}{2g}\right)\gamma$

Devo trovare le velocità

$Q = cost$ $\quad U_A = \frac{Q}{\Omega_{1-1}} = \frac{Q\,4}{\pi D_1^2}$ (metri)

con $Q = 7 \frac{l}{sec} \Rightarrow \div 1000 = 7 \cdot 10^{-3} \left(\frac{m^3}{sec}\right)$

siccome $Q = cost$ allora

$$U_B = \frac{Q}{\Omega_C} = \frac{Q}{C_c \cdot \Omega_{2-2}} = \frac{Q \cdot 4}{C_c \cdot \pi D_2^2}$$

$C_c = \frac{\Omega_c}{\Omega}$ incognito

Trovo così F_1 dove $p_A = 304\,500 \left(\frac{N}{m^2}\right)$ $\quad F_1 = 1\,172 (N)$

$\vec{F}_2$

$F_2 = p_B \cdot \Omega_C = 0$ xke $p_B = 0$

Calcolo le quantità di moto

$\vec{M}_1 = \rho\, Q\, U_A$ quando non viene dato γ lo trovo $\rho = \frac{\gamma}{g}$

U_A è già stato calcolato come U_B

Allora

$\vec{M}_1 = 13 N$

$\vec{M}_2 = \rho\, Q\, U_B = 173 N$

Sostituendo alla (1.2)

$F_1 - \cancel{F_2} + M_1 - M_2 = S_x = 1011\ N$ positivo allora il verso è corretto se non ribalto

pg(10)

F_1 spinta su superficie piana $= p_1 \cdot \Omega_{AA} = p_1 \cdot \pi \frac{D^2}{4}$

non la posso calcolare come $p = \gamma \cdot z$ xke non sono in statica dei fluidi

Abbiamo detto che in A-A abbiamo il carico piezometrico

$$h = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \Rightarrow h = r + \frac{p_1}{\gamma} \Rightarrow p_1 = (h-r)\gamma$$

rispetto a $z=0$

Trovo così il modulo di $F_1 = 8'621 (N)$

All'inizio dell'ex abbiamo visto che $z + \frac{p}{\gamma} = cost = h$ in tutto il punto

$F_2 = p_2 \cdot \Omega_{2-2} = p_2 \cdot \pi \frac{D^2}{4}$ in dinamica calcolato nel baricentro 2 $\quad h = \cancel{z_2} + \frac{p_2}{\gamma} \Rightarrow p_2 = \gamma h$

$z=0$

Trovo $F_2 = 10'583 (N)$

Ho trovato tutte le forze.

$\vec{P} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_x} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$ $\quad (2.1)$ $\quad F_x = -S$

cui manca F_x $\quad \vec{S_x} = \vec{P} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{M_e} + \vec{M_u}$

concorde al verso

Trovo le componente orizzontale e verticale

$\xrightarrow{+}$) $S_{x_o} = F_1 + M_e = 8'825 (N)$ positiva e quindi verso destra disegnata nel verso esatto

x come l'ho disegnata

$+\uparrow$) $S_{xv} = -P + F_2 + M_u = 9276 (N)$

però fare attenzione xke in 2.1 è negativa quindi proiettata diventa positivo

Modulo

$$S = \sqrt{S_{x_o}^2 + S_{xv}^2} = 13'511 N$$

inclinazione

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{S_{xv}}{S_{x_o}}\right) = 43{,}4^0$$

Allora

$M_e = \rho\, Q \cdot U_c^{*}$ = trovero ciò viene 200(N)

Leggendo = simbolo $'$ F vuol dire reale senza vale Bernoulli

portata reale (ce l'ho) ↑ velocità reale ma non c'è l'ho → utilizzo la velocità calcolata con Bernoulli con un piccolo errore

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_D + \frac{p_D}{\gamma} + \frac{u_D^2}{2g}$$

su pelo libero; le particelle su pelo libero sono ferme; xke immagino particelle caduta libera

Applico ora Bernoulli sulla traiettoria della particella che parte da A e arriva nella sez F-F in D.

Ricavo

$$u_D = \overset{\text{che sarebbe}}{u_F} = \sqrt{2g(z_A - z_D)} = \sqrt{2g\left(h + \frac{d}{2} + H\right)} = 8{,}2\ (m/sec)$$

u_F lo dovrei calcolare con un coefficiente correttivo ma non lo conosco per fluido reale.

$M_u = \rho\, Q \cdot U_F = 204\ (N)$

$$\vec{G} + \vec{M_e} + \vec{M_u} = 0 \Rightarrow \vec{G} = \vec{M_u} - \vec{M_e}\ (1.1)\ \downarrow\ G = M_u - M_e = 104\ (N)$$

guardando il verso nel disegno ma anche il segno della (1.1) trovo l'equazione esatta

seconda parte: Calcolo la spinta

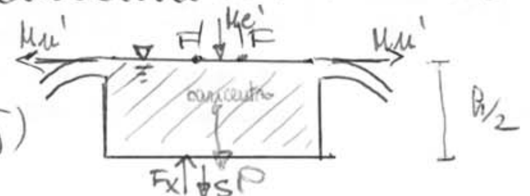
ho la base circolare del recipiente R_2

Essendo una spinta in condizioni dinamiche solo il volume

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{M_e'} - \vec{M_u'} = 0$$

$$P = \gamma V = \gamma \pi \frac{D^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = 3848\ (N)$$

base; altezza



/// volume di controllo fino al pelo libero

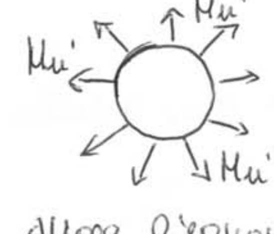
- La forza sul contorno superiore le particelle sono con p=0 anche nella sezione FF perche particelle in caduta libera e nell'altra sez sono in contatto con l'atm.
- Le spinte laterali si elidono, anche i piccoli getti sono nulli
- Rimane la spinta sulla base del serbatoio

Quindi la spinta sarà ricondotta solo a F_x

Per quanto riguarda

M_e' è la quantità di moto che esce dal getto $M_u \Rightarrow M_e' = M_u = \rho\, Q \cdot u_F = 204\ (N)$

Per quanto riguarda M_u (esce dalle pareti laterali)



Per simmetria assiale la risultante è nulla $\vec{M_u'} = 0$

Allora l'equazione diventa

$$\vec{P} + \underset{-S}{\vec{F_x}} + \vec{M_e'} = 0 \Rightarrow \vec{S} = \vec{P} + \vec{M_e'}\ (1.2) + \downarrow)\ \vec{S} = \vec{P} + \vec{M_e'} = 4052\ (N)$$

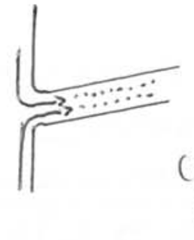
versi sul disegno nel mentre vedo i segni nell'(1.2)

pg (12)

Perdite concentrate di carico

① Si possono avere all'imbocco
② nella sezione di sbocco
③ dove sono presenti variazioni di geometria

①

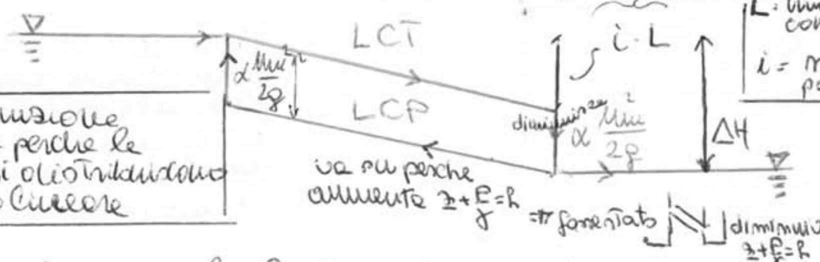


Perdite concentrate nulle in presenza di raccordi (le particelle entrano in modo regolare rettilinee e parallele).

② Si scrivono sempre come

$$\alpha \frac{U_m^2}{2g}$$

α vale sempre 1



L: lunghezza condotta

i = numero puro che mi dice quanta perdita ho per unità di lunghezza

la diminuzione è lineare perchè le perdite si distribuiscono in modo lineare

nella sezione di sbocco oltre la diminuz. di LCT di $\alpha \frac{U_m^2}{2g}$ che arriva al pelo libero.

Devo disegnare la linea dei carichi piezometrici

Dalla relazione

$$H = h + \alpha \frac{U_m^2}{2g}$$

dove $\alpha \frac{U_m^2}{2g}$ è sempre positivo

Allora trovo

$$h = H - \frac{U_m^2}{2g}$$

dove $H > h$ il carico piezometrico sta sempre più in basso del carico totale.

Se la velocità è costante è costante anche $\frac{U_m^2}{2g}$ la linea LCT e LCP saranno parallele.

Adesso con la diff di pelo libero la posso ricavare e posso capire a cosa è dovuto

$$\Delta H = i \cdot L + \alpha \frac{U_m^2}{2g}$$

pendenza motrice: dice quanto carico TOT perdo per unità di lunghezza della condotta.

i, U_m: incognita
α = incognita xké non so se sono in moto turbolento o laminare
(Non posso risolverlo)

Hp: che sono in moto laminare

$\alpha = 2$ nella sezione circolare ; la pendenza motrice (per regola in moto laminare) $i = \frac{32 \mu U}{\gamma \cdot D^2}$

Allora

$$\Delta H = 32 \frac{\mu U_m}{\gamma D^2} \cdot L + \frac{U_m^2}{g}$$

unica incognita U_m
(equazione di secondo grado mi da la soluzione negativa mi dice che l'acqua torna indietro ma non ha senso, prendo quella positiva.)

Trovo $U_m = 0{,}61$ m/sec

Portata che scorre dalla tubazione superiore moltiplico

$$Q = U_m \cdot \Omega = U_m \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 4{,}79 \cdot 10^{-3} \left(\frac{m^3}{sec}\right) \cdot 1000 = 4{,}79 \left(\frac{l}{sec}\right)$$

Devo verificare che sono in moto laminare se no non vale

pg 13

IDRAULICA A – MECCANICA DEI FLUIDI

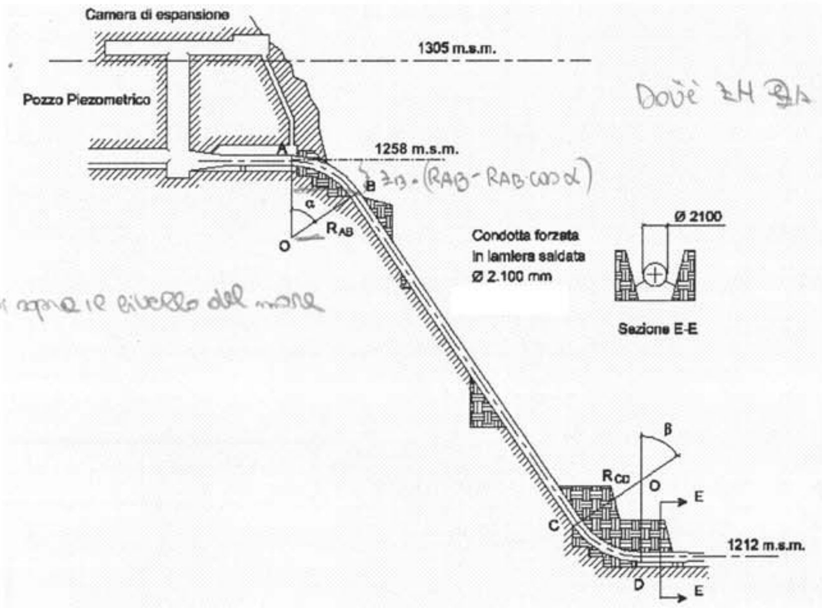
ESERCITAZIONE 6

EQUAZ. GLOBALE DI EQUILIBRIO DINAMICO E FLUIDI REALI IN MOTO LAMINARE

ESERCIZIO 1

Assegnata la sezione longitudinale di una condotta forzata (v.figura), note la geometria della stessa, la portata Q, la quota del piano dei carichi totali z_H, della sezione di imbocco z_A e di arrivo z_D della condotta, e nell'ipotesi di perdite trascurabili, determinare le spinte sui tronchi di condotta AB, CD.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$R_{AB} = 6.80$ m
$R_{CD} = 4.60$ m
$\alpha = \beta = 56°$
D = 2100 mm
Q = 14 m^3/s
$z_H = 1305$ m s.l.m. metri sopra il livello del mare
$z_A = 1285$ m s.l.m.
$z_D = 1212$ m s.l.m.

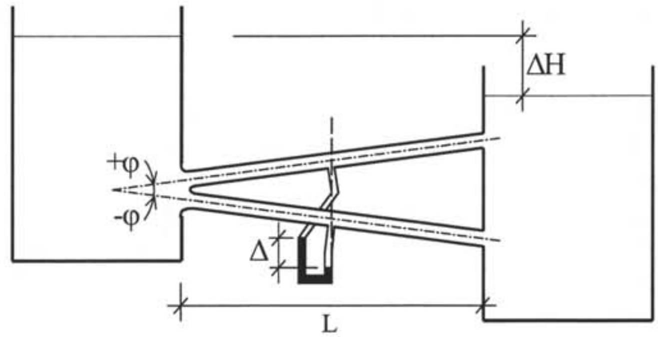


Risultati:
$S_{AB} = 513$ kN ($\alpha = 60°$)
$S_{CD} = 3093$ kN ($\alpha = 62°$)

ESERCIZIO 2

Due serbatoi sono collegati da due tubazioni rettilinee, uscenti ad imbocco raccordato, di ugual diametro D ed inclinate rispettivamente di φ e $-\varphi$. Sapendo che tra i peli liberi vi è un dislivello ΔH determinare:
a) la natura del moto, ricordando che α (nel termine $\alpha U^2/2g$) varia a seconda del profilo di velocità;
b) la portata in ciascuna delle due tubazioni e quella complessiva Q;
c) il dislivello Δ del manometro differenziale a mercurio avente le prese in due sezioni i cui baricentri giacciono sulla stessa verticale.

Dati:
$\gamma = 8820$ N/m^3 (olio)
$\mu = 0.87$ Ns/m^2
D = 0.10 m
L = 5.0 m
$\Delta H = 1$ m
$\varphi = 15°$
$\gamma_m = 133300$ N/m^3



Risultati:
$Q = 9.27 \cdot 10^{-3}$ m^3/s

ESERCIZIO 3

ESERCIZIO 2

• La portata che scorre in una tubazione dipende dal materiale da cui è costituita la tubazione, dalla forma della tubazione, dal diametro della tubazione, dalla lunghezza della tubazione e dall'energia spesa per il movimento (cioè dalla differenza di quota fra i peli liberi dei due serbatoi) quindi la portata che scorre nelle due tubazioni è assolutamente identica

$Q_1 = Q_2 = Q$

$Q_{TOT} = 2Q$

• Disegnare le linee dei carichi → le due tubazioni sono identiche quindi le linee dei carichi sono uguali per entrambe le tubazioni

$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{U^2}{2g}$

$h = z + \frac{p}{\gamma}$

All'interno dei serbatoi $U = 0$ quindi $H = h$

Sul pelo libero $p = 0$ quindi $H = h = z \Rightarrow$ all'interno dei serbatoi la linea dei carichi totali, la linea dei carichi piezometrici e il pelo libero coincidono

l.c.t. → imbocco raccordato quindi il carico totale si mantiene costante; allo sbocco vi è una perdita di carico totale concentrata pari a $\alpha\frac{U^2}{2g}$ quindi immediatamente a monte della sezione di sbocco il carico totale deve essere $\alpha\frac{U^2}{2g}$ più in alto rispetto al pelo libero di valle

l.c.p. → parallella alla l.c.t. e più bassa della l.c.t. di una quantità pari al termine cinetico $\alpha\frac{U^2}{2g}$

• Bilancio energetico

$\Delta H = il + \alpha\frac{U^2}{2g}$ incognite i, α, U

Ipotesi → moto laminare (ipotesi poi da verificare) $\Rightarrow \alpha = 2$ e $i = \frac{32\mu U}{\gamma D^2} \Rightarrow$

$\Delta H = \frac{32\mu U}{\gamma D^2}\frac{L}{\cos\varphi} + \frac{U^2}{g}$ equazione di 2° grado in $U \Rightarrow U = 0.59\ \frac{m}{s}$

Verifichiamo l'ipotesi di moto laminare

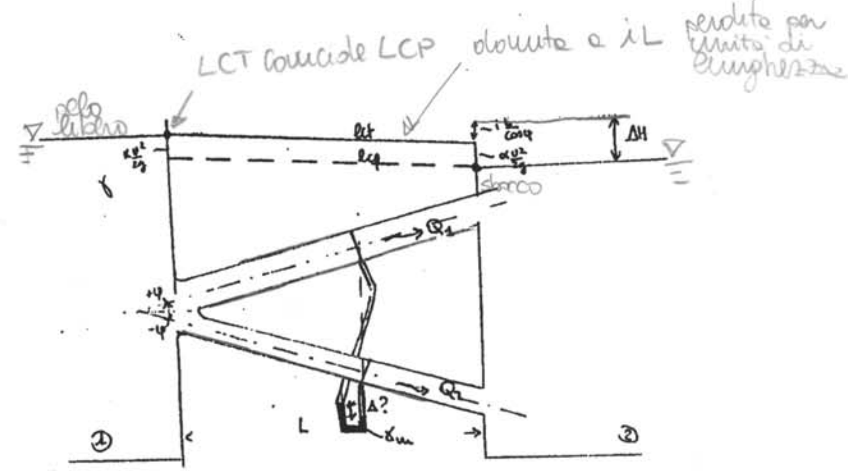
$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = 61 << 2000$ OK!

$Q = U\Omega = 4.63 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s} = 4.63\ \frac{l}{s}$

$Q_{TOT} = 2Q = 9.26\ \frac{l}{s}$

• Le due prese del manometro sono collegate a due sezioni i cui baricentri stanno sulla stessa verticale. Visto che le linee dei carichi piezometrici per le due tubzioni coincidono, nei due baricentri il carico piezometrico sarà uguale e quindi il manometro differenziale misurerà una differenza di carico piezometrico pari a zero $\Rightarrow \Delta = 0$

$i = \frac{32 U\mu}{\gamma D^2}$



$\Delta = 0$ allora $\Delta h = 0$ questo xké?
considerando le baricentro su cui si vuole valutare col manometro differenziale la diff di carico piezometrico, noto che lo studio avviene sullo stesso asse quindi i punti finisco sull'unico punto della linea del carico piezometrico LCP allora $\Delta h = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 120

E RCI 1

Tratto AB

Equazione globale di equilibrio dinamico $\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$

- $\vec{I} = 0$ perché moto permanente
- $P = \gamma \cdot V$ Il volume V contenuto nel tronco AB viene approssimato come il volume di un cilindro di base pari alla sezione della condotta e di altezza pari alla lunghezza dell'asse del tronco AB

$V = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot l_{AB} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot R_{AB} \cdot \alpha_{rad} = 23.02\ m^3$ (Attenzione! Il diametro va in metri)

$P = 225595$ N

- F_c:
  - $\overrightarrow{F_{AB}}$ spinta del tronco sul fluido (uguale ed opposta alla spinta cercata S_{AB})
  - $\vec{\pi_A}$ spinta sulla superficie verticale $\pi_A = p_A \Omega$
  - $\vec{\pi_B}$ spinta sulla superficie orizzontale contenente il punto B $\pi_B = p_B \Omega$

Come calcolare p_A e p_B? Perdite trascurabili $\Rightarrow$ il carico totale H é COSTANTE in tutta la tubazione e vale z_H

Quindi per il punto A $z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_H \Rightarrow p_A = \left[(z_H - z_A) - \frac{U_A^2}{2g}\right]\gamma = 187839\ \frac{N}{m^2}$ → M non lo colloco perchè

$\frac{M^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\Omega A}$?

$\pi_A = p_A \cdot \Omega = 650600$ N

per il punto B $z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} = z_H \Rightarrow p_B = \left[(z_H - z_B) - \frac{U_B^2}{2g}\right]\gamma = 217215\ \frac{N}{m^2}$

dove $z_B = z_A - \left[R_{AB} - R_{AB}\cos\alpha\right] = 1282$ m

$\pi_B = p_B \cdot \Omega = 752346$ N

- Quantità di moto entrante e uscente $M_e = M_u = \rho Q U = 56588$ N $= \rho \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}$

$\vec{P} + \vec{\pi_A} + \vec{\pi_B} + \overrightarrow{F_{AB}} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$

$-\overrightarrow{F_{AB}} = \overrightarrow{S_{AB}} = \vec{P} + \vec{\pi_A} + \vec{\pi_B} + \vec{M_e} - \vec{M_u}$

Componenti orizzontale e verticale

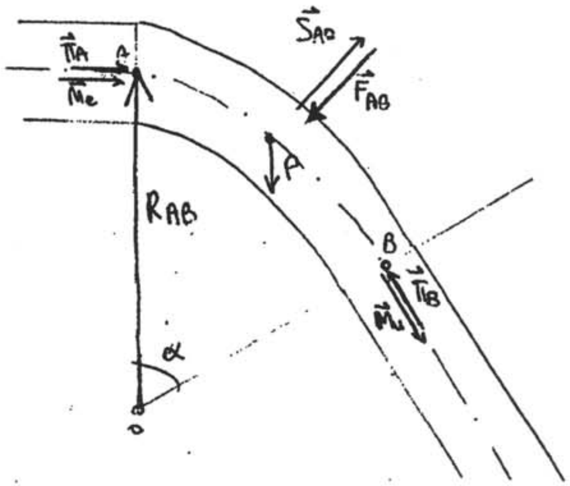
→) $S_{AB,x} = \pi_A + \pi_B \cos\alpha + M_e - M_u \cos\alpha = 254839$ N verso destra

↓) $S_{AB,y} = P - \pi_B \sin\alpha - M_u \sin\alpha = -445042$ N negativa, quindi verso l'alto

$S_{AB} = \sqrt{S_{AB,x}^2 + S_{AB,y}^2} = 512841\ N \simeq 513$ kN

$\alpha_1 = \arctan\frac{S_{AB,x}}{S_{AB,x}} \simeq 60°$

Il procedimento per calcolare S_{CD} è assolutamente identico



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 120

ESERCIZIO 3

• Per prima cosa SEMPRE disegnare le l.c.t e l.c.p.

- Tubazione 1

Le due linee coincidono con il pelo libero all'interno dei due serbatoi. Imbocco raccordato quindi il carico totale rimane costante prima e dopo l'imbocco. Nella sezione di sbocco c'è una perdita di carico totale concentrata pari a $\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$, dove U_1 è la velocità nella tubazione 1, diversa da quella della tubazione 2 perchè le due tubazioni devono convogliare la stessa portata, ma hanno due sezioni diverse. Il carico totale, quindi, immediatamente a monte della sezione di sbocco sarà $\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$ più alto del pelo libero di valle. Il carico totale diminuisce linearmente da monte a valle a causa delle perdite di carico distribuite. La sommatoria di tutte le perdite di carico distribuite sarà pari a $i_1 L$, dove i_1 è la pendenza motrice nella tubazione 1. La linea dei carichi piezometrici è parallela alla linea dei carichi totali e sta al di sotto di essa di un termine pari a $\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$

- Tubazione 2

Il discorso è identico alla tubazione 1, ricordando che per la tubazione 2 il termine cinetico $\alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}$ è diverso dal termine cinetico della tubazione 1, per esempio maggiore. In tal caso le l.c.t. e l.c.p. saranno meno inclinate. La sommatoria delle perdite di carico totale distribuite nella tubazione 2 sarà pari a $i_2 L$

• Bilancio energetico per la tubazione 1

$\Delta H = i_1 L + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$

Ipotesi moto laminare $\rightarrow \alpha_1 = 2$ e $i_1 = \frac{32 \mu U_1}{\gamma D^2} \rightarrow \Delta H = \frac{32 \mu U_1}{\gamma D^2} L + \frac{U_1^2}{g}$ equazione di 2° grado in $U_1 \rightarrow U_1 = 0.61 \frac{m}{s}$

Occorre, però, verificare l'ipotesi di moto laminare $\rightarrow Re = \frac{\rho U_1 D}{\mu} = 63 << 2000$ OK!!!

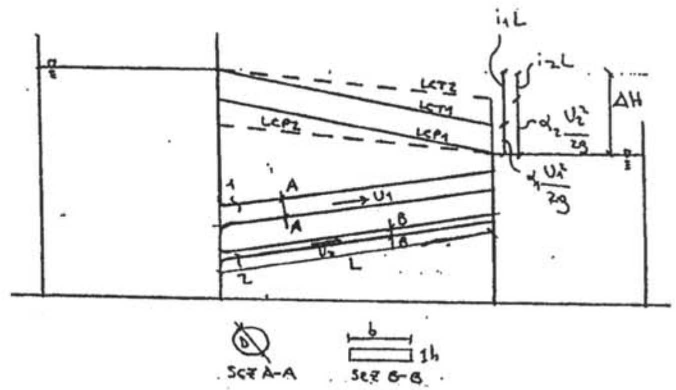
Quindi $Q_1 = Q = U_1 \Omega_1 = 4.79 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s} = 4.79 \frac{l}{s}$

• Bilancio energetico per la tubazione 2 $\rightarrow \Delta H = i_2 L + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}$

In una tubazione con sezione rettangolare larga $\alpha_2 = \frac{54}{35}$ e $i_2 = \frac{12 \mu U_2}{\gamma h^2}$, dove h è l'altezza della sezione

Quindi $\Delta H = \frac{12 \mu U_2}{\gamma h^2} L + \frac{54}{35} \frac{U_2^2}{2g}$, ma $U_2 = \frac{Q}{bh}$. Si ottiene un'equazione di terzo grado in h $\rightarrow h = 0.038\ m$

Necessario verificare l'ipotesi di moto laminare anche per la tubazione 2 $\rightarrow Re = \frac{\rho U_2 D}{\mu}$, ma la sezione rettangolare non ha un diametro D. Con le sezioni non circolari al posto di D si mette $4R$, dove R è il raggio idraulico che per una sezione rettangolare larga vale $h/2 \rightarrow Re = 19.8 << 2000$ OK!!!



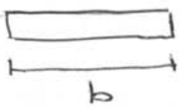
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 120

Continuazione esercizio 3 esercitazione 6

$h = 3,8\,cm$ in moto laminare cioè con $Re < 2000$

Sapendo che $Re = \rho \frac{UD}{\mu}$ in sezione rettangolare (dove abbiamo supposto moto laminare)

Verifica di $Re < 2000$



Devo introdurre il raggio idraulico per sezioni non circolari

$$R = \frac{\Omega \ \text{area condotta}}{C \ \text{contorno condotta}} \qquad R = \frac{\pi r^2 \ (\text{Area})}{2\pi r \ (\text{circonferenza})} = \frac{r}{2} = \frac{D}{4} \qquad \boxed{R = \frac{D}{4}}$$

Uso quando non devo calcolare una sezione circolare

Allora

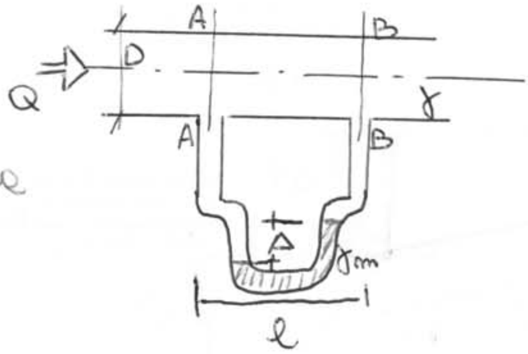
$$Re = \rho \frac{U \, 4R}{\mu} = \rho \frac{U \, 2h}{\mu} = 198 \ll 2000$$

Allora le ipotesi supposte di moto laminare sono corrette

$$R = \frac{bh}{2(h+b)} = \frac{bh}{2b} = \frac{h}{2} \quad \text{(pg 135)}$$

perimetro ↑ altezza trascurabile xke b>>h

Esercizio ④ Fluidi reali



Problema

Q=?

τ=?

F=?

il testo ci dice che siamo in moto laminare

fluido reale

presenza di attriti tra particelle e parete della condotta

⇓

Avrò perdite di carico in LCT e LCP lungo le traiettorie delle particelle

Avrò delle tensioni tangenziali τ tra fluido e la parete della tubazione

Il manometro differenziale ci permette di calcolare il piano del carico piezometrico (sempre)

$$\Delta h = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = 0,464\,m \ \text{perdite carico piezometrico}$$

carico del fluido reale

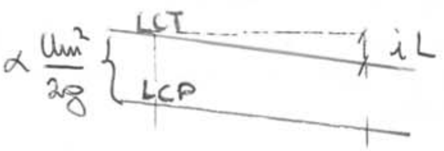
legenda

mi dice le perdite di carico totale per unità di lunghezza nel tratto di condotta

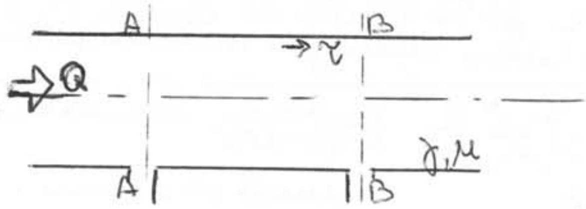
- i = pendenza motrice
- L = lunghezza tratto considerato

$i \cdot L$ = perdite di carico complessive

la distanza vale



quando la dissipazione diminuisce sempre



Con D=cost, A=cost, Um=cost → la distanza delle linee è costante

$\Delta h = \Delta H = i \cdot l$ quindi posso ricavare $i = \frac{\Delta H}{l} = \frac{0,464}{l} = 8,3 \cdot 10^{-4}$ pg 14

perchè le linee sono parallele

(ogni metro di condotta perdo $8,3 \cdot 10^{-4}\,m$ di carico tot.)

Quindi la portata che scorre nello sfioratore è la stessa che transita nella tubazione.

Allora posso ricavare la velocità dato D e ricavato Q

$$U = \frac{Q}{\Omega} = 3{,}656 \left(\frac{m}{sec}\right)$$

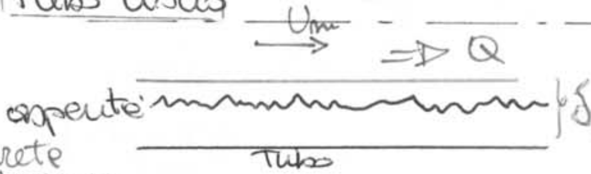
Con Reynold verifico il moto

$$Re = \rho \frac{U D}{\mu} = 365000 \gg \frac{4000}{5000}$$

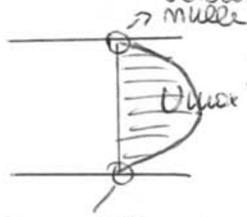
μ viscosità

quindi sono in moto turbolento

Tubo liscio



"parete tubazione al microscopio"



il moto turbolento è verso il centro

velocità puntuale molto bassa

quindi avrò uno strato di moto laminare

se le asperità superano le linee di moto laminare il tubo si definisce scabro

Relazioni

R I C O R D A R E

PRANDTL-KARMAN	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}$	
BLASIUS	$\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}$	la uso quando devo esplicitare λ da P-K; $Re < 10^5$
NIKURADSE	$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{Re^{0{,}237}}$	$10^5 < Re < 10^7$; oppure uso questa

Vale per moto turbolento in tubo liscio (potrei ricavare λ ma è in forma implicita)

nel nostro caso $365 \cdot 10^5$

Dovrò usare Nikuradse.

$\lambda = 0{,}0138$ (adimensionale)

dove conosco che $\lambda = \frac{D \cdot i}{\frac{U_m^2}{2g}}$ $\Rightarrow$ ricavo $i = \frac{\lambda \frac{U_m^2}{2g}}{D}$

Allora

$i = 0{,}094$

percorrendo 1 metro di tubazione liscia io vado a perdere del carico totale pari a 0,094 ogni metro di condotta

Disegno le linee dei carichi LCT, LCP pg precedente

Noto che

$$\Delta Y = \underbrace{i \cdot L}_{\text{perdite di carico distribuite}} + \underbrace{\alpha \frac{U^2}{2g}}_{\text{perdite di carico concentrate}} = 1{,}623 \,(m)$$

bilancio energetico (l'ho disegno visto)

$\alpha = 1$ moto turbolento

$\alpha = 2$ moto laminare

quando passo da tubazione a pelo libero c'è una perdita di carico totale concentrato $\propto U^2$, diminuisce improvvisamente di un termine cinetico, dovuto alla perdita di velocità istantanea del fluido

Trovate le quote di carico totale all'ingresso e all'uscita della condotta se il D è costante unisco il punto iniziale e finale con una retta e trovo LCT.

LCP è più basso dovuto alle dissipazioni di energia di $\frac{U^2}{2g}$ allora partiro dal pelo libero del 2° serb., se U cost D cost traccio la retta LCP.

pg 15

MECCANICA DEI FLUIDI

ESERCITAZIONE 7

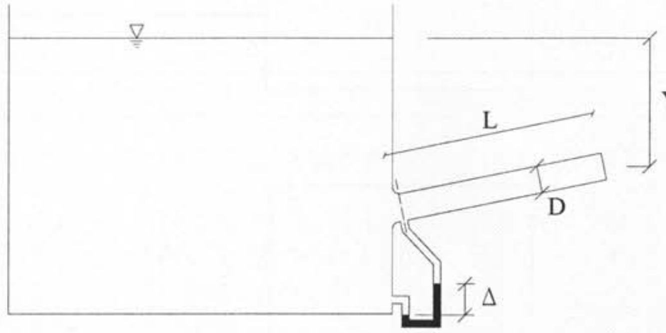
FLUIDI REALI IN MOTO TURBOLENTO E LINEE DEI CARICHI

ESERCIZIO 1

Da un serbatoio si stacca un condotto in cui è inserito un manometro differenziale a mercurio con una presa nel serbatoio ed una immediatamente a valle dell'imbocco raccordato. Determinare la portata *Q* di acqua effluente all'aria e la scabrezza *ε* del condotto. Tracciare le linee dei carichi totali e piezometrici.

Dati:

$\gamma = 9800$ N/m^3
$\nu = 10^{-6}$ m^2/s
D = 0.025 m
L = 5.0 m
Y = 1 m
$\Delta = 0.01$ m
$\gamma_m = 133300$ N/m^3



Risultati:

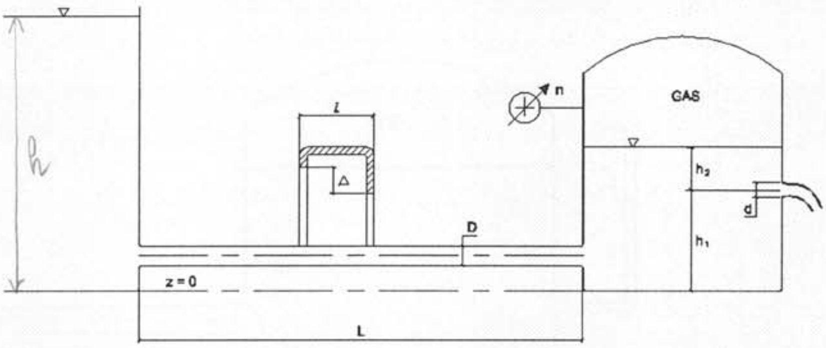
Q = 0.77 l/s
$\varepsilon = 0.15$ mm

ESERCIZIO 2

Da un recipiente in pressione effluisce tramite una luce circolare in parete sottile di diametro *d* ad imbocco raccordato una portata *Q* di acqua a 20°C che viene recapitata al serbatoio da una condotta in ghisa ($\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ m). Nota l'indicazione *n* del manometro metallico inserito nella parte superiore del recipiente di valle e quella del manometro differenziale ad olio, determinare: il diametro *D* necessario a convogliare la portata con le assegnate perdite di carico, ed il livello *h* nel serbatoio di monte. Tracciare le corrispondenti linee dei carichi totali e piezometrici.

Dati:

$\gamma = 9800$ N/m^3
$\nu = 10^{-6}$ m^2 /s
d = 0.10 m
$h_1 = 3.0$ m
$h_2 = 1.0$ m
n = 0.40 kgp/cm^2
$\Delta = 0.25$ m
l = 5.0 m
$\gamma_m = 7840$ N/m^3
L = 50.0 m



Risultati:

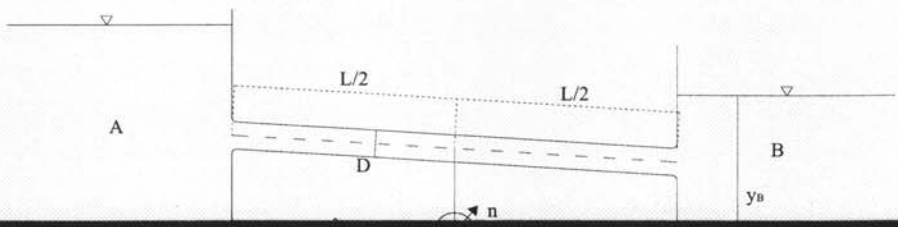
D = 0.216 m
h = 8.59 m

ESERCIZIO 3

Due serbatoi A e B sono collegati da una condotta con imbocco raccordato di diametro D e asperità media ε. Note: la geometria del sistema, l'indicazione n di un manometro metallico con il centro posto sul piano di riferimento z = 0 e inserito nella sezione di mezzeria della condotta, la viscosità cinematica ν del liquido, determinare la portata convogliata dalla tubazione ed il livello nel serbatoio A. Tracciare inoltre la linea dei carichi totali e la piezometrica.

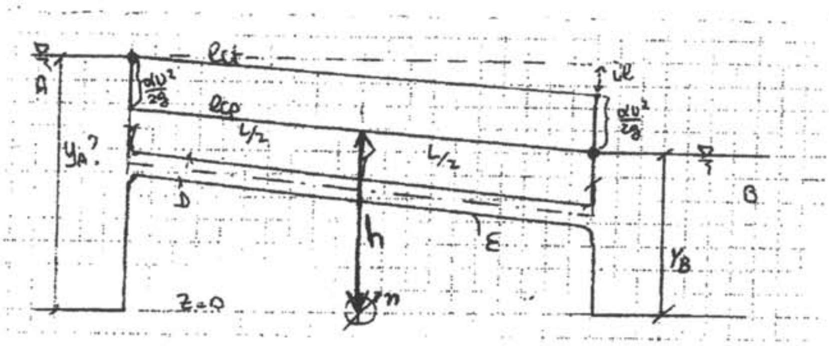
Dati:

L = 100 m;
$y_B = 4{,}9$ m;
D = 0,50 m;
$\varepsilon = 5 \cdot 10\text{-}4$ m;
n = 0,5 kgp/cm^2;
$\nu = 1{,}3 \cdot 10\text{-}6$ m^2/s (acqua a 10°C).



Risultati:

Q = 0.197 m^3/s;
$y_A = 5.16$ m;



Prima cosa da fare: disegno LCT e LCP ipotizzando moto turbolento e quindi $\alpha = 1$

Il manometro metallico permette di misurare la pressione del fluido a cui é collegato, come se il fluido si trovasse ad una quota pari al centro del manometro metallico. Quindi il manometro metallico misura la pressione del fluido che si trova nella sezione di mezzeria della tubazione, come se tale fluido si trovasse sul piano a quota uguale a zero

$p_n = n \cdot 98100 = 49050 \ \frac{N}{m^2}$

Questo valore di pressione si utilizza per calcolare la quota del carico piezometrico h nella sezione di mezzeria. Il carico piezometrico sará $h = z + \frac{p}{\gamma}$, ma le particelle nel centro del manometro metallico sono a quota $z = 0$, quindi $h = \frac{p}{\gamma} = \frac{49050}{9800} = 5$ m. Quindi la linea dei carichi piezometrici nella sezione di mezzeria si trova 5 m al di sopra del piano $z = 0$.

Dal disegno si osserva che $h - y_B = i\frac{L}{2}$ e quindi $i = \frac{2(h-y_B)}{L} = 0.0021$

Per definizione l'indice di resistenza λ é uguale a $\lambda = \frac{2gDi}{U^2}$ e quindi $\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{2gDi}}{U}$. Inoltre $Re = \frac{UD}{\nu}$

Sostituendo nella formula di Colebrook

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2log\left[\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71D}\right]$

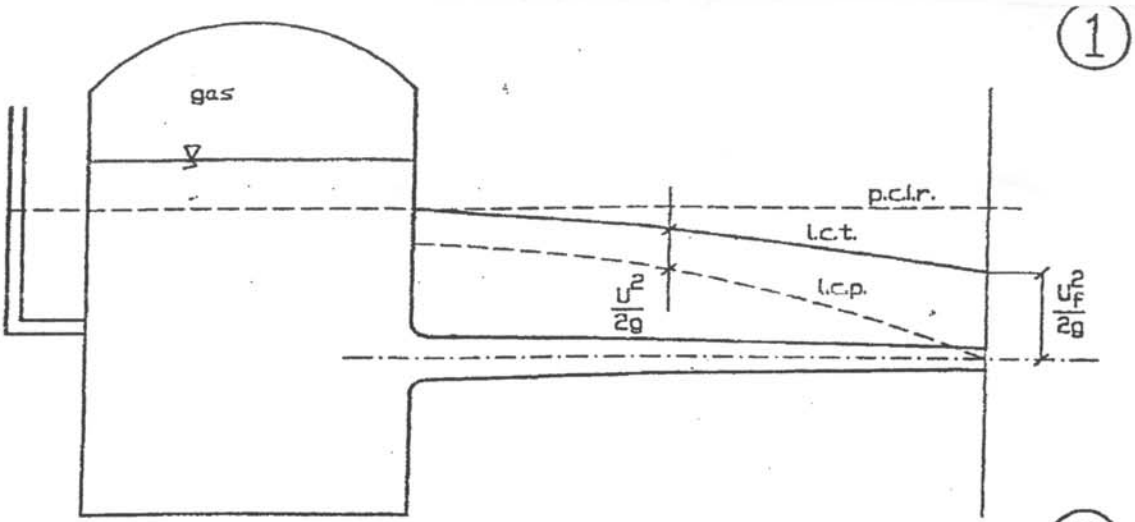
$\frac{U}{\sqrt{2gDi}} = -2log\left[\frac{2.51\nu}{D\sqrt{2gDi}} + \frac{\varepsilon}{3.71D}\right]$

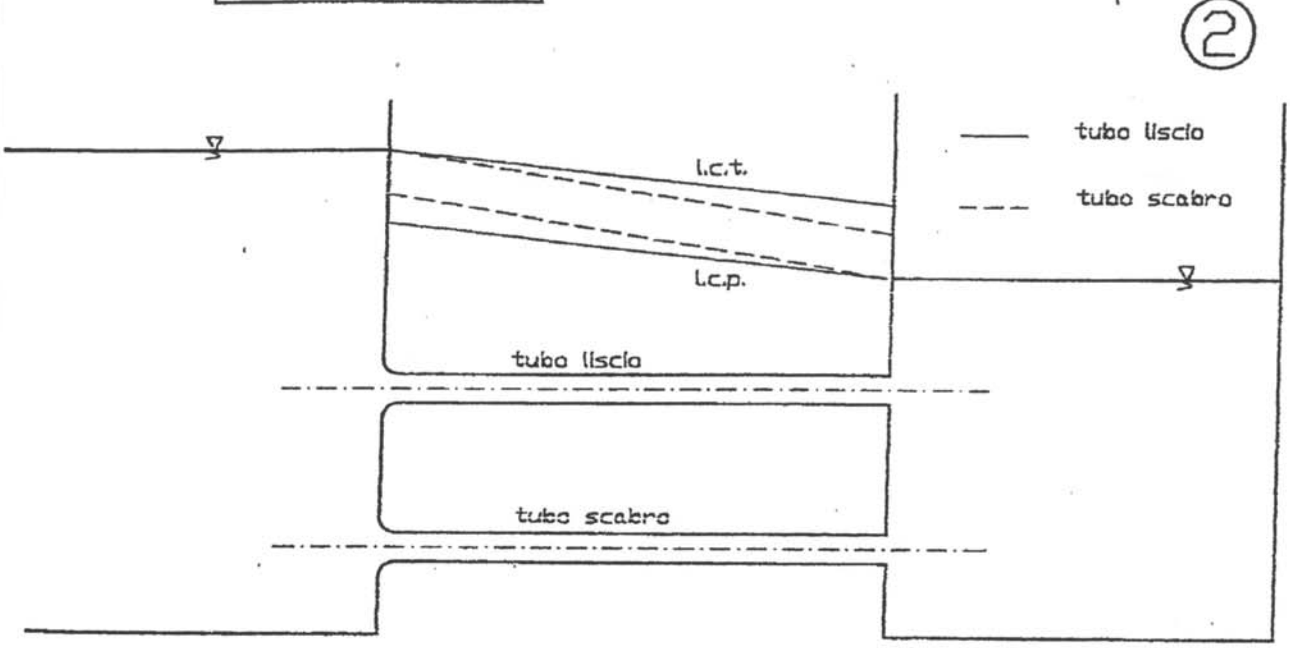
$U = -2\sqrt{2gDi} \cdot log\left[\frac{2.51\nu}{D\sqrt{2gDi}} + \frac{\varepsilon}{3.71D}\right] = 1.006 \ \frac{m}{s}$

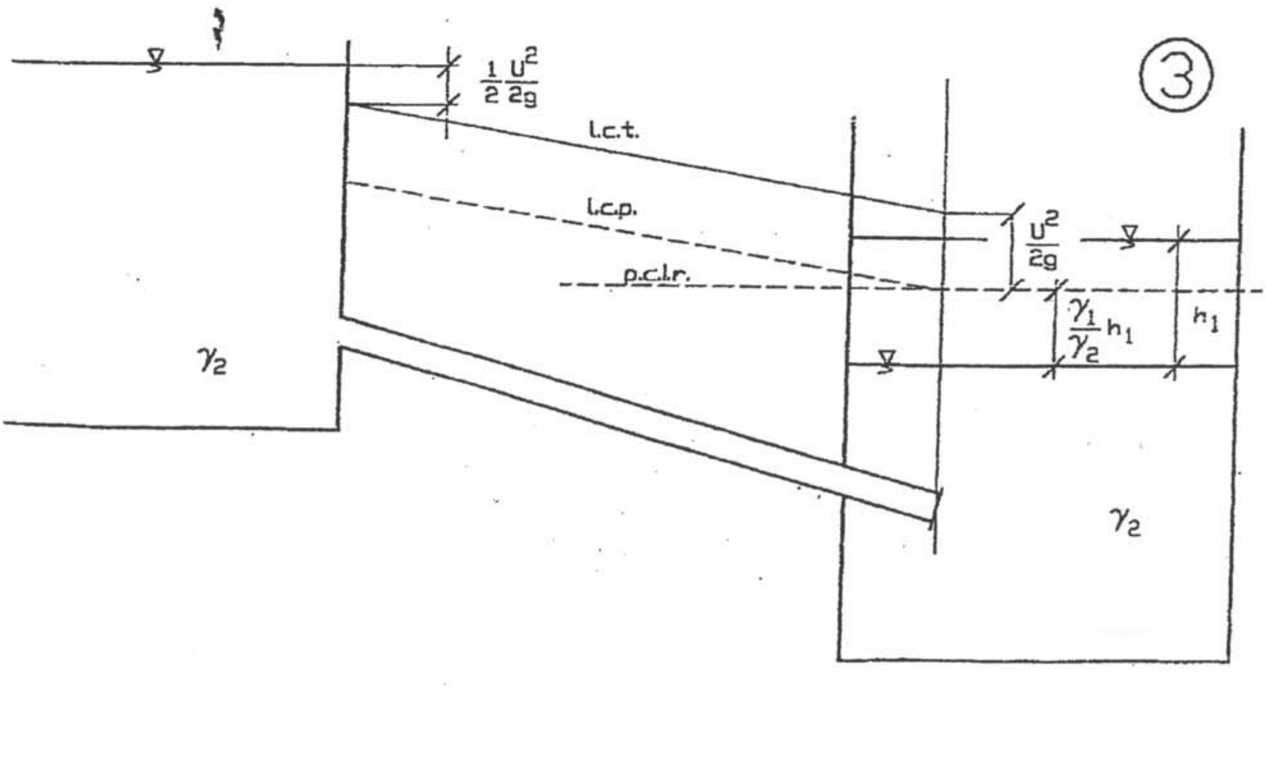
quindi $Q = U\Omega = 0.197 \ \frac{m^3}{s}$

Dal disegno si vede che $y_A = y_B + \frac{U^2}{2g} + iL = 5.162$ m

inoltre $Re = 386900 >> 2000$ quindi giusto ipotizzare moto turbolento e $\alpha = 1$


1
gas
p.c.l.r.
l.c.t.
l.c.p.
$\frac{U^2}{2g}$
$\frac{U_f^2}{2g}$


2
tubo liscio
tubo scabro
l.c.t.
l.c.p.
tubo liscio
tubo scabro


3
$\frac{1}{2}\frac{U^2}{2g}$
l.c.t.
l.c.p.
p.c.l.r.
$\frac{U^2}{2g}$
$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1$
h_1
γ_2
γ_2

Devo valutare ε

Con i miei dati posso trovare ε

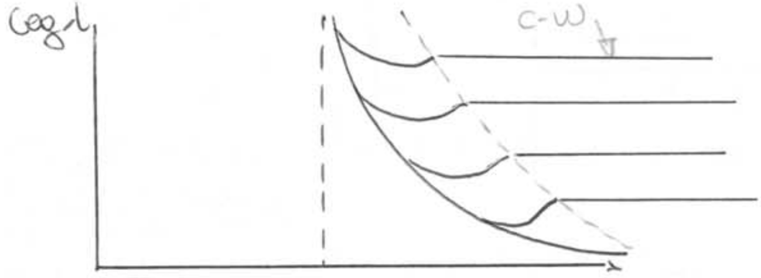
Re, λ, D

Formula di C-W (sperimentale)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3{,}71}\cdot\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Tubo scabro moto turbolento

Tale formula è stata diagrammata (Moody) bilogaritmico



più le curve sono in alto più il tubo è scabro

$\frac{\varepsilon}{D}\uparrow$ scabrezza relativa

Nel nostro caso finisco su una curva dove ricavo $\varepsilon = 0{,}006$

dove D = 0,0015 m = 0,15 mm

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 120

Per Bernoulli con le mie supposizioni (teoricamente non è esatto xke' fluido reale quindi compierò un errore).

$$z_A + \underbrace{\frac{P_A}{\gamma}}_{\text{equivale a } h_3} + \cancel{\frac{U_A^2}{2g}}_{=0} = z_B + \cancel{\frac{P_B}{\gamma}}_{=0} + \frac{U_B^2}{2g}$$

trovato come $\frac{38240}{\gamma} = 4 (m)$

velocità media di uscita dal serbatoio destro

$$U_B' = U_m = \sqrt{[\underbrace{(z_A - z_B) + h_3}_{h_2}]\,2g} = 8,51 \left(\frac{m}{sec}\right)$$

h_2 diff quote tra pelo libero e il getto in uscita

dovrei moltiplicarlo per un coeff. correttivo

Trovo così Q

Analizzo il manometro differenziale

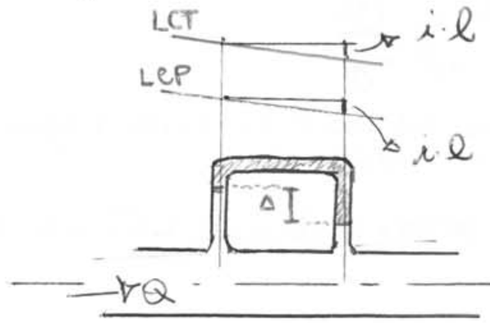
! ATTENZIONE!

dai dati leggero pesante $\gamma_m < \gamma$

quindi il manom. va posto sopra il condotto se no il liquido γ_m va portato via se posto sotto

manometro diff. posto al di sopra

$$\Delta h = \Delta \cdot \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$



Dal disegno posso ricavare Δ osservando la linea dei carichi i quali descrivono le varie perdite di carico tot e piezometrico base ne ricavo che Δh corrisponde a i·l

Allora

$$\underset{\text{diff carico piezometrico}}{\Rightarrow \Delta h} = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} = \underset{\text{perdite tot per unità di lunghezza}}{i \cdot l} \Rightarrow i = \frac{\Delta h}{l} = 0,01$$

Per la relazione di C-W (devo calcolare D)

valida per tubazioni scabre in moto turbolento.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3,71} \cdot \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

dove definisco: $\lambda = \dfrac{D \cdot i}{\dfrac{U^2}{2g}}$ → non conosco D quindi neanche U

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}$$

uso questo perché il testo mi fornisce ν

La velocità

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q \cdot 4}{\pi D^2}$$

Vado a tentativi

membro 1 membro 2

tentativo ① $D_1 = 0,500\ m \xrightarrow{\text{posso calcolare}}$ sostituisco $U_1 = \frac{Q}{\Omega_1} \to$ trovo $\lambda_{1\,\text{tentativo}}$ $Re_{1\,\text{tentativo}}$ $\boxed{} = \boxed{}$ → eq. Colebrook → se sono uguali ho individuato il diametro giusto

ⓝ

il diametro sarà $D = 0,215\ m$

Ricavo $Re = 280000$ moto turbolento. ⇒ se moto laminare dovevo introdurre α e non potevo usare l'eq C-W

se ero in moto laminare non potevo usare Colebrook

Adesso posso calcolare h nel primo serbatoio (basta guardare il grafico)

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \underset{\text{perdite carico conc. allo sbocco}}{\frac{U^2}{2g}} + \underset{\text{calcolato}}{i} \cdot \underset{\text{dato}}{L} = 8,58 (m)$$

pg ⑰

IDRAULICA - MECCANICA DEI FLUIDI

ESERCITAZIONE 8

FLUIDI REALI IN MOTO TURBOLENTO E LINEE DEI CARICHI

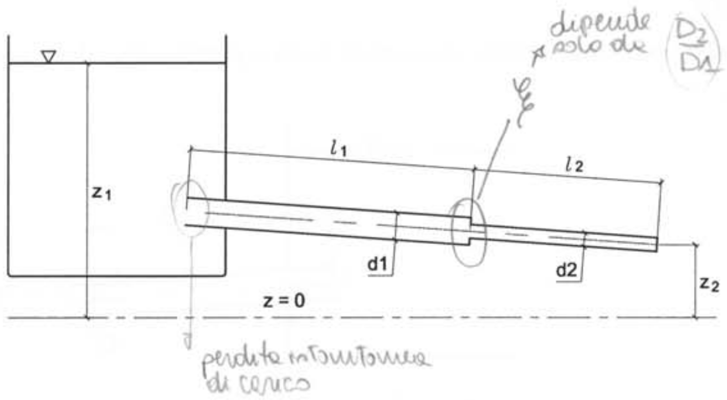
ESERCIZIO 1

La condotta indicata in figura è costituita da due tronchi di diametri rispettivamente d_1 e d_2, lunghezze l_1 ed l_2 e scabrezze corrispondenti ai coefficienti di Darcy β_1 e β_2. Noti il carico z_1 nel serbatoio e la quota z_2 del centro della sezione di sbocco, determinare la portata Q effluente all'aria.

Valori sperimentali del coefficiente ξ (brusco restringimento)						
D_2/D_1	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	
ξ	0,50	0,477	0,452	0,425	0,396	
D_2/D_1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ξ	0,358	0,31	0,243	0,166	0,086	0

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$d_1 = 470$ mm
$d_2 = 300$ mm
$l_1 = 45.0$ m
$l_2 = 25.0$ m
$z_1 = 10.0$ m
$z_2 = 5.0$ m

Risultati:
$Q = 0.384$ m^3/s



ESERCIZIO 2

Determinare quale portata Q passa fra due serbatoi collegati da due tronchi di tubazione in serie come indicato in figura. Tracciare le linee dei carichi totali e piezometrici.

Dati:
$\gamma = 9800$ N/m^3
$d_1 = 125$ mm
$d_2 = 200$ mm
$l_1 = 5.0$ m
$l_2 = 10.0$ m
$\Delta z = 1.20$ m
$\beta' = 0.0019$ s^2/m$^{2/3}$

Risultati:
$Q = 0.034$ m^3/s