NUMERO : 17

DATA : 04/02/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Di Pietro

MATERIA : Fisica I - Prof. Stephanescu

FISICA I - TEORIA

prof.

ANNO 2008/09

x eventuali correzioni: fabiodipietro.mail@libero.it

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 180

Fisica I

23/02/09

- MECCANICA CLASSICA E TERMODINAMICA...

FISICA: "paraphiseas" che in greco vuol dire "natura", cioè la scienza che studia i fenomeni che avvengono in natura...

fino all'800' veniva definita "filosofia della natura" per poi dividersi in:

- FISICA: studia i fenomeni in cui non vi è scambio di materia...
- CHIMICA: studia i fenomeni in cui vi è scambio di materia...

l'oggetto della fisica è lo studio, la spiegazione e l'interpretazione dei fenomeni che avvengono in natura grazie al metodo scientifico di G. Galilei.

→ metodo scientifico...

1) Schematizzazione del fenomeno ed elaborazione del modello che simula il fenomeno
2) Misurare le grandezze fisiche
3) studiare le leggi fisiche presenti nel fenomeno
4) Verificare le leggi (dimostrare che la legge è valida anche con altri dati) e precisionare

§ GRANDEZZE FISICHE:

"qualsiasi ente utile per la descrizione dei fenomeni fisici"

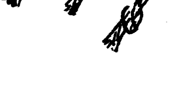
DEFINIZIONE OPERATIVA: richiede che siano soddisfatte 3 condizioni:

I) CRITERIO DI CONFRONTO:

...tra 2 grandezze fisiche della stessa categoria... da cui deriva il "criterio di uguaglianza".

II) CRITERIO DELLA SOMMA:

...tra 2 grandezze fisiche della stessa categoria...



III) CRITERIO DI UNITÀ DI MISURA (o CAMPIONE):

... considerando una grandezza campione..

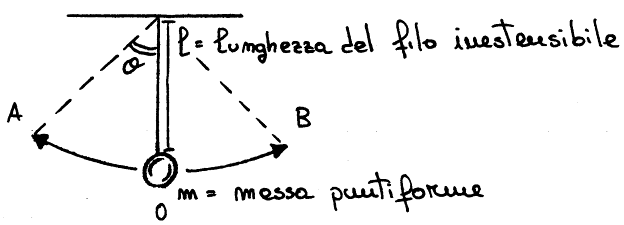
24/02/09

Analisi dimensionale:

1) SI POSSONO SOMMARE O SOTTRARRE SOLO GRANDEZZE CHE HANNO LA STESSA DIMENSIONE ...

2) LA DIMENSIONE DEL PRIMO MEMBRO DEV'ESSERE UGUALE A QUELLA DEL SECONDO ...

ESEMPIO: « Pendolo semplice »



PERIODO DEL PENDOLO ...

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

P → periodo; ℓ → lunghezza; g → accellerazione di gravità ...

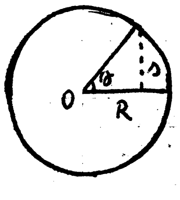
«tempo necessario al corpo per passare 2 volte dalla stessa posizione, dopo aver toccato i due punti estremi ... »

- P dipende dalla lunghezza
- P non dipende dalla massa

$[M_1] = [P] = \text{tempo}$ DIMENSIONE

$[M_2] = \left[2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] = \sqrt{\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}} \cdot T^2} = \text{tempo}$ DIMENSIONE $\xrightarrow{\text{considerando le unità di misura}}$ (secondi)

- Dimensioni e unità di misura di un angolo:



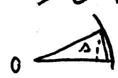
$\operatorname{sen}\theta = \frac{s}{R}$

CONSIDERANDO SOLO ANGOLI MOLTO PICCOLI:

$\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tang}\theta \approx \theta$

$\Rightarrow \frac{s}{R} \approx \theta \Rightarrow [\theta] = \left[\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}\right] = 1$

$\Rightarrow \theta$ ADIMENSIONALE QUANDO È MOLTO PICCOLO...



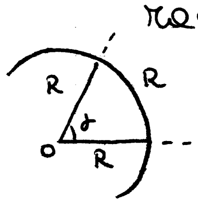
"s" ≈ corda ≈ arco...

unità di misura:

1) GRADI: divido tutta la circonferenza in 360 parti, ed il grado è delimitato da due raggi

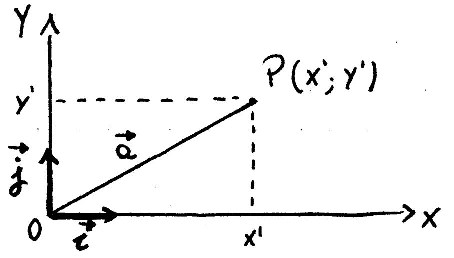
$$1 \text{ grado} = \frac{2\pi}{360}$$

2) RADIANTE: ottengo il radiante quando l'arco sotteso è uguale al raggio della circonferenza (non dipende dal raggio)



$$1 \text{ radiante} = \frac{360}{2\pi}$$

• esprimere un vettore in coordinate cartesiane:



definiamo $|\vec{i}|$ e $|\vec{j}|$ come "VERSORI"

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$
$\hookrightarrow \underline{\underline{x}}$ $\hookrightarrow \underline{\underline{y}}$ $\hookrightarrow \underline{\underline{z}}$

consideriamo $\vec{a} = \vec{OX'} + \vec{X'P} \ldots$

$$\vec{OX'} = \underbrace{\vec{i} + \vec{i} + \ldots + \vec{i}}_{x' \text{ VOLTE}} = x' \cdot \vec{i}$$

$$\vec{x'P} = \underbrace{\vec{j} + \vec{j} + \ldots + \vec{j}}_{y' \text{ VOLTE}} = y' \cdot \vec{j}$$

→ SOMMA TRA 2 VETTORI:

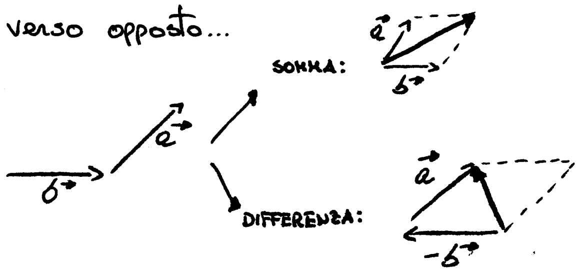
$$= \underbrace{x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}}$$

SOMMA VETTORIALE IN FUNZIONE DEI 2 VERSORI...

=> "ogni vettore può essere espresso come somma dei 3 versori per le coordinate indicanti il punto $(x, y, z)P$"

→ DIFFERENZA TRA 2 VETTORI:

1) consideriamo $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ → verso opposto...



regole grafica di "+" e "−"

2) consideriamo in funzione dei versori

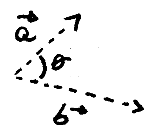
$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \cdot \vec{i} + (a_y \pm b_y) \cdot \vec{j} + (a_z \pm b_z) \cdot \vec{k}$$

→ PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE:

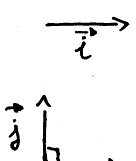
$m \cdot \vec{a} = (m \cdot |a| \cdot \vec{i})$ si ottiene un vettore con modulo "m" volte più grande ...

→ PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$ otteniamo sempre uno scalare...



$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = |i| \cdot |i| \cdot \cos\theta = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ \quad \hookrightarrow \theta = 0° \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = |i| \cdot |j| \cdot \cos\theta = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ \quad \hookrightarrow \theta = 90° \end{cases}$$



→ OPERATORE VETTORIALE: "GRADIENTE"

Si indica con $\vec{\nabla}$ (o $\vec{\text{grad}}$) $= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$

1) Consideriamo una funzione scalare $f(x;y;z)$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

con ∂ = DERIVATA VETTORIALE

2) Consideriamo il prodotto scalare tra il gradiente ed un vettore $\vec{A}$:

[DIVERGENZA DI $\vec{A}$]

$$\langle\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{(x,y,z)}\rangle = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

e da $\langle\vec{a}\cdot\vec{b}\rangle = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$ si ha che:

$$\vec{A}_{(x;y;z)} = A_{x\,(x,y,z)}\cdot\vec{i} + A_{y\,(x,y,z)}\cdot\vec{j} + A_{z\,(x,y,z)}\cdot\vec{k}$$

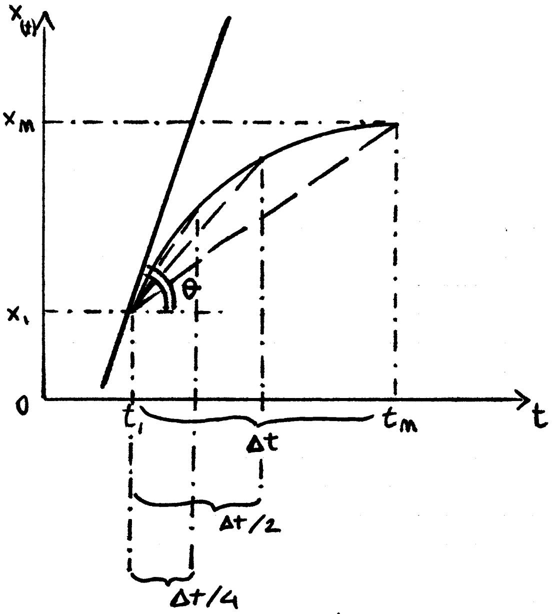
3) Consideriamo il prodotto vettoriale tra il gradiente e un vettore $\vec{A}$:

[ROTORE DI $\vec{A}$]

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_{(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \begin{array}{l} \to \text{VERSORI} \\ \to \text{COMPONENTI CARTESIANE DI } \vec{\nabla} \\ \to \text{COMPONENTI CARTESIANE DI } \vec{A} \end{array} =$$

$$= i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

... no, perché ha percorso dello spazio in Δt; quindi questo caso non rispecchia la definizione di velocità prima data



Consideriamo $\Delta t \to 0$ ed il punto medio tra t_1 e t_m (calcoliamo $\frac{\Delta t}{2}$) e poi il suo punto medio (calcoliamo $\frac{\Delta t}{4}$) e così via...

Così facendo la corda della curva diventa la TANGENTE ALLA CURVA, e rappresenta un nuovo tipo di velocità, la velocità istantanea, ovvero la velocità del punto materiale calcolata istante per istante ed in ogni momento tangente alla curva (unione dei punti toccati dal punto P):

(DEFINIZIONE + SPECIFICA) $\rightarrow$ $$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \theta = \frac{dx_{(t)}}{dt}$$

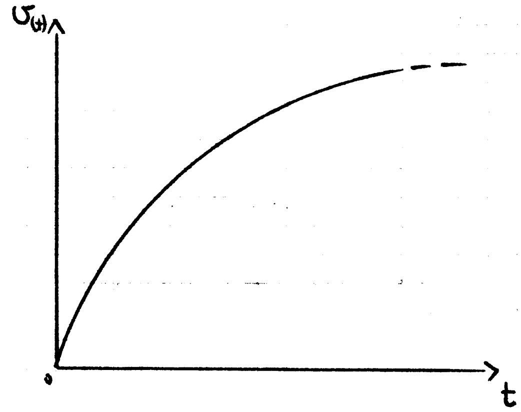
$dx_{(t)}$ → derivata della posizione in funzione del tempo

dt → derivata del tempo

Rappresenta la tangente geometrica dell'angolo formato dalla tangente alla curva in quel punto e l'asse orizzontale passante dal medesimo punto

Se il moto del punto materiale avviene...
... con velocità costante → moto uniforme
... con velocità non costante → moto non uniforme

v	t
v_1	t_1
v_2	t_2
⋮	⋮
v_n	t_n



Se la velocità non è costante significa che il punto materiale varia la sua velocità nel tempo, ovvero subisce un **accelerazione** nella variazione di tempo:

$$a_i = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\delta^2 x_{(t)}}{\delta t^2}$$

→ derivata seconda dello spazio rispetto al tempo

$$[a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = L \cdot T^{-2} \quad \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

per ottenere le leggi orarie del moto partiamo dal considerare l'accelerazione:

a = COSTANTE

→ condizioni iniziali ($t = t_0 \rightarrow x_0 ; v_0$)

$$a = \frac{\delta v}{\delta t} = \text{cost} \rightarrow \text{separiamo le variabili} \rightarrow \delta v = a \cdot \delta t \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} 1\, dv = a^{*} \int_{t_0}^{t} 1\, dt \rightarrow v - v_0 = a(t - t_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{considero } t_0 = 0 \rightarrow v = v_0 + at$$

* essendo costante l'a può uscire dall'integrale...

consideriamo ora la velocità:

v = VARIA

→ condizioni iniziali ($t = t_0 \rightarrow x_0$)

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{varia} \rightarrow \text{separiamo le variabili} \rightarrow \delta x = v \cdot \delta t \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x} 1\, dx = \int_{t_0}^{t} v^{*} dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} 1\, dx = \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\, dt \rightarrow$$

$$\rightarrow x - x_0 = v_0 \int_{t_0}^{t} 1\, dt + a \int_{t_0}^{t} t \cdot dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{considero } t_0 = 0 \rightarrow x_{(t)} = x_0 + v_0 (t) + \frac{1}{2} a (t)^2$$

* v non è una costante e quindi non può uscire dall'integrale

abbiamo così trovato le due leggi orarie, a cui possiamo aggiungere altre due formule importanti:

→ *ELIMINIAMO LA "t":*

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ t = \frac{v - v_0}{a} \end{cases} = \begin{cases} x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v - v_0)^2}{a^{\cancel{2}}} \\ t = * \end{cases} = \begin{cases} 2a(x - x_0) = \cancel{2 v_0 v} - 2v_0^2 + v_0^2 + v^2 - \cancel{2 v_0 v} \\ t = * \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \\ t = * \end{cases} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

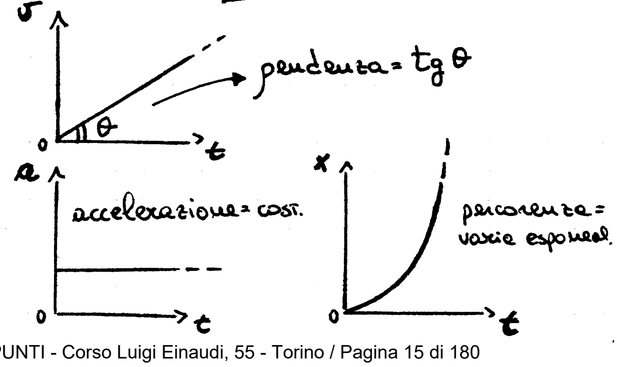
→ *ELIMINIAMO LA "a":*

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{(v - v_0)}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}} \\ a = \frac{v - v_0}{t} \end{cases} = \begin{cases} x - x_0 = v_0 t + \frac{v t}{2} - \frac{v_0 t}{2} \\ a = * \end{cases} = \begin{cases} x - x_0 = t \left(v_0 + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2}\right) \\ a = * \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x - x_0 = t \left(v/2 + v_0/2\right) \\ a = * \end{cases} \Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{2} t (v + v_0)$$

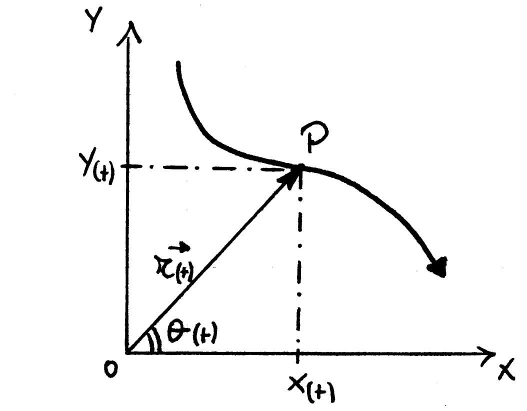
LEGGI ORARIE (moto unifor. accelerato)

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \\ x = x_0 + \frac{1}{2} t + (v - v_0) \end{cases}$$



MOTO BI-TRIDIMENSIONALE ... 02/03/09

Il moto bidimensionale o tridimensionale è il moto del punto materiale nel piano (SE x LOCALIZZARE LA SUA POSIZIONE CI BASTANO SOLO DUE PUNTI) o nello spazio (SE x LOCALIZZARE LA SUA POSIZIONE CI BASTANO TRE PUNTI)



• TRAIETTORIA DI UN PUNTO "P" IN UN PIANO

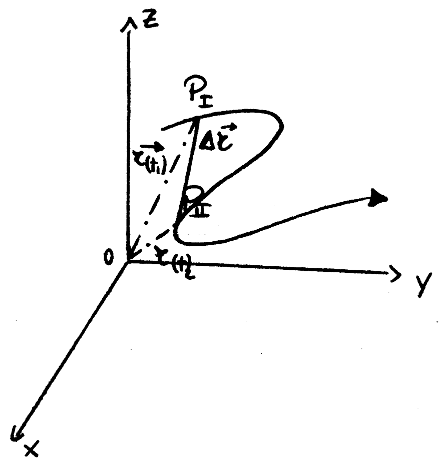
↳ $x = r \cdot \cos\theta$
$y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$tg\,\theta = y/x$

Se conosciamo in ogni istante il vettore che congiunge l'origine con la curva, conosciamo anche la posizione del punto materiale P

esso prende il nome di raggio vettore:

$$\vec{r}_{(t)} = X_{(t)} \cdot \vec{i} + Y_{(t)} \cdot \vec{j} + \underbrace{\left(Z_{(t)} \cdot \vec{k}\right)}_{\text{SE CI TROVIAMO NELLO SPAZIO...}}$$

(OGNI VETTORE È OTTENUTO COME SOMMA DELLE PROIEZIONI DELLE SUE COMPONENTI SUI TRE ASSI PER I LORO VERSORI FONDAMENTALI)



Consideriamo P_1 e P_2; rispettivamente la posizione del punto materiale al tempo t_1 e t_2

P_1 $(a\ t_1) \rightarrow$
P_2 $(a\ t_1 + \Delta t) \rightarrow$ $\overline{P_1P_2} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\Delta\vec{r} = r(t-\Delta t) - r(t)$

↳ Vettore spostamento...

e definiamo adesso la velocità media nel piano o nello spazio:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \begin{array}{l} \rightarrow \text{vettore spostamento} \\ \rightarrow \text{variazione di tempo} \end{array}$$

Con lo stesso procedimento già utilizzato per il moto unidimensionale, definiamo la velocità istantanea come:

$$\vec{v}_i = \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

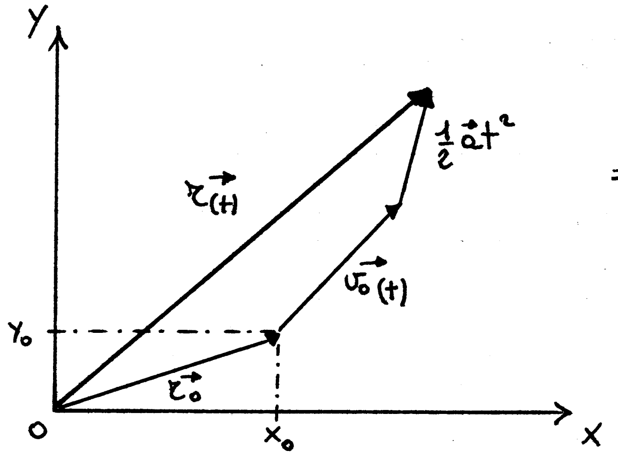
→ consideriamo le componenti del vettore accelerazione in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow \int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = a_x \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow v_x = v_{x_0} + a_x \cdot t \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \rightarrow \int_{v_{y_0}}^{v_y} dv_y = a_y \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow v_y = v_{y_0} + a_y \cdot t \end{cases} \quad \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} \cdot t$$

possiamo anche definire, considerando le formule precedenti, altre formule:

$$\begin{cases} x_{(t)} = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_{(t)} = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$ componenti del punto materiale...

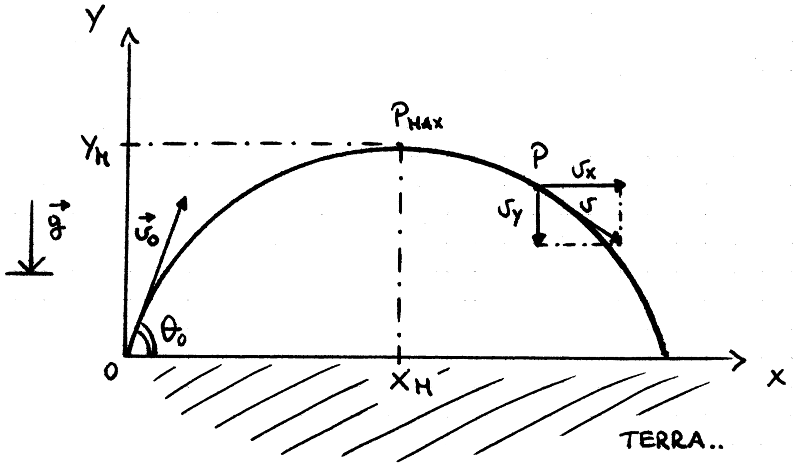
Tornando alle condizioni iniziali $\begin{Bmatrix} t_0 = 0 \\ x = x_0 \quad v_x = v_{x_0} \\ y = y_0 \quad v_y = v_{y_0} \end{Bmatrix}$ abbiamo:



$$\Rightarrow \vec{r}_{(t)} = \vec{r_0} + \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

r_0 = posizione del punto al tempo t_0

• MOTO DI UN PROIETTILE (NEL VUOTO): PARABOLICO



0 è il punto di lancio ($x_0 \equiv y_0 \equiv 0$) in condizioni iniziali $t_0 = 0$

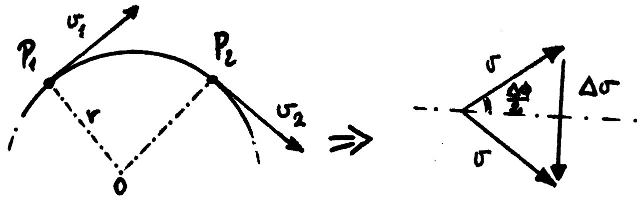
$\vec{g}$ = costante → MODULO ...

$\vec{g} = g(-\vec{j}) = -g \cdot \vec{i}$ → VERSORE LEGATO A Y ...

In ogni momento il proiettile P è soggetto a 2 tipi di forze $\Rightarrow \begin{cases} V_x = \text{moto uniforme} \rightarrow v_0 \cdot \cos\theta \\ V_y = \text{moto unif. acc.} \rightarrow v_0 \cdot \sin\theta - gt \end{cases}$

angolo θ legato all'asse "x"

• MOTO CIRCOLARE UNIFORME...



RICORDANDO CHE..

$$\frac{\Delta v}{2} = v \cdot \text{sen}\,\frac{\Delta\phi}{2}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta\phi \cdot r}{dt} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\phi \cdot r}{v}$$

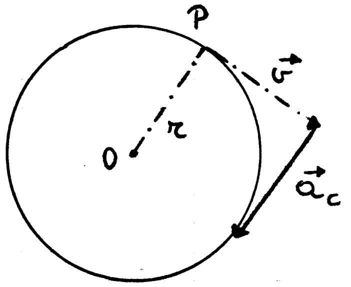
$$\Rightarrow a_{cp} = \frac{dv}{dt} = \frac{2v \cdot \text{sen}\frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi \cdot r}{v}} = \frac{v^2}{r} \cdot \cancel{\frac{\text{sen}\frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}}}^{\,1} = \frac{v^2}{r}$$

• MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME...

- $\vec{v} = \frac{d(\vec{r})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\mu_r} \cdot r) = \frac{d\mu_r}{dt} \cdot r + 0 = \left(\cancel{\mu_\theta}^{\,1} \cdot \frac{d\phi}{dt}\right) \cdot r = \omega \cdot r$
- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{\mu_\phi})}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \mu_\phi}_{a_T} + \underbrace{v \cdot \frac{d\mu_\phi}{dt}}_{a_{cp}}$
  - $a_T = \frac{dv}{dt} \cdot \mu_\phi = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} \cdot \cancel{\mu_\phi}^{\,1} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r + \omega \cancel{\frac{dr}{dt}}^{\,0} = \alpha \cdot r$
  - $a_{cp} = v \cdot \frac{d\mu_\phi}{dt} = v \cdot \left(\cancel{-\mu_r}^{\,-1} \cdot \frac{d\phi}{dt}\right) = -v \cdot \omega = -\frac{v^2}{r}$

•) MOTO CIRCOLARE UNIFORME:

Si chiama "moto circolare" il moto la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza; in cui la velocità (VETTORE) varia istantaneamente; quindi l'accelerazione è diversa da 0 sempre (IN QUESTO CASO SI CHIAMA ACCELERAZIONE CENTRIPETA)



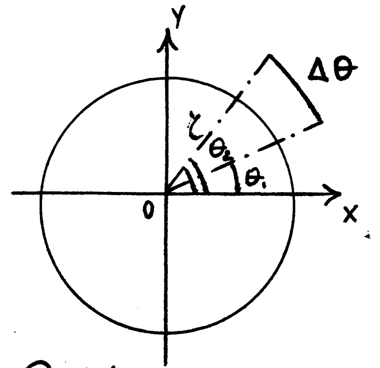
il vettore $\vec{v}$ (velocità) è perpendicolare al raggio della circonferenza della traiettoria, e l'accelerazione, essendo perpendicolare alla velocità, essa è parallela al raggio

$r \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \perp \vec{a}_c \Rightarrow r \parallel a^c$

~~In questo caso, la velocità assume il valore di velocità angolare (ω) data da:~~

$$\vec{\omega}_m = \frac{\Delta \vec{\theta}}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\theta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$



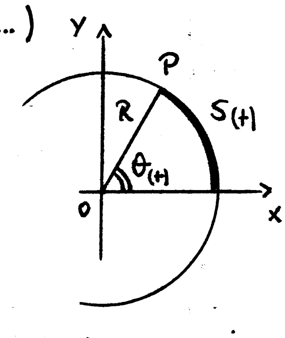
~~LEGGI ORARIE (moto circolare)~~

$$\begin{cases} \vec{S}_{(t)} = \vec{S}_0 + \vec{v}\, t & s = s_0 \text{ per } t = 0 \\ \vec{\theta}_{(t)} = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}\, t & \theta = \theta_0 \text{ per } t = 0 \end{cases}$$

$\Delta S = R \cdot \Delta \Phi$ (SPOSTAMENTO...)

$\vec{S}_{(t)} = R\vec{\theta}_{(t)}$

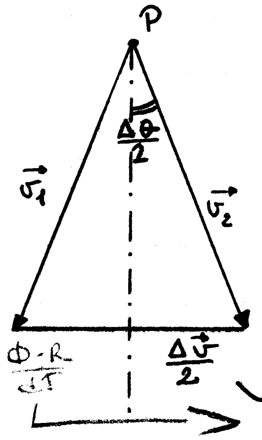
$\vec{v} \cdot \Delta t = R \cdot \vec{\theta}_{(t)}$



Il moto circolare è un moto accelerato, con accelerazione, in questo caso, costante e ortogonale alla traiettoria

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v} \rightarrow \text{velocità}}{\Delta t \rightarrow \text{tempo}} \Rightarrow \alpha_m = \frac{\Delta \vec{\omega} \rightarrow \text{velocità media}}{\Delta t}$$

α_m → acc. angolare media



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \rightarrow \frac{\Delta \vec{v}}{2} = v \cdot \text{sen} \frac{\Delta\theta}{2} \ \ldots$$

$$\ldots \text{ essendo } \vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2 \cdot v \cdot \text{sen} \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{R \cdot \Delta\theta}{v}} = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\text{sen} \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \Rightarrow \vec{a}_i = \frac{v^2}{R}$$

($\frac{\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \to 1$)

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Phi \cdot R}{dt}$

$\Delta v = 2 \cdot (v \cdot \text{sen} \frac{\Delta\Phi}{2})$

$\Delta t = \frac{R \cdot \Delta\Phi}{v}$

per cui le derivate di $\vec{u_r}$ e di $\vec{u_\theta}$ sono diverse da zero, essendo variabili nel tempo, e quindi calcolabili:

- $$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d \cdot \cos\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{i} + \underbrace{\cos\theta \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}}_{0} + \frac{d\,\mathrm{sen}\,\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{j} + \underbrace{\mathrm{sen}\,\theta \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}}_{0} =$$

$$= -\mathrm{sen}\,\theta \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{j} = (-\mathrm{sen}\,\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}) \cdot \frac{d\theta}{dt} =$$

$$= \vec{u_\theta} \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt}$$ quindi abbiamo.. $$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \vec{u_\theta} \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt}$$

- $$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\frac{d \cdot \mathrm{sen}\,\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\cos\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{j} + \cos\theta \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} =$$

$$= -\cos\theta \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{i} - \mathrm{sen}\,\theta \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt} \cdot \vec{j} = -(\cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}) \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt} =$$

$$= -\vec{u_r} \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt}$$ quindi abbiamo.. $$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\vec{u_r} \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt}$$

Consideriamo la velocità nel moto circolare non uniforme in cui essa è variabile nel tempo:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \cdot (\vec{r}) = \frac{d}{dt}(R \cdot \vec{u_r}) = \overbrace{\underbrace{\frac{d}{dt} R}_{0} \cdot \vec{u_r} + R \cdot \frac{d}{dt} \vec{u_r}}^{\text{DERIVATA DI PRODOTTO}} \Rightarrow \vec{v} = R \cdot \left(\vec{u_\theta} \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt}\right)$$

- DIREZIONE = DIREZIONE DI $\vec{u_\theta}$
- VERSO = VERSO DI $\vec{u_\theta}$
- MODULO = $|\vec{v}| = v = R \cdot \frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow v = R \cdot \frac{d\phi}{dt} \qquad (\text{xke } \vec{u_\theta} = 1)$$

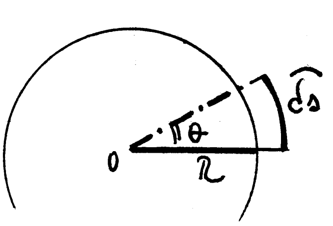
$\hookrightarrow \omega \quad [s^{-1}]$

Introduciamo adesso la velocità angolare ($\vec{\omega}$), cioè la "variazione dell'angolo nel tempo":

$$\vec{v} = R \cdot \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{R} \qquad [\vec{v}] = \frac{L}{T} \qquad [R] = L \qquad \frac{\cancel{L} \cdot T^{-1}}{\cancel{L}} = \frac{1}{T}$$

infatti $\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ($\Delta\theta$ → adimensionale; → DIMENSIONE $[1/t]$; Δt → tempo)

x ANGOLI PICCOLI:



$$\Rightarrow v = \frac{R\,d\theta}{dt} = \frac{d(R \cdot \theta)}{dt} \Rightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

R è costante quindi può entrare nella d

ds → arco...

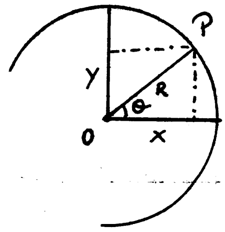
dt → tempo...

• relazione vettoriale:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

I): $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$

II): $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}$ $\rightarrow R \cdot u_r$



... da cui otteniamo ...

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \cdot \vec{k}) \times [(R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}] =$$
$$= \omega R \cdot [\cos\theta(\vec{k} \times \vec{i}) + \sin(\vec{k} \times \vec{j})] =$$
$$= \omega R \cdot [\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{i}] = \omega \cdot R \cdot \vec{u}_\theta \ldots$$

$\hookrightarrow -\sin\phi(i) + \cos\phi(j)$

... quindi: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot R \cdot \vec{u}_\theta$

Componenti di $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_{(t)} \times \vec{r}_{(t)}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{(t)}}_{\substack{\text{VETTORE} \perp \text{A } \vec{r}_{(t)} \\ \text{E TANGENTE A } \vec{u}_\theta \\ \text{(AVRÀ DIR. } \vec{a}_T)}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt}}_{\substack{\text{VETTORE} \perp \text{A } \vec{v} \\ \text{E PARALLELO A } \vec{u}_r \\ \text{(AVRÀ DIR. } \vec{a}_r)}}$$

$$\rightarrow \vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{v^2}{R}$$

$$\rightarrow \vec{a}_T = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha R \quad \text{(Accelerazione angolare)}$$

$\hookrightarrow \vec{\alpha}$ = accelerazione angolare $= \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

N.B. Sia $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ hanno direzione $\perp$ al piano della circonferenza ...

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_\phi = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} \cdot \cancel{u_\phi} = \underbrace{\frac{d\omega}{dt} \cdot R}_{\alpha \cdot R} + \omega \cancel{\frac{dR}{dt}}^{\,0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 180

B) qual'è il percorso orizzontale della bomba (non la gittata perchè il proiettile non è partito da terra)?

B: ci chiede solo il percorso orizzontale... quindi

$$x - x_0 = V_{0x} \cdot t - \underbrace{\tfrac{1}{2} g t^2}_{=0}$$

$V_{0x} = V_0 \cdot \operatorname{sen}\theta$ (non $\cos\theta$ xkè l'angolo θ dipende da y)

$\rightarrow (x - x_0) = (V_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)\, t$

C) quanto valgono le componenti della velocità V_{0x} e V_{0y} poco prima di toccare il suolo?

C: V_{0x} = sempre costante = $V_0 \cdot \operatorname{sen}\theta$

V_{0y} = unif. accelerato = $-V_0 \cos\theta - gt$ (essendo somma di 2 numeri con ugual segno => modulo aumenta)

conoscendo t_1 calcolo...

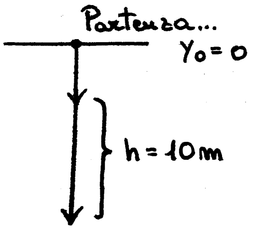
$$V_y = -V_0 \cos\theta - g t_1$$

D) qual'è il modulo della sua velocità nel momento del suo impatto al suolo?

$$|\vec{v}| = \sqrt{V_{0x}^2 + V_y^2(t_1)} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{V_{0x}}{V_y(t_1)}$$

PROBLEMA:

2 oggetti cadono liberamente da fermi; l'uno dopo l'altro e dalla stessa altezza alla distanza di un secondo. Quanto tempo dopo la partenza i 2 oggetti si trovano alla stessa distanza di 10 m l'uno dall'altro?



consideriamo la posizione dei due oggetti:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t \;;\quad y_2 = \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2 \;;\quad y_2 - y_1 = 10\,m$$

$$\frac{1}{2} g \left[\cancel{t^2} - 2t\Delta t + \Delta t^2 - \cancel{t^2}\right] = 10 \rightarrow \frac{1}{2} g\, \Delta t \left[-2t + \Delta t\right] = 10$$

=> consideriamo t => $-g(\Delta t) t = h - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \Rightarrow t = \dfrac{\frac{1}{2} g (\Delta t)^2 - h}{g\,\Delta t}$

09/03/09

II) DINAMICA:

- « studia le cause e le forze che generano il moto dei corpi »

Iniziamo esprimendo il concetto di forza:

"LA FORZA È LA GRANDEZZA CHE ESPRIME E MISURA L'INTERAZIONE TRA SISTEMI FISICI"...

$$\underbrace{\text{AMBIENTE} \xrightarrow{\text{AGISCE PER MEZZO DI...}} \text{FORZE}}_{\text{Dinamica...}} \xrightarrow{\text{...SU UN...}} \underbrace{\text{CORPO} \xrightarrow{\text{...PROVOCANDO}} \text{MOTO}}_{\text{Cinematica...}}$$

Consideriamo adesso le 3 leggi di Newton fondamentali per lo studio della dinamica di un corpo; esse sono:

1ª LEGGE) "PRINCIPIO DI INERZIA":

> « Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in stato di quiete se era fermo ($v=0$) oppure si muove di moto rettilineo uniforme (v = costante non nulla) »

Quindi l'assenza di forze non implica che non ci sia moto, bensì comporta che la velocità non vari... ...infatti la variazione di velocità (in modulo, in direzione o in entrambi i casi) è dovuta all'applicazione di una forza.

interazione ambiente-corpo $\Rightarrow$ accelerazione (+) di massa m
= Forze $\rightarrow$ $F = m \cdot a$

2ª LEGGE) "MASSA INERZIALE"

> « l'interazione del punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza F, determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione di velocità nel tempo; m è la massa inerziale del punto »

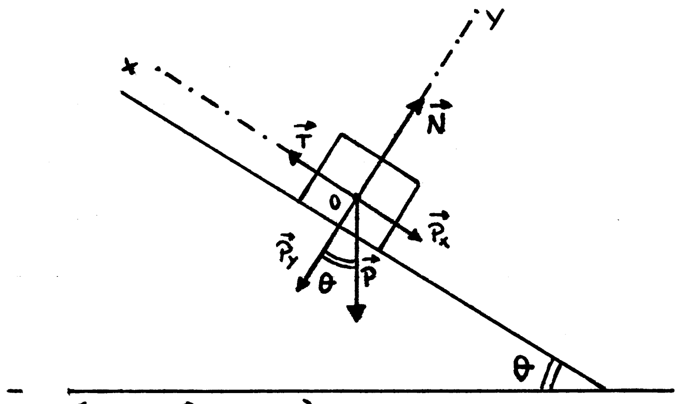
$$F = m \cdot a$$

Il termine "massa inerziale" è legato al fatto che la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto (modificare la propria velocità)

Fissata una forza F, l'effetto dinamico è tanto maggiore quanto minore è la massa del punto

• Piano Inclinato (senza attrito):

Consideriamo un corpo di massa "m" che posso muoversi sotto l'azione del suo peso "P" ed eventuali oltre forze, lungo un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'asse orizzontale



$$\vec{P}\ \begin{cases} \vec{P}_y = \vec{P}\cdot\cos\theta \\ \vec{P}_x = \vec{P}\cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{con } \vec{P} = m\cdot\vec{g}$$

$\vec{T}$ = FORZA CHE SI OPPONE AL MOTO

$\vec{P}$ = FORZA PESO GENERATA DAL CORPO

$\vec{N}$ = REAZIONE VINCOLARE DEL PIANO

1) CON ACCELERAZIONE UGUALE A ZERO: $\underline{\underline{\vec{T}\neq 0}}$

Con $\vec{a}=0$ il corpo si muove di moto uniforme ($\vec{v}$ = costante)

→ 2° legge di Newton:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{N} + \vec{P} + \vec{T} = m\cdot\vec{a} = \vec{0}$$

CONSIDERANDO LE 2 PROIEZIONI DELLA FORZA PESO "P" (CHE GENERANO IL MOTO):

$$\begin{cases} 0x)\ -P\cdot\operatorname{sen}\theta + T = 0 \\ 0y)\ -P\cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \vec{T} = m\cdot\vec{g}\cdot\operatorname{sen}\theta$

$\vec{N} = m\cdot\vec{g}\cdot\cos\theta$

→ Se $\theta = 0° \Rightarrow \vec{T} = \vec{0}$ (il corpo è semplicemente appoggiato sul piano... → $\vec{N} = m\cdot\vec{g}\cdot 1$)

→ Se $\theta = 90° \Rightarrow \vec{T} = m\cdot g\cdot 1$ (corpo in caduta libera e non risente del vincolo del piano → $\vec{N} = 0$)

2) CON ACCELERAZIONE COSTANTE: $\underline{\vec{T}=0}$

Con $\vec{a}_x$ = costante il corpo si muove di moto uniformemente accelerato ($\vec{a}$ = costante)

→ 2° legge di Newton:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{N} + \vec{P} + \vec{T} = m\cdot\vec{a} = \text{COSTANTE} \neq \vec{0}$$

CONSIDERO LE PROIEZIONI DELLA FORZA PESO "P" (CHE GENERA IL MOTO):

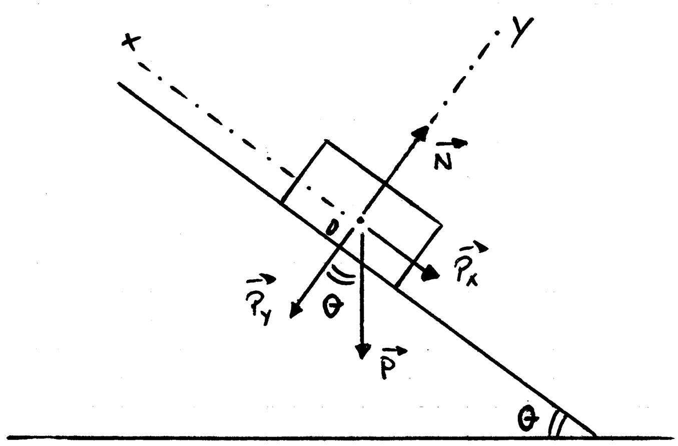
$$\begin{cases} 0x)\ -P\cdot\operatorname{sen}\theta + \cancel{T}^{\,0} = -m\cdot\vec{a} = \text{COSTANTE} \\ 0y)\ -P\cdot\cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \cancel{m}\cdot g\cdot\operatorname{sen}\theta = \cancel{m}\cdot a_x$

$\vec{a}_x = \vec{g}\cdot\operatorname{sen}\theta$

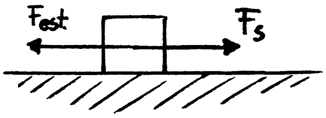
→ Se $\theta = 0° \Rightarrow \vec{a}_x = \vec{0}$ (il corpo non subisce accelerazioni)

→ Se $\theta = 90° \Rightarrow \vec{a}_x = \vec{g}$ (il corpo in caduta libera ha a_x = forza di gravità)

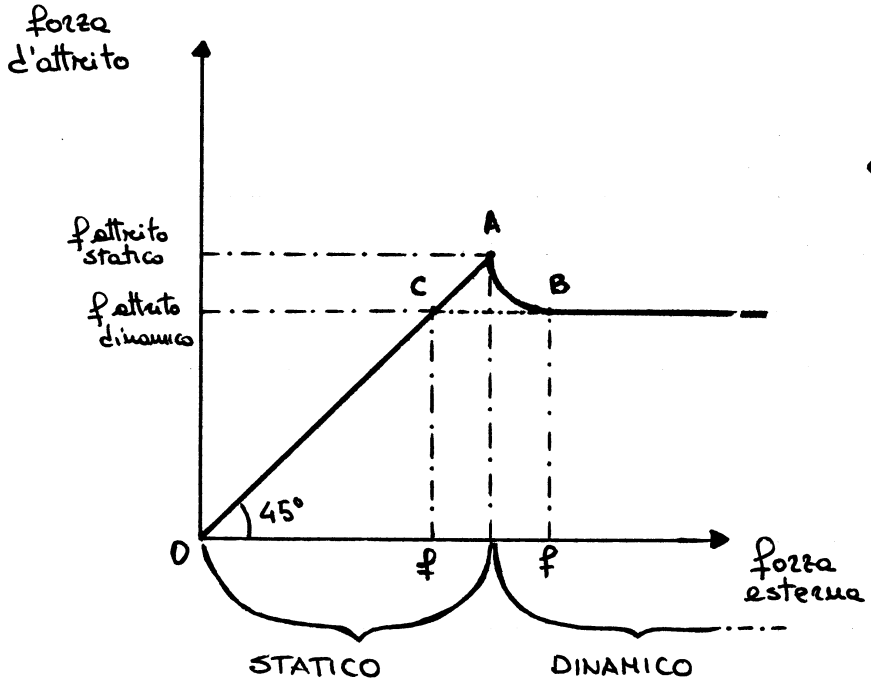


NB: IN QUESTO CASO, NON ESSENDOCI LA TENSIONE AD EQUILIBRARE IL MOTO, IL CORPO ACQUISTA VELOCITÀ IN DISCESA ($\vec{a}\neq 0$)

la forza d'attrito varia con il variare della forza applicata, ed il valore della forza esterna F_{est} è uguale a quello della forza di attrito statico F_s un "attimo dopo l'inizio del moto"

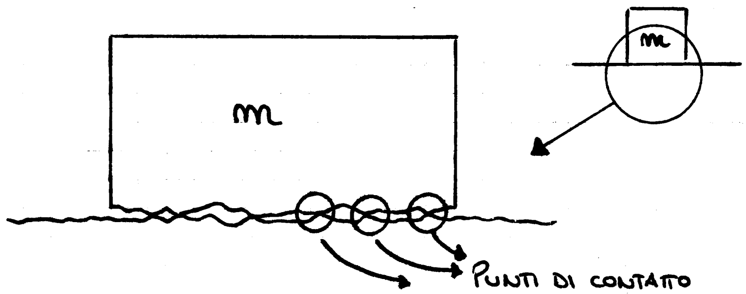


- $F_s > F_{est}$ → il corpo è fermo...
- $F_s = F_{est}$ → il corpo ha iniziato a muoversi...
- $F_s < F_{est}$ → il corpo è in movimento...



- f attrito dinamico = uguale alla forza applicata quando il corpo si muove con moto uniforme
- f attrito statico = uguale alla forza applicata un attimo prima del moto

TRATTO
- **O-A** : f attrito = f esterna ed il corpo non si muove, si trova in posizione statica, fino al punto A ...
- **A-B** : f attrito < f esterna ed il corpo inizia a muoversi lungo il piano
- **B-C** : la forza esterna diminuisce ma con il corpo ancora in movimento...



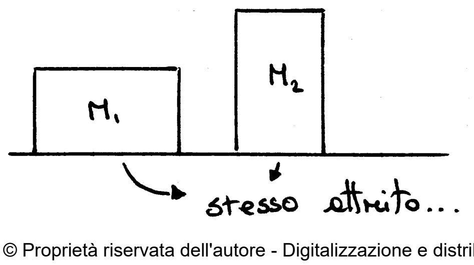
ci sono solo alcuni punti di contatto (di legame) in certi punti della superficie del corpo

[PUNTI DI MICROSALDATURA A FREDDO A LIVELLO ATOMICO]

⇒ + IL CORPO È PESANTE...

⇒ + PUNTI DI CONTATTI PRESENTI...

che variano in continuazione



$M_1 = M_2$

b) Consideriamo l'eq. del moto

$$X = X_0 + V_0 \cdot T + \frac{1}{2} a t^2$$

a $t_0 = 0$ e $t_1 = 4{,}2\,s$ e a $X=0$ e $X_0 = 0$

$$\hookrightarrow \quad 0 = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x=0 \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 4{,}2\,sec \end{cases} \qquad 0 = t\left(V_0 + \frac{1}{2} a t\right) \rightarrow V_0 = -\frac{1}{2} a t = 3{,}81\ \frac{m}{s}$$

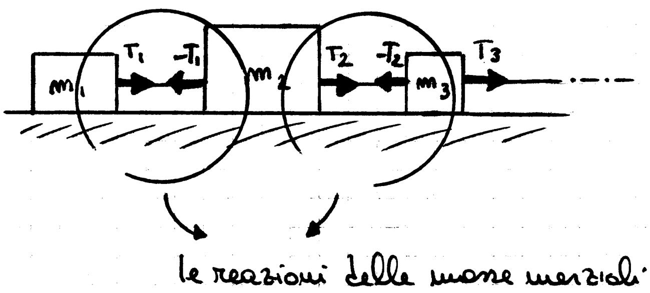
non essendoci attrito il corpo ritorna dagli stessi punti e con la stessa velocità

c)

d) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{a}{g} = 0{,}185 \rightarrow \theta = 10{,}6°$

PROBLEMA 2: 3 blocchi sono collegati e trascinati su un piano orizzontale privo di attrito da una forza T_3
Conoscendo $m_1; m_2; m_3$;
a) Calcolare l'accelerazione del sistema
b) Calcolare la tensione di T_1 e T_2

a)



$$\sum \vec{F} = m_{TOT} \cdot \vec{a}$$

$$\begin{array}{l} m_1 \rightarrow t_1 \\ m_2 \rightarrow t_2 - t_1 \\ m_3 \rightarrow t_3 - t_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 \cdot a \\ T_2 - T_1 = m_2 \cdot a \\ T_3 - T_2 = m_3 \cdot a \end{cases}$$

$$T_3 = \sum m_i \cdot a_i$$

quadrando e sommando

$$\Rightarrow a = \frac{T_3}{\sum m_i} \quad \text{in generale} \quad a = \frac{T_n}{\sum_{i=1}^{n} m_n}$$

b)

$$T_1 = m_1 \cdot a$$

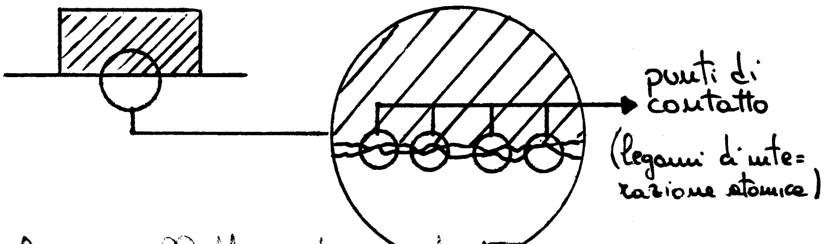
$$T_2 = m_2 \cdot a + T_1$$

11/03/09

Leggi di Attrito (empiriche)

[Leonardo Da Vinci - Coulomb]

1) « la forza d'attrito è indipendente dalla superficie di contatto dei due corpi »



SUPERFICIE DI CONTATTO ≪ SUPERFICIE TOTALE

numero di legami $\approx \vec{P} = -\vec{N}$

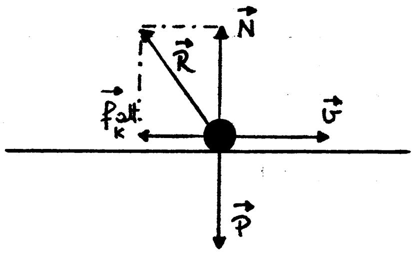
2) « la forza d'attrito è proporzionale alla reazione normale del piano $= \vec{N}$ » (P)

→ il piano effettivo di contatto

$f.\ attrito_{STATICA}$ = (QUANDO IL CORPO È FERMO) $\geq \mu_s \cdot \vec{N}$ → $f_{attrito\ S\text{-}MAX} = \mu_s \cdot \vec{N}$

$f.\ attrito_{DINAMICA}$ = (QUANDO IL CORPO È IN MOTO) $< \mu_k \vec{N}$ = ~~forza esterna applicata (x il moto uniforme)~~

3) « μ_s (COEFFICIENTE D'ATTRITO STATICO) e μ_k (COEFFICIENTE D'ATTRITO DINAMICO), dipendono dalla natura dei corpi a contatto »



$\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}_{k\,att.}$ = reazione vincolare (∦ al piano)

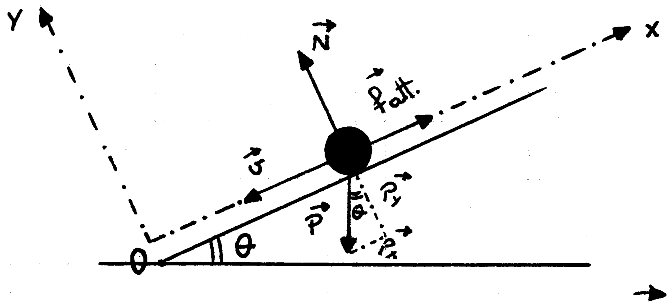
→ forza d'attrito dinamico...

→ normale al piano...

Una prima applicazione della presenza di attrito è...

• PIANO INCLINATO (CON ATTRITO):

Consideriamo un punto materiale su un piano inclinato soggetto alla forza di attrito:



•) CASO STATICO:

• quanto vale μ_s affinché il corpo sia fermo

→ II^a legge di Newton

$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_{att_s} + \vec{N} = m \cdot \underset{\to \vec{0}}{\vec{a}} = \vec{0}$

$$\begin{cases} ox) & -mg \cdot \sin\theta + f_{att_s} = 0 \\ oy) & -mg \cdot \cos\theta + N = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{aligned} f_{att_s} &= m \cdot g \cdot \sin\theta \\ N &= m \cdot g \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

→ $\frac{f_{att_s}}{N} = tg\,\theta$ → $f_{att_s} = N \cdot tg\,\theta_s$ → $\mu_s = tg\,\theta_s$

dividendo membro a membro ottengo: $tg\,\phi = v^2/r\cdot g$

↳ $v^2 = tg\,\phi \cdot r \cdot g = cost.$

Sapendo che il periodo del pendolo è:

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow = 2\pi r \cdot \frac{1}{\sqrt{tg\,\phi \cdot r \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^{\cancel{2}}}{tg\,\phi\, \cancel{r} \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cdot \cancel{sen\,\phi}}{g \cdot \frac{\cancel{sen\,\phi}}{cos\,\phi}}}$$

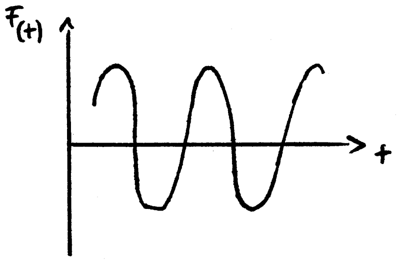
$$= 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos\phi}{g}} = \boxed{\tau_{semplice} \cdot \sqrt{\cos\phi}}$$

NB: τ è indipendente:
- masse...

• FORZE VARIABILI:

NB: fin'ora abbiamo parlato di forze costanti:

1) ONDE SONORE...



$$\boxed{\vec F_{(t)} = m \cdot \vec a_{(t)}} \quad (II^{\circ}\ \ell N)$$

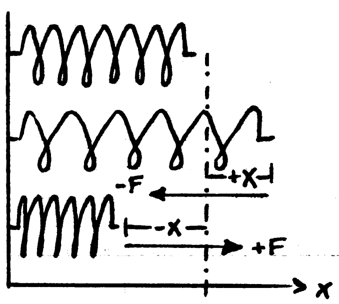
$$a_{(t)} = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^t a_{(t)}\, dt = \int_{v_0}^{v} dv$$

↳ $v = v_0 + A(t)$

$$v_{(t)} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_0^t v_0\, dt + \int_0^t At\, dt = \int_{x_0}^{x} dx$$

↳ $x = x_0 + v_0(t) + \int_0^t A(t)\, dt$

2) OSCILLATORE ARMONICO...



(a riposo)

(estesa)

(compresse)

$F_{elastica} = -Kx$ (legge di Hook)

moto unidimensionale...

$$\boxed{\vec F_{(x)} = m \cdot \vec a_{(x)}} \quad (II^{\circ}\ \ell N)$$

$$a_{(x)} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Kx}{m} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{Kx}{m} = 0$$

EQ DIFF. OMOG.

3) ATTRITO VISCOSO...

NB: x comodità $v_0 = 0$

$$\boxed{\vec F_{(v)} = m \cdot \vec a_{(v)}} \quad (II^{\circ}\ \ell N)$$

$$a_{(v)} = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{a_{(v)}}$$

↳ t è funzione della viscosità

f. attrito viscoso: $\vec F_{(v)} = \vec D$ ↳ resistenza opposta dal mezzo al moto relativo del corpo

coeff. di resist
densità
area effic.

$$\underbrace{\vec D = \frac{1}{2} c\, \delta A \cdot (\vec v)}_{= -\beta \vec v}$$

• ACCELERAZIONE: $a_{(t)} = g e^{-\frac{b}{m}t}$

$$a = \cancel{\frac{dv}{dt}} = \frac{mg - \beta v}{m} = \frac{mg - \cancel{\beta}\left(\frac{mg}{\cancel{\beta}}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)\right)}{m} = \frac{\cancel{mg} - \cancel{mg} + \cancel{m}g e^{-\frac{bt}{m}}}{\cancel{m}}$$

$$= g e^{-\frac{bt}{m}} \qquad \text{c.v.d}$$

• $t \to 0 \quad |\vec{a}| = \vec{g}$

• $t \to \infty \quad |\vec{a}| = 0$

-> legge Oraria...

(si ricordi che la caduta libera di un corpo è un moto unidimens.)

$$\int_0^y dy_{(t)} = \int_0^t v_{(t)}\, dt \qquad Y_{(t)} = \frac{mg}{b}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) dt = \frac{mg}{b}\left[t - \int_0^t e^{-\frac{bt}{m}}\, dt\right] =$$

• SPOSTAMENTO:

$$= \frac{mg}{b}\left[t - \int e^{-\frac{b}{m}t} \cdot \left(-\frac{b}{m}\right) dt \cdot \frac{m}{b}\right] =$$

$$= \frac{mg}{b}\left[t + \frac{m}{b} \cdot e^{-\frac{b}{m}t}\Big|_0^t\right] =$$

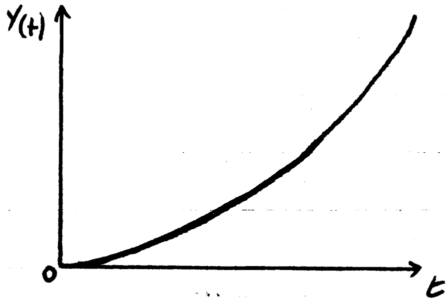
$$= \frac{mg}{b}\left[t + \frac{m}{b} e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{m}{b}\right]$$

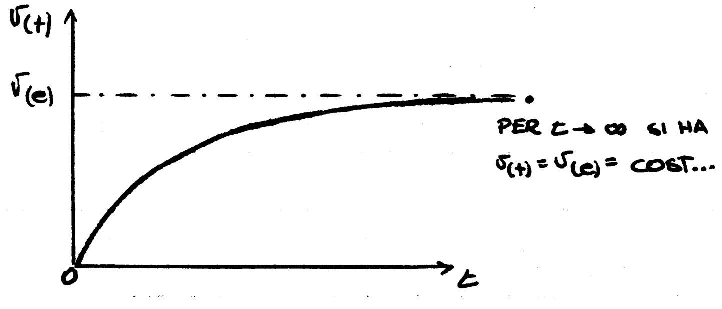
• $t \to 0$

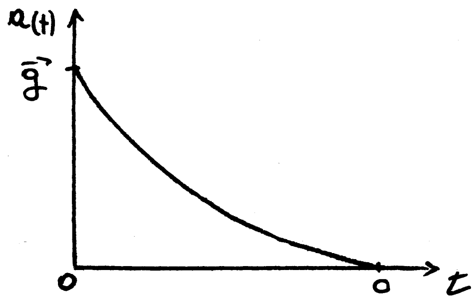
$$y(t) = \frac{mg}{b}\cancel{\left(\frac{m}{b} - \frac{m}{b}\right)}^{0} = 0$$

• $t \to \infty$

$$Y(t) = +\infty$$







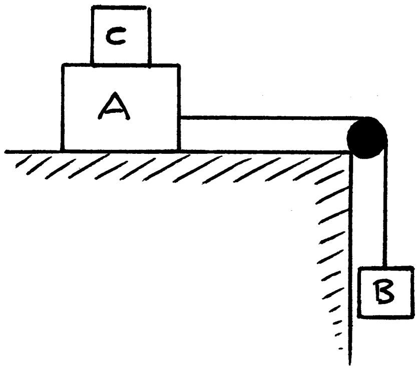
17/03/09

PROBLEMA 1: I blocchi "A" e "B" di massa $m_A = 4{,}4\ Kg$ e $m_B = 2{,}6\ Kg$; con coefficienti d'attrito $\mu_s = 0{,}18$ e $\mu_d = 0{,}15$ sono legati tra loro da una corda in tensione

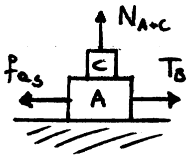
a) Calcolare la massa del blocco "C" che impedisce al blocco "A" di scivolare

b) Calcolare l'accelerazione di "A" quando viene tolto il blocco "C"

a)



siccome non c'è moto verticale, consideriamo solo le forze orizzontali



quando i blocchi sono fermi si ha: $\vec{f}_{as} = \vec{T}_B$

$$\underbrace{f_{as_{MAX}} = \mu_s \cdot N_{A+C} \qquad T_B = m_B \cdot g}$$

$$\mu_s \cdot N_{A+C} = m_B \cdot g$$

$$\mu_s \cdot (m_A + m_C)\cancel{g} = m_B \cdot \cancel{g}$$

$$\Rightarrow m_C = \left(\frac{m_B}{\mu_s} - m_A\right) = 10\ Kg$$

b)

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_a = T - f_{ad} = m_A \cdot a \\ \sum \vec{F}_b = T - m_B \cdot g = -m_B \cdot a \end{cases}$$

negativa xké orientata verso il basso.....

$$T = f_{ad} + m_A \cdot a$$

$$f_{ad} + m_A \cdot a - m_B \cdot g = m_B \cdot a \ **$$

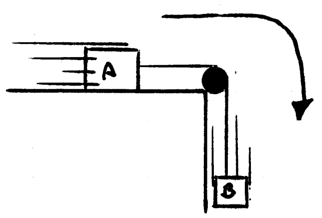
**

$$\mu_d \cdot m_A \cdot g + m_A \cdot a - m_B \cdot g = -m_B \cdot a$$

$$\mu_d \cdot m_A \cdot g + m_A \cdot a - m_B \cdot g + m_B \cdot a = 0$$

$$a(m_A + m_B) = g(m_B - m_A \cdot \mu_d)$$

$$\Rightarrow a = \frac{g(m_B - m_A \cdot \mu_d)}{(m_A + m_B)} = 2{,}72\ m/s^2$$



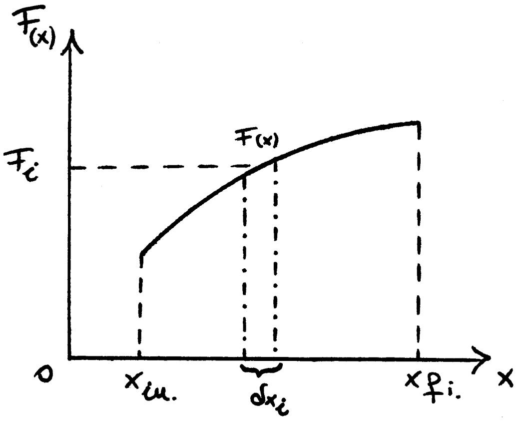
A e B hanno la stessa accelerazione ...

b)

PAGINA 54-55

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 180

• LAVORO PER FORZE VARIABILI



$F_{(x)} \parallel ox$ (approccio infinitesim.)

$$\delta x_i = \frac{x_{finale} - x_{iniziale}}{N}$$

δL_i = lavoro fatto dalla forza F_i (quasi costante quando consideriamo x_i-x_f divisa in infiniti δx_i) nell intervallo δx_i

$\Rightarrow F_i \cdot \delta x_i$

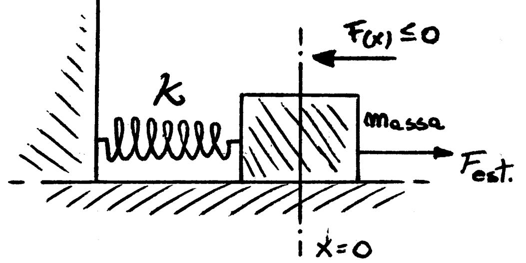
se voglio il lavoro totale devo sommare tutti i δx_i; quindi

$$L_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta x_i$$

quando $N \to \infty$; si ha $\delta x_i = \delta_x$; e quindi $\Sigma \to \int$ cioè...

$$L_{TOT} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta x_i = \int_{x_i}^{x_f} F_{(x)} \cdot \delta x$$ (L'AREA CONTENUTA SOTTO L'INTEGRALE)

Ex. forza elastica: "forza che nasce quando una molla viene spostata dalla sua posizione di equilibrio"



da Hook $\to F_{(x)} = -Kx$ { negativa xkè tende a riportare la molla alla posizione iniziale (si oppone alle tensione)

$\to K = -\frac{F(x)}{x}$ COSTANTE ELASTICA...

$$L_{F_S} = \int_{x_i}^{x_f} (-Kx)\,dx = -K\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_i}^{x_f} = \frac{K}{2}(x_i^2 - x_f^2)$$

$\to L_{F_s} > 0$ quando $x_i > x_f$

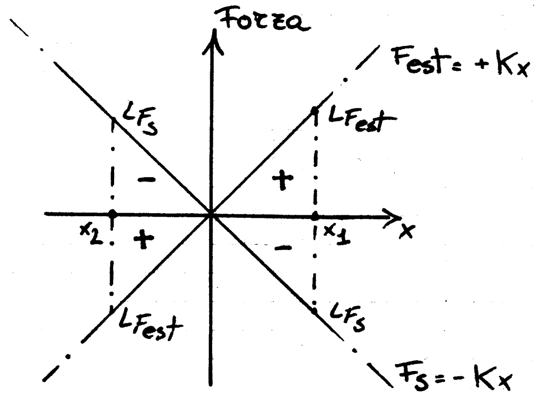
$\to L_{F_s} < 0$ quando $x_i < x_f$

quando $F_{est} + F_s = 0 \to$ equilibrio

$\to \vec{a} = \vec{0}$

v = costante (moto uniforme)

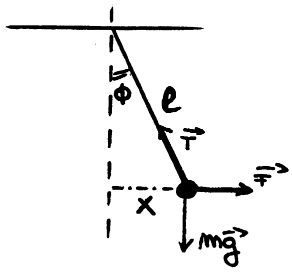
$$\boxed{F_{est} = -F_s = +Kx}$$



$$L_{TOT} = \int_0^x R\,dx = 0$$

$\to R = F_{est} - F_s = 0$

Ex: Lavoro nel Pendolo Semplice...



II°N:

ox) $\vec{F} - \vec{T}\operatorname{sen}\phi = 0$

oy) $-m\vec{g} + \vec{T}\cos\phi = 0$

$\vec{F} = T\operatorname{sen}\phi = \frac{mg}{\cos\phi}\cdot\operatorname{sen}\phi = mg\,tg\phi$

$\Rightarrow L_{TOT} = L_{\vec{F}}^{\text{I}} + L_{m\vec{g}}^{\text{II}} + L_{\vec{T}}^{\text{III}}$

(I) $L_{\vec{F}} = \int F\,dx = mg\int tg\phi\,dx$ $\qquad x = l\cdot\operatorname{sen}\phi$

$dx = l\cos\phi\,d\phi$

$= mg\int\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cancel{\cos\phi}}\cdot l\cdot\cancel{\cos\phi}\,d\phi =$

$= mgl(-\cos\phi)\Big|_0^{\phi_{MAX}} = mgl(1-\cos\phi)$

$l - l\cos\phi = h$

$\Rightarrow L_F = mgh$

(II) $L_{m\vec{g}} = \int_0^h -mg\,dy = -\int_0^h mg\,dy = -mg\int_0^h dy$

$\Rightarrow L_{m\vec{g}} = -mgh$

(III) $L_{\vec{T}} = \int\vec{T}\,ds = 0$ $\quad (T \perp ds \rightarrow L = 0)$

$\Rightarrow L_{TOT} = 0$

$$= m \cdot g \cdot \ell \int_0^{\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta = m \cdot g \cdot \ell \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\theta_{max}} = m \cdot g \cdot \ell \left(1 - \cos\theta\right) = m \cdot g \cdot h$$

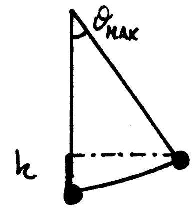
= ricordando che $h = \ell - \ell \cdot \cos\theta$ (con h = altezza massima del pendolo...) =

$\Rightarrow \mathcal{L}_{\vec{F}} = m \cdot \vec{g} \cdot h$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{m\vec{g}} = \int_0^h -m\vec{g}\, dy = \int m\vec{g} \cdot \delta s = -m \cdot \vec{g} \cdot h$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{\vec{T}} = \int \vec{T} \cdot d\vec{s} = \left(\text{essendo } \vec{T} \perp \delta\vec{s}\right) = \vec{0}$

$\hookrightarrow \cos 90° = 0$ $\qquad \Rightarrow \sum L_i = 0$



- **Teorema del lavoro - energia cinetica**

« QUALUNQUE SIA LA FORZA CHE AGISCE NELLO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO MATERIALE DALLA POSIZIONE **A** ALLA POSIZIONE **B**, IL LAVORO FATTO DALLA FORZA È UGUALE ALLA "VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA" DEL PUNTO MATERIALE STESSO »

•) CON $\vec{R}$ COSTANTE: $\vec{a}$ = costante (MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO)

$\vec{R}$ → RISULTANTE DELLE FORZE...

$$\mathcal{L}_{TOT} = \int_{x_A}^{x_B} R\, dx = \int_{x_A}^{x_B} m \cdot a\, dx = m \cdot a \int_{x_A}^{x_B} dx = m \cdot a\,(x_B - x_A) =$$

= conoscendo le condizioni iniziali $\left(v_B^2 = v_A^2 + 2a\,(x_B - x_A)\right)$ =

$$= m \cdot \frac{v_B^2}{2} - m \cdot \frac{v_A^2}{2} = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$$

$\hookrightarrow$ VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA

•) CON $\vec{R}$ VARIABILE: $\vec{F}_{(x)} \parallel \overline{Ox}$; $\vec{F}_{(x)} \parallel \delta x$

$$\mathcal{L}_{TOT} = \int_{x_A}^{x_B} R\, dx = \int_{x_A}^{x_B} m \cdot a_x\, dx = \int m \cdot \frac{dv}{\delta t} \cdot dx =$$

$\frac{dx}{dv}$ = velocità

$$= m \cdot \int_{x_A}^{x_B} v \cdot dv = m\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right) = \Delta E_K$$

$\hookrightarrow$ VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA

E_K: $E_K = \frac{1}{2} m v^2$ (ENERGIA CINETICA)

$[E_K]$ (oppure K) $= M(L \cdot T^{-1})^2 = ML^2 \cdot T^{-2}$

$[L] = [F] \cdot [\Delta s] = MLT^{-2} \cdot L = ML^2 \cdot T^{-2}$

sono uguali... (Joule)

23/03/09

Le leggi di Newton sono invarianti in tutti i sistemi inerziali, cioè mantiene le stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

Teorema del lavoro (en. cinetica...)

$L \neq L' \rightarrow K \neq K'$

$L = \Delta K$

$L' = \Delta K'$

(anche se i diversi osservatori misurano in modo diverso, tutti affermano che: $L^i = \Delta K^i$)

POTENZA MECCANICA: corrisponde al lavoro per l'unità di tempo...

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

"RAPIDITÀ CON LA QUALE VIENE SVILUPPATA UNA CERTA QUANTITÀ DI LAVORO"

... POTENZA MEDIA ...

- lavoro totale diviso per il tempo durante il quale esso è stato svolto......

se $\Delta t \rightarrow 0$ si avrà $\mathcal{P}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dL}{dt}$

$$[P] = \frac{[L]}{[T]} = ML^2T^{-3} = [\text{Watt}]$$

$$1 \text{ watt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ secondo}} \rightarrow 1 \text{ joule} = 1\,w \cdot 1\,s$$

siccome è una quantità molto piccola si usa il

$$\underbrace{Kw \cdot h = 1000\,w \cdot 3600\,s}$$

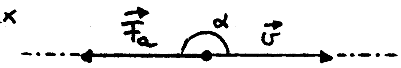
LAVORO, NON POTENZA!!!

$$\mathcal{P} = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot ds}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$\vec{F}$ → FORZA ...

$\vec{v}$ → VELOCITÀ ...

EX

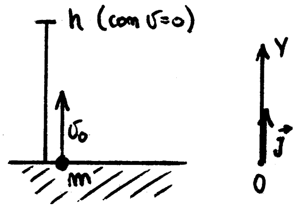


se $F_{attrito}$ = antiparallelo a $\vec{v}$ ⇒ $\cos\alpha = -1$

$\vec{F}_{att} = -\vec{v}$ → $\alpha = 180°$

Esempio di applicazione del teorema del lavoro - energia cinetica:

Consideriamo un corpo di massa "m" lanciato in aria e lasciato cadere...



$$F_g = -m \cdot g \cdot \vec{j} \rightarrow L = \int F_g \, dy = -mg \int dy$$

- IN SALITA: $L_{SALITA} = -mg \int_0^h dy = -mgh$

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

→ LA VELOCITÀ SI ANNULLA ISTANTANEAMENTE...

applico il Teo: $L = \Delta K$

$$\hookrightarrow -\cancel{m}gh = -\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$$

$$\hookrightarrow h = v_0^2/2g$$

UN CORPO LANCIATO IN ARIA RAGGIUNGE UN ALTEZZA INDIP. DALLA MASSA E DIPEN. DALLA VELOCITÀ ...

Energia Potenziale

{ A DIFFERENZA DI ΔK, SI DEFINISCE UNA FUNZIONE DI LAVORO (DIPENDE DALLA CONFIGURAZIONE DEL SISTEMA CONSIDERATO }

→ x una certa configurazione del sistema i corpi hanno una determinata en. potenziale ...

$U \rightarrow \boxed{\Delta U = -L_{\text{FORZE CONSERVATIVE}}}$ *

Definizione → ENERGIA ASSOCIATA ALLA CONFIGURAZIONE DI UN SISTEMA DI CORPI...

Se sotto l'azione di forze conservative la configurazione di un sistema varia ...

*LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE = − LAVORO SVOLTO DALLE FORZE CONSERVATIVE

Ex forza elastica: $F_{(x)} = -Kx$

$$\Delta U_s = -\int(-Kx)\,dx = +\frac{1}{2}Kx^2$$

se la molla si è spostata dalla posizione x_0 alla posizione x generica...

$$\Delta U_s = -\int_{x_0}^{x}(-Kx)\,dx = \frac{1}{2}Kx^2\Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}K(x^2-x_0^2) = U_f - U_i =$$

$$= U_x - U_{x_0} = \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}Kx_0^2$$

in generale l'U della forza elastica è:

$$U_{(x)} = \frac{1}{2}Kx^2$$

→ TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

$$L = \Delta K = -\Delta U \ \text{(FATTO SOLO DA F. CONSERVATRICI)} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow \boxed{\underbrace{\Delta(K+U)}_{\text{energia meccanica totale...}} = \Delta E = 0}$$

1) SOLO FORZE CONSERVATIVE: $F_1; F_2; \dots; F_m$ $(\Delta E = 0)$ $E = K + U$

$$\Rightarrow L_{TOT} = L_1 + L_2 + \dots + L_m = -\Delta U_1 - \Delta U_2 - \dots - \Delta_m = -\Delta(U_1 + U_2 + \dots + U_m) = +\Delta K$$

$$\Rightarrow \Delta K + \Delta U = \Delta(K+U) = \Delta E \rightarrow E = \text{costante}$$

2) CON FORZE NON CONSERVATRICI: $\underbrace{F_{nc}}_{\text{F. non conservat.}}; \underbrace{F_1; F_2; \dots; F_{m-1}}_{\text{F. conservat.}}$ $(\Delta E = L F_{n.c.})$

$$\Rightarrow L_{TOT} = L_1 + L_2 + \dots + L_{m-1} + L_{nc} = -\Delta U_1 - \dots - \Delta U_{m-1} + L_{nc} = -\Delta U + L_{nc} = \Delta K$$

$$\Rightarrow \Delta K + \Delta U = \Delta E + L_{nc}$$ l'unico modo per variare l'energia tot meccanica è applicare $F_{n.c.}$

24/03/09

PROBLEMA 1: Una particella di massa "m" è soggetta ad una forza $\vec{F}_{(t)} = F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \vec{i}$ e passa per l'origine $x=0$ con velocità $v_0 \cdot \vec{i}$.
Si calcoli $x_{(t)}$ e $v_{(t)}$ in funzione di $a_0 = \frac{F_0}{m}$ e $t = T$

$$a_{(t)} = \frac{F_{(t)}}{m} \rightarrow dv = a_{(t)}\, dt \rightarrow \int dv = \int a_{(t)}\, dt$$ (VEDI FORZE VARIABILI)

CONDIZIONI INIZIALI... $t=0$; $x=0$; $v=v_0$

$$v_{(t)} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_{(t)}\, dt \rightarrow a_{(t)} = \frac{F_{(t)}}{m} = \frac{F_0}{m}\left(1-\frac{t}{T}\right) = a_0\left(1-\frac{t}{T}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0\left(1-\frac{t}{T}\right) dt \rightarrow v - v_0 = a_0 \int_{t_0}^{t}\left(1-\frac{t}{T}\right) dt \rightarrow$$

$$\rightarrow v - v_0 = a_0 \left(t - \frac{t^2}{2T}\right)_{t_0=0}^{t} \rightarrow v = v_0 + a_0 t - \frac{t^2}{2T} a_0$$

SICCOME MI CHIEDE LA VELOCITÀ A $t=T$ $\rightarrow v = v_0 + a_0 T - \frac{T}{2} a_0$

$$\boxed{v = v_0 + \frac{1}{2} a_0 T}$$

$$x_{(t)} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_{(t)}\, dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 a_0\left(t - \frac{t^2}{2T}\right) dt \rightarrow x = x_0 + a_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right) + v_0 t$$

SICCOME MI CHIEDE LA POSIZIONE A $t=T$ $\rightarrow x = x_0 + a_0\left(\frac{T^2}{3}\right) + v_0 T$

Confrontando i 2 risultati con il moto uniformemente accelerato:

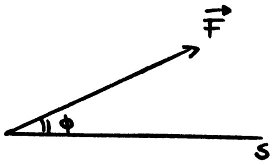
$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = \frac{a_0}{3} \Rightarrow a = \frac{2a_0}{3}$$

$$a = a'_m \cdot 2 \quad \text{con } a'_m = \frac{a_0}{3}$$

FORZA, GRADIENTE, EN. POTENZIALE...



$L = -\Delta U$

$L = \vec{F}\cdot\vec{s} = \vec{F_x}\cdot\vec{s}$

↳ $dL = \vec{F_x}\cdot ds$

$\Rightarrow \vec{F_x} = \frac{-\Delta U}{ds}$ DERIVATA DIREZIONALE

$\Rightarrow \vec{\nabla} U = \frac{dU}{dx}\cdot\vec{i} + \frac{dU}{dy}\cdot\vec{j} + \frac{dU}{dz}\cdot\vec{k}$ GRADIENTE

↳ $\vec{F} = -\vec{\nabla} U_{(x,y,z)}$

-> ALTRO METODO PER FORZE CONSERVATIVE

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \longrightarrow \begin{cases} F_x = \frac{-dU}{dx} \to \frac{d}{dy} & \frac{F_x}{dy} = -\frac{d^2U}{dy\,dx} \\ F_y = -\frac{dU}{dy} \to \frac{d}{dx} & \frac{F_y}{dx} = -\frac{d^2U}{dx\,dy} \end{cases}$

(SOLO SE CONSERV.)

ma x schwartz si ha: $\frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{d^2U}{dy\,dx}$

$\Rightarrow \frac{F_x}{dy} = \frac{F_y}{dy}$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & d/dx & F_x \\ j & d/dy & F_y \\ k & d/dz & F_z \end{vmatrix}}_{\text{ROTORE DI } \vec{F}} = 0$

↳ F conserv.

25/03/09

PROPRIETÀ DELLA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

E = costante

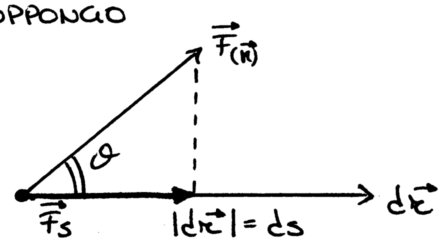
consideriamo $x_0 \rightarrow v_0$
$x \rightarrow v$

$$\underbrace{E = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_{x_0} = \frac{1}{2} m v^2 + U_x = \text{costante}}_{\text{INTEGRALE PRIMO DEL MOTO}}$$

(l'energia si conserva in ogni punto del moto)

PERMETTE DI TROVARE LA LEGGE DEL MOTO:
1) <u>CON IL METODO DINAMICO</u>
(utilizzando la 2° legge Newton)
$\underline{\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}}$ → ABBIAMO 3 EQ. SCALARI
2) <u>CON IL METODO ENERGETICO</u>
(utilizzando le leggi di conser. energia mecc)
$\underline{E = \text{costante}}$ → ABBIAMO 1 EQ. VETTORIALE

SUPPONGO



→ SE LA FORZA E' VARIABILE:

$$L = \int \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{r}$$

$$dL = \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{(\vec{r})} \cdot ds \cdot \cos\vartheta$$

$$dL = \vec{F}_{(s)} \cdot ds = -dU \quad \left(\text{VARIAZIONI INFINITESIME}\right)$$

quindi: $F_s = -\dfrac{dU}{ds}$ DERIVATA DIREZIONALE

→ componente della forza sulla direzione ds

se lo spostamento avviene sull'asse x:

$F_x = -\dfrac{dU}{dx}$; oppure sull'asse y o z $F_y = -\dfrac{dU}{dy}$; $F_z = -\dfrac{dU}{dz}$

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d}{dz} \cdot \vec{k} \quad \text{applicato a } U$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{dU}{dx} \vec{i} + \frac{dU}{dy} \vec{j} + \frac{dU}{dz} \vec{k} =$$
$$= -F_x \vec{i} - F_y \vec{j} - F_z \vec{k} = -\vec{F}$$

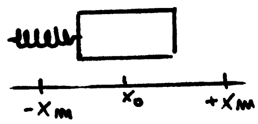
quindi si ottiene:

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = -\vec{\nabla} U_{(x,y,z)}$$

RELAZIONE TRA FORZA ED ENERGIA VETTORIALE
(utilizzando il formalismo dell'op. vettoriale ∇)

ENERGIA MECCANICA... esempi:

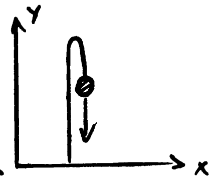
1) Forza Elastica



$$\Delta E = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2}_{\text{PUNTO GENERICO}} = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m v^2} + \frac{1}{2} k x_m^2}_{\hookrightarrow v=0 \quad x = x_m} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k x_m^2 - \cancel{\frac{1}{2}} k x^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x)}$$

2) Forza Peso......

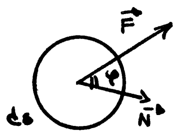


$$\Delta E = \underbrace{mg(y) + \frac{1}{2} m v^2}_{\text{PUNTO GENERICO}} = \underbrace{\cancel{mg(0)} + \frac{1}{2} m v_0^2}_{\hookrightarrow y=0 \quad \text{PTO DI PARTENZA}}$$

$$= \cancel{m} g y + \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2g(y)$$

FLUSSO:

RICORDA: $\vec{N} \perp ds \quad |\vec{N}| = 1$



flusso infinitesimo: $d\phi = \vec{F} \cdot \vec{N} \cdot ds$

$= \vec{F} \cdot \vec{ds}$

$= F \cdot ds \cdot \cos\varphi$

- TEOREMA DI STOKES...

$$\iint_S rot_F \cdot \vec{n} \cdot ds = \oint_L \vec{F} \cdot d\ell$$

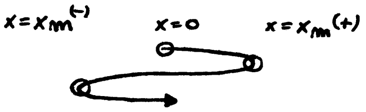
$\rightarrow$ integrale su una linea chiusa (L) (CIRCUITAZIONE)

1) Considero il moto in $x = x_m$ e $v = 0$ (SENZA ATTRITO $\Rightarrow$ E SI CONSERVA)

$$E = U_{(x_m)} + \cancel{K_{(v)}}^{\,0} = K\frac{x_m^2}{2}$$

2) Considero il moto in un punto generico x a $v \neq 0$

$$E = K\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow \frac{Kx_m^2}{\cancel{2}} = \frac{Kx^2}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{2}}mv^2 \rightarrow$$



$$\rightarrow v^2 = \frac{K}{m}(x_m^2 - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{K}{m}(x_m^2 - x^2)}$$

Se: $X = X_m \rightarrow v = 0 \Rightarrow K = 0$ quindi <u>U = massima</u>

$$X = 0_{(EQUIL)} \rightarrow \underbrace{v = \sqrt{\frac{K}{m}\cdot x_m}}_{\text{VALORE MAX DI VELOCITÀ}} \Rightarrow \underline{K = \text{massima}} \text{ quindi } U = 0$$

$$v_{max} \Rightarrow x_m \rightarrow v_{max}^2 = x_m^2 \cdot \frac{K}{m}$$

$$\Rightarrow x_m^2 = \frac{m}{K}v_{max}^2$$

$$E = \frac{K}{2}x_m^2 = \frac{K}{2}\frac{m}{K}v_{max}^2 = \underline{\frac{1}{2}mv_{max}^2}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{K}{m}(x_m^2 - x^2)}$$

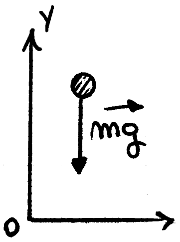
$$x_m^2 = \frac{m}{K}v_{max}^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

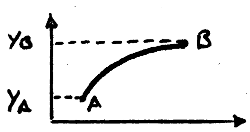
ESEMPIO 2: ENERGIA MECCANICA: FORZA PESO...

E = costante $\longrightarrow$ f. peso $F_{(y)} = -m \cdot g$

forze conservative



$$L_{mg} = \int(-m \cdot g \cdot \vec{j}) \cdot (d\vec{r}) = \int(-mg\vec{j})(dx\vec{i} + dy\vec{j}) =$$



$$= \int_{y_A}^{y_B} mg\,dy = \underbrace{mgy_A - mgy_B}$$

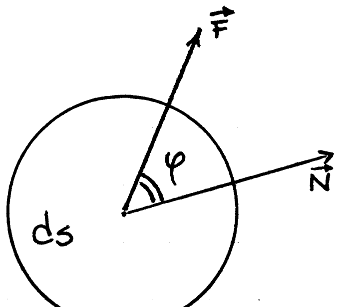
il lavoro dipende solo dal punto finale e iniziale $\Rightarrow$ f è conservativa

$$L_{mg} = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B \quad \text{quindi...}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} U_A = mg\,y_A \\ U_B = mg\,y_B \end{array}\right\} U_y = mg_y$$

definiamo adesso il ...

FLUSSO DI UNA FORZA ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE ...



ds infinitesima definita dal versore normale $\vec{N} \perp ds$ e $|\vec{N}| = 1$

si definisce flusso "infinitesimale"

$$d\phi = \vec{F} \cdot \vec{N} \cdot ds =$$

$$= \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{superficie diventata vettore....} =$$

$$= F \cdot \cos\varphi \cdot ds$$

$$\phi_{\vec{F},s} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \cdot ds$$

→ **TEOREMA DI STOKES:**

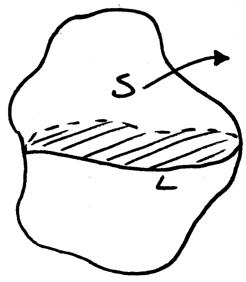
$$\underbrace{\iint_S}_{\text{ATTRAVERSO LA SUPERFICIE } S} \underbrace{\mathrm{rot}_{\vec{F}} \cdot \vec{m} \cdot ds}_{\text{Flusso di } \mathrm{rot}_{\vec{F}}} = \oint_L \vec{F} \cdot d\ell$$

INTEGRALE SU UNA LINEA CHIUSA L

$d\ell$ → parte infinitesimale di superficie ...

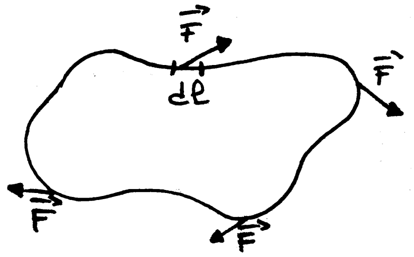
→ CIRCUITAZIONE

$$\text{LAVORO TOTALE} = \oint_L \vec{F} \cdot d\ell$$



→ SUPERFICIE APERTA

ciascuna delle parti poggia sulle linea chiusa L



$$d\ell = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

importante perché racchiude i 2 criteri per le forze conservative

NB: se la forza è conservativa

1) $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \iint_S \mathrm{rot}_{\vec{F}} \cdot \vec{N} \cdot ds = 0 \iff \mathrm{rot}\, \vec{F} = 0$

2) $\mathrm{rot}\, \vec{F} = 0 \rightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \text{LAVORO}_{TOT}$

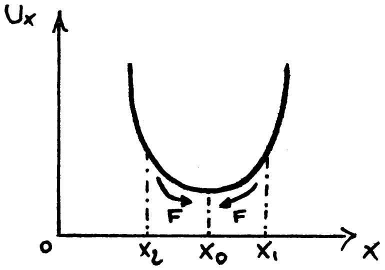
↳ su L chiusa

→ EQUILIBRIO MECCANICO

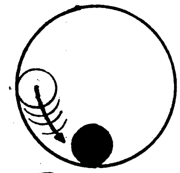
• TRASLAZIONE: il corpo trasla, cioè tutti i punti del corpo si muovono con la stessa velocità...

$\Rightarrow \sum \vec{F} = 0$ quindi $\vec{a} = \vec{0}$ (v = costante)

1) EQUILIBRIO STABILE



$F_{(x_0)} = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$ equilibrio



– EQUILIBRIO –

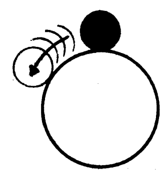
in x_1: $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0 \to x_1} > 0 \Rightarrow F_{(x)\,x_0 \to x_1} < 0$ $\overleftarrow{F}$

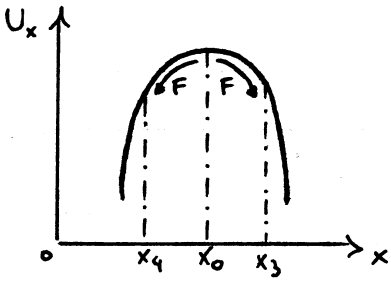
in x_2: $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0 \to x_2} < 0 \Rightarrow F_{(x)\,x_0 \to x_2} > 0$ $\overrightarrow{F}$

la forza tende a far ritornare il corpo in equilibrio

2) EQUILIBRIO INSTABILE

– EQUILIBRIO –





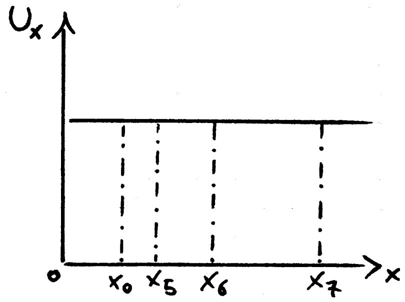
$F_{(x_0)} = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$ equilibrio

in x_3: $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0 \to x_3} < 0 \Rightarrow F_{(x)\,x_0 \to x_3} > 0$ $\overrightarrow{F}$

in x_4: $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0 \to x_4} > 0 \Rightarrow F_{(x)\,x_0 \to x_4} < 0$ $\overleftarrow{F}$

la forza tende ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio

3) EQUILIBRIO INDIFFERENTE



$F_{(x_0)} = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} =$ equilibrio

– EQUILIBRIO –

in qualunque posizione ($x_5 = x_6 = x_7$) il sistema è in equilibrio

31/03/09

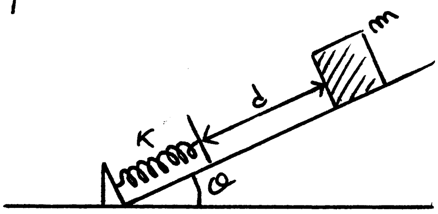
PROBLEMA 1: Una molla ideale, priva di massa, sottoposta ad una forza di 268 N, si comprime di 2,33 cm, un blocco di $m = 3{,}18\,Kg$ viene lanciato da fermo dall'alto di un piano inclinato di $\theta = 32°$, il blocco si ferma totalmente dopo aver compresso la molla di 5,48 cm

PAG 140 (12.03)

a) Quanto ha percorso il blocco fino a questo istante?

b) Qual è la velocità del blocco un'istante prima di toccare la molla?

a)

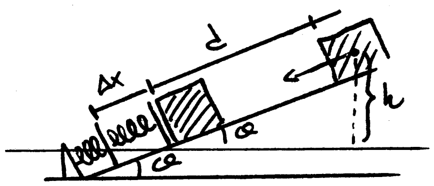


determiniamo innanzitutto la costante elastica della molla

$$F_{(x)} = -K(x - x_0) \rightarrow K = \frac{F(x)}{(x - x_0)} = \frac{268}{2{,}33 \cdot 10^{-2}\,m} = 11502\,\frac{N}{m}$$

x ↓ posizione molla compressa; x_0 ↓ posizione molla a riposo → $x_0 = 0$

Il sistema è conservativo, quindi possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica... (non c'è attrito $E = \Delta K + \Delta U$)



$U = 0$ (pto di max compressione) ← Energia Potenziale gravitazionale del blocco....

$$E_{iniziale} = E_{finale} \Rightarrow U_i + \cancel{K_i} = \cancel{U_f} + K_f \Rightarrow \operatorname{sen}\theta\, m \cdot g \cdot (\Delta x + d) = \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

K_i =0 xké $v=0$

U_f =0 xké stabilito

NB: CONSIDERIAMO LA COMPONENTE DELLA FORZA

spostamento Totale...

$\operatorname{sen}\theta\, m \cdot g \cdot (\Delta x + d)$ ↓ energia potenziale della massa

$\frac{1}{2} K \Delta x^2$ ↓ energia cinetica della molla

quindi: $\Delta x + d = \dfrac{1}{2}\dfrac{K\Delta x}{mg \sin\theta} = 1{,}04\,m$

Se $F_{cp} > mg \rightarrow$ il pendolo fa il giro completo

$F_{cp} < mg \rightarrow$ il pendolo cade su se stesso per raggiungere la posizione di equilibrio

Tensione del filo

$$F_{cp} = a_{cp} \cdot m = \underbrace{\frac{v^2}{r} \cdot m}_{F_{cp}} \rightarrow = \underbrace{T + mg}_{F_{cp}}$$

$$\Rightarrow T + mg > mg$$

$$\frac{\cancel{m} v^2}{\underset{\hookrightarrow r}{(L-d)}} = [redacted] > \cancel{m} g$$

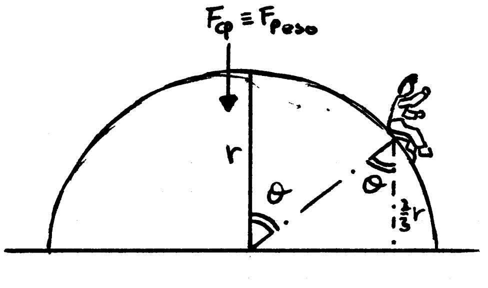
$$\Rightarrow v^2 > g(L-d)$$

$$v^2 = 2g(2d-L)$$

$$\Rightarrow 2\cancel{g}(2d-L) > \cancel{g}(L-d)$$

$$4d - 2L > L - d \rightarrow d = \frac{3}{5}L$$

PROBLEMA 3: Un ragazzo è seduto sulla cima di un blocco di ghiaccio semisferico.
Riceve una leggera spinta e comincia a scivolare giù.
Dimostrare che, se il ghiaccio è privo di attrito, egli si staccherà dal ghiaccio in un punto ad $h = \frac{2}{3}R$ dal suolo (la forza normale scompare al distacco)



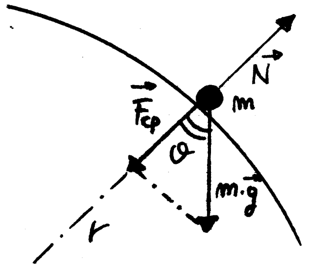
Calcolando il moto del ragazzo prima del distacco

$\Rightarrow$ ~~moto uniformemente acc.~~

- moto circolare accellerato

FORZE AGENTI $\rightarrow$ Forza peso

reazione del piano (sempre diretta verso l'esterno (radiale))



$\rightarrow$ 2 legge della dinamica

$$\Sigma F = m \cdot a_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} = \underbrace{m \cdot g \cdot \cos\theta - N}_{F_{cp}}$$

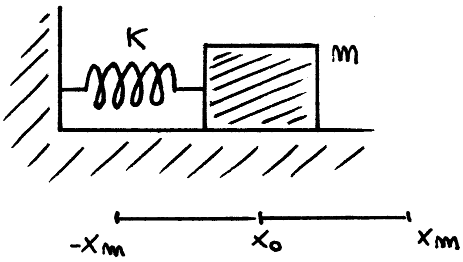
01/04/09

Oscillazioni

In natura esistono molti tipi di oscillazioni, per esempio di tipo meccanico; in un reticolo cristallino; di tipo elettromagnetico e altro...

• **MOTO ARMONICO SEMPLICE:**

Un punto esegue un moto armonico semplice quando la legge oraria è definita dalla relazione:



$$x_{(t)} = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

dove x_m; ω; ϕ sono costanti...

ϕ = FASE INIZIALE
ω = PULSAZIONE
$\Big\}$ $\omega t + \phi$ = FASE DEL MOTO

x_m = AMPIEZZA DEL MOTO

utilizzando il metodo dinamico troviamo le altre leggi del moto:

$$\sum \vec{F} = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -K x_{(t)}$$

→ prende il nome di forza di richiamo

Considerando $x_{(t)} = x_m \cos(\omega t + \phi)$ e derivando una prima e una seconda volta otteniamo:

$$\frac{dx}{dt} = v_{(t)} = -\sin(\omega t + \phi)\omega x_m$$ VELOCITÀ NEL MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{(t)} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$ ACCELERAZIONE NEL MOTO ARMONICO S.

e quindi possiamo considerare:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \underbrace{x_m \cos(\omega t + \phi)}_{x_{(t)}} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_{(t)}$$

$\Big\{$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELL'OSCILLATORE ARMONICO

Considerando:

$$\cos^2\phi = x_0^2 / x_m^2 \qquad \rightarrow \qquad x_m^2 \cos^2\phi = x_0^2$$

$$\sin^2\phi = v_0^2 / \omega^2 x_m^2 \qquad \rightarrow \qquad x_m^2 \sin^2\phi = v_0^2/\omega^2$$

sommando m. a. m. $\rightarrow$

$$\rightarrow x_m^2 \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} = x_0^2 + v_0^2/\omega^2$$

$$\rightarrow x_m = \pm\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

AMPIEZZA DELL'OSCILLAZIONE dipende da (ω, x_0, v_0)

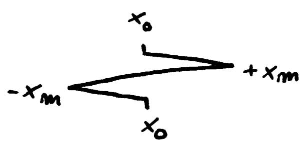
- SIGNIFICATO FISICO DELLA PULSAZIONE:

aumentiamo il tempo $t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = x_m \cdot \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right] = \cos(\omega t + 2\pi + \phi)\, x_m =$$

$$= x_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

chiamiamo il **periodo** del moto: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$



periodo necessario per passare due volte dallo stesso punto...

e definiamo anche la **frequenza** del moto: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

numero di oscillazioni nell'unità di tempo

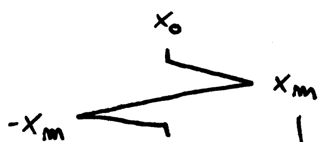
NB: periodo e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza

- SIGNIFICATO FISICO DELL AMPIEZZA:

Consideriamo $x_{(t)} = x_m \cos(\omega t + \phi)$

$\hookrightarrow$ se $-1 < \cos(\omega t + \phi) < +1$

allora $-x_m < x_{(t)} < +x_m$



VALORE MASSIMO POSITIVO

$\cos(\omega t + \phi) = +1$

$x_{(t)} = x_m$

VALORE MASSIMO NEG.

$\cos(\omega t + \phi) = -1$

$x_{(t)} = -x_m$

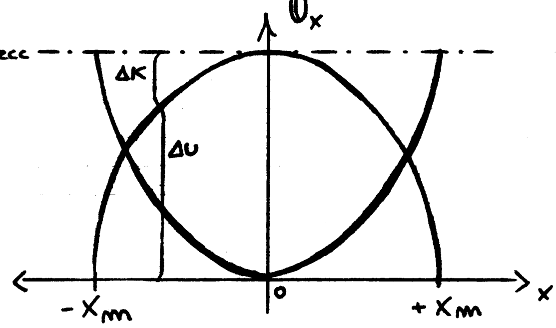
• ENERGIA DELL'OSCILLATORE ARMONICO...

Riferendoci al punto che oscilla sotto l'azione di una forza elastica, che è conservativa, durante il moto l'energia meccanica è sempre costante...

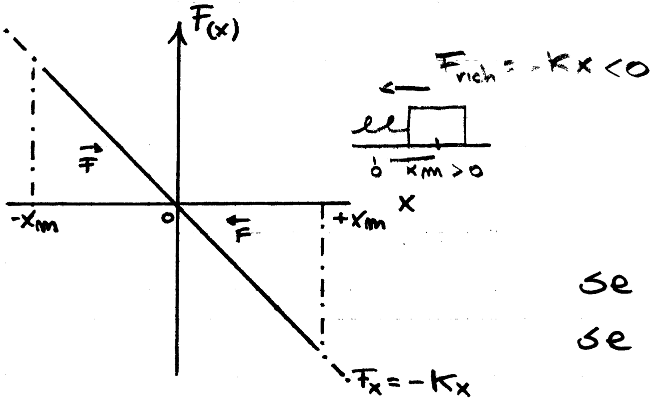
ENERGIA CINETICA $\Rightarrow K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

ENERGIA POTENZIALE $\Rightarrow U = \frac{1}{2} K x^2 \rightarrow \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

$\Delta E_{mecc.} = \Delta K + \Delta U =$ COSTANTE



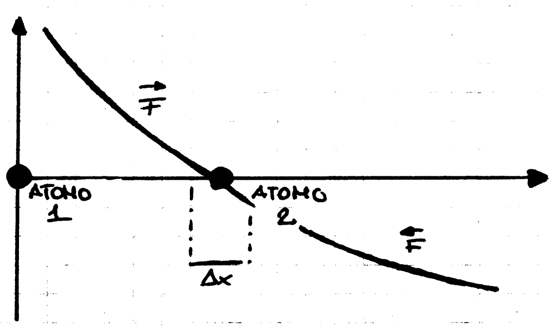
Considerando...



se $x > 0$ si ha $F_{(x)} < 0$

se $x < 0$ si ha $F_{(x)} > 0$

Possiamo fare un esempio considerando la forza di interazione tra 2 atomi...



nell'intervallo Δx (molto piccolo) si può considerare la forza come lineare, e quindi dipendente da x

$\Rightarrow$ analogo trattamento del moto armonico...

e quindi ammette potenziale parabolico.

$$\langle K \rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} K_{(T)}\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{1}{2} m x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t+\phi)\,dt =$$

$\int \sin^2 x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x$

$-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$

= UTILIZZANDO LO STESSO PROCEDIMENTO DI PRIMA RIUSCIAMO A RICAVARCI CHE $= \frac{m\omega^2 x_m^2}{4}$ (analogo $\langle U_T \rangle$)

$\Rightarrow \langle K \rangle_T = \frac{m\omega^2 x_m^2}{4}$ ENERGIA CINETICA MEDIA...

Considerando però che $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ le due formule dell'energie medie risultano essere uguali...

$$\underbrace{\langle K \rangle_T = \frac{m\omega^2 x_m^2}{4} = \frac{\cancel{m}\cdot\frac{K}{\cancel{m}}x_m^2}{4} = \frac{K x_m^2}{4} = \langle U \rangle_T}$$

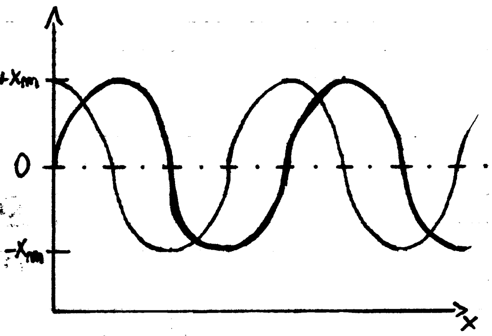
$\downarrow$

e siccome $E_{mecc} = K + U$ si ha che $K = U = \frac{E_{mecc}}{2}$ quindi in media l'energia è per metà cinetica e per metà potenziale....

$$\langle x \rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x_m \cos(\omega t+\phi)\,dt = \frac{x_m}{\omega T}\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_1+2\pi} \cos \varkappa \, d\varkappa = \frac{x_m}{2\pi}\sin\varkappa\Big|_{\varkappa_1}^{\varkappa_1+2\pi} =$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= \frac{x_m}{2\pi}\left(\cancel{\sin\varkappa_1} + \underbrace{\sin 2\pi}_{\to 0} - \cancel{\sin\varkappa_1}\right) = 0$$



Ciò è evidente anche graficamente in quanto, se consideriamo il 1° semiperiodo, l'area sotto la curva calcolata dall'integrale risulta S, nel secondo semiperiodo risulta $-S$ e quindi la loro somma risulta essere 0 (grafico del seno può essere anche sostituito col coseno)

$$\langle v \rangle_T = \frac{-x_m\omega}{T}\int_t^{t+T}\sin(\omega t+\phi)\,dt = \frac{-x_m\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}T}\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_1+2\pi}(-\sin\varkappa)\,d\varkappa = 0$$

anche la velocità media risulta essere zero poiché oscillando il punto possiede due velocità identiche e opposte che sommate si annullano...

ma $\langle v^2 \rangle_T \neq 0$ poiché somma di num. positivi $\rightarrow K = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle_T = \frac{K x_m^2}{4} \rightarrow \langle v^2 \rangle_T = \frac{1}{2}\frac{K x_m^2}{m}$

Vediamo che ci sono 3 casi possibili...

1°) smorzamento forte: $\gamma^2 > \omega_0^2$

si ha che $f_{elastica} < f_{attrito}$ quindi il moto non è oscillante ma "supersmorzato" perchè si ferma dopo un intervallo di tempo abbastanza breve

2°) smorzamento critico: $\gamma^2 = \omega_0^2$

Questo è il caso in cui il punto tende più rapidamente a 0 ($x=0$; cioè alla posizione di equilibrio), anche qui non c'è mai oscillazione

3°) smorzamento debole: $\gamma^2 < \omega_0^2$

In questo caso il moto si inverte a intervalli regolari, ma non è periodico poichè il punto non ripassa nelle stesse condizioni.....

... in quest'ultimo caso abbiamo le soluzioni dell'equazione caratteristica che sono complesse:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

SOLUZIONI: $x_{(t)} = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$

considerando $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ come pulsazione in condizioni di smorzamento debole...

$$x_{(t)} = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right)$$

NB: se le soluzioni sono reali si ha $x_{(t)} = \overline{x_{(t)}}$ (coniugato) e si ha:

$$\cancel{e^{-\gamma t}}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) = \cancel{e^{-\gamma t}}\left(\overline{c_1} e^{-i\omega t} + \overline{c_2} e^{i\omega t}\right)$$

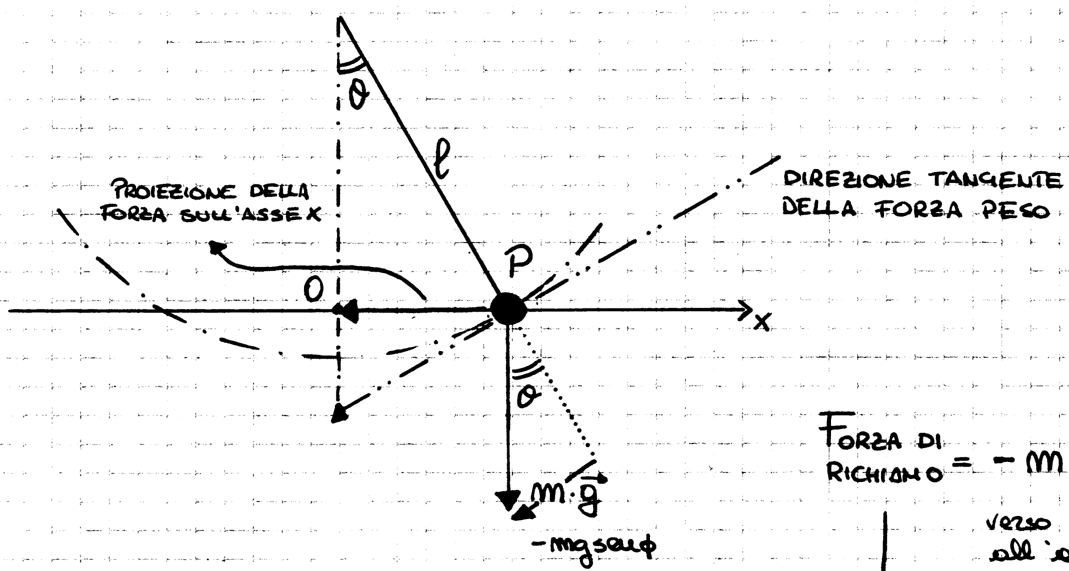
$$e^{i\omega t}(c_1 - \overline{c_2}) + e^{-i\omega t}(c_2 - \overline{c_1}) = 0$$

possibile solo se $c_1 = \overline{c_2}$ e $c_2 = \overline{c_1}$

$$c_1 = \frac{1}{2} A e^{i\phi} \qquad c_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\phi}$$

8/04/09

- Periodo del pendolo semplice...



Forza di richiamo $= -m \cdot g \cdot \sin\theta$

verso negativo risp. all'asse x

→ SEMPRE ORIENTATA VERSO LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO

Considerando $\overline{OP} = x$ e $\sin\theta = \frac{x}{\ell}$, come in figura, e sostituendo nella forza di richiamo si ottiene:

$$F_{(RICHIAMO)} = -m \cdot g \cdot \frac{x}{\ell} = -Kx \implies K = \frac{mg}{\ell}$$

e quindi sarà:

$$T_{(PERIODO)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

→ periodo del pendolo semplice

NB: tutti i pendoli con ℓ uguale e con la stessa forza oscillano con lo "stesso periodo"

→ T è indipendente da
- massa...
- ampiezza...

ricordando che: $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{\operatorname{tg}\phi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\phi}}$ abbiamo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\phi = \dfrac{x_0\omega_0}{v_0+\gamma x_0} \\ \operatorname{sen}\phi = \dfrac{\dfrac{x_0\cdot\omega_0}{v_0+\gamma x_0}}{\sqrt{1+\dfrac{x_0^2\cdot\omega_0^2}{(v_0+\gamma x_0)^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\phi = \dfrac{x_0\omega_0}{v_0+\gamma x_0} \\ \operatorname{sen}\phi = \dfrac{x_0\cdot\omega_0}{(v_0+\gamma x_0)\cdot\sqrt{1+\dfrac{x_0^2\cdot\omega_0^2}{(v_0+\gamma x_0)^2}}} \end{cases}$$

quindi....

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{x_0\cdot\omega_0}{\sqrt{(v_0+\gamma x_0)^2+x_0^2\omega_0^2}}$$

ESPRESSIONE DEL SENO IN FUNZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI

e di conseguenza....

$$A = \frac{x_0}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_0^2+(v_0+\gamma x_0)^2}}{\omega_0}$$

ESPRESSIONE DELL'AMPIEZZA IN FUNZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI

Il moto avviene:

- nei due punti di inversione (in cui $v=0$ e il moto si inverte di verso)
- nel punto di equilibrio (in cui $v=max$)

CASO PARTICOLARE:

$v=0$ (ci troviamo in uno dei punti di inversione, partendo da $t=0$)

consideriamo sempre γ infinitesimo

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{x_0\cdot\omega_0}{\sqrt{(\underbrace{\cancel{v_0}}_{0}+\underbrace{\cancel{\gamma x_0}}_{\to 0})+x_0^2\omega_0^2}} = \frac{\cancel{x_0\cdot\omega_0}^{\,1}}{\underbrace{\sqrt{\cancel{x_0^2\omega_0^2}}}_{1}} = 1$$

$\operatorname{sen}\phi=1 \to \phi=90°\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$ quindi $A=x_0$ (MASSIMA)

$\Rightarrow\ x_{(t)} = x_0 e^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$

otteniamo così $tg\phi = -\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$ $\quad A = \dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}$

con Ω = pulsazione della forza eccitante

- $\Omega \to \infty \qquad A \to 0$
- $\Omega \to 0 \qquad A \to F_0/m\omega_0^2$ (COSTANTE)

Cioè:............ $\qquad f_{ECC} = F_0 \cos(\Omega t)$

Eq. differenz. moto arm. forzato $\to \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 = \dfrac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$

$\hookrightarrow$ non omogenea: $x_{(t)} = x_{OMOG} + x_{PART}$

$\hookrightarrow$ OSCILL. ARMONICO SMORZATO...

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$$
$$\dot{x}(t) = -A\Omega \,\text{sen}(\Omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t + \phi)$$

sostituendo...

$$-A\Omega^2\cos(\Omega t+\phi) - \Omega A\,\text{sen}(\Omega t+\phi)\,2\gamma + A\cos(\Omega t+\phi)\,\omega_0^2 = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t \cancel{+\phi})$$

che può essere scritto come....

$a\,\text{sen}(\Omega t) + b\cos(\Omega t)$

$\hookrightarrow$ ricaviamo così...

$$a = A\cdot\text{sen}\,\phi\,(\omega_0^2-\Omega^2) + 2A\Omega\gamma\cos\phi = 0$$

$$\to \frac{A\,\text{sen}\,\phi\,(\omega_0^2-\Omega^2)}{\cos\phi} + \frac{2A\Omega\gamma\cancel{\cos\phi}}{\cancel{\cos\phi}} = 0$$

$$\boxed{tg\,\phi = \frac{-2\cancel{A}\Omega\gamma}{\cancel{A}(\omega_0^2-\Omega^2)}}$$

$$b = A\cos\phi\,(\omega_0^2-\Omega^2) - 2A\Omega\gamma\,\text{sen}\,\phi = \frac{F_0}{m}$$

$$\to \boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\Omega\gamma)^2}}}$$

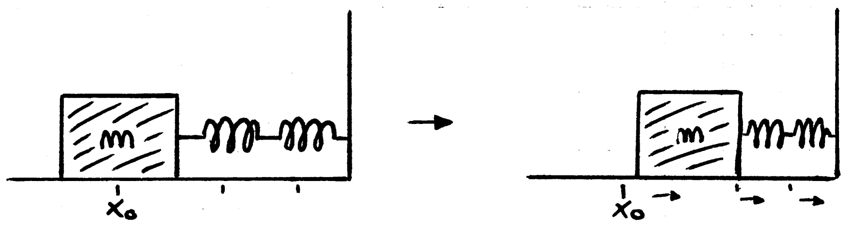
se $\Omega \to \infty$ allora $A = 0$

se $\Omega \to 0$ allora $A = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$ (cost..)

PROBLEMA 2: Due molle sono connesse ad un blocco di massa m, libero di scivolare su un piano liscio. Le due molle hanno costanti elastiche K_1 e K_2 rispettivamente.
Si dimostri che la frequenza di oscillazione vale:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1K_2}{(K_1+K_2)m}} = \frac{\nu_1\cdot\nu_2}{\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}}$$

dove ν_1 e ν_2 sono le frequenze alle quali oscillerebbe il blocco se collegato ad una delle due molle



1) Sulla massa agisce... $F = -K_1x$; $F = -K_2x$

$\hookrightarrow x_1 = -\frac{F}{K_1}$ $\quad\hookrightarrow x_2 = -\frac{F}{K_2}$

l'allungamento complessivo delle molle è:

$$x_{TOT} = x_1 + x_2 = -\frac{F}{K_1} - \frac{F}{K_2} = F\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)$$

→ siccome equivalgono ad un unica molla:

$$K = -\frac{F}{x} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \longrightarrow F = \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)x$$

ricordando che

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2x = \frac{F}{m} = \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)\frac{x}{m}$$

$$\longrightarrow \omega^2\cancel{x} = \left(\frac{K_1\cdot K_2}{K_1+K_2}\right)\frac{\cancel{x}}{m}$$

con $\nu = \frac{1}{2\pi}\cdot\omega$

$$\longrightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{K_1\cdot K_2}{(K_1+K_2)m}} \quad \text{c.v.d.}$$

2) $K_{1,2} = 4\pi^2\nu_{1,2}^2$

$$\hookrightarrow \nu = \sqrt{\frac{\cancel{4\pi^2}\nu_1^2\cancel{m}\cdot 4\pi^2\nu_2^2m}{\cancel{4\pi^2}\cancel{m}(4\pi^2\nu_1^2m+4\pi^2\nu_2^2m)}} = \sqrt{\frac{\cancel{4\pi^2}\nu_1^2\nu_2^2\cancel{m}}{\cancel{4\pi^2}\cancel{m}(\nu_1^2+\nu_2^2)}} = \sqrt{\frac{\nu_1^2\nu_2^2}{\nu_1^2+\nu_2^2}}$$

c.v.d.

SISTEMI DI PARTICELLE

20/04/09

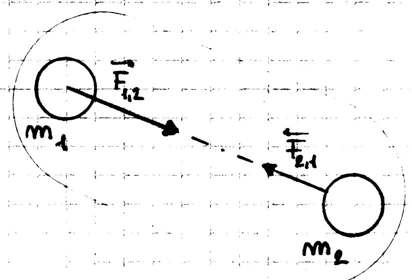
Finora abbiamo analizzato la dinamica, o la cinetica, di un solo punto materiale.
Consideriamo adesso un sistema di più corpi (o particelle) interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

La forza F agente su un singolo punto può essere vista come risultante di forze esterne (F_{EXT}) e di forze interne (F_{INT})

$$F = F_{EXT} + F_{INT}$$

La distinzione tra forze interne e forze esterne dipende da come viene definito il sistema di punti...

Alle forze interne si applica il principio di "azione-reazione" (o III^a legge di Newton) cioè se un corpo agisce con una determinata forza su un altro corpo, quest'ultimo reagisce con una forza uguale e opposta al primo corpo



III^a legge di Newton:

$$\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = \vec{0}$$

La natura delle forze interne di un sistema può essere di diversi tipi:

1) se i punti sono legati tra loro da "fili" o da "molle" abbiamo TENSIONI DI FILI (ATTRATTIVA) o FORZE ELASTICHE (ATTR. O REPUL.).

2) se i punti hanno carica elettrica si possono generare forze di natura ELETTROSTATICA (ATTR. O REPUL.).

3) tra punti dotati di massa si esercita la forza di natura GRAVITAZIONALE (ATTRATTIVA), trascurabile per masse molto piccole e importante per masse grandi come i pianeti.