NUMERO : 173

DATA : 03/10/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Montanari

MATERIA : Analisi II Esercizi
Prof. Lancellotti - Canuto - Tabacco

Cap 1

$\boxed{\text{Serie Numeriche}}$

pag 1- 21

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 238

pag 1-21

Cap 1
Serie Numeriche

Una successione reale è una funzione definita in $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$ i.e. cui dominio contiene un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ per un qualunque intero $n_0 \geq 0$. $a : n \mapsto a_n$ $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

Si dice che la successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è convergente se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

Se $\ell \in \{\pm\infty\}$ la successione si dice divergente se non esiste indeterminata.

$\Rightarrow$ Considerando la successione GEOMETRICA $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$

$$\lim_n q^n \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

- Data la successione $\{a_k\}_{k \geq 0}$ costruiamo la successione delle somme parziali (o delle ridotte) $\{s_n\}_{n \geq 0}$

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$$

Poniamo

$$\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}}_{\text{SERIE}} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_n s_n = S$$

$a_k \to$ somma della serie

S SOMMA della SERIE:
- $\to \pm\infty$ DIVERGE
- $\to \in \mathbb{R}$ CONVERGE
- $\to \nexists$ SERIE INDETERM.

ES. **SERIE GEOMETRICA**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{è indeterminata} & q \leq -1 \end{cases}$$

- PROP il comportamento della serie non cambia se si AGGIUNGE, SI MODIFICA oppure ELIMINA un numero finito di termini (N.B. generalmente però si cambia S

- PROP Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie convergente. $\boxed{\text{Allora}}$

$$\lim_k a_k = 0$$

con dim

N.B. non è un ($\Leftrightarrow$) ma solo un $\boxed{\Rightarrow}$

Se la serie $\sum a_k$ converge a S si dice resto n-simo della serie

$$\boxed{r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}$$

- PROP Sia $\sum a_k$ una serie convergente
$\boxed{\text{Allora}}$ $\lim_n r_n = 0$

con dim

+ SERIE GEOMETRICA $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ $S = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$

. SERIE di MENGOLI $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ $S = 1$

Telescopica

+ SERIE TELESCOPICA $a_k = b_{k+1} - b_k$

+ SERIE ARMONICA generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 0$ $\begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$

+ TEOREMI SULLE SUCCESSIONI (RICHIAMI)

1. TEO UNICITÀ DEL LIMITE il limite di una successione se $\exists$ è unico
2. TEO di LIMITATEZZA Una successione convergente è limitata
3. TEO di $\exists$ l FUNZIONI MONOTONE Sia data una successione def. mon. monotona. Se essa è limitata allora è convergente, se non è limitata $\rightarrow$ è divergente
4. 1° TEO CONFRONTO $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ due successioni T.C. $\exists$ $(\lim_n a_n = l$, $\lim_n b_n = m)$
   Se definitivamente vale $a_n \leq b_n$ $\boxed{\text{allora}}$ $l \leq m$

5a. 2° TEO CONFRONTO - caso finito $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni T.C. $\lim_n a_n = \lim_n c_n = l \in \mathbb{R}$ Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\boxed{\text{allora}}$ $\lim_n b_n = l$

5b. 2° TEO CONFRONTO - caso infinito $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ due succ tali che $\lim_n a_n = +\infty$ se $a_n \leq b_n$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\lim_n b_n = +\infty$ (Analog con $-\infty$)

6. PROP $\{a_n\}$ è infinitesima $(\lim a_n = 0)$ $\Leftrightarrow$ $\{|a_n|\}$ è infinites.
7. TEOREMA $\{a_n\}$ succ infinitesima, $\{b_n\}$ limitata
   Allora la successione $\{a_n b_n\}$ è infinitesima
8. ALGEBRA DEI LIMITI $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni T.C. $\lim_n a_n = l$ e $\lim_n b_n = m$ $\boxed{\text{SI HA}}$
   - $\lim_n \{a_n \pm b_n\} = l \pm m$
   - $\lim_n \{a_n b_n\} = lm$
   - $\lim_n \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{l}{m}$ con $b_n \neq 0$
9. TEO di SOSTITUZIONE $\{a_n\}$ una succ T.C. $\lim_n a_n = l$ e g una funzione definita in un intorno di l
   a) se $l \in \mathbb{R}$ e g è continua in l $\Rightarrow$ $\lim_n g(a_n) = g(l)$
   b) se $l \notin \mathbb{R}$ e esiste $\lim_{x \to l} g(x) = m$ $\Rightarrow$ $\lim_n g(a_n) = m$
10. CRITERIO DEL RAPPORTO Sia $\{a_n\}$ una successione per cui definitivamente $a_n > 0$
    Supponiamo $\exists$ $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
    Se $q < 1$ allora $\lim_n a_n = 0$, se $q > 1$ $\lim_n a_n = +\infty$

Ni

+ TEO 1.10 TEO. CONFRONTO

pag 10 - SERIE NUM

Siano $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ due SERIE NUMERICHE a TERMINI POSITIVI e si abbia $0 \leq a_k \leq b_k$ per $\forall k \geq 0$

i) $\sum b_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_k$ converge
e vale $\sum a_k \leq \sum b_k$

ii) $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_k$ diverge

dim

i) indichiamo $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ le successioni delle ridotte delle serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$. Poiché $a_k \leq b_k$, $\forall k$

$s_n \leq t_n \quad \forall n \geq 0$

Per HP $\sum b_k$ converge $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t \in \mathbb{R}$ inoltre $\exists$ finito il $\lim s_n = s$

Applicando il primo teo confronto

$s = \lim s_n \leq \lim t_n = t \in \mathbb{R}$

Dunque $s \in \mathbb{R}$ e $\sum a_k$ CONVERGE + $s \leq t$

ii) Se $\sum b_k$ convergesse $\Rightarrow$ per quanto visto sopra anche $\sum a_k$ convergerebbe

1

+ TEO 1.14 - CRITERIO del RAPPORTO

pag 12 - SERIE N

Data $\sum a_k$ con $a_k > 0, \forall k \geq 0$

Si supponga $\exists \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \quad \begin{cases} \ell < 1 & \text{CONVERGE la serie} \\ \ell > 1 & \text{DIVERGE} \quad " \end{cases}$$

dim

Sia $\ell \in \mathbb{R}$

Per def di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \geq 0 \ / \ \forall k > k_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - \ell \right| < \varepsilon$$

ossia

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon$$

- supponiamo $\ell < 1$, scelto $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ posto $q = \frac{1+\ell}{2}$ e osserviamo che

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon = q \quad \forall k > k_\varepsilon$$

Pertanto reiterando

$$a_{k+1} \leq q a_k < q^2 a_{k-1} < \dots < q^{k-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon+1}$$

e quindi $a_{k+1} < \frac{a_{k_\varepsilon+1}}{q^{k_\varepsilon}} q^k \quad \forall k > k_\varepsilon$

Concludiamo usando il TEO 1.10 (CONFRONTO) e il fatto che serie geom. di ragione $q < 1$ converge

- Se $\ell > 1$ $\quad \varepsilon = \ell - 1 \rightarrow 1 = \ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad \forall k > k_\varepsilon$

Pertanto $a_{k+1} > a_k > \dots > a_{k_\varepsilon+1} > 0$ non è verificata condizione di convergenza in quanto $\lim_k a_k \neq 0$

- Se $\ell = +\infty$ posto $A = 1$ nella condiz. di limite $\exists k_A \geq 0$ t.c. $a_k > 1 \ \forall k > k_A \Rightarrow$ di NUOVO NON V. COND. CONVERG.

= TEO 1.17 CRITERIO INTEGRALE

pag 14

Sia f una funz positiva, DECRESCENTE ($f'<0$) e continua in $[k_0, +\infty)$ con $k_0 \in \mathbb{N}$

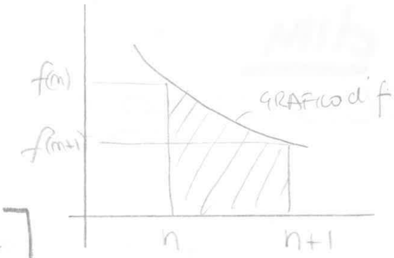
ALLORA valgono le disuguaglianze:

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$$

Pertanto

$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ CONVERGE} \iff \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \text{ CONV.}$$

$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ DIVERGE} \iff \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \text{ DIV.}$$



dim

Poiché f è decresc. $\forall k > k_0$ si ha

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x\ [k, k+1]$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

Pertanto $\forall n \in \mathbb{N}$ $n > k_0$ $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=k_0}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=k_0} (f(k)$

$$\sum_{k=k_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{k_0}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=k_0}^{n} f(k)$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ed essendo f positiva e continua $\to$ Tesi

$\blacksquare$

= **TEO 1.24 _ CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA**

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, ALLORA essa converge e si ha

NO

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

DIM

Definiamo le successioni

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k > 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad c_k \begin{cases} 0 & \text{se } a_k > 0 \\ -a_k & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $a_k^+, a_k^- \geq 0 \ \forall k \geq 0$ e risulta

$$a_k = b_k - c_k \quad \text{e} \quad |a_k| = b_k + c_k$$

IP: $\sum |a_k|$ converge

Poiché $0 \leq b_k, c_k \leq |a_k|$ per $\forall k \geq 0$ possiamo applicare il Criterio del confronto (TEO 1.10) e ottenere che le serie $\sum b_k$ e $\sum c_k$ convergono.

Oss che $\forall n \geq 0$

$$\sum a_k = \sum (b_k - c_k) = \sum b_k - \sum c_k$$

deduciamo che anche qsta serie converge

Infine pex per il limite $n \to \infty$ nella relazione

$$\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|$$

e si ottiene la disuguaglianza richiesta.

Cap 2

$\boxed{\text{SERIE DI FUNZIONI E DI POTENZE}}$

pag 35-62

10/AGO - 12/AGO

[SUC]CESSIONI DI FUNZIONI

• [Sia X] un qualunque insieme della retta reale. Supponiamo che per $\forall n \geq n_0$ [sia] data $f_n : X \to \mathbb{R}$ funzione reale definita su X. La famiglia $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ [è] detta successione di funzioni.

def Diciamo che la successione $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ converge puntualmente in $\bar{x} \in X$ se la SUCCESSIONE NUMERICA $\{f_n(\bar{x})\}_{n \geq n_0}$ converge per $n \to \infty$.
Sia $A \subseteq X$ l'insieme di tali punti $\bar{x}$ che chiamiamo insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}_{n \geq n_0}$.
Risulta così definita una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ ponendo

FUNZIONE LIMITE della successione $f(x) = \lim_n f_n(x) \quad \forall x \in A$

$f_n \to f$ puntualmente in A

• N.B. f è la funzione limite della successione $\iff \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in A$

IL CONCETTO DI CONVERGENZA PUNTUALE NON È SUFFICENTE A GARANTIRE CHE CERTE PROPRIETÀ ~~DELLE~~ SODDISFATTE DALLE SINGOLE f_n (ad es la continuità) SIANO TRASFERITE ALLA FUNZIONE LIMITE f.

+ def La successione $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ converge uniformemente in A alla funzione limite f se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ossia se per $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ T.C.

$$\forall n \geq n_0 \ n > \bar{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

• introduciamo la notazione NORMA

$$\|g\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |g(x)|$$

• PROP Se $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ converge a f uniformemente in A $\boxed{\Rightarrow}$ converge anche puntualmente

• PROP Sia $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ una successione di funzioni convergente puntualmente in A a una funzione f; sia inoltre $\{M_n\}_{n \geq n_0}$ una successione numerica infinitesima per $n \to \infty$ T.C.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$$

$\boxed{\text{Allora}}$ $f_n \to f$ uniformemente in A

→ PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI UNIFORMEMENTE CONVERGENTI

TEO 2.7 conv. unif $\Rightarrow$ continuità

può essere utilizzato per affermare che la conv. puntuale di una succ di funz non è uniforme: se la f, funzione limite NON è continua mentre le singole componenti della successione ~~lo~~ sono = us. negat.

1 passaggio al limite sotto il segno di integrale

N.B. $f_n \to f$ puntualmente su $I = [a,b]$

Allora se le funzioni sono integrabili NON è vero in generale che

~~la convergenza~~

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

La convergenza uniforme è condizione sufficente per trasf. a f la prop. di integrab.

+ Diciamo che la serie di funzioni $\sum_{k=k_0} f_k$ converge uniformemente alla funzione somma s in A se la successione delle ridotte $\{s_n\}_{n\geq k_0}$ converge uniformemente a s in A

- convergenza assoluta
  e
  convergenza uniforme $\Rightarrow$ conv puntuale

Non ci sono però implicaz logiche che legano conv. assoluta e unif

TEO 2.7, 2.9, 2.10 per le successioni di funzioni $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ $\Longrightarrow$ TEO 2.17, TEO 2.18, TEO 2.19 Serie di funzioni $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$

Si nota quindi l'importanza della convergenza uniforme. Come si verifica? Dalla definizione non è agevole poiché bisognerebbe conoscere la funzione somma

• **TEO 2.20 - CRITERIO DI WEIERSTRASS**

Ad esempio: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^4 x}{k\sqrt{k}}$ $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{\sin k^4 x}{k\sqrt{k}}\right| \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Armonica (converge)

Dunque la serie converge uniformemente e anche puntualmente in $\mathbb{R}$.

+ **SERIE DI POTENZE**

Sono un caso notevole delle serie di funzioni, in cui ciascuna funzione f_k è un particolare polinomio.

+def Sia $x_0\in\mathbb{R}$ e $\{a_k\}_{k\geq k_0}$ una successione numerica. Chiamiamo SERIE DI POTENZE una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Il punto x_0 è detto CENTRO della serie e i numeri $\{a_k\}_{k\geq k_0}$ coefficienti della serie

N.B. La serie converge nel suo centro, qualunque siano i coefficienti, inoltre l'intervallo di convergenza avrà sempre x_0 come centro oppure sarà tutto $\mathbb{R}$

+ PROP 2.24 che ha come conseguenza il COROLLARIO 2.26

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se una serie di potenze } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge in un punto } x_1\neq 0 \\ \text{allora converge assolutamente nell'intervallo aperto } (-|x_1|, |x_1|) \\ \text{se non converge in un punto } x_2\neq 0 \text{ allora non converge in} \\ \text{nessun punto delle semirette } (|x_2|,+\infty) \text{ e } (-\infty,|x_2|)\end{array}}$$

Da cui il **TEO 2.27**

+def ~~Dicesi raggio di convergenza~~
Dicesi raggio di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la quantità

$$R = \sup\{x\in\mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge}\}$$

PROP 2.41

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R>0$ - I coefficienti della serie si esprimono mediante le derivate della funzione somma $S(x)$ come

$$a_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(x_0) \quad \forall k \geq 0$$

+ FUNZIONI ANALITICHE e SERIE di TAYLOR

TEO 2.39 = proprietà della funzione somma di una serie di potenze, proviamo ora a valutare il punto di vista inverso:
partendo da una qualsiasi funzione ($\in C^\infty$) domandiamoci se questa è la somma di una serie di potenze-

sia $f \in C^\infty(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, in un opportuno $I: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq X$ con $\delta > 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

con a_k (per la PROP 2.41) è necessariamente

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \geq 0$$

in particolare per $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

+ def la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ è detta serie di Taylor di f centrata in x_0 - Se essa ha un raggio positivo e la sua somma coincide con f in un intorno di x_0, la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor o anche ANALITICA, in x_0 -
Se $x_0 = 0$ (TAYLOR → MACLAURIN)

N.B. non per tutte le $f \in C^\infty$ è possibile una rappresentazione in serie di potenze

N.B.B. le ridotte della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ non sono altro che i polinomi di Taylor della funzione f in x_0 di ordine via via crescente

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = T f_{n,x_0}(x)$$

DUNQUE LA SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR EQUIVALE ALLA CONVERGENZA AD f DELLA SUCCESSIONE DEI SUOI POLINOMI DI TAYLOR

$$\lim_n S_n(x) = \lim_n T f_{n,x_0}(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

in tal caso $\underbrace{r_n(x) = f(x) - S_n(x)}_{\text{RESTO n-ESIMO serie}}$ è infinitesimo per $n \to \infty$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

+ SERIE ESPONENZIALE

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots \quad S(x) = e^x$$

+ SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad S(x) = \frac{1}{1-x}$$

+ SERIE BINOMIALE

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \rightarrow \qquad S(x) = (1+x)^n$$

+ TEO 2.7

Sia $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ una successione di funzioni continue su I che convergano UNIFORMEMENTE ad una funzione f su I

ALLORA

f è continua in I

+ TEO 2.9

Sia $I = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato
Sia $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ una successione di funzioni integrabili su I e tale che $f_n \to f$ uniformemente su I

ALLORA

f è integrabile su I e si ha

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{per } n \to \infty$$

+ TEO 2.10

Sia $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ una successione di funzioni e C^1 su $I = [a,b]$
Supponiamo esistano f e g definite su I tale che

i) $f_n \to f$ puntualmente in I
ii) $f_n' \to g$ uniformemente in I

Allora

f è di classe C^1 e si ha $f' = g$
Inoltre $f_n \to f$ uniformemente in I

TEO 2.20 - CRITERIO DI WEIERSTRASS

Sia $\{f_K\}_{K \geq K_0}$ una successione di funzioni definite in X e sia $\{M_K\}_{K \geq K_0}$ una successione di numeri Reali TALI CHE, per $\forall K \geq K_0$, si abbia

$$|f_K(x)| \leq M_K \qquad \forall x \in X$$

Supponiamo inoltre che la serie numerica $\sum_{K=K_0}^{\infty} M_K$ converga

Allora la serie $\sum_{K=K_0}^{\infty} f_K$ CONVERGE UNIFORMEMENTE in X

dimostrazione

Fissato $x \in X$, la serie numerica $\sum_{K=K_0}^{\infty} |f_K(x)|$ converge per il CRITERIO del CONFRONTO e dunque è ben definita la funzione somma

$$S(x) = \sum_{K=K_0}^{\infty} f_K(x) \qquad \forall x \in X$$

È sufficiente quindi verificare che la successione delle ridotte $\{S_m\}_{m \geq K_0}$ converge uniformemente a S in X.

Risulta che per ogni $x \in X$

$$|S_m(x) - S(x)| = \left| \sum_{K=m+1}^{\infty} f_K(x) \right| \leq \sum_{K=m+1}^{\infty} |f_K(x)| \leq \sum_{K=m+1}^{\infty} M_K$$

resto n-esimo della serie $\sum_{K=0}^{\infty} M_K$ convergente

ossia

$$\sup_{x \in X} |S_m(x) - S(x)| \leq \sum_{K=m+1}^{\infty} M_K \qquad \Rightarrow \lim_n r_n = 0$$

Poiché $\sum_{K=K_0}^{\infty} M_K$ converge, l'espressione a secondo membro non è altro che il resto n-esimo di una serie convergente che, per $n \to \infty$, tende a 0.

$$|S_n(x) - S(x)| \leq r_n \quad \forall x \in X$$

$$\lim_m \sup_{x \in X} |S_m(x) - S(x)| = 0$$

e dunque la serie $\sum_{K=K_0}^{\infty} f_K$ converge uniformemente in X

*dimostrazione uguaglio:

TEO 2.27

Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ si verifica UNO E UNO SOLO DEI SEGUENTI CASI

a) la serie converge solo in $x=0$

b) la serie converge puntualmente e assolutamente per $\forall x \in \mathbb{R}$ inoltre converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

c) $\exists! R>0$ t.c. la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni x con $|x|<R$, uniformemente in ogni intervallo $[a,b] \subset (-R,R)$. Inoltre la serie non converge per ogni x tale che $|x|>R$

dim

Sia A l'insieme di convergenza della serie $\sum a_k x^k$

Se $A = \{0\}$ = caso a)

Se $A = \mathbb{R}$ = caso b) Infatti per il corollario 2.26 la serie converge puntualm. e assolutam. per $\forall x \in \mathbb{R}$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme su un intervallo $[a,b]$, poniamo $L = \max(|a|,|b|)$

Allora

$$|f_k(x)| = |a_k x^k| \leq |a_k L^k| \quad \forall x \in [a,b]$$

posso dunque applicare il criterio di Weierstrass 2.20 con $M_k = |a_k| L^k$

Si supponga ora che A contenga punti diversi da 0 ma che non sia l'intera retta. Esiste dunque $\bar{x} \notin A$, applicando ora il Corollario 2.26, A non può contenere alcun punto con $|x| \geq |\bar{x}|$ quindi l'insieme A è limitato

Poniamo $R = \sup A$, si ha $R>0$ perché A non si riduce al solo $\{0\}$

Si consideri un qualunque x con $|x|<R$ per definizione di sup esiste x_1 $|x|<x_1<R$ con $\sum a_k x_1^k$ convergente

Dunque ancora per il coroll. la serie converge puntualmente e assolutamente in x.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme si procede come in b)

Infine per def di sup. A non può contenere $x>R$ e neppure $x<-R$

Dunque $\forall |x|>R \rightarrow$ serie non converge

+ TEO 2.33. CRITERIO DELLA RADICE

Data la serie di potenze

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_K (x-x_0)^K$$

se esiste il limite

$$\lim_K \sqrt{|a_K|} = \ell$$

$\boxed{\text{allora}}$ il raggio di convergenza R è dato da

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } 0 < \ell < +\infty \end{cases}$$

dim

Analogo al Teo precedente + applicaz CRITERIO della Radice 1.15

+ TEO 2.35

Date due serie di potenze $\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ rispettivamente con raggio di convergenza R_1 e R_2
la serie somma $\Sigma = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$ ha raggio di convergenza R soddisfacente $R \geq \min(R_1, R_2)$
Se $R_1 \neq R_2$ allora necessariamente $R = \min(R_1, R_2)$

+ TEO 2.37

Date due serie di potenze $\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ rispettivamente con raggio di convergenza R_1 e R_2, la serie prodotto $(\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$ ha raggio di convergenza R soddisfacente $R \geq \min(R_1, R_2)$

Cap 3

SERIE DI FOURIER

pag 77 - 100

12/AGO -

Un'ONDA può essere rappresentata da una, o più, funzione che esprime una quantità fisica di interesse, in genere essa dipende dal tempo e dalle variabili di spazio

Se fissiamo la posizione → solo f della variabile tempo
Se fissiamo un istante → l'onda ci appare come una distribuzione spaziale di valori delle quantità fisica

Strumenti matematici di ANALISI mirano a decomporre una struttura d'onda complessa nella sovrapposizione di componenti più semplici, la cui natura è ben compresa + sono maneggiabili
se onde complesse ⇒ infinità di sovrapposizioni.

ANALISI DI FOURIER ⇒ sovrapposizione onde elementari = POLINOMIO TRIGONOMETRICO
⇓
sovrapposizione di <u>infinite</u> onde elementari = SERIE di FOURIER

• POLINOMI TRIGONOMETRICI

+def (RICORDO) La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T>0$ se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f periodica periodo T ⇒ anche periodica di periodo kT con $k \in \mathbb{N} / \{0\}$

⇒ <u>può</u> essere periodica di periodo T/k con $k \in \mathbb{N}/\{0\}$

Chiameremo PERIODO MINIMO di f il più piccolo T tale che f è periodica

+PROP 3.3

Sia f una funzione periodica di periodo $T>0$, <u>allora</u> per $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx$$

In particolare se $x_0 = -T/2$ risulta

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

dim?

+ PROP 3.4

Sia f una funzione periodica di periodo $T_1 > 0$ e sia $T_2 > 0$
ALLORA la funzione $g(x) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right)$ è periodica di periodo T_2

+def Chiameremo polinomio trigonometrico di ordine, o grado, n ogni combinazione lineare finita della forma

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

con a_k e b_k costanti reali
e almeno uno tra a_n e $b_n \neq 0$. Si può anche scrivere (armonica el)

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} d_k \sin(kx + \varphi_k)$$

$\mathcal{F}$ ha lo stesso ruolo di $\{e_k\}$ in $\mathbb{R}^m$: ogni elemento dello spazio si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{F}$ (dove però qsta combinazione lineare è in forma di serie infinita

serie di Fourier = sviluppo in termini di $\mathcal{F}$ delle $f \in \tilde{C}_{2\pi}$

$\forall m \geq 0$ consideriamo P_m sottospazio $(2m+1)$-dimensionale di $\tilde{C}_{2\pi}$ dei polinomi trigonometrici di grado $\leq m$ - Esso è generato da φ_k, ψ_k di $\mathcal{F}$ con $k \leq m$ che formano un sistema ortogonale finito $\mathcal{F}_m$ -

UN'APPROX in P_m di una funzione $\tilde{C}_{2\pi}$ È LA SUA PROIEZIONE ORTOGONALE SU P_m

+def Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ - Chiamiamo proiezione ortogonale di f su P_m, l'elemento $S_{m,f}$ di P_m, così definito:

$$S_{m,f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad k \geq 1 \qquad (*)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad k \geq 1$$

tramite la norma quadratica è possibile definirne una distanza tra gli elementi di $\tilde{C}_{2\pi}$

$$d(f,g) = \|f-g\|_2 \qquad f,g \in \tilde{C}_{2\pi}$$

i) $d(f,g) \geq 0 \quad \forall f,g \in \tilde{C}_{2\pi}$ e $=0 \Leftrightarrow f=g$

ii) $d(f,g) = d(g,f) \quad \forall f,g \in \tilde{C}_{2\pi}$

iii) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g) \quad \forall f,g,h \in \tilde{C}_{2\pi}$

la proiezione ortogonale di f su P_m gode allora delle proprietà elencate dalla **PROP 3.9** con dim

la successione dei polinomi $S_{m,f}$ converge ad f per $m \to \infty$? Essi cost le ridotte della serie di funzioni

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

+def Si chiama serie di Fourier di $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ la serie di funzioni

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove $(a_0, a_k, b_k)(k \geq 1)$ sono $\in \mathbb{R}$ detti coefficienti di Fourier di f $(*)$

Scriveremo

$$f \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

N.B. La serie di Fourier può non convergere affatto o convergere ad una f diversa → usiamo il simbolo di uguaglianza solo quando la serie converge puntualmente a f

= **PROP 3.12 - FUNZ pari o dispari**

• CONVERGENZA SERIE di FOURIER

Prendiamo f continua a tratti, periodica di periodo 2π (non nec regolarizzata):

- CONVERGENZA QUADRATICA
- CONVERGENZA PUNTUALE
- CONVERGENZA UNIFORME

→ CONV. QUADRATICA

def Siano f e f_k $k \geq 0$ funzioni definite e di quadrato integrabile su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$
Si dice che $\sum_{k=0} f_k$ converge in norma quadratica alla funzione f nell'intervallo I se

$$\lim_n \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right|^2 dx = \lim_n \left\| f - \sum_{k=0}^n f_k \right\|_2^2 = 0$$

N.B. CONV. UNIFORME $\Rightarrow$ CONV QUADRATICA

TEO. 3.15

Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ ALLORA la serie di Fourier di f converge a f in norma quadratica, ossia

$$\lim_n \| f - S_{n,f} \|_2 = 0$$

Conseguenze: **COROLLARIO 3.16 - 3.17**

→ CONV. PUNTUALE

Condizioni sufficienti che garantiscono conv. puntuale

+def
I) Si dice che una funzione f è regolare a tratti in un intervallo $[a,b] \in \mathbb{R}$ se
a) è derivabile in tutti i punti di $[a,b]$ tranne al più in un numero finito di punti
b) è continua a tratti come anche lo è f'
II) Si dice che f è monotona a tratti se è pox suddividere $[a,b]$ in un numero finito di sottointervalli dove f è monotona

Si ha allora:

TEO 3.20

Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$
Supponiamo che valga una delle condizioni:
a) f regolare a tratti in $[0,2\pi]$
b) f monotona a tratti
ALLORA la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[0,2\pi]$

Il ris. vale anche se la f di partenza non è regolarizzata
N.B. La serie di Fourier in un punto di discontinuità x_0 tende al valore regolarizzato

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

di f in x_0 (e non a $f(x_0)$)

+ ARMONICA ELEMENTARE

$$f(x) = \underbrace{a}_{\text{AMPIEZZA}} \sin(\underbrace{\omega}_{\text{PULSAZIONE}} x + \overbrace{\phi}^{\text{FASE}}) \qquad T_{min} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{frequenza} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 Kx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 Kx\,dx = \pi \qquad \forall K \geq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \cos Kx \cos \ell x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin Kx \sin \ell x\,dx = 0 \quad \forall K, \ell \geq 0 \quad K \neq \ell$$

$$\int_0^{2\pi} \cos Kx \sin \ell x\,dx = 0 \quad \forall K \ell \geq 0$$

+ ONDA QUADRA

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \pm\pi \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

serie di Fourier $f \approx \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (\sin 2n+1) x$

+ ONDA RADDRIZZATA

$$f(x) = |\sin(x)| \qquad f \approx \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nx$$

• PROP 3.12 - f PARI O DISPARI

Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$

- Se f è una funzione DISPARI Allora

$$a_k = 0 \quad \forall k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \forall k \geq 1$$

- Se f è una funzione PARI Allora

$$b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad \forall k \geq 1$$

dim

Sia ad esempio f pari

È sufficiente ricordare la PROP 3.3, osservare che $f(x)\sin kx$ per $\forall k \geq 1$ è una funzione dispari e $f(x)\cos kx$ è pari per $\forall k \geq 0$ per ottenere

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0 \quad \forall k \geq 1$$

e per ogni $k \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

□

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 238

+ COROLLARIO 3.16

Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$. Vale l'IDENTITÀ di PARSEVAL

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

dim

Il risultato segue facilmente dal Teo precedente (scarto quadratico) (vedi sviluppo)

Infatti grazie alla rappresentazione dello SCARTO QUADRATICO

$$0 = \lim_n \|f - S_{n,f}\|_2 = \lim_n \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(x)| dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

$\square$

UTILE PER CALCOLARE SOMME di SERIE NUMERICHE

SERIE NUMERICHE

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \rightarrow$ se $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$ la serie conv.

SERIE NOTEVOLI

- GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{conv } \frac{1}{1-a} & |a|<1 \\ \text{div. } + & a \geq 1 \\ \text{indet} & a \leq -1 \end{cases}$

- ARMONICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{conv.} & p>1 \\ \text{div. } + & p \leq 1 \end{cases}$

- TELESCOPICHE $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \rightarrow S_n = a_{n+1} - a_0$

CRITERI di CONV.

CONDIZ necex = se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_n a_n = 0$

se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolut $\Rightarrow$ converge

CONFR. ASINT. $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$

- $\ell \neq 0$ $\sum a_n$ conv $\Leftrightarrow \sum b_n$ conv $\rightarrow a_n \sim \ell b_n$
- $\ell = 0$ e $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv $\rightarrow a_n \sim o(b_n)$
- $\ell = 0$ e $\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div $\rightarrow a_n \sim o(b_n)$

CRITERIO RAD
CRIT. RAPP $\begin{cases} \ell < 1 & \text{conv} \\ \ell > 1 & \text{div} \end{cases}$ $\ell = 1$??

CRIT. MC LAURIN $f: [k_0, +\infty)$, f non neg. decrescente e $a_n = f(n)$

$\sum a_n$ conv $\Leftrightarrow$ $\sum_{k_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k_0}^{\infty} a_n$
l'int. impr. conv.

CRIT LEIBNIZ

Sia serie di segno alterno se

- $\lim_n b_n = 0$
- (b_n) decres

$\rightarrow \sum (-1)^n b_n$ conv.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 238

SERIE di POTENZE

Serie di potenze centrata in x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$\boxed{0^0 = 1}$

$R = \sup \{ x \in \mathbb{R} : \sum a_n (x-x_0)^n \text{ è conv.} \}$ $\quad R \in [0, +\infty]$

RAGGIO di CONVERGENZA

- TEO INSIEME di CONV
  - se $R=0$ $\sum a_n x^n$ conv. solo in $x=0$
  - se $0<R<+\infty$ assol. $(-R,R)$ e unif in $[-K,K]$ $0<K<R$
  - se $R=\infty$ assol in $\mathbb{R}$ e in ogni $[-K,K]$ unif $K>0$
- TEO di ABEL se estremi $\to$ unif in $[-R,R]$
- TEO della RADICE $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,+\infty]$ $R = \begin{cases} +\infty & \ell = 0 \\ 1/\ell & 0<\ell<\infty \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}$
- TEO del RAPP

SERIE di TAYLOR

cenni

particolare serie di potenze

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

SERIE di FOURIER

Si chiama serie di Fourier di f la serie di funz

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

f PARI $\Rightarrow b_n = 0$

f DISPARI $\Rightarrow a_n = 0$

- CONV QUADRATICA Se f PERIODICA 2π, CONTINUA A TRATTI in $[-\pi,\pi]$

$$S_n(x) = a_0 + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

somma parziale

ALLORA LA serie di F. di f converge quadraticam. a f

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

Cap 4

FUNZIONI TRA SPAZI EUCLIDEI

pag 113-148

+ INSIEMI di $\mathbb{R}^n$ E LORO PROPRIETÀ:

Mediante il concetto di distanza, possiamo definire gli intorni di un punto in $\mathbb{R}^n$.

+def Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r>0$ un numero reale. Chiamiamo intorno di x_0 di raggio r l'insieme

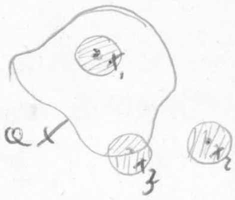
$$B_r(\hat{x}_0) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : \|\hat{x} - \hat{x}_0\| < r\}$$

costituito da tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ che distano meno di r da x_0.
L'insieme

$$\overline{B_r}(\hat{x}_0) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : \|\hat{x} - \hat{x}_0\| \leq r\}$$

è detto intorno chiuso di x_0 di raggio r.

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che $\complement X = \mathbb{R}^n / X$ indica il complementare di X.



+def Un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dicesi
i) punto interno a X se $\exists B_r(\hat{x})$ contenuto in X
ii) punto esterno a X se è punto interno a $\complement X$
iii) punto di frontiera di X se non è né interno né esterno a X cioè ogni suo intorno contiene sia pt $\in X$ che pt $\in \complement X$.

+def $\mathring{X}$ = insieme dei punti interni a X
δX = frontiera di X
$\text{est}\,X$ = esterno di X
$\overline{X} = \mathring{X} \cup \delta X$ = chiusura di X (poiché X non è detto contenga anche i pt della frontiera.

$$\mathring{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$$

+def L'insieme X è aperto se ogni suo punto è interno $\quad \mathring{X} = X$
L'insieme X è chiuso se contiene la sua frontiera $\quad X = \overline{X}$

ES: $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono contemp. aperti e chiusi $\quad \delta X$ è vuota.

+def Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ dicesi punto di accumulazione di X se ogni suo intorno contiene punti di X diversi da x, ossia

$$\forall r>0, \quad (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$$

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ dicesi punto isolato se $\exists$ un $B_r(x)$ che non contiene punti di X diversi da x, ossia

$$\exists r>0, \quad (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X = \emptyset$$

N.B. PUNTO INTERNO $\Rightarrow$ PT ACCUMULAZIONE
PUNTO ESTERNO $\Rightarrow$ NON PT ACC.
PUNTO ISOLATO $\Rightarrow$ PT di FRONTIERA

+def Un insieme X dicesi ~~[illegible]~~ limitato se $\exists R \in \mathbb{R}; R>0$ tale che

$$\|\vec{x}\| \leq R \quad \forall \vec{x} \in X$$

ossia se X è contenuto in un intorno chiuso $\overline{B}_R(\vec{0})$ dell'origine

+def Un insieme X si dice compatto se è CHIUSO e LIMITATO
$X = \mathring{X} \cup \delta X$

indichiamo con $S[a,b]$ il SEGMENTO (chiuso) di estremi a e b come l'insieme dei punti appartenenti alla retta passante per a e b, compresi tra a e b.

$$S[a,b] = \{x = a + t(b-a) : 0 \leq t \leq 1\}$$

+def Un insieme X dicesi convesso se il segmento che unisce qualsiasi di X è tutto contenuto in X.

+def Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso per archi se presi cmq $\vec{x} e \vec{y} \in A$ $\exists$ una poligonale che li congiunge interamente contenuta in A

+ PROP 4.22

Siano

$$\vec{f}: \mathrm{dom}\,\vec{f} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad e \quad \vec{g}: \mathrm{dom}\,\vec{g} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

due funzioni e sia $\vec{x}_0 \in \mathrm{dom}\,\vec{f}$ tale che $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in \mathrm{dom}\,\vec{g}$ in modo che sia definita la funzione composta

$$\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}: \mathrm{dom}\,\vec{h} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

avendosi $\vec{x}_0 \in \mathrm{dom}\,\vec{h}$. Se $\vec{f}$ è continua in $\vec{x}_0$ e $\vec{g}$ in $\vec{y}_0$ **ALLORA** $\vec{h}$ è continua in $\vec{x}_0$

Supponiamo $\vec{f}$ funzione definita in $\mathrm{dom}\,\vec{f} \subseteq \mathbb{R}^n$ e che $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sia un pt di accumulazione per dom $\vec{f}$

+def Si dice che f ha limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ (o tende a ℓ) per $\vec{x}$ tendente a $\vec{x}_0$ e si scrive

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(x) = \vec{\ell}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{dom}\,\vec{f} \qquad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \rightarrow \|\vec{f}(x) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$$

vale a dire

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{dom}\,\vec{f} \qquad \vec{x} \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in B_\varepsilon(\vec{\ell})$$

N.B. Se f è definita in x_0, si ha

$$\vec{f} \text{ cont in } \vec{x}_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \vec{f}(x_0)$$

Una CONDIZIONE NECESSARIA per l'esistenza del limite è che la funzione ristretta ad ogni retta passante per $\vec{x}_0$ ammetta lo stesso limite.

N.B non è una cond SUFFICENTE!

Una CONDIZIONE SUFFICENTE per studiare l'esistenza di un limite si basa sulla rappresentazione delle variabili indipendenti in coordinate polari, ossia

$$x = x_0 + r\cos\theta \qquad y = y_0 + r\sin\theta$$

+ PROP 4.27

Supponiamo che esista $\ell \in \mathbb{R}$ e una funzione g della sola variabile r tale che in un intorno di (x_0, y_0) si abbia

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - \ell| < g(r) \quad \text{con } \lim_{r \to 0^+} g(r) = 0$$

Allora si ha

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

NON ESISTE UN ORDINAMENTO NATURALE IN $\mathbb{R}^n$
(NO $\mp\infty$ ma solo ∞)
Gli intorni di tale punto sono definiti come: $B_R(\infty) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| > R\}$, $R > 0$
Da cui si ottiene la solita notazione $\lim_{\vec{x} \to \infty} f(\vec{x}) = \vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$

Nel caso vettoriale, si ha limite infinito quando almeno una delle componenti della funzione $\vec{f}$ tende a ∞

• PROPIETÀ DEI LIMITI E DELLA CONTINUITÀ

I principali Teoremi sui limiti delle funzioni Reali di una variabile reale valgono anche per funzioni reali di più variabili reali.
Valgono:

- TEOREMA di UNICITÀ del LIMITE
- TEOREMA di PERMANENZA del SEGNO
- TEO del CONFRONTO + COROLLARI
- ALGEBRA dei LIMITI + risp forme di indetermin.

$\Big\}\ \vec{x} \to \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ oppure ∞

- simboli di Landau: $f(x) = o(\|x\|)$ per $\vec{x} \to \vec{0}$ se $\lim_{x \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x})}{\|x\|} = 0$

• SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

Le superfici sono funzioni continue definite su particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, ossia sulle regioni piane.
Tali sottoinsiemi svolgono lo stesso ruolo degli intervalli I nella definiz. delle curve

+def Sia $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una regione. Una funzione continua $\sigma: R \to \mathbb{R}^3$ dicesi superficie
L'immagine $\Sigma = \sigma(R) \subseteq \mathbb{R}^3$ è detta sostegno della superficie

N.B indicheremo solitam. (u, v) le variabili indipendenti in R
e con

$$\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

la rappresentazione cartesiana di σ
Una superficie dicesi semplice se la restrizione di σ all'interno di R è iniettiva.
Una superficie è una calotta se è definita su una regione compatta di R (compatto = chiuso, $\mathring{X} \cup \delta X$, e limitato)

• **TEO 4.29 - Corrispettivo del TEO di ESISTENZA degli ZERI** PER f SCALARI DI PIÙ VARIABILI

Sia f una funzione continua su una regione $R \subseteq \mathbb{R}^n$
Se f assume in R tanto valori strettamente positivi quanto valori strettamente negativi;

$\boxed{\text{ALLORA}}$

necessariamente si annulla in R

dim
Se $\vec{a}, \vec{b} \in R$ sono tali che $f(\vec{a}) < 0$ e $f(\vec{b}) > 0$ e se $P[\vec{a}, \dots \vec{b}]$ è una qualunque poligonale contenuta in R congiungente $\vec{a}$ e $\vec{b}$ allora f ristretta a $P[\vec{a}, \dots, \vec{b}]$ è una funzione dipendente da una variabile che soddisfa il Teo di esistenza degli zeri monodimensionale. Dunque $\exists x_0 \in P[\vec{a}, \dots, \vec{b}]$ tale che $f(\vec{x}_0) = 0$

Cap 5

Calcolo differenz. per funzioni scalari

pag 159 - 188

potenza degli strumenti differenziali:
la conoscenza delle derivate di una funzione reale di variabile reale permette di comprendere sia il comportamento globale, sugli intervalli contenuti nel suo dominio, sia quello locale, sugli intorni via via più piccoli di un pt dom

$D' \to$ gradiente $\nabla f(\vec{x}_0)$

$D'' \to$ Hessiano

• DERIVATE PARZIALI PRIME E GRADIENTE

~~Caso bidimensionale~~

Sia data una funzione di n variabili, $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita nell'intorno di un punto $x_0 = (x_{01}, \dots x_{0n}) = \sum_{i=1}^{n} x_{0i} e_i$ dove e_i indica l'i-esimo versore della base canonica in $\mathbb{R}^n$

Diciamo che f ammette ~~der~~ derivata parziale rispetto a x_i in x_0, se la funzione reale di una variabile reale

$$x \mapsto f(x_{01}, \dots x_{0i-1}, x, x_{0i+1}, \dots, x_{0n})$$

ottenuta fissando il valore di tutte le variabili tranne la i-esima, è derivabile in $x = x_{0i}$.

In tal caso:

$$\frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_{01}, \dots x_{0i-1}, x, x_{0i+1}, \dots x_{0n}) \Big|_{x = x_{0i}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \Delta x \vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{\Delta x}$$

+def Supponiamo che f ammette derivate parziali in $\vec{x}_0$ rispetto a tutte le variabili. Definiamo il vettore gradiente di f in x_0, che indichiamo con $\nabla f(\vec{x}_0)$, ponendo

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0)\right)_{1 \leq i \leq n}$$

La funzione $\frac{\delta f}{\delta x_i}: \vec{x} \mapsto \frac{\delta f}{\delta x_i}(\vec{x})$ definita in un opportuno sottoinsieme ~~dom~~ $\text{dom} \frac{\delta f}{\delta x_i} \subseteq \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ diceri funzione derivata parziale di f rispetto a x_i.

La funzione gradiente di f $\nabla f: \vec{x} \mapsto \nabla f(\vec{x})$ il cui dom ∇f è l'intersez. dei domini delle singole derivate parziali, è un esempio di CAMPO VETTORIALE (essendo che una f definita $\subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$)

Sia f una f definita in un intorno di $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vettore ~~xxx~~ non nullo fissato. Diciamo che f ammette derivata parziale o direzionale lungo $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$ se $\exists$ finita la quantità

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

• DIFFERENZIABILITÀ E DIFFERENZIALE

Se una f reale di variabile reale f è derivabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, allora vale la prima formula dell'incremento finito

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

Neppure l'$\exists$ di tutte le derivate direzionali in $\vec{x}_0$ assicura la validità di $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) \quad \vec{x} \to \vec{x}_0$

È facile vedere che f ha derivate direzionali lungo qualunque vettore $\vec{v}$
?

• **TEOREMA di LAGRANGE E f LIPSCHITZIANE**

Siano $\vec{a}, \vec{b}$ punti distinti in $\mathbb{R}^n$ e sia

$$S[\vec{a},\vec{b}] = \{\vec{x}(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \qquad 0 \le t \le 1$$

il segmento di estremi $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

+ **TEOREMA di LAGRANGE MULTIDIMENSIONALE**

Come applicazione: **PROP 5.13**

Come conseguenza si ha che se f è differenziabile in ogni pt di un aperto A e il suo gradiente è ivi identicamente nullo allora f è cost. su ciascuna componente connessa di A.

+ def Sia R una qualunque regione contenuta in dom$f$. La funzione f dicesi lipschitziana in R se esiste una cost $L \ge 0$ tale che

$$|f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| \le L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in R$$

La più piccola costante L per cui vale la relazione precedente dicesi costante di Lipschitz ♡ di f in R

La cost di L di f in R è data da

dire che f è Lip $\Rightarrow$ che $*$ è finito

$$\sup_{\substack{x_1, x_2 \in R \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|} \quad (*)$$

Osserviamo che se R è un insieme aperto, allora la lipschitzianità di f ne implica la continuità (uniforme) su R

condizione suff per la lipschitzianità di una funz.

• **PROP 5.16**

Sia R una regione convessa contenuta in dom$f$. Se f è differenziabile e le sue derivate parziali (prime) sono ivi limitate in tale insieme e se le sue derivate parziali, per ogni $M \ge 0$ tale che allora f è lipschitz. in R. Precisamente, per ogni $M \ge 0$ tale che

$$\left|\frac{\delta f}{\delta x_i}(\vec{x})\right| < M \qquad \forall x \in \mathbb{R} \; i = 1, \dots, n$$

vale la def. di Lip. con $L = \sqrt{n}\, M$

N.B. Vale anche sotto ipo più generali: R regione compatta oppure se R ha una frontiera sufficientemente regolare

• **DERIVATE PARZIALI SECONDE E MATRICE HESSIANA**

Supponiamo che f sia derivabile rispetto a x_i in tutto un intorno di $\vec{x_0}$. Se la funzione $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ è a sua volta derivabile in $\vec{x_0}$ rispetto a x_j diciamo che f ammette in $\vec{x_0}$ derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j poniamo allora

$$\boxed{\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(\vec{x_0}) = \frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\delta}{\delta x_i}\right)(\vec{x_0})}$$

mista $j \neq i$
pura $j = i$

• **TEO 5.17 di SCHWARZ**

è convesso

La convessità locale si esprime attraverso la posizione del grafico della funzione rispetto al suo piano tg in un punto.
Precisamente se f è differenziabile in $\vec{x}_0 \in dom f$ diremo che f è convessa in $\vec{x}_0$ se $\exists B_r(\vec{x}_0)$ tale che

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \qquad \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0)$$

diremo che f è ~~strettamente~~ strettamente convessa in $\vec{x}_0$ se la disug. precedente è stretta per ogni $x \neq x_0$

NB Si può dim che la convessità locale in ogni pt di un convesso C ≡ convessità globale di f su C

Sia $f \in C^2$ in $B_r(\vec{x}_0) \subseteq dom f$ Usando il Teo 5.21 e ricordando le prop di $Hf(x_0)$ $Hf(x_0)$ è semi-definita positiva $\Longleftrightarrow$ f è convessa in $\vec{x}_0$ $Hf(x_0)$ è definita positiva $\Longleftrightarrow$ f è strett. convessa in $\vec{x}_0$

• PUNTI STAZIONARI

+def Sia $\vec{x}_0 \in dom f$. Si dice che $\vec{x}_0$ è ~~punto di~~ punto di massimo relativo (o locale) per f se $\exists B_r(x_0)$ tale che

$$\forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0) \cap dom f \qquad f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$$

Il valore di $f(\vec{x}_0)$ dicesi massimo relativo di f
Si dice che $\vec{x}_0$ è punto di massimo assoluto (o globale) per f se

$$\forall x \in dom f \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Il valore $f(x_0)$ dicesi massimo assoluto di f. In tutti i casi, il massimo si definisce stretto se si ha $f(x) < f(x_0)$ per $x \neq x_0$
Analogamente per i pt di minimo rel o ass per f
→ sono pt di estremo per f

I punti di estremo sono detti LIBERI in quanto la v.i è libera di variare in tutto il dom f → nel cap 7 intro il concetto di ESTREMO VINCOLATO in cui la v.i è ristretta ad un particolare sottoinsieme del dom f (ad es curve o superficie)

• TEO di WEIERSTRASS (cond suff per ∃ estremi funz) (5.24)

+def Un punto $\vec{x}_0$ in cui f è differenziabile dicesi punto critico o stazionario per f se $\nabla f(x_0) = \vec{0}$. Se invece $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ il pt $\vec{x}_0$ dicesi regolare per f.

N.B in un pt stazionario si annullano tutte le derivate direzionali di f

N.N.B. pt ~~stazz~~ ⇒ pt in cui il piano tg è orizzontale (~~def~~ 5.6 prima della prop 5.7)

• PROP 5.8.

Supponiamo che f ammetta derivate parziali continue in un intorno di $\vec{x}_0$. Allora f è differenziabile in $\vec{x}_0$.

• PROP 5.9

Se f è differenziabile in $\vec{x}_0$, allora f ammette in $\vec{x}_0$ derivate direzionali lungo qualunque vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) v_n$$

dim

Si ha usando $\left[f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) \right]$ 5.4

$$f(x_0 + t\vec{v}) = f(\vec{x}_0) + t \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} + o(\|t\vec{v}\|) \quad \|t\vec{v}\| \to 0$$

Poiché $\|t\vec{v}\| = |t| \|\vec{v}\|$ si ha che $o(\|t\vec{v}\|) = o(t) \quad t \to 0$

Pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} + o(t)}{t}$$

$$= \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$$

• PROP 5.11

Siano $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ punti fissati e supponiamo che f sia differenziabile nel punto $\vec{a} + t_0\vec{v}$ con $t_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{v})$ è derivabile ~~e si ha~~ in t_0 e si ha:

$$\varphi'(t_0) = \nabla f(\vec{a} + t_0\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

dim

Ponendo $\Delta t = t - t_0$ si ha $\vec{a} + t\vec{v} (a + t_0 v) + \Delta t \vec{v}$ e dunque

$$\varphi(t) = f(\vec{a} + t_0\vec{v} + \Delta t \vec{v}) = \psi(\Delta t)$$

si ottiene il risultato applicando la 5.8 alla funzione ψ

- **PROP 5.13**

Sia R una regione di $\mathbb{R}^n$ ed $f: R \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua in R e differenziabile in ogni punto di $A = \overset{\circ}{R}$

Allora

$$\nabla f = 0 \text{ in } A \iff f \text{ è costante in } R$$

Dim

Abbiamo già osservato che se f è costante in R, e dunque in A, allora $\nabla f = 0$ in ogni punto di A.

Viceversa fissiamo un qualunque punto a in A, e sia b un punto arbitrario in R. $\exists$ allora una poligonale $P[a_0, \dots, a_r]$ con $a_0 = a$ e $a_r = b$ che congiunge tali pt.

Su ciascun segmento $S[a_{j-1}, a_j]$ $1 \leq j \leq r$ che compone la poligonale, sono soddisfatte le ipotesi del Teo 5.12 e dunque dalla 5.10 e dall'ip che ∇f è identicamente nullo e si ha

$$f(\vec{a}_j) - f(a_{j-1}) = 0$$

da cui $f(\vec{b}) = f(\vec{a})$ per ogni $b \in R$ cioè f è cost.

• TEO 5.24 di WEIERSTRASS

Sia f una funzione continua su un insieme compatto $K \subseteq dom f$

$\boxed{\text{Allora}}$ l'immagine $f(K)$ è un intervallo chiuso e limitato

In particolare f assume su K valore minimo e massimo

• TEO 5.26 di FERMAT

Sia $\vec{x_0}$ un punto di estremo per f, in cui f è differenziabile

$\boxed{\text{Allora}}$ $\vec{x_0}$ è punto stazionario per f

<u>dim</u>

Per hyp, per $\forall i$, la funzione di una variabile

$$x \mapsto f(x_{01}, \dots x_{0,i-1}, x, x_{0,i+1}, \dots x_{0n})$$

è definita in un intorno di x_{0i} ed è ivi derivabile; inoltre essa ha un punto di estremo in x_{0i}. Pertanto a tale funzione si applica il Teo di Fermat monodimensionale, che fornisce $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}) = 0$

Cap 6

Calcolo differenziale per f vettoriali

pag 207 - 257

22-AGO 2011 - 22 AGO 2011

• DERIVATE PARZIALI e MATRICE JACOBIANA

Sia $\vec{x}_0 \in dom f$. Supponiamo che $\forall$ componente f_i di $\vec{f}$ ammetta in $\vec{x}_0$ tutte le derivate parziali prime $\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$ $j=1,\dots,n$, ossia che sia definito il vettore gradiente

$$\nabla f_i(\vec{x}_0) = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(\vec{x}_0)\right)_{1\le j\le n} = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_1}(x_0), \dots, \frac{\delta f_i}{\delta x_n}(x_0)\right)$$

+def la matrice a m righe e ad n colonne

$$Jf(\vec{x}_0) = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(\vec{x}_0)\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

dicesi matrice jacobiana di f in x_0

N.B. Se $\vec{f} - f$ è una funzione scalare $(m=1) \rightarrow Jf(x_0) = \nabla f(x_0)$

• DIFFERENZIABILITÀ e LIPSCHITZIANITÀ

Supp che $\forall f_i$ di $\vec{f}$ sia differenziabile in $\vec{x}_0 \in dom \vec{f}$ ossia valgano le formule, per $i=1,\dots,m$

$$f_i(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\nabla f_i(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|) \qquad \vec{x}\to\vec{x}_0$$

prodotto scalare che può essere pensato come prod vettore riga $\nabla f_i(\vec{x}_0)$ e vett col $(\vec{x}-\vec{x}_0)$

In base alla definizione di matrice jacobiana quindi:

$$\vec{f(\vec{x})} = \vec{f(\vec{x}_0)} + Jf(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|) \qquad \vec{x}\to\vec{x}_0$$

Diremo quindi che f è differenziabile in $\vec{x}_0$

Chiamiamo differenziale di f in x_0 l'applicazione lineare df_{x_0} tra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ definita da

$$df_{x_0} : \Delta x \mapsto Jf(x_0)\Delta\vec{x}$$

La formula prec afferma che a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, l'incremento $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ è approssimato al valore del differenziale $df_{x_0} = Jf(x_0)\Delta\vec{x}$

Le PROP 5.7 - 5.8 → SI ESTENDONO ALLE f VETT

Sia R una qualunque regione contenuta in dom f

+def La funzione f dicesi lipschitziana in R se $\exists L \ge 0$ tale che

$$\|\vec{f(x_1)} - \vec{f(x_2)}\| \le L\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in R$$

La più piccola costante L per cui vale la relazione dicesi costante di Lipschitz di f in R.

+PROP 6.4

Sia R una regione connessa $\subseteq dom \vec{f}$. Se $\vec{f}$ è differenziabile in tale insieme e se $\exists M \ge 0$ tale che

$$\left|\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(x)\right| \le M \qquad \forall x \in R \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

allora f è lipschitziana in R con $L = \sqrt{nm}\, M$

Gli operatori div e rot sono lineari

$$\mathrm{div}(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{div} f + \mu \,\mathrm{div}\, g \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{rot}(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{rot} f + \mu \,\mathrm{rot}\, g$$

valgono inoltre

$$\boxed{\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi\psi) = \psi\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi + \varphi\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi \\
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec f \cdot \vec g) = \vec g\, Jf + \vec f\, Jg \\
&\mathrm{div}(\varphi \vec f) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi \cdot \vec f + \varphi\, \mathrm{div} \vec f \\
&\mathrm{div}(\vec f \wedge \vec g) = \vec g \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec f - \vec f\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec g \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\varphi \vec f) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi \wedge \vec f + \varphi\, \mathrm{rot} f \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec f \wedge \vec g) = \vec f\, \mathrm{div}\, \vec g - \vec g\, \mathrm{div} \vec f + \vec g\, Jf + \vec f\, Jg
\end{aligned}}$$

+ PROP 6.7

i) Sia φ un campo scalare di classe C^2 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$

Allora

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi = \nabla \wedge (\nabla \varphi) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

ii) Sia $\vec\Phi$ un campo vettoriale di classe C^2 in un aperto Ω in $\mathbb{R}^3$

Allora

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec\Phi = \nabla \cdot (\nabla \wedge \phi) = 0 \text{ in } \Omega$$

In versione bidimensionale

+ PROP 6.8

Sia φ un campo scalare di classe C^2 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$

Allora

$$\mathrm{rot}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \varphi = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

+ **def** Un campo vettoriale $\vec f$, definito e diff in un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ e tale che ivi $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec f = 0$ dicesi IRROTAZIONALE in Ω

Un campo vettoriale $\vec f$ definito e diff in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e tale che ivi $\mathrm{div} \vec f = 0$ dicesi SOLENOIDALE in Ω

+ **def** Un campo vettoriale $\vec f$ definito in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ dicesi conservativo in Ω se $\exists$ un campo scalare φ tale che $\vec f = \mathrm{grad}\, \varphi$ in Ω – La funzione φ dicesi potenziale (scalare) di $\vec F$ –

Un campo vett $\vec f$ definito ~~in~~ in un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ dicesi di tipo rotore in Ω se $\exists$ un campo vettoriale $\vec\Phi$ tale che $\vec f = \mathrm{rot}\, \vec\Phi$ in Ω. Tale campo Φ dicesi potenziale vettore di $\vec f$ -

- **DERIVAZIONE di f COMPOSTE**

Studiamo le proprietà di derivazione di f vettoriali

Siano $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g: \text{dom} g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

due funzioni

e sia $\vec{x}_0 \in \text{dom} f$ tale che $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0) \in \text{dom}\,\vec{g}$

in modo tale che sia definita la f composta

$$\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f} : \text{dom} h \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$\vec{h}$ è continua per la prop 4.22

+ TEO 6.14

Posto $\vec{x} = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$

e siano $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = (f_k(\vec{x}))_{1 \leq k \leq m}$ e $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y}) = (g_i(\vec{y}))_{1 \leq i \leq p}$

Da cui $\vec{z} = \vec{h}(\vec{x}) = (h_i(\vec{x}))_{1 \leq i \leq p}$

$$\boxed{\frac{\delta z_i}{\delta x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta z_i}{\delta y_k}(\vec{y}_0) \cdot \frac{\delta y_k}{\delta x_j}(\vec{x}_0) \qquad 1 \leq i \leq p \quad 1 \leq j \leq n}$$

REGOLA della CATENA per la derivazione di f composte

*** COROLLARIO 6.16 - multidim f^{-1} inversa**

→ APP: f DEFINITE MEDIANTE INTEGRALI

ci limitiamo a trattare il caso in cui la f integranda (che dipende da due variabili scalari/vett e applica l'integrazione def. rispetto ad una delle due variabili) dipende da variabili scalari (NON È DIFF. L'ESTENSIONE vett)

Sia g una f reale definita su ~~[...]~~ $R = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ (J: $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato; I: intervallo R)

Supp che g sia continua su R

introduciamo la funzione

$$f(x) = \int_a^b g(x,y)\,dy$$

risulta definita su tutto I in quanto per $\forall x \in I$ la f $y \mapsto g(x,y)$ è continua e dunque integrabile su J

VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

+ PROP. 6.17 - Regola di derivazione sotto segno di ∫

LE OPERAZIONI di DERIVAZIONE RISP AD UNA DELLE 2 VARIABILI e di INTEGRAZIONE RISPETTO ALL'ALTRA VARIABILE COMMUTANO TRA LORO

$$\frac{d}{dx} \int_a^b g(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\delta g}{\delta x}(x,y)\,dy$$

<u>N.B.</u> f(x) può essere generalizzata

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,y)\,dy \qquad \alpha(x), \beta(x) \text{ definite su } I \text{ a valori in } [a,b]$$

s è strettamente crescente e invertibile su I _

Detto $J = s(I)$ l'intervallo immagine di I attraverso s

$t : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ la funzione inversa di s

cioè esprimiamo il parametro t in funzione del nuovo parametro s

$$t = t(s)$$

La curva $\tilde{r} : J \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{r}(s) = r(t(s))$ è equivalente a r

Se $P_1 = r(t_1) \to P_1 = \tilde{r}(s_1)$ con $t_1 = t(s_1)$

s_1 è detto ASCISSA CURVILINEA di P_1

$$\tilde{r}'(s) = \frac{d\tilde{r}}{ds}(s) = \frac{dr}{dt}(t(s))\,\frac{dt}{ds}(s) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

da cui

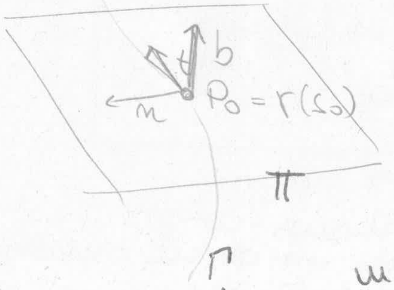
$$\|\tilde{r}'(s)\| = 1 \quad \forall s \in J$$

USANDO L'ASCISSA CURVILINEA IL SOSTEGNO DELLA CURVA VIENE PERCORSO CON VELOCITA' COST = 1

→ Elementi di geometria differenziale di una curva

vedere trattazione sul libro

$\vec{n}(s_0) = \dfrac{\vec{t}'(s_0)}{\|t'(s_0)\|}$ versore normale principale



$\vec{t}(s) = r'(s)$

$\vec{t}'(s) = r''(s)$ accelerazione (se $r(s)$ traiettoria)

$\vec{t}(s_0)$ e $\vec{n}(s_0)$ sono $\perp$ e giacciono sul piano osculatore alla curva Γ in P_0

Tra tutti i piani passanti per P_0 → è quello che meglio si adatta alla curva

Il verso di $\vec{n}$ è legato alla CONVESSITA' della curva

Lo scalare $K(s_0) = \|\vec{t}'(s_0)\|$ viene detto curvatura di Γ in P_0

mentre il suo reciproco $R(s_0)$ è detto raggio di curvatura

Muovendosi infatti della lungh. $R(s_0)$ nel verso di $\vec{n}$ e costruendo in quel punto ($C(s_0)$ detto centro di curvatura) Allora la circonf. di centro $C(s_0)$ e raggio $R(s_0)$ è tg alla curva _

Introd. il versore normale al piano osculatore

$$\vec{b}(s_0) = \vec{t}(s_0) \wedge \vec{n}(s_0)$$ versore binormale a Γ in P_0

La variaz. di $\vec{b}(s_0)$ misura quanto una curva si discosta da una curva piana

Se la curva $\in C^3$ ha senso introdurre il vettore $\vec{b}'(s_0)$ detto vettore torsione della curva in P_0 _

$b'(s_0)$ è parallelo a $n(s_0)$ $\exists$ dunque uno scalare $\tau(s_0)$ detto torsione tale che $b'(s_0) = \tau(s_0)\,\vec{n}(s_0)$ NB una curva è piana $\iff$ $\tau(s_0) = 0$

In definitiva $\vec{t}, \vec{n}$ e $\vec{b}$ sono legati fra loro dalle FORMULE di FRENET

$$\vec{t}\,' = K\vec{n} \qquad \vec{n}\,' = -K\vec{t} - \tau\vec{b} \qquad \vec{b}\,' = \tau\vec{n}$$

- CAMBIAMENTI di VARIABILE

Sia R una regione di $\mathbb{R}^n$ avente interno A. Il generico punto $P \in R$ è individuato dalle sue coord cartesiane $x_1, x_2, \dots, x_n$ cioè dalle componenti di un vettore $\vec{x}$. $P = \vec{x}$. Per $i = 1, \dots, n$ la retta

$$R_i = \vec{x} + \mathbb{R}\vec{e}_i = \{\vec{x}_t = (x_1, \dots x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots x_n) : t \in \mathbb{R}\}$$ rette coordinate passanti per P

passa per P ed è // all' $\vec{e}_i$

+def Un campo vettoriale $\vec{\Phi} : R' \to R$ (con R' un'altra regione di $\mathbb{R}^n$, di interno A') definisce un cambiamento di variabile, o di COORDINATE in R se ha le seguenti proprietà:

1) $\vec{\Phi}$ è una biiezione tra R' e R

II) $\vec{\Phi}$ è di classe C^1 in A'

III) $\vec{\Phi}$ è regolare in A', cioè la sua matrice jacobiana $J\vec{\Phi}$ è non singolare in ogni pt di A'

Indichiamo con $Q = \vec{u}$ il generico pt di R' avente coord cart. $u_1, \dots, u_n$. Dalla definizione segue che, fissato $P_0 = \vec{x}_0 \in A$, per la I) $\exists! \, Q_0 = \vec{u}_0 \in A'$ tale che $P_0 = \vec{\Phi}(Q_0)$ ossia $\vec{x}_0 = \vec{\Phi}(\vec{u}_0)$

Dunque P_0 può essere identificato, oltre che dalle coord cartesiane $x_{01}, \dots$ anche dalle coord. cartesiane $u_{01}, \dots, u_{0n}$ dette coordinate curvilinee di P_0 (relative alla trasformazione $\vec{\Phi}$)

Le rette coordinate passanti per Q_0 danno luogo a curve in R, passanti per P_0. Precisamente per $i = 1, \dots, n$ l'insieme

$$\Gamma_i = \{\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{u}_0 + t\vec{e}_i) : \vec{u}_0 + t\vec{e}_i \in R' \text{ con } t \in I_i\}$$

(dove I_i è un intervallo contenente l'origine) è il sostegno della curva semplice*

$$t \mapsto \vec{r}_i(t) = \vec{\Phi}(\vec{u}_0 + t\vec{e}_i)$$

definite in I_i.

Chiameremo tali insiemi linee (curve) coordinate passanti per P_0 (relative al cambiam. di variabile $\vec{\Phi}$

*semplice grazie alla I)

Se $P_0 \in A \Rightarrow$ tali curve sono regolari - $\exists$ i vettori tg in P_0

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}\,'_i(0) = J\vec{\Phi}(\vec{u}_0) \cdot \vec{e}_i = \frac{\delta \vec{\Phi}}{\delta u_i}(\vec{u}_0) \qquad 1 \le i \le n$$

Essi sono i vett. colonna di $J\vec{\Phi}(\vec{u}_0)$

(N.B colonne! non riga! sono i gradienti)

Pertanto in base alla III) i vettori $\vec{\tau}_i$ sono L.I. $\Rightarrow$ formano UNA BASE di $\mathbb{R}^n$

Indicheremo con $\vec{t}_i = \dfrac{\vec{\tau}_i}{\|\vec{\tau}_i\|}$ i corrisp. versori.

SE IN OGNI $P_0 \in A$ I VETT. TG SONO ORTOGONALI FRA LORO $\Leftrightarrow$ cioè se $J\vec{\Phi}(\vec{u}_0)^T \, J\vec{\Phi}(\vec{u}_0)$ è diagonale $\rightarrow$ il cambiam. di variabile si dirà ortogonale

$\Rightarrow$ VEDI CAMBIAMENTI di VARIABILE NOTEVOLI detti A e $\tilde{A}$ risp gli interni di R e $\tilde{R}$

$\det J\Phi > 0$ in $\tilde{A}$ param. equivalente

$\det J\Phi < 0$ in $\tilde{A}$ param. anti-equivalente

N.B il piano tangente alla superficie Σ è invariante alle parametrizzazioni congruenti.

N.BB. $\vec{\tilde{\nu}} = (\det J\vec{\Phi})\vec{\nu}$

Due param. congruenti generano vett normal avendo la stessa direzione, mentre il verso è lo stesso se sono equiv. ed opposto se ANTI-equiv.

- **SUPERFICI ORIENTABILI**

Nastro di Möbius e la bottiglia di Klein → controesempi per il fatto che 2 param. di superfici regolari e semplici $\not\Rightarrow$ congruenza

+def Una superficie regolare e semplice $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ dicesi orientabile se, prese due qualunque parametrizzazioni regolari e semplici ene sono tra loro congruenti.

+ PROP 6.39

Ogni superficie (o calotta) regolare e semplice Σ contenuta nella frontiera $\delta\Omega$ di un aperto connesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile.

Si potrà quindi scegliere $\vec{n}$ uscente da Ω oppure entrante in Ω.

- **BORDO di una SUPERFICIE - Superfici CHIUSE**

presentazione elementare

Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e semplice, supponiamo che Σ sia un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^3$.

Sia poi $\vec{\sigma}: R \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ una sua param. con R chiusa.

Detto $A = \mathring{R}$ l'interno di R consideriamo la sua immagine $\Sigma^\circ_\sigma = \sigma(A)$ attraverso $\vec{\sigma}$ che è un sottoinsieme $\Sigma = \vec{\sigma}(R)$

Posso introdurre la differenza

$$\delta\Sigma_\sigma = \Sigma / \Sigma^\circ_\sigma$$

che chiamiamo bordo di Σ (relativo a σ)

È naturale definire BORDO l'insieme

$$\delta\Sigma = \bigcap \delta\Sigma_\sigma$$

Cioè l'intersezione di tutte le possibili parametrizzazioni

UNA SUPERFICIE REGOLARE E SEMPLICE $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è CHIUSA se è limitata e NON HA BORDO $(\delta\Sigma = \emptyset)$

• TEO 6.14

Sia $\vec{x}_0 \in \text{dom}\, h$.
Supponiamo che f sia differenziabile in $\vec{x}_0$
e $\vec{g}$ sia differenziabile in $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$

$\boxed{\text{ALLORA}}$

$h = g \circ f$ è differenziabile in $\vec{x}_0$
e la sua matrice jacobiana è data da

$$\underbrace{J(g\circ f)}_{p\times n} = \underbrace{Jg(\vec{y}_0)}_{p\times m}\underbrace{Jf(\vec{x}_0)}_{m\times n}$$

• COROLLARIO 6.16 - f^{-1} INVERSA MULTIDIM

Sia $\vec{f} : \text{dom}\,\vec{f} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
una f differenziabile in $\vec{x}_0$
con $Jf(\vec{x}_0)$ non singolare
supponiamo inoltre che f sia invertibile in un intorno di $\vec{x}_0$
e che la funzione inversa f^{-1} sia differenziabile in $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$
Si ha $\boxed{\text{ALLORA}}$

$$J(f^{-1})(y_0) = \left(Jf(\vec{x}_0)\right)^{-1}$$

<u>dim</u>

È sufficiente applicare il Teorema con $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$, notando che $\vec{h} = \vec{f}^{-1} \circ \vec{f}$
è la funzione identità (soddisfacente $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{x}$ per $\forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0)$)
e dunque $J\vec{h}(\vec{x}_0) = \vec{I}$
si ha quindi

$$J(\vec{f}^{-1})(\vec{y}_0)\, Jf(\vec{x}_0) = \vec{I}$$

da cui segue la tesi essendo $Jf(\vec{x}_0)$ invertibile

Cap 7

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

pag 269 - 294

23 AGO 2011 - 23 AGO 2011

Due sono gli argomenti trattati:
- TEOREMA della FUNZIONE IMPLICITA (del DINI) & IMPLICAZIONI
- STUDIO degli ESTREMI VINCOLATI di una funzione

Il Teorema della F. implicita fornisce ~~funz~~ condizioni sufficienti affinché un'equazione che lega tra loro due o più variabili indipendenti possa essere esplicitata, esprimendo una delle variabili in funzione delle altre. Permette di comprendere la natura degli insiemi di livello di una funzione reale di due o 3 variabili ⇒ che, in cond di regolarità, = risp curve e superfici nello spazio.

Gli estremi vincolati di una funzione, ossia gli estremi della funzione ristretta ad un certo sottoinsieme del dominio, vengono studiati attraverso due metodi:
- un metodo parametrico, che riduce il problema alla ricerca di estremi liberi in dimensione inferiore
- metodo dei moltiplicatori di Lagrange, che si basa su considerazioni di tipo geometrico, riducendo il problema allo studio dei pt stazionari di una nuova funzione nota come lagrangiana del problema.

- **TEOREMA della FUNZIONE IMPLICITA**

Un'equazione della forma

$$f(x,y) = 0$$

stabilisce una relazione implicita tra le variabili x e y.
In termini geometrici, essa definisce un luogo nel piano, l'insieme di tutti i punti $P(x,y)$ le cui coordinate soddisfano l'equazione.
Molto spesso è possibile esplicitare la relazione, esprimendo localmente (almeno nell'intorno della soluzione) una delle variabili in funzione dell'altra

$$y = \varphi(x) \quad o \quad x = \psi(y)$$

Notiamo che non si può esplicitare nell'intorno di pt ove si viola l'univocità dell'immagine della funzione. In particolare non si esplicita dove la derivata parziale della funzione si annulla.
Bisogna quindi distinguere tra il caso in cui
- esiste una funz tra le v. i che rende esplicita la ~~funzione~~ relazione
- la possibilità di rappresentare la funzione in termini di f elementari note.

Bisogna dunque avere criteri che, ~~laddove~~ dove non sia possibile esplicitare in forma analitica chiusa una delle variabili in f dell'altra, garantiscano almeno che tale funzione esiste.

Il Teo del Dini fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza della funzione = non deve annullarsi la derivata parziale della variabile che si vuole esplicitare.

Teo nel caso bidimensionale: **TEO 7.1 - DINI IN 2 VARIABILI**
Deduzioni analoghe nel caso $\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \neq 0$ con variabili scambiate.
Possiamo sintetizzare quanto visto:

*** COROLLARIO 7.3**