NUMERO : 167

DATA : 03/10/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Mesaglio

MATERIA : Analisi II
Prof. Ugaglia

ANALISI I — APPUNTI

DIFFERENZIABILITÀ

Def: (DERIVATA PARZIALE) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in un punto $\bar{x}_0\, (x_0, y_0, z_0 \dots)$ interno al suo dominio se, posto $\Delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$, esiste finito il limite $\lim_{\Delta \bar{x} \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x} \cdot e_i) - f(\bar{x}_0)}{\Delta \bar{x}}$

- (DERIVATA DIREZIONALE) f ammette derivata direzionale nella direzione di $\bar{v}$ se $\exists$ finito $\lim_{\Delta \bar{x} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x} \cdot \bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{\Delta \bar{x}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t}$

Def (DIFFERENZIABILITÀ) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\bar{x}_0$, interno al dom(f) se
- $\exists\ \bar{\nabla} f(\bar{x}_0)$
- $f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \Delta \bar{x} + o(\|\Delta \bar{x}\|)$ per $\Delta \bar{x} \to \bar{0}$

PROPRIETÀ:

1) in $n=2$ f DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow \exists$ PIANO TANGENTE A f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e ha equazione $z = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x}$

2) f DIFFERENZIABILE in $\bar{x}_0 \Rightarrow f$ CONTINUA IN $\bar{x}_0$
(l'esistenza del solo gradiente non implica la continuità in un punto → es: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ in $\bar{x}_0 = (0,0)$

3) f DIFFERENZIABILE in $\bar{x}_0 \Rightarrow \exists$ DERIVATE DIREZIONALI $\forall \bar{v}$
$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v}$

DIM:
$$f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\cancel{\bar{x}_0} + t\bar{v} - \cancel{\bar{x}_0}) + o(\cancel{\bar{x}_0} + tv - \cancel{\bar{x}_0})$$
$$= f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot (t\bar{v}) + o(t\bar{v})$$
$$= f(\bar{x}_0) + t\, \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v} + o(t\bar{v})$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(\bar{x}_0)} + t \nabla f(\bar{x}_0) - \cancel{f(\bar{x}_0)} + o(t\bar{v})}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t} \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v}}{\cancel{t}} + \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{o(t\bar{v})}{t}}_{\to 0} = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v}$$

SUPERFICIE: funzione continua da $R \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (R = REGIONE cioè aperto connesso con parte del bordo), il SOSTEGNO ≡ IMMAGINE $\sigma(R)$

→ SEMPLICE se INIETTIVA su $\mathring{R}$

→ CALOTTA se R è COMPATTO

→ REGOLARE se $\sigma(u,v) \in C^1(R) \wedge J_\sigma(u,v)$ HA RANGO 2

cioè $\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \vec{N}(u,v) \neq \vec{0}$

⇒ se σ è REGOLARE e SEMPLICE in (u_0,v_0) ⇒ $\exists\, \vec{N}(u_0,v_0)$ e $\exists$ il piano tangente a σ in (u_0,v_0) ortogonale a $\vec{N}$.

→ CURVE COORDINATE: $\sigma|_{\{u=u_0\}} = \sigma(u_0,v)$ $\quad \sigma|_{\{v=v_0\}} = \sigma(u,v_0)$

TEOREMA DI DINI (2VAR)

- $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$ con A = APERTO
- $\exists (x_0,y_0) \mid f(x_0,y_0) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

⇒ $\exists\, I(x_0)$, $\exists\, \varphi\, I \longrightarrow \mathbb{R}$ | il luogo $f(x,y)=0$ coincide localmente con il grafico di φ cioè

1) $(x, \varphi(x)) \in \operatorname{dom} f$
2) $y_0 = \varphi(x_0)$
3) $f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I$
4) $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$

TEOREMA DI DINI (3 VAR)

- $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^1(A)$ con A = APERTO
- $\exists (x_0,y_0,z_0) \mid f(x_0,y_0,z_0) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

⇒ $\exists\, A(x_0,y_0)$, $\exists\, \varphi: A \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

1) $(x,y,\varphi(x,y)) \in \operatorname{dom} f$
2) $(z_0 = \varphi(x_0,y_0)$
3) $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in A$
4) $\varphi \in C^1(A)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$

Localmente $f_{|\gamma} = f(\gamma(t))$ e t_0 è punto di estremo libero per $h(t) = f(\gamma(t))$

$\Rightarrow h'(t_0) = 0$, ma $h'(t_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \Rightarrow \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \perp \gamma'(t_0)$

segue che $\nabla g(\bar{x}_0) \parallel \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(\bar{x}_0) = \lambda \bar{\nabla} g(x_0)$

Def: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la LAGRANGIANA di $f_{|\{g=0\}}$ è

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) \doteq f(\bar{x}) - \lambda g(\bar{x}) \quad \text{con } \mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

PROPRIETÀ

se $\bar{x}_0$ è punto di estremo per $f_{|\{g=0\}} \Rightarrow \bar{\nabla} \mathcal{L}(\bar{x}_0, \lambda_0) = \bar{0}$

↓

DIM: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_0 \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = 0$ per TEOREMA

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g(\bar{x}_0) = 0$ perché $x_0 \in \{g = 0\}$

INTEGRALI DOPPI

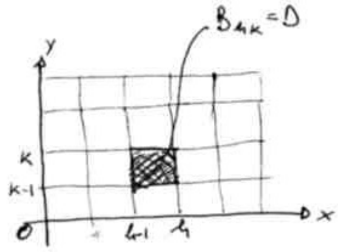
- COSTRUZIONE DI RIEMAN

$B = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$

$I_h = [x_{h-1}, x_h]$ ← PARTIZIONE DI $[a,b]$

$J_k = [y_{k-1}, y_k]$ ← PARTIZIONE DI $[c,d]$

$\Big\}\ B_{hk} = I_h \times J_k \doteq D$



$m_{hk} \doteq \inf\limits_{B_{hk}} (f)$

$M_{hk} \doteq \sup\limits_{B_{hk}} (f)$

Somma INFERIORE $\doteq \displaystyle\sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} m_{hk} \cdot \text{Area}(B_{hk})$

$= \sum \sum m_{hk} (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1}) = s$

Somma SUPERIORE $\doteq \displaystyle\sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} M_{hk} \cdot \text{Area}(B_{hk}) = S$

f LIMITATA SU $B \subseteq \mathbb{R}^2$ è INTEGRABILE SECONDO REIMANN SE

$$\sup_D s(D,f) = \inf_D S(D,f) \doteq \iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \text{Vol}(C)$$

- f CONTINUA SU $B \Rightarrow f$ INTEGRABILE SU B.

— PROPRIETÀ INTEGRALI DOPPI : Vd. FOGLIO CON FORMULE D'INTEGRAZIONE

CAMBIO COORDINATE:

Def: Siano $R, R' \subseteq \mathbb{R}^n$ REGIONI e $\phi : R' \to R$ CAMPO VETTORIALE che definisce un CAMBIAMENTO DI COORDINATE se:

- ϕ è BIETTIVA TRA R' e R
- $\phi \in C^1(A')$ con $A' = \mathring{R}'$
- ϕ REGOLARE IN A' ($J\phi$ NON SINGOLARE IN A')

⊙ SOLIDI DI ROTAZIONE

- VOLUME

si ottiene per rotazione attorno all'asse z di $T = \left\{ \binom{y}{z} \mid a \le z \le b,\ 0 \le y \le f(z) \right\}$ con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

$$V = \int_a^b \left(\iint_{A_z} 1 \, dx\,dy \right) dz = \int_a^b Area(A_z)\, dz = \int_a^b \pi f(z)^2 dz = \pi \int_a^b f(z)^2 dz$$

$$y_G = \frac{1}{Area(T)} \iint_T y \, dy\,dz = \frac{1}{|T|} \int_a^b \int_0^{f(z)} y\, dy\,dz = \frac{1}{|T|} \int_a^b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2|T|} \cdot \int_a^b f(z)^2 dz = \frac{1}{2|T|} \frac{Vol}{\pi} \longrightarrow V = 2\pi y_G |T| = 2\pi y_G \, Area(T)$$

$$= 2\pi \iint_T y \, dy\,dz.$$

| I TEOREMA DI GULDINO

Il volume di un solido Ω che si ottiene per rotazione di un insieme $T \subseteq \{y,z\}$ misurabile, è il prodotto dell'area di T per la circonferenza descritta dal baricentro di T.

- SUPERFICIE

$$Area(S) = 2\pi y_G \cdot \ell(\Gamma)$$

$$y_G = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_\Gamma y \, d\gamma \longrightarrow Area = 2\pi \int_\Gamma y \, d\gamma$$

| II TEOREMA DI GULDINO

L'area di una superficie S che si ottiene per rotazione di una curva $\Gamma \subseteq \{yz\}$ attorno all'asse z è il prodotto della lunghezza Γ per la circonferenza descritta dal baricentro di Γ

GENERALIZZAZIONE: se $\gamma[a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare a tratti | $f \circ \bar{\gamma}$ è continua a tratti

allora $\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f$ ove $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}|_{I_k}$ è REGOLARE.

Def: $\bar{\gamma}[a,b] \to \mathbb{R}^n$ CURVA REGOLARE, Γ SOSTEGNO, $\bar{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CAMPO VETTORIALE definito su Γ e $\bar{F} \circ \bar{\gamma}'$ CONTINUA A TRATTI

Indicando con $\bar{\tau}(t) = \dfrac{\bar{\gamma}'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ il versore tangente a $\gamma(t)$, considero la componente tangenziale $\bar{F}_\tau(t) = \bar{F}(\bar{\gamma}(t))\bar{\tau}(t)$, l'integrale di linea di $\vec{F}$ su $\bar{\gamma}'$ è l'integrale curvilineo di I specie di $\bar{F}_\tau(t)$ lungo γ.

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot \bar{\tau} = \int_\gamma \bar{F}_\tau(t) = \int_a^b \bar{F}_\tau(t) \cdot \|\bar{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_a^b \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \bar{\tau}(t) \, \|\bar{\gamma}'(t)\| \, dt$$

$$= \int_a^b \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \, \cancel{\|\gamma'(t)\|} \, dt = \int_a^b \bar{F}(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt.$$

TEOREMA DELLA DIPENDENZA DELLA PARAMETRIZZAZIONE

$\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\delta}: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ CONGRUENTI, $\vec{F}$ CAMPO VETTORIALE

$$\int_\gamma \bar{F} \, d\bar{\delta} = \begin{cases} \int_\gamma \bar{F} \, d\bar{\gamma} & \text{se } \bar{\delta} \text{ e } \bar{\gamma} \text{ SONO EQUIVALENTI} \\ -\int_\delta \bar{F} \, d\bar{\delta} & \text{se } \bar{\delta} \text{ e } \bar{\gamma} \text{ SONO ANTIEQUIVALENTI.} \end{cases}$$

DIM: Segue da quella sugli integrali di I specie
$\tau_\delta = \tau_\gamma$ se $\bar{\delta} \sim \bar{\gamma}$ e $\tau_\delta = -\tau_\gamma$ se $\bar{\delta} \sim -\bar{\gamma}$

NOTA se $\gamma(a) = \gamma(b) \to \gamma$ è CHIUSA, l'INTEGRALE SI CHIAMA CIRCUITAZIONE $\oint_\gamma F d\rho$

⑥ INTEGRALI SUPERFICIALI

Def: $\bar{\sigma}: R \to \mathbb{R}^3$ CALOTTA REGOLARE e SEMPLICE con R REGIONE COMPATTA
$\bar{N}(u,v)$ vettore normale, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita su Σ = Sostegno di $\bar{\sigma}$; $f \circ \bar{\sigma}$ è GENERALMENTE CONTINUA, l'integrale di superficie è

$$\int_{\bar{\sigma}} f = \iint_R f(\bar{\sigma}(u,v)) \cdot \|\bar{N}(u,v)\| \, du dv$$

TEOREMA DI GREEN

$$\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ G-AMMISSIBILE APERTO} \\ \vec{F}: A \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ CAMPO VETTORIALE DI CLASSE } C^1(A) \end{cases} \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F} \cdot \vec{\tau} \; *$$

* $\partial^+ A$ = bordo percorso positivamente, cioè lasciando l'insieme a sinistra.

DIM

- Sia $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^2$ tale che il sostegno $\Gamma \subseteq A$.

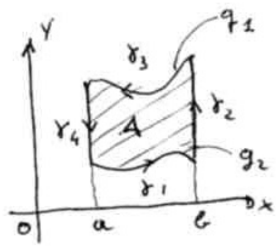
$$\hookrightarrow \int_{\bar{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_{\bar{\gamma}} \vec{F}(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t)\,dt = \int_{\bar{\gamma}} [F_1(\bar{\gamma}(t)), F_2(\gamma(t))] (x'(t), y'(t))\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{\bar{\gamma}} F_1(\bar{\gamma}(t)) \cdot x'(t)\,dt}_{①} + \underbrace{\int_{\bar{\gamma}} F_2(\gamma(t)) \cdot y'(t)\,dt}_{②}$$

- Suppongo $\Gamma = \partial A$, con A semplice rispetto a y.

$A = \{(x,y) \mid a \le x \le b \; ; \; g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

$\bar{\gamma} = \partial^+ A$



- CALCOLO ① $\quad I = \int_{\gamma} F_1(\gamma(t)) \cdot x'(t)\,dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$\bar{\gamma}_1(t) = (t, g_1(t)) \qquad t \in [a,b] \qquad \longrightarrow \bar{\gamma}_1'(t) = (1, g_1'(t))$

$\bar{\gamma}_2(t) = (b, t) \qquad t \in [g_1(b), g_2(b)] \longrightarrow \bar{\gamma}_2'(t) = (0,1)$

$\bar{\gamma}_3(t) = -\bar{\delta}_3(t) \qquad t \in [a,b]$

$\bar{\gamma}_4(t) = -\bar{\delta}_4(t) \qquad t \in [g_1(a), g_2(a)]$

$\bar{\delta}_3(t) = (t, g_2(t)) \longrightarrow \bar{\delta}_3'(t) = (1, g_2'(t))$

$\bar{\delta}_4(t) = (a, t) \longrightarrow \bar{\delta}_4'(t) = (0,1)$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b F_1(\gamma_1(t)) \cdot x_1'(t)\,dt = \int_a^b F_1(t, g_1(t))\,dt \\ I_2 &= \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} F_1(\gamma_2(t)) \cdot x_2'(t)\,dt = 0 \\ I_3 &= \int_a^b F_1(\gamma_3(t)) \cdot x_3'(t)\,dt = -\int_a^b F_1(t, g_2(t))\,dt \\ I_4 &= \int_{g_1(a)}^{g_2(a)} F_1(\gamma_4(t)) \cdot x_4'(t)\,dt = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \int_a^b F_1(t, g_1(t))\,dt - \int_a^b F_1(t, g_2(t))\,dt$$

- $$\iint_A \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[F_1(x,y)\right]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b \underbrace{\left[F_1(x, g_2(x)) - F_1(x, g_1(x))\right]}_{= -I} dx$$

$\downarrow$
DIM: per Hp $\exists \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\Omega) \mid \vec{F} = \nabla\varphi$
per $n=2$ si ha che $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2$ $\Rightarrow$ DERIVANDO OTTENGO
$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ che sono uguali per SCHWARZ. (*)

TEOREMA

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{F} \in C^1(\Omega)$, Ω APERTO CONNESSO
$\vec{F}$ CONSERVATIVO con φ = potenziale su Ω $\Rightarrow$ $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ REGOLARE A TRATTI e SEMPLICE.

$\downarrow$
DIM: per Hp $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\,dt = \int_a^b \nabla\varphi(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\,dt$

$= \int_a^b G'(t)\,dt = G(t)\Big|_a^b = G(b) - G(a) = \varphi(\vec{\gamma}(b)) - \varphi(\vec{\gamma}(a))$ con $G = \varphi(\gamma(t))$

$\to$ IN GENERALE $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \varphi(B) - \varphi(A)$ se Γ è il sostegno orientato di γ

TEOREMA

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{F} \in C^1(\Omega)$, Ω APERTO CONNESSO
$\vec{F}$ CONSERVATIVO con φ POTENZIALE su Ω $\Rightarrow$ ψ POTENZIALE $\Leftrightarrow$ $\psi - \varphi = c$, $c \in \mathbb{R}$

$\downarrow$
DIM: $\Leftarrow$) $\psi - \varphi = c \Rightarrow \psi = \varphi + c$ ma $\nabla\psi = \nabla\varphi$; se $\vec{F} = \nabla\varphi \Rightarrow \vec{F} = \nabla\psi$
quindi ψ è POTENZIALE.
$\Rightarrow$) sia $P_0 \in \Omega$ e sia γ: curva che parametrizza Γ da P_0 a $P \in \Omega$

$\Rightarrow \int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \varphi(P) - \varphi(P_0) = \psi(P) - \psi(P_0)$

segue che $\varphi(P) - \psi(P) = \varphi(P_0) - \psi(P_0) = \text{COST.}$ $\forall P \in \Omega$.

TEOREMA SULLE PROPRIETÀ EQUIVALENTI

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{F} \in C^0(\Omega)$, Ω APERTO CONNESSO: sono equivalenti

i) $\vec{F}$ è CONSERVATIVO
ii) $\forall \gamma_1, \gamma_2$ regolari a tratti e semplici con sostegno in Ω

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}$$

iii) $\forall \gamma$ arco di Jordan regolare a tratti con sostegno in Ω $\oint_\gamma \vec{F} = 0$

(*) Ho provato $\bar{F}$ CONSERVATIVO $\Rightarrow$ IRROTAZIONALE, ora provo il viceversa.

DIM $n=2$ Sia Γ il sostegno di un ARCO DI JORDAN regolare a tratti. e Ω la regione interna a Γ. $\Rightarrow$ Ω è G-AMMISSIBILE $\Rightarrow$ per Teo. Green.

$$\oint_{\gamma} \bar{F} = \oint_{\partial^+\Omega} \bar{F} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \text{ , ma } \bar{F} \text{ è IRROTAZ. } \Rightarrow \oint_{\gamma} \bar{F} = 0$$

$\Rightarrow$ per il teorema delle equivalenze F è CONSERVATIVO.

$n=3$ Sia Γ il sostegno di una curva chiusa in R^3 $\Rightarrow$ è il bordo di una superficie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare a pezzi e semplice.

$\Rightarrow$ per Teo. Stokes $\oint_{\Gamma} \bar{F} = \int_{\Sigma} \text{rot } \bar{F} \cdot \bar{n}$ ma rot $\bar{F} = \bar{0}$ $\Rightarrow$ il campo è CONSERVATIVO.

SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE

PROPRIETÀ SUCCESSIONI E SOTTOSUCCESSIONI

- Se a_n e b_n sono DEFINITIVAMENTE UGUALI $\Rightarrow$ hanno lo stesso comportamento
- Se $\exists \lim_{n} a_n = L \Rightarrow \exists \lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = L \ \forall a_{n_k}$
- Se $\exists a_{n_k} \mid \lim_{K} a_{n_k} = L_1 \wedge \exists a_{n_h} \mid \lim_{n} a_{n_h} = L_2$ con $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{n} a_n$
- $\lim_{n} a_n = L \Leftrightarrow \lim_{k} a_{2k} = \lim_{k} a_{2k+1} = L$
- Se a_n è MONOTONA $\rightarrow \exists \lim_{n} a_n$ $\rightarrow$ $\sup_{n \in N} a_n$ se a_n è CRESCENTE; $\rightarrow$ $\inf_{n \in N} a_n$ se a_n è DECRESCENTE.
- CRITERIO DEL RAPPORTO E DELLA RADICE

  a_n è a termini positivi

  $\exists \lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \vee \ \exists \lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = q \Rightarrow \begin{cases} q > 1 \rightarrow \lim_{n} a_n = +\infty \\ q < 1 \rightarrow \lim_{n} a_n = 0 \\ q = 1 \rightarrow ? \end{cases}$

Def: Data una serie $\sum_{k}^{\infty} a_k$, la successione delle SOMME PARZIALI è la successione S_n definita da $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Se $\exists \lim_{n} S_n = S$ si chiama SOMMA DELLA SERIE — SER CONVERGENZA; $S = \pm\infty$ DIVERGENZA; $\nexists S$ INDETERMINATA.

TEOREMA CONDIZIONE NECESSARIA

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n} a_n = 0$

$\Rightarrow$ le 2 serie hanno lo stesso comportamento.

2) $a_n = O(b_n) \leftrightarrow \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} \leq 1$

$\Rightarrow$ CONCLUDO PER IL PUNTO 1).

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ SERIE A TERMINI POSITIVI, se $\exists \lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

– se $l > 1 \rightarrow \sum a_k$ DIVERGE

– se $l < 1 \rightarrow \sum a_k$ CONVERGE

$\downarrow$

DIM: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \mid \forall k \geq k_0 \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - l \right| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \varepsilon$

$\rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \varepsilon = q$

• se $l < 1$ posso sempre scegliere $\varepsilon \mid l + \varepsilon = q < 1$ quindi

$a_{k+1} < q a_k < q^2 a_{k-1} < \dots \; q^{k-k_0} a_{k_0+1} \Rightarrow a_{k+1} < \overset{\text{cost}}{\frac{a_{k_0+1}}{q^{k_0}}} q^k$

per confronto con la serie armonica generalizzata $q < 1$ si ha che la serie $\sum a_k$ CONVERGE

• se $l > 1$ pongo $\varepsilon = l - 1 \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} \leftarrow 1 < \frac{a_{k+1}}{a_k} \Rightarrow$

$a_{k+1} > a_k > a_{k-1} > \dots > a_{k_0+1} > 0 \Rightarrow \lim_k a_k \neq 0$ e non è verificata la condiz. necessaria per la convergenza.

CRITERIO DELLA RADICE

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ SERIE A TERMINI POSITIVI, se $\exists \lim_k \sqrt[k]{a_k} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

– se $l > 1 \rightarrow \sum a_k$ DIVERGE

– se $l < 1 \rightarrow \sum a_k$ CONVERGE

$\downarrow$

DIM: ANALOGA... se $l < 1$ scelgo $\varepsilon \mid l + \varepsilon = q < 1 \Rightarrow a_k < q^k$ con $q < 1$

se $l > 1$ scelgo $\varepsilon \mid l - \varepsilon = q > 1 \Rightarrow a_k > q^k$ con $q > 1$

se $l = +\infty$ scelgo $M > 1 \rightarrow a_k > M^k$ con $M > 1 \Rightarrow$ DIVERGE.

CRITERIO INTEGRALE

$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, POSITIVA e DECRESCENTE

f INTEGRABILE su $[1, t] \; \forall t \geq 1$ $\searrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ SI COMPORTA COME $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

e $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

↓
DIM: Sia $a_n = (-1)^n b_n$

$S_0 = a_0 = b_0$; $S_1 = a_0 + a_1 = b_0 - b_1$; $S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = b_0 - b_1 + b_2$

↳ $S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n-1} + a_{2n} = S_{2n-2} - b_{2n-1} + b_{2n}$

$= S_{2n-2} - \underbrace{(b_{2n-1} - b_{2n})}_{\geq 0}$ per DECRESCENZA.

$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{b_{2n} - b_{2n+1}}_{\geq 0}$ PER DECRESCENZA.

$\Rightarrow S_{2n} \leq S_{2n-2}$ $\forall n \Rightarrow S_{2n}$ È DECRESCENTE

$S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$ $\forall n \Rightarrow S_{2n+1}$ È CRESCENTE.

inoltre

$S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n} = S_{2n-1} + \underbrace{b_{2n}}_{\geq 0} \Rightarrow S_{2n} \geq S_{2n-1} \geq S_{2n-3} \dots \geq S_1$

↳ S_{2n} È INFERIORMENTE LIMITATA $\Rightarrow$ AMMETTE LIMITE $\lim_n S_{2n} = S^*$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n} \underbrace{- b_{2n+1}}_{\leq 0} \Rightarrow S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq S_0$

↳ S_{2n+1} È SUPERIORMENTE LIMITATA $\Rightarrow$ AMMETTE LIMITE $\lim_n S_{2n+1} = S_*$

Sia $\lim_n (S_{2n} - S_{2n+1}) = S^* - S_* = \lim_n (b_{2n+1}) = 0$ per Hp b_n È DECRESCENTE

$\Rightarrow S^* - S_* = 0 \Rightarrow S^* = S_* = S \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ CONVERGE AD S.

- $\{S_{2n}\}$ APPROSSIMA S per eccesso e $\{S_{2n+1}\}$ per difetto $\Rightarrow \forall n$ $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$

- $0 \leq S - S_{2k+1} \leq S_{2k+2} - S_{2k+1} = b_{2k+2}$
  $0 \leq S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2k+1} = b_{2k+1}$
  $\Bigg\} |r_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1}$

⊙ SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Def: La successione $\{f_n\}$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN $x_0 \in X$ se la SUCCESSIONE NUMERICA $\{f_n(x_0)\}$ CONVERGE PER $n \to +\infty$

La funzione LIMITE è $f: A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \lim_n f_n(x)$ con A INSIEME DI CONVERG. PUNTUALE.

Def: La successione $\{f_n\}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD f SU A se

$\lim_{n \to +\infty} \| f_n(x) - f(x) \|_\infty = 0 \longleftrightarrow \lim_n \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$

cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n > \bar{n} \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in A$.

Def: LA SERIE $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE in $x_0 \in X$ se $\{S_n(x_0)\}$ CONVERGE

Def: LA SERIE $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE su A se $\{S_n(x)\}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SU A (A = insieme di convergenza puntuale)

PROPRIETÀ: CONTINUITÀ, INTEGRAZIONE e DERIVAZIONE PER SERIE

- $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \to S(x) \text{ UNIFORMEMENTE SU } A \\ f_n(x) \text{ CONTINUA SU } A \end{cases} \Rightarrow S(x)$ CONTINUA SU A

- $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \to S(x) \text{ UNIFORMEMENTE SU } I \\ f_n(x) \text{ INTEGRABILE SU } I \end{cases} \Rightarrow$ $S(x)$ INTEGRABILE SU I, $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

- $\begin{cases} f_n(x) \in C^1(I=[a,b]) \\ S(x), t(x): I \to \mathbb{R} \\ \sum f_n(x) \to S(x) \text{ PUNTUALMENTE SU } I \\ \sum f_n'(x) \to t(x) \text{ UNIFORMEMENTE SU } I \end{cases} \Rightarrow$
  - $S(x) \in C^1(I)$
  - $S'(x) = t(x)$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \to S(x)$ UNIFORMEM. SU I
  - $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'$

CRITERIO DI WEIERSTRASS

$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ (serie numerica) CONVERGENTE} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \mid |f_n(x)| \leq M_n \ \forall x \in X \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIFORM. a $S(x)$ SU X.

DIM: Fisso $x_0 \in X \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x_0)|$ converge per confronto con M_n. Per l'arbitrarietà di x_0, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge $\forall x_0 \in X$

Considero la somma $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \ \forall x \in X$ e provo la convergenza uniforme:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|$$

$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$ = RESTO n-ESIMO DELLA SERIE NUMERICA CONVERGENTE $\Rightarrow$ È INFINITESIMO.

$\Rightarrow |S(x) - S_n(x)| \leq r_n \ \forall x \in X \to \sup_{x \in X} |S_x - S_n(x)| \leq r_n$

$\to \lim_n \left(\sup_{x \in X} |S(x) - S_n(x)|\right) = 0 \Rightarrow$ ho converg. uniforme.

iii) Se $A \neq \{0\} \wedge A \neq \mathbb{R}$, $\exists \bar{x} \mid \sum a_k \bar{x}^k$ non converge $\rightarrow$ per la prop. prec: la serie non converge su $(-\infty, -|\bar{x}|) \cup (\bar{x}, +\infty) \Rightarrow A \subseteq (-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$ e dunque è limitato: pongo $R = \sup(A) \neq 0$.

Se $|x| < R$, $\exists x_1 \mid |x| < x_1 < R$ ($\Rightarrow x_1 \in A$) quindi $\sum a_k x_1^k$ converge $\rightarrow$ x proprietà la serie converge $\forall x \mid |x| < x_1$ assolutamente $\Rightarrow$ HO CONVERG. ASSOLUTA IN $(-R, R)$ e PUNTUALE.

La converg. uniforme si prova come nel punto ii)

A non può contenere valori $x > R$ perché $R = \sup(A) \Rightarrow$ NON HO CONVERGENZA IN $|x| > R$.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Data la serie $\sum a_k x^k$ con $a_k \neq 0$

$$\exists \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Longrightarrow R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } \ell \neq 0 \end{cases}$$

DIM: $\lim_n \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right|$ con x FISSATO $= \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$

a) se $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_n \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = +\infty > 1 \Rightarrow$ x IL CRITERIO DEL RAPPORTO DELLE SERIE NUMERICHE $- \sum a_n x^n$ DIVERGE e ho convergenza solo per $x = 0$. $\rightarrow R = 0$.

b) se $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \rightarrow \lim_n \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la serie converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty$.

c) se $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \ell|x|$

e se $\ell|x| < 1$ LA SERIE CONVERGE, QUINDI SE $|x| < \frac{1}{\ell}$ e se $\ell|x| > 1$ LA SERIE DIVERGE, QUINDI SE $|x| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$.

CRITERIO DELLA RADICE

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n \neq 0$

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \Longrightarrow R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } \ell \neq 0. \end{cases}$$

TEOREMA DI ABEL

Se $R > 0$ e HO CONVERGENZA PUNTUALE IN $x = R$ ($x = -R$)

Def: f si dice ANALITICA in x_0 se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ha raggio $R>0$ e se la somma coincide con $f(x)$ su (x_0-R, x_0+R)

PROPRIETÀ

- $\begin{cases} f \in C^\infty(I) \quad I=(x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \delta>0 \\ \exists M>0 \mid \forall k>k_0 \geq 0 \quad |f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k!}{\delta^k} \quad \forall x \in I \end{cases} \Rightarrow$ f è ANALITICA IN x_0 e $R \geq \delta$

$\downarrow$

DIM: $f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_n)(x-x_0)^{n+1}}_{\text{RESTO DI LAGRANGE}}$ con $x_n \in (x_0, x)$

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(x_n)| |x-x_0|^{n+1} \leq \frac{1}{\cancel{(n+1)!}} M \frac{\cancel{(n+1)!}}{\delta^{n+1}} |(x-x_0)|^{n+1}$$

$$= M \left(\frac{|x-x_0|}{\delta}\right)^{n+1} = M q^{n+1} \text{ con } q<1 \Rightarrow \sum M \left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)^{n+1} \text{ CONVERGE}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \to 0 \text{ per } n \to +\infty \Rightarrow f(x) \to T_{f,n,x_0}(x)$$

⊙ SERIE DI FOURIER

PROPRIETÀ FUNZIONI PERIODICHE

- f periodica di periodo $T \longrightarrow \int_0^T f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- f periodica di periodo $T \longrightarrow g = f\left(\frac{x}{k}\right)$, $k>0$ periodica di periodo kT.

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è CONTINUA A TRATTI se è continua tranne che al più in un numero finito di punti dove presenta discontinuità eliminabile o di 1ª specie.

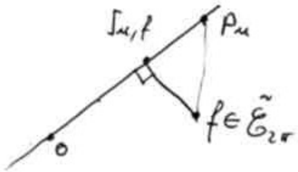
Def: f REGOLARIZZATA se in ogni punto x_0 di discontinuità si ha
$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

NOTA $\mathcal{E}^2_{2\pi}$ = FUNZIONI DI PERIODO 2π, CONTINUE A TRATTI e REGOLARIZZATE.

è uno spazio vettoriale ed è definita una norma
$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e una distanza $d(f,g) = \|f-g\|_2$

$\downarrow$



<u>DIM</u>: i) Sia $P \in P_n$, $P = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$

$(f - P)$ è ortogonale ad ogni elemento di P_n se e solo se $\forall k \geq n$

$(f - P, \varphi_k) = 0 \quad \wedge \quad (f - P, \psi_k) = 0$

ma $\bullet\ (f - P, \varphi_0) = (f, \varphi_0) - (P, \varphi_0) = (f, \varphi_0) - \alpha_0(\varphi_0, \varphi_0) = 0$

$$\rightarrow \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \alpha_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|_2^2} = a_0$$

$\bullet\ (f - P, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (P, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - \alpha_k(\varphi_k, \varphi_k) = 0 \Rightarrow \alpha_k = a_k$

$\bullet\ (f - P, \psi_k) = (f, \psi_k) - (P, \psi_k) = (f, \psi_k) - \beta_k(\psi_k, \psi_k) = 0 \Rightarrow \beta_k = b_k$.

$\Rightarrow P = S_{n,f}$ (cioè $S_{n,f}$ è l'unico elem. di P_n | $f - S_{n,f} \perp P_n$)

ii) $\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2(f,g) \quad \forall f,g \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$

Sia $P \in P_n \Rightarrow \|f - P\|_2^2 = \|(f - S_{n,f}) + (S_{n,f} - P)\|_2^2$

$= \|f - S_{n,f}\|_2^2 + \|S_{n,f} - P\|_2^2 + 2\,(f - S_{n,f}, \underbrace{S_{n,f} - P}_{\in P_n})$ ma

$P_n \perp (f - S_{n,f}) \rightarrow \|f - P\|_2^2 = \|f - S_{n,f}\|_2^2 + \|S_{n,f} - P\|_2^2$

$\hookrightarrow \|f - P\|_2^2 \geq \|f - S_{n}f\|_2^2$ e vale l'uguaglianza solo se $P = S_n f$.

iii) $\|f - S_{n,f}\|_2^2 = (f - S_{n,f}, f - S_{n,f}) = (f, f - S_{n,f}) - \cancel{(S_n f, f - S_{n,f})}$ 0 xchè ortogonali

$= (f, f) - (f, S_n f)$

ma $(f, S_n f) = (f, a_0 + \sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx)$

$\stackrel{!}{=} (f, a_0 + \sum a_k \varphi_k + \sum b_k \psi_k)$

$\stackrel{!}{=} (f, a_0 \varphi_0) + \sum (f, a_k \varphi_k) + \sum (f, b_k \psi_k)$

$\stackrel{!}{=} 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$

$$\Rightarrow \|f - S_{n,f}\|_2^2 = \int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx - 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

<u>Def</u>: $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$, LA SERIE DI FOURIER di f è $f \simeq a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

con a_0, a_k, b_k coeff. di fourier.

PROPRIETÀ

- $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi} \wedge$ (f REGOLARE A TRATTI $\vee$ f MONOTONA A TRATTI) $\Longrightarrow$ $f\tilde{x} \to f$ PUNTUALMENTE
  (se f non è regolarizzata, $f\tilde{x} \to$ regolarizzata di f)
- $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$, in x_0 $\exists f'(x_0^-)$ e $f'(x_0^+)$ $\Longrightarrow$ $f\tilde{x} \to f$ in x_0 AL VALORE REGOLARIZZATO
- $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$, $f \in C^1$ A TRATTI (regolare a tratti + CONTINUA SU $\mathbb{R}$)
  $\hookrightarrow$ $f\tilde{x} \to f$ UNIFORMEMENTE su $\mathbb{R}$.
- $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{2\pi}$, f REGOLARE A TRATTI $\Longrightarrow$ $f\tilde{x} \to f$ UNIFORM. SU OGNI $[a,b]$ OVE f È CONTINUA
- CONVERGENZA UNIFORME $\longrightarrow$ CONVERG. QUADRATICA, PUNTUALE.

Def: $\tilde{\mathcal{E}}_T = \{ f$ di periodo T, CONTINUA A TRATTI, REGOLARIZZATA $\}$
- i coefficienti di fourier sono: $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ $\quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)dx$
  $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)$
- $f \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)$

⊙ SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Def: Un SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI del primo ordine in forma normale di n variabili è $\overline{y}' = F(t, \overline{y})$ con
$\overline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$ e $\overline{F}: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $t \in I$.

Def: UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA $\overline{y}' = F(t, \overline{y})$ è una funzione $\phi: J \subseteq I \longrightarrow \mathbb{R}^n$
tale che $\phi'(t) = \overline{F}(t, \phi(t))$ $\forall t \in J$ cioè $\phi(t) = (\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = F_1(t, \phi(t)) \\ \varphi_n'(t) = F_n(t, \phi(t)) \end{cases}$$

Il grafico di ϕ ($\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$) si dice CURVA INTEGRALE.

Def: Un PROBLEMA DI CAUCHY è un sistema del tipo

$$\begin{cases} \overline{y}' = \overline{F}(t, \overline{y}) \\ \overline{y}(t_0) = \overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

$$\begin{cases} \overline{F}: I \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ I \subseteq \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n,\ \overline{y}_0 \in D,\ t_0 \in I \\ \overline{F} \text{ continua in } I(t_0) \text{ per un intorno } B(\overline{y}_0) \end{cases} \Longrightarrow \exists \text{ SOLUZIONE AL PROBLEMA DI CAUCHY}$$

- F è LINEARE ovvero
  - $\forall p, q \in \mathbb{R}^n$, $F(p+q) = F(p) + F(q)$
  - $\forall p \in \mathbb{R}^n$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $F(\lambda p) = \lambda F(p)$

ma $F(p+q) = \phi_{p+q}$ è SOLUZIONE DI $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = p+q \end{cases} \Rightarrow \phi_{p+q}(0) = p+q$

$= \phi_p(0) + \phi_q(0)$ ove $F(p) = \phi_p$ è SOLUZIONE DI $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = p \end{cases}$ e $F(q) = \phi_q$

è SOLUZIONE DI $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(0) = q \end{cases} \Rightarrow \phi_p + \phi_q$ è SOLUZIONE DI $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ y(0) = p+q \end{cases}$

poiché ϕ_{p+q} e $(\phi_p + \phi_q)$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy e $\exists !$ soluzione al problema, esse coincidono $\Rightarrow \phi_{p+q} = \phi_p + \phi_q$

$\rightarrow F(p+q) = F(p) + F(q)$

Analogamente si prova $F(\lambda p) = \lambda F(p)$

$\Rightarrow$ F è ISOMORFISMO $\Rightarrow \dim(S_0) = n$

Def: UNA BASE DELLO SPAZIO S_0 SI CHIAMA SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI

PROPRIETÀ

- Se $\{\phi_1, \dots \phi_n\}$ è UN SISTEMA FONDAMENTALE di SOLUZIONI

  $\hookrightarrow \forall t_0$, $[\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)]$ sono L.I.

  DIM: Suppongo $\sum c_i \phi_i(t_0) = \vec{0}$ e provo $c_i = 0 \ \forall i$. LA FUNZIONE $\psi(t) = \sum c_i \phi_i(t)$ è SOLUZIONE del problema $\begin{cases} \bar{y}' = A(t)\bar{y} \\ \bar{y}(t_0) = \vec{0} \end{cases}$ ma lo è anche la funzione $\vec{0}$

  $\Rightarrow$ Per UNICITÀ DELLA SOLUZIONE $\psi(t) = \sum c_i \phi_i(t) = \vec{0} \Rightarrow c_i = 0 \ \forall i$

- Se $[\phi_1, \dots \phi_n] \in S_0$ e $[\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)]$ sono L.I

  $\hookrightarrow \{\phi_1, \dots \phi_n\}$ è UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.

  DIM: Suppongo $\sum c_i \phi_i(t) = \vec{0}$ e provo $c_i = 0 \ \forall i$; dato che $\sum c_i \phi_i(t_0) = \vec{0}$ e che (ϕ_1, ϕ_n) sono L.I $\Rightarrow c_i = 0$ da cui la tesi.

- $\bar{y}' = A(t)\bar{y} + B(t)$, se $[\phi_1, \dots \phi_n]$ è sistema fondamentale del sistema omogeneo e ψ è soluzione particolare del sistema completo

  $\hookrightarrow$ le SOLUZIONI DEL SISTEMA COMPLETO SONO DEL TIPO $\bar{y}(t) = \sum c_i \phi_i(t) + \psi(t)$

↳ φ_1 e φ_2 sono C.L. di $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ ⇒ SONO SOLUZIONI REALI.

SISTEMI AUTONOMI

PROPRIETÀ

- Sia φ SOLUZIONE DI $\bar{y}' = F(\bar{y}) \Longrightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ $\psi(t) = \varphi(t+c)$ è SOLUZIONE.

↓

DIM: $\psi'(t) = \varphi'(t+c) \underset{\text{AUTONOMO}}{=} F(\varphi(t+c)) = F(\psi(t))$

- $\begin{cases} \varphi, \psi \text{ SOLUZIONI DI } \bar{y}' = F(\bar{y}) \\ \varphi(t_1) = \psi(t_2) \text{ per qualche } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \varphi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ (TRASLAZIONE)

↓

DIM: Sia $\phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$; essa è soluzione per la proprietà precedente
$\phi(t_1) = \psi(t_2) = \varphi(t_1)$ ⇒ ϕ e φ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy ⇒ per l'unicità $\varphi(t) = \phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$

CONSEGUENZE

1) SE 2 ORBITE SI INTERSECANO IN 1 PUNTO ⇒ COINCIDONO
2) UN'ORBITA CORRISPONDE AD UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI $\varphi(t+c)$ $c \in \mathbb{R}$.
3) SE 2 ORBITE NON SI INTERSECANO ⇒ LO SPAZIO DELLE FASI È UNIONE DI ORBITE DISGIUNTE.

Def: se $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ è tale che $F(\bar{y}_0) = \bar{0}$, $\bar{y}_0$ è PUNTO DI EQUILIBRIO per il sistema cioè la curva $\varphi(t) = \bar{y}_0$ è soluzione del sistema. ↖ NELLO SPAZIO DELLE FASI

Def: La soluzione stazionaria si dice STABILE se $\forall$ intorno $B_\varepsilon(\bar{y}_0)$ $\exists B_\delta(\bar{y}_0)$ tale che se $\bar{x}_0 \in B_\delta(\bar{y}_0) \Rightarrow \bar{y}(t, \bar{x}_0) \in B_\varepsilon(\bar{y}_0)$ $\forall t \geq t_0$. (se $\bar{x}_0$ è suff. vicino a $\bar{y}_0$ allora la soluzione $\bar{y}(t, \bar{x}_0)$ si mantiene vicina ad $\bar{y}_0$).

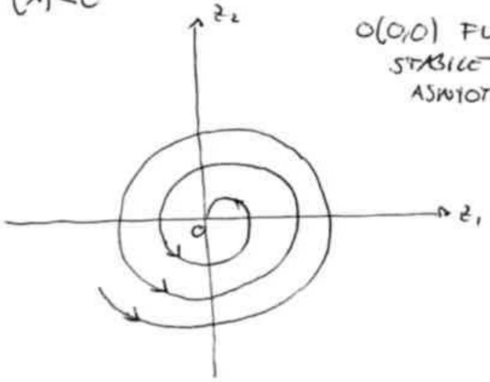
Def: $\bar{y}_0$ è ATTRATTIVA se $\exists B(\bar{y}_0)$ tale che se $\bar{x}_0 \in B(\bar{y}_0) \rightarrow \lim_{t \to +\infty} \bar{y}(t, \bar{x}_0) = \bar{y}_0$
Se $\bar{y}_0$ è anche STABILE, si dice ASINTOTICAMENTE stabile.

TEOREMA SULLA STABILITÀ DELLA SOLUZ. AUTONOMA (A = COST)

Dato $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} & t > 0 \\ \bar{y}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$ l'origine è

- STABILE ⇔ $Re(\lambda) \leq 0$ $\forall \lambda$ 1
  se $\lambda_i = 0$ $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$
- ASINTOTICAM. STABILE ⇔ $Re(\lambda) < 0$
- INSTABILE se $\exists \lambda \mid Re(\lambda) > 0$ V
  $Re(\lambda) = 0$ ma $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$

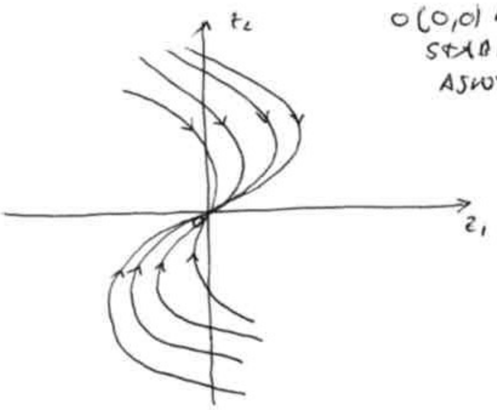
- $re(\lambda) < 0$



O(0,0) FUOCO STABILE ASINTOTICAM.

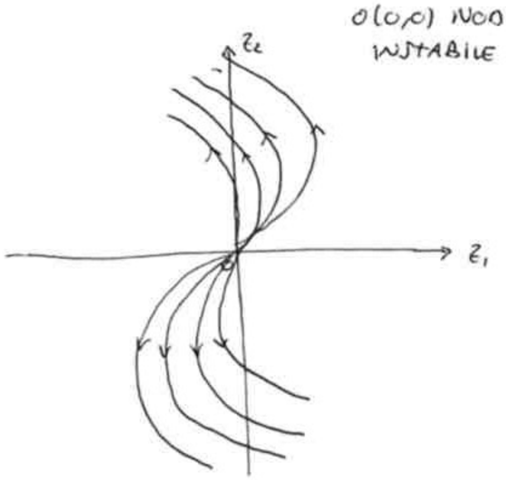
A NON DIAGONALIZ.

- λ AUTOVALORE DOPPIO < 0



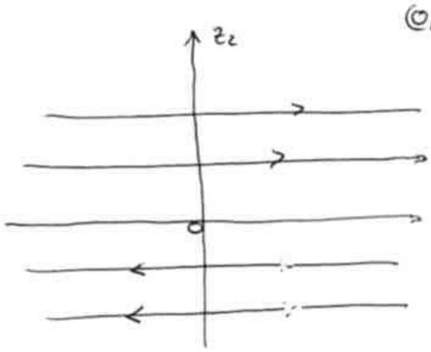
O(0,0) NODO STABILE ASINTOTICAM.

- λ AUTOVALORE DOPPIO > 0



O(0,0) NODO INSTABILE

- λ AUTOVALORE DOPPIO $= 0$



(0,0) INSTABILE

5) INTEGRALI TRIPLI

- INSIEME SEMPLICE RISPETTO A z → INTEGRAZIONE PER FILI

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$

D = REGIONE CHIUSA DI $\mathbb{R}_2$.

$$\int_\Omega f = \int_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy$$

se $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [\alpha,\beta],\ (x,y) \in A_z\}$ → INTEGRAZIONE PER STRATI

con $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z_0)\}$

↑ PROIEZIONE Ω su $z = z_0$.

$$\int_\Omega f = \int_\alpha^\beta \left(\int_{A_z} f(x,y,z)\, dx\,dy \right) dz$$

6) CAMBIAMENTI DI VARIABILE

$\Phi : \Omega' \to \Omega$, Ω, Ω' REGIONI MISURABILI IN $\mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{u})$

$$\int_\Omega f(\vec{x})\, d\Omega = \int_{\Omega'} f(\vec{\Phi}(\vec{u})) \cdot |\det J\vec{\Phi}(\vec{u})|\, d\Omega'$$

- POLARI:
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta + x_0 \\ y = \rho\sin\theta + y_0 \end{cases} \qquad J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \to \det J_\Phi = \rho$$

$\rho \in (0,+\infty)$ $\quad \theta \in [0,2\pi)$

- ELLITTICHE:
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta + x_0 \\ y = b\rho\sin\theta + y_0 \end{cases} \qquad |\det(J_\Phi)| = ab\rho$$

$\rho \in (0,1]$ $\quad \theta \in [0,2\pi)$ $\quad a,b > 0$

- SFERICHE
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad |\det(J\Phi)| = \rho^2\sin\varphi$$

$\rho \in (0,+\infty)$ $\quad \theta \in [0,2\pi)$ $\quad \varphi \in [0,\pi)$

- ELLISSOIDALI
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases} \qquad a,b,c > 0$$

$|\det(J\Phi)| = abc\,\rho^2\sin\varphi$

- CILINDRICHE → POLARI CON $z = z$.

Valgono: ① $\int_\Sigma f = \int_\sigma f$ con σ = parametrizzazione CONGRUENTE di Σ

② $\int_\Sigma f = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Sigma_i} f$ con Σ_i REGOLARE e $|\Sigma_i \cap \Sigma_j| = 0$

II SPECIE $\longrightarrow$ $\int_\sigma \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iint_D \bar{F}(\bar{\sigma}(u,v)) \cdot \bar{N}(u,v)\, du\, dv$ con $\sigma: D \to \mathbb{R}^3$, $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Valgono: ① $\int_{\sigma_1} \vec{F} = \int_{\sigma_2} \vec{F}$ se σ_1 e σ_2 sono EQUIVALENTI ($\det J_\varphi) > 0$

$= -\int_{\sigma_2} \vec{F}$ se σ_1 e σ_2 sono ANTI EQUIVALENTI $\det J_\varphi < 0$

⊙ TEOREMA DI GREEN

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ G-AMMISSIBILE:
- ∂A è UNIONE DI N° FINITO DI ARCHI DI GIORDAN A 2 A 2 DISGIUNTI
- A è SEMPRE $\subseteq$ ALL'INTERNO O ESTERNO DI Γ_i

$\bar{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CAMPO VETTORIALE $| A \subseteq \Omega$

Ω APERTO

$\Downarrow$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

⊙ TEOREMA DI STOKES

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ S-AMMISSIBILE:
- REGOLARE A PEZZI, SEMPLICE, ORIENTABILE
- Σ_K PARAMETRIZZATE DA $\sigma_K: \Omega_K \to \mathbb{R}^3$ con Ω_K G-AMMISSIBILI.

$\bar{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ CAMPO VETTORIALE

$\Sigma \subseteq A$; $\vec{F} \in C^1(A)$

$\Downarrow$

$$\int_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} = \oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

CIRCUITAZIONE CAMPO VETTORIALE.

⊙ TEOREMA DI GAUSS

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ G-AMMISSIBILE:
- $\partial \Omega = \bigcup \Sigma_i$ CHIUSE, DISGIUNTE
- Σ_i REGOLARE A PEZZI, SEMPLICE, ORIENTABILE
- $\Omega \subseteq$ ALL'INTERNO O ESTERNO DI Σ_i

$\bar{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ CAMPO VETTORIALE $| \bar{F} \in C^1(\Omega)$.

SCHEMA X RISOLVERE I SISTEMI LINEARI

- SISTEMI DEL 1° ORDINE $\bar{y}' = F(\bar{y}, t)$
  - TEOREMA DI PEANO, CAUCHY
  - SISTEMI LINEARI: $\bar{y}' = A(t)\bar{y} + B(t)$
    - OMOGENEO se $\vec{B}(t) = \vec{0}$
    - NON OMOGENEO se $\vec{B}(t) \neq \vec{0}$
  - SISTEMI AUTONOMI: $\bar{y}' = F(\bar{y})$

1) SISTEMI LINEARI OMOGENEI AUTONOMI CON $A(t) = A = \text{COST}$

↳ sono del tipo $\bar{y}' = A\bar{y}$

- STUDIO A:

→ **DIAGONALIZZABILE SUI REALI** $(m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)\ \forall i)$

↳ TROVO AUTOVETTORI $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_n}$

- COSTRUISCO IL SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI

$$\phi_1, \phi_2, \phi_n \ \middle|\ \phi_i = e^{\lambda_i t}\,\vec{v_i}$$

- L'INTEGRALE GENERALE È DATO DA:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \qquad \text{con } c_i \in \mathbb{R}$$

→ **DIAGONALIZZABILE SUI COMPLESSI**

$\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE

$\vec{W} = \vec{u} + i\vec{v}$ con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ AUTOVETTORE

- IL SOTTOSISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI RELATIVE A 2 AUTOVALORI e AUTOVETTORI COMPLESSI CONIUGATI È:

$$\phi_1 = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\,\vec{u} - \sin(\beta t)\,\vec{v}\right)$$

$$\phi_2 = e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\,\vec{u} + \cos(\beta t)\,\vec{v}\right)$$

(basta studiare solo 1 autospazio per trovare $\alpha, \beta, \vec{u}, \vec{v}$)

- L'INTEGRALE GENERALE SI COSTRUISCE IN MODO ANALOGO

→ **NON DIAGONALIZZABILE** $(\exists i \in [1, n] \mid m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i))$

- SE λ È AUTOVALORE e $\vec{V_1}$ IL SUO AUTOVETTORE, COSTRUISCO $\vec{V_2}$ = AUTOVETTORE GENERALIZZATO CHE È SOLUZIONE DEL SISTEMA NON OMOGENEO

$(A - \lambda I)\bar{x} = \vec{V_1}$ (→ trovo l'eq. di una retta ⇒ fisso un valor di x e $\vec{V_2} = \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$)

SERIE NUMERICHE A TERMINI POSITIVI

× la convergenza: → studio $\lim_{n \to +\infty} a_n$
- → se è ≠ 0 LA SERIE NON CONVERGE
- → se è = 0 NON BASTA

⇓

USO

- CRITERIO RAPPORTO / RADICE / INTEGRALE
- MANIPOLAZIONI e PROPRIETÀ
- CONFRONTO ASINTOTICO.

SERIE NUMERICHE A SEGNI ALTERNI

× la convergenza assoluta studio $\lim_{n} a_n$ → COME PRIMA.

↳ CONVERG. ASSOLUTA ⇒ CONVERG. SEMPLICE.

× la convergenza semplice → USO LEIBNIZ.
→ USO L'ALGEBRA DEI LIMITI.

STIMA DEGLI ERRORI

- $|r_n| \leq b_{n+1}$ se la serie è a segno ALTERNO (Leibniz)
- $r_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ se la serie è a TERMINI POSITIVI e CONVERGENTE

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

- se è una fz. def. a tratti ⇒ RAPPRESENTARLA

Calcolo $\lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in$ all'intervallo assegnato.

↳ TROVIAMO INSIEME CONVERG. PUNTUALE e FUNZIONE LIMITE.

× la converg. uniforme: studio $\lim_{n} \left(\sup_{[a,b]} \| f_n(x) - f(x) \| \right) = 0$

↳ 1) $\| f_n(x) - f(x) \|$

2) se $[a,b]$ è compatto, studio il massimo di $\|f_n(x) - f(x)\|$ su $[a,b]$ altrimenti l'estremo superiore. (sup)

3) Faccio il limite a +∞ e verifico che sia 0.