NUMERO : 154

DATA : 03/10/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Caruso

MATERIA : Analisi I
Prof. Baciotti

Matematica 04/10/2010

logica

Proposizione: è un enunciato a cui possiamo attribuire un valore di verità. (se vero o falso)

$x > 2$ = NON proposizione.

- Negazione di una proposizione. "non P"

P	non P
V	F
F	V

• Congiunzione P e Q   l'unione di 2 proposizioni

P e Q è vero se e solo se sia P che Q, sono vere.

• Disgiunzione P o Q   (o = oppure)

P o Q è vera se e solo se, almeno UNA delle prop. P e Q è vera.

• Implicazione $P \Rightarrow Q$ si parte da una premessa falsa
diamo per falso se l'implicaz. V F, che F F, perchè è sbagl. dall'inizio

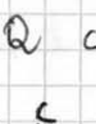
Quindi $P \Rightarrow Q$ è falsa, solo nel caso P VERA, Q falsa.

P ipotesi / antecedente

Q tesi / conseguente

P condiz. suffic. per Q

Q condizione necessaria per P

Es. 

$AC = BC \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$

ipotesi   tesi

• Equivalenza logica $P \Leftrightarrow Q$ (si legge: "se e solo se")

$P \Leftrightarrow Q$ è vera quando P e Q sono entrambe vere o entrambe false.

se vale $P \Leftrightarrow$ P è condizione necessaria e sufficiente per Q (e anche viceversa)

Insiemi

A $a \in A$ Appartenente.

a Elemento di A.

$\notin$ Non Appartenente

$\emptyset$ insieme vuoto

$A \subset B$ A è un sottoinsieme di B. $\subset$ = incluso.

Per verificare è appartenente a un insieme

$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ $A \subset B$

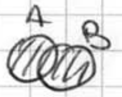
Devo controllare ogni elemento e verificare quale appartiene a B.

$A = B$ Insiemi uguali

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ e $(B \subset A)$

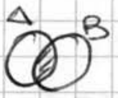
$A \cup B$ A unione B

$A \cup B = \{x : (x \in A)$ o $(x \in B)\}$



$A \cap B$ A intersezione B

$A \cap B = \{x : (x \in A)$ e $(x \in B)\}$



$A \setminus B$ Differenza tra insiemi

$A \setminus B = \{x : (x \in A)$ e $(x \notin B)\}$

N.B. Se $A \cap B = \emptyset$ A, B sono Disgiunti.

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$ naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, +1, +2 \dots\}$ interi relativi

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} ; q \neq 0 \}$ Razionali.

$\mathbb{R} =$ (Razionali e Irrazionali) Reali

$\mathbb{C}$ = complessi

$\Rightarrow 4h^2 = 2q^2 \Rightarrow 2h^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow$ $\boxed{q \text{ è pari}}$

il fatto che p e q ~~e pure~~ sono pari, contraddice la tes secondo cui p e q sono primi tra loro. Dunque la diagon. di un quadrato, non è misurabile tramite un numero razionale e quindi ci vogliono i num. reali.

RAZIONALI / IRRAZ.

$\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

ES. $\frac{3}{25}$ voglio scriverlo con la virgola.

$$\frac{3}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

$$\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$$

$$\frac{3}{25} = 0{,}12$$

3	7
30	0,428571
20	
60	
40	
50	
10	
3	

I resti sono del 7 da 0 a 6 quindi da 1 a 6 e dopo 6 volte si ripetono e posso spiegare che i rotonali danno luogo a un allineamento ~~periodico~~ decimale periodico

OPPURE

ci si ferma a 0.

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ALLINEAM. DECIM. PERIODICO (LIM/ ILLIM)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ALLINEAM. APERIODICI in cui non esiste nessun numero di cifre che si ripete periodic. ES. $= \pi$

Numeri irraz. sono aperiodici e sono più dei raz. che sono periodici.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e le operazioni.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$: Somma, Prodotto } soddisfano proprietà comuni. ES. Associativa, Commutativa

$\forall a \quad a + 0 = a$
$\forall a \quad a \cdot 1 = a$
] EL. NEUTRO $\boxed{+, 0}$ $\boxed{\cdot, 1}$

$\forall a \in \cdot \qquad \exists b \in \cdot \qquad a + b = 0$ $\quad$ voglio sommare qualcosa in modo che mi dia l'elem. neutro. Con i numeri

3) $a \leq b,\ b \leq a \Leftrightarrow a = b$

COMPATIBILI CON LE OPERAZIONI

$\forall a,b,c \quad a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

$\forall a,b, \quad a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

$\forall c > 0$

POTENZE

Fissiamo $a \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad n = 1, 2 \ldots$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ volte}}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\boxed{n \text{ intero relativo}}$ caso in negativo $m = -n$

$a^{-n} = \frac{1}{a}$

$1 = a^0 = a^{n-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n}$

$a^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$a^{\frac{p}{q}} \quad \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a^1 = a$

$x^{\frac{1}{q}\, q} = a$ || Def. della radice di ordine q

$\sqrt[q]{a} \Leftrightarrow \left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a$

cos'è la radice q-esima

Fissato $a \geq 0 \ \exists$

Fissato n

Radice aritmetica di a di ordine n è quel numero che

Analisi I 11/10/2010

- Limiti, derivate, integrali (A. Boccaletto)
- http://didattica-online.polito.it

FUNZIONE → formule/leggi di dipendenza

Dati 2 insiemi A e B

$f: A \to B$ (Una reg. di relazioni che fa corrispondere un elemento di B, ad ognuno di A).
(ins. di partenza)

Dato
① $a \in A$ $\nexists$ $b \in B$ che corrisponde ad a, secondo questa legge f
② Dato $a \in A$ $\exists$ un unico $b \in B$ che corrisp. ad a, secondo f
③ Dato $a \in A$ $\exists$ due o più elementi distinti di B, che corrisp. alla legge f

Solo nei casi 1-2, si usa il termine funzione. Per le funzioni, vale dunque la legge di UNIVOCITÀ.

$\text{Dom} f = \{a \in A : \exists\, b \in B : f(a) = b\}$ (Dato la definiz. di funz. e sottinteso, ci sarà un solo valore).
$a \in \text{dom} f$ $\quad b = f(a)$

$\text{Im} f = \{b \in B : \exists\, a \in \text{dom} f : f(a) = b\}$

Proprietà delle funzioni.

1) la prop. di univocità, è essenz. altrimenti non sarebbe una funzione.

2) la prop. di essere iniettiva. Ci dà la possibilità di invertire il nostro percorso.

Dato $a_1 \neq a_2$ con $a_1, a_2 \in \text{dom} f$

$f(a_1)$ $f(a_2)$ o sono uguali, o diverse.

$\left[\begin{array}{l}\forall a_1, a_2 \in \text{dom} f, \\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)\end{array}\right.$ se $f(a_1), f(a_2)$ sono distinti allora anche a_1 e a_2 lo sono $\Big]$ Legge.

$b = k \cdot a$ Iniettiva (legge di proporzionalità diretta)

$b = ka^2$ Non iniettiva
Perché con $-a$ o $+a$, si ottiene lo stesso risultato.

3) La proprietà di SURIETTIVITÀ
Quando l'im f coincide con tutti gli elementi di B

$b = ka$ suriettiva

$b = ka^2$ Non suriettiva perché il segno di b, dipende solo dal k.

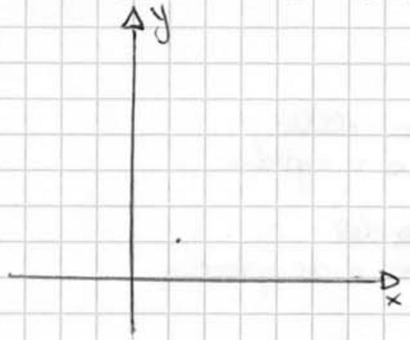
Funzioni reali di variabile reale assunto A e B sono 2 copie distinte dell'insieme dei numeri reali.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

variabile indipendente = il valore numerico di partenza

variabile dipendente = quello a cui si arriva.

Il prodotto cartesiano sarà il piano. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



operazioni numeriche algebriche o di altra natura

o

con operazioni di tipo logico: come il valore assoluto.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Segno } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

... 12/10/2010

$f: A \to B$

$\mathcal{F}(A,B)$ ← insieme di tutte le funzioni

introduciamo un'operazione binaria, operazioni in cui si introducono 2 variabili

che ogni coppia di funzioni, ne associa un'altra funzione.

Supponiamo $A = B$ $f: A \to A$

l'operazione di "COMPOSIZIONE" di 2 funzioni → le istruzioni che riguardano la g, vengono eseguite, subito dopo le operazioni eseguite con la f.

$f: A \to A$

$g: A \to A$

$$\underbrace{(g \circ f)}_{h}(a) = g(f(a))$$

NON COMMUTATIVA

ES:

f: dato a, aggiungi 1.

g: dato a, elevato al quadrato.

In generale $f: A \to$

dom A non invertibile

$A' \subset \text{dom} A \Rightarrow$ Restrizione $f|_{A'}(x)$

- Com'è fatto il grafico della funzione inversa

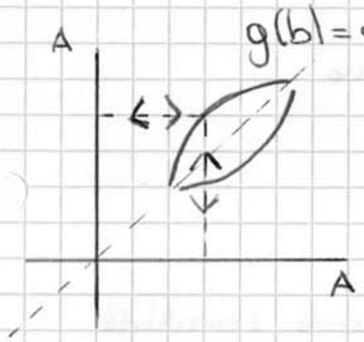
ES.

$f: A \to A$ sia invertibile su tutto A

e sia $g: A \to A$ la sua inversa

$\forall a \in A \quad b = f(a)$

$g(b) = a$



$(a,b) \in G_f \iff b = f(a)$

$(a,b) \in G_g \iff a = g(b)$

} la stessa cosa $G_f = G_g$

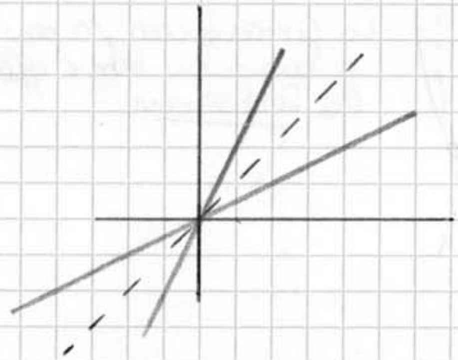
L'insieme è lo stesso, ma gioca ruoli diversi.

Per G_f rosso, Per G_g blu

* Considerando a, variab. indipendente e b, come dipendente allora avrò lo stesso grafico (e scambio il ruolo delle variabili).

** Se invece come è solito, a, dipendente e sulle x, mentre b, indipendente e sulle y, devo fare l'inverso del grafico, rispetto alla bisettrice del I° e III° quadr.

ES. $y = f(x) = K \cdot x \quad K > 1$



$y_f = Kx$ diretta ; l'inversa $x = \frac{y}{K}$ scritta con lo scambio delle variabili.

Il grafico è ancora lo stesso se inverto l'uso delle variabili, ma se invece voglio chiamare, come è solito nell'inverso la y come variabile dipendente, allora applico il **

$$y = \frac{x}{K}$$

Funzioni polinomiali. contiene sia le affini, che le potenze.

grado del polinomio

somma di potenze, moltiplicate per costante.

$$p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$$

sommatoria per i che varia da 0 a m, di oggetti che hanno per fattore $(a_i x^{m-i})$

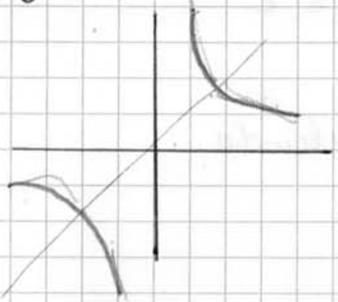
Funzioni Razionali

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Rispetto alle altre, con problema di dominio.

$$\text{dom} f = \{x : Q(x) \neq 0\}$$ (x eliminano gli zeri della funzione.

$f(x) = \frac{1}{x}$ Reciproco iperbole



$y = \frac{1}{x}$ reciproco

$y = x$

sta in I e 3° quad. e si coincide.

verificare che la reciproca è invertibile e coincide con la propria inversa

$f(x) = \frac{1}{x^m}$ Reciproco delle potenze

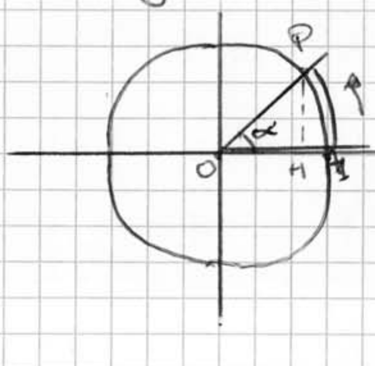
$$f(x) = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

$$f(x) = x^r \qquad r \in \mathbb{Q}$$

$$= x^{\frac{p}{q}} \qquad p, q \in \mathbb{Z}$$

Esponenti negativi, rappresentano la proporzionalità inversa.

Funzioni trigonometriche o circolari



$OH = \cos\alpha$
$PH = \text{sen}\,\alpha$

I gradi non vanno molto bene, perché scorrelato alla misura della lunghezza.

misura in radianti è invece correlata alla lunghezza.

Analisi 19/10/10

Numeri reali

$\mathbb{R}$

la proprietà di continuità o completezza giustifica il passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

- Intervallo: Dati 2 numeri reali a, b $a \neq b$ $a < b$

Si dice intervallo di estremi a e b, l'insieme dei numeri reali (tutti), compresi tra a e b.

1. Intervallo aperto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \begin{cases}]a, b[\\ (a, b) \end{cases}$

2. Intervallo chiuso $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$

$\mathbb{Q}$ con più numeri non si può parlare di intervalli, perché ci sono interruz.

$a < b$

- b è maggiore o uguale a tutti i punti x dell'intervallo, ma non identifica l'intervallo. Ci sono altri numeri che godono di più proprietà.

es. $[1, 3]$ 3 rispetta la prop. ma anche 4, 12 ecc.

- b è il più piccolo tra tutti i numeri reali che soddisfano la condizione precedente.

- A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se $\exists b \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A$, $a \leq b$

M: Insieme dei maggioranti di A $\{b \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq b\}$ $\neq \emptyset$ (non vuoto)

Considero il più piccolo $b \in M$ (l'esistenza di più piccolo elemento è garantito dalla proprietà di completezza)

Teorema

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato, l'insieme dei maggioranti di A ammette un elemento minimo, si chiama estremo superiore di A $[b_0 = \sup A]$

$[a_0 = \inf A] \to$ estremo inferiore di A.

Risulta

$\forall a \in A, b_0 \geq a$

$\forall b$ tale che $b \geq a$ $\forall a \in A$, risulta $b_0 \leq b$

Se A non è limitato superiormente $\sup A = +\infty$

Se A non è limitato inferiormente $\inf A = -\infty$

Esempio $A = \{x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ (è limitato inf. da 0

$\inf A = 0 \notin A$ $\sup A = 1 \in A$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esistenza di "zeri" cioè valori di $x \in$ dom f tali che $f(x) = 0$

Trovare gli zeri, significa risolvere un'equazione

Equaz. algebrica, ovvero quando la f è un polinomio della forma

$$\underbrace{a^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_n}_{f(x)} = 0$$

Due tipi di approccio:

- qualitativo: sapere se ci sono le soluz., quante sono, dove sono collocate
- quantitativo, approssimo le soluz.

Def

Data $f(x)$, è limitata superiormente quando la sua immagine è limitata superiormente.

$$b_0 = \sup(\operatorname{im} f) = \sup f$$

$f(x)$ limitata infer.

$$a_0 = \inf(f) = \inf(\operatorname{im} f)$$

Per dimostrare che una funzione è limitata (immagine) è sufficiente, determinare un maggiorante o un minorante.

$\exists k: \ |f(x)| \le k \quad \forall x \in$ dom f

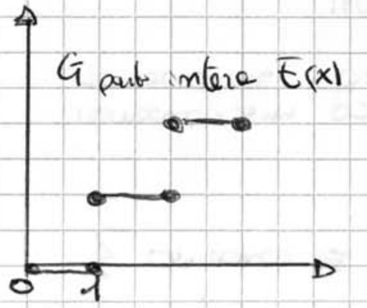
$-k \le f(x) \le k$ ovvero che l'immagine della funzione è contenuta nell'intervallo di estremi, $-k$ e k. $\operatorname{Im} f \subseteq [-k, k]$.

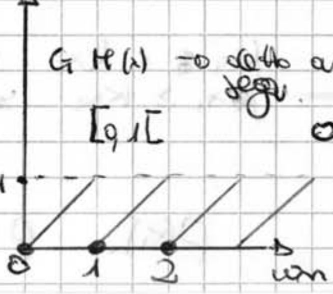
ES. $x \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} E(x) \\ [x] \end{matrix}\right\}$ si usa per indicare la PARTE INTERA di x, ovvero il + grande numero intero che non supera x.

$x = \dots\dots, X\dots$

parte intera

$M(x)$ = Mantissa $= X - E(x)$ → parte decimale di x





È limitata xke non scende sotto 0 e non va sopra 1

$f(x)$ si dice MONOTONA CRESCENTE $\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$ (bisogna fare le verifiche)

se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f(x)$ si dice MONOTONA DECRESCENTE $\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$

se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

CRESCENTI STRETTAMENTE

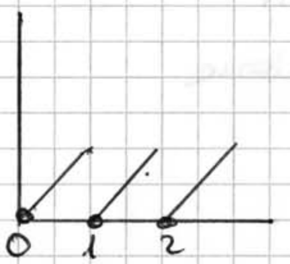
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

DECRESCENTI STRETTAMENTE

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Si può osservare la monotonia, anche in intervalli ristretti.
- parlo di funzioni monotone se $I \subseteq \text{dom} f$ (I intervallo)

se la funz. risulta crescente su un intervallo e anche nell'intervallo successivo, non è per forza crescente sugli intervalli messi insieme.



$[0,1[$ crescente

$[1,2[$ crescente

0 a 2 non crescente.

f strettamente monotona crescente se $I \subset \text{dom}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

è iniettiva $\Rightarrow$ invertibile

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ $x = 0$

$f(x) = \frac{\text{sen} x}{x}$

CONCETTO DI LIMITE

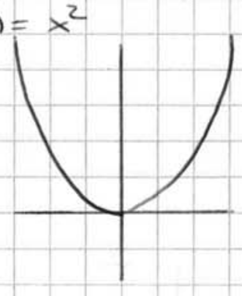
Richiede l'infinito perchè è soggetto a infinite scelte.

La definiz. di limite è un meccanismo che dà la possibilità di effettuare delle operazioni infinite volte.

FUNZIONI DIVERGENTI PER $x \to +\infty$

("Al crescere di x, la funzione assume valori sempre più grandi")

• $f(x)=x^2$



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x verificarlo

$\underbrace{\forall M>0\ \exists K>0}_{?} : \forall x>K\ f(x)>M$

$x^2>M$

$x<-\sqrt{M}$ non mi interes. $\quad x>\sqrt{M}=K$ OK

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, prendendo $x<-\sqrt{M}$

$\forall M>0\ \exists K>0 : x<-K \Rightarrow f(x)>M$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \forall M>0\ \exists K>0 : x<-K\ f(x)<-M$

AFFERM. NEGAZIONE

$\forall \longrightarrow \exists$

$\exists \longrightarrow \forall$

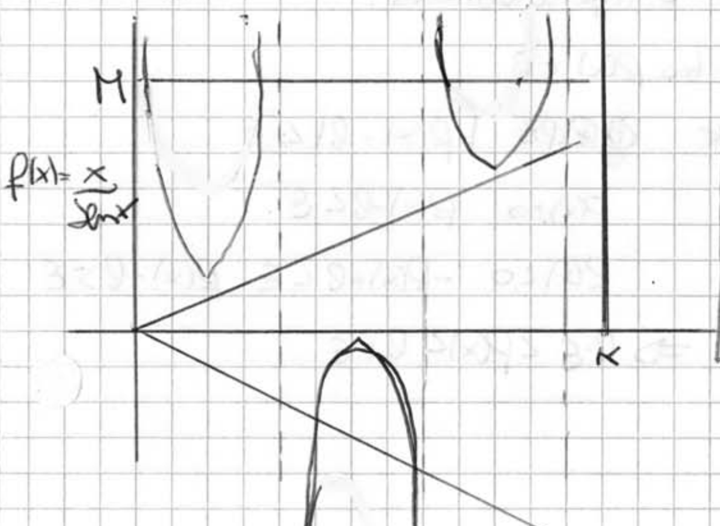
AFF. f diverge positivamente

$\forall M>0\ \exists K>0 : \forall x>K$ allora $f(x)>M$

NEG. f diverge negativamente

$\exists M>0\ \forall K>0\ \exists x>K$ si ha $f(x)\leq M$

Il segno delle funzioni è determinato dalla divergenza e convergenza

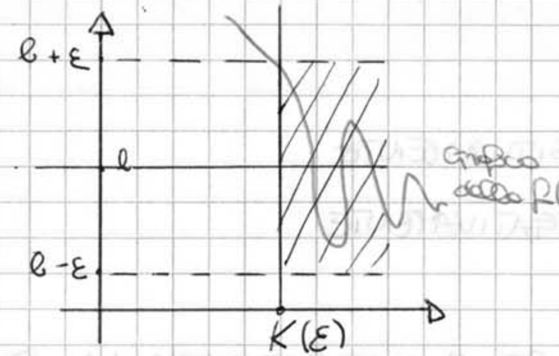


$\forall M>0\ \exists K>0 :$ se $\forall x>K$ allora $|f(x)|>M$

posso definirlo con o senza il segno ma è molto utile.

$\longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty \neq +\infty$

xké con V.A



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ LIMITE ESISTE FINITO, "l" è un contatto orizzontale a destra $x K \to +\infty$

IL LIMITE ESISTE FINITO

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE p.73 (PER LE FUNZIONI CONVERGENTI)

P.S. MA SI APPLICA IN TUTTI I CASI

IPOTESI: vi siano 2 numeri distinti che x uno stesso f(x) soddisfano la definizione di limite

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l_2$

TESI: $l_1 = l_2$

Dimostriamo per assurdo (quindi col principio del terzo escluso: vero o falso).

$l_1 \neq l_2$ neghiamo la tesi

se $\neq$ uno dei 2 più piccolo degli altri. $\quad l_1 < l_2$

$l_1-\varepsilon \quad l_1+\varepsilon \quad l_2-\varepsilon \quad l_2+\varepsilon$

$l_1 \quad l_2$

$\varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$

$l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon$

INTORNI DISGIUNTI

Per il valore di ε fissato

① $\exists K_1$: se $x > K_1$ $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$ $\quad |f(x) - l_1| < \varepsilon$

② $\exists K_2$: se $x > K_2$ $l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$ $\quad |f(x) - l_2| < \varepsilon$

K = massimo tra $\{K_1, K_2\}$ allora se $x > K \Rightarrow \begin{cases} x > K_1 \\ x > K_2 \end{cases}$

Ricordando $l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon$

$f(x) < l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon < f(x)$ $\quad$ ove è risulta f(x) strettamente minore di se stessa. È quindi, una CONTRADDIZ.

Risulta un numero [f(x)] maggiore di se stesso. IMPOSSIBILE.

○ FUNZIONI INFINITE

$1 = o(f)$ in qst caso "o" come magg, xke f dall'altra parte

DUE TEOREMI DI CARATTERE "LOCALE" → quando si verifica su certe restrizioni

○ Limitatezza locale solo per funzioni convergenti

TEOREMA se $f(x)$ una funzione convergente per $x \to +\infty$

(Tor) Allora esiste un numero $\bar{x}$ tale che $f(x)$ è limitata nell'intervallo

NON limitato $[\bar{x}, +\infty)$

Dimostrazione

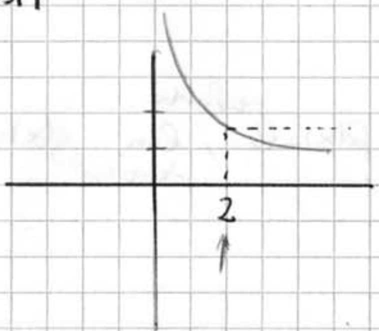
$\exists\, \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$: se $x > K$ con $x \in \text{dom } f$ allora $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$x \in [K, +\infty) \wedge \text{dom } f$

vuol dire che $\ell - \varepsilon$ è un minorante rispetto ai valori che assume la f e $\ell + \varepsilon$, maggiorante.

$f(x) = \frac{1}{x}$



NON È LIMITATA GLOBALMENTE nel suo tutto dom

ma localmente lo è.

con $\bar{x} = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ quando da un certo punto in poi G_f diventa limitato.

○ PRINCIPIO DI PERMANENZA DEL SEGNO

- caso di funz. CONVERGENTI (ma si applica anche alle divergenti)

Se data una funzione $f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$

ALLORA, $\exists\, \bar{x}$: $x \in [\bar{x}, +\infty) \wedge \text{dom } f$ si ha $f(x) > 0$

ESEMPIO.

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ se mi avvicino a x da sx, den=negativo e f(x)=negativo.

TEOREMA

Ipotesi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = m$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = l \cdot m$ non occorre sempre dire prima che il limite esiste.

per la dimost. si usa il teorema della limitatezza locale.

Se f, g convergono anche $f\cdot g$ converge. non vale per lo scambio, cioè dal limite del prodotto, non si può risalire ai limiti dei fattori.

ESTENSIONI A CASI DI DIVERGENZA.

f	g	$f+g$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

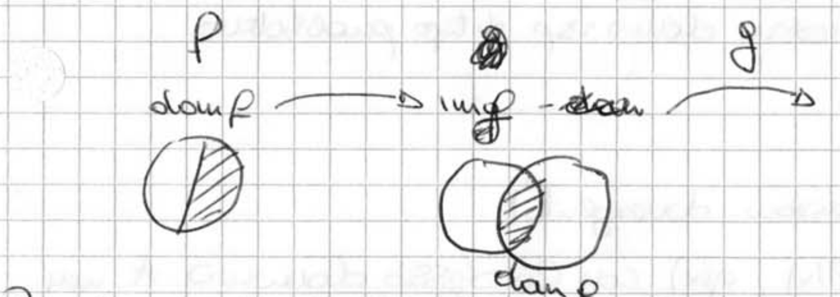
* DIPENDE da f e g perchè non c'è nessun teorema che prescinde dalla forma delle funzioni e che ci faccia agire in generale.

Ci sono esempi di funzioni $f(x) + g(x)$ con f che tende a $+\infty$ e g a $-\infty$, si può arrivare di tutto

LIMITE DEL PRODOTTO

f	g	$f\cdot g$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l>0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l<0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$l=0$	$\pm\infty$	F.I. *

LIMITI E FUNZIONE COMPOSTA



Per decomporla e poterla studiare, dalle variabili diverse

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} y = g(z) \\ z = f(x) \end{array}}$

Il limite di una funz. composta, lo faccio decomponendo, studiando i limiti e deducendo poi il limite finale della funzione composta.

TEOREMA

Date f, g

$dom\, f$, $dom\, g$, $dom\, g\circ f$ non limitati superiormente

Ipotesi $\rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{z \to +\infty} g(z) = l$ esiste finito

Tesi $\lim_{x \to +\infty} (g \circ f)(x) = l \qquad x \in dom\,(g \circ f)$

corrispondente

Dimostrazione

$\lim_{z \to +\infty} g(z) = l$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon > 0 \ \forall z > K \ \ z \in dom\, g \Rightarrow |g(z) - l| < \varepsilon$

$\forall M \ \exists C_\varepsilon > 0 : \forall x > C \ \ x \in dom\, f \Rightarrow f(x) > M \qquad M = K_\varepsilon$

$f(x) = z$ ritrovo/verifico la condizione $z > K$

Combinando le 2 definizioni, creo la definizione di limite che avevo cercato

Calcolo di limite per sostituzione

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ applicando la regola della funz. composta

$x \rightarrow z = x^2 \qquad z \rightarrow u = z + 1 \qquad u \rightarrow y = \sqrt{u}$

TEOREMA confronto semplice per funzioni convergenti.

f, g stesso dominio A non limitato sup.

i) $\exists b : \forall x > b \quad x \in A \quad f(x) \geq g(x)$

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = m$

TESI allora tra limiti sussiste una relazione d'ordine

$l \geq m$ — non posso mettere la disug. stretta nella tesi nell'ipotesi se però ... dimostrazione nell'Esempio

Il teorema si usa utilizza ...ipotesi, sul valore delle funzioni, e si deduce che il limite di g è uguale di quello di f. cioè applicando i limiti alla disug. e il risultato dimostrerà che anche se essi, la relazione è affermata.

CORROLARIO $g(x) \equiv 0$

Se $f(x) \geq 0$ e se converge a l, allora $l \geq 0$

sembra il principio di permanenza del segno, ma il risultato è diverso perché dal segno di f si riconduce a quello di l.

ESEMPIO 1

$x > 0 \quad \frac{1}{x} > 0$

$f(x) \quad g(x)$

$f(x) > g(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x)$

Dimostrazione $l < m$

Per assurdo, del Teorema. Quindi da $l \geq m$, allora ... $m < l$

$\forall \varepsilon$ ~~...~~ ε (costruzione intorni disgiunti ecc.)

$l + \varepsilon < m - \varepsilon$

$\exists K_1 \quad x > K_1 \quad f(x) < l + \varepsilon$

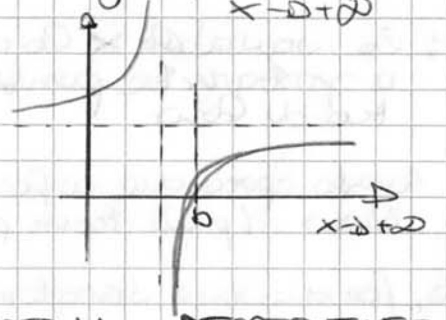
$\exists K_2 \quad x > K_2 \quad m - \varepsilon < g(x)$

vedendo i, se prendo ... e se prendo $x > \max\{K_1, K_2, b\}$

$g(x)$ risulta $\geq f(x)$

② $f(x)$ è limitato, in tal caso converge.

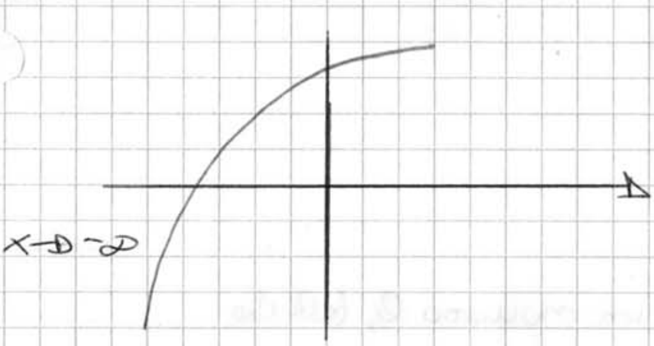
Nel caso convergente, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x \geq b} f(x)$



Se f MONOTONA DECRESCENTE

① f ~~non~~ limitata converge e decresce: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f(x)$

② f non limitata e decresce $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



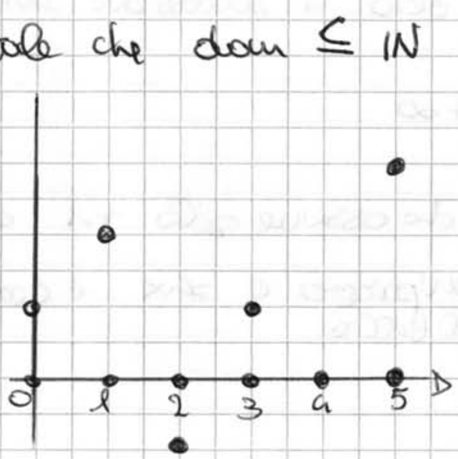
con f CRESCENTE $\begin{cases} \text{non limitata} & \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \text{limitata} & \lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf f(x) \end{cases}$

con f DECRESCENTE $\begin{cases} \text{non limitata} & \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \text{limitata} & \lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup f(x) \end{cases}$

SUCCESSIONI $\{y_n\}$ indice restrizioni ↓ uno graffo, per ricordare che non è fatto da uno specifico punto. n...

Una funzione il cui dominio, è ridotto all'insieme dei numeri naturali

Funzione tale che dom $\subseteq \mathbb{N}$



Non segue una linea retta

SUCCESSIONE MONOTONA CRESCENTE

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$n_1 < n_2 \Rightarrow y_{n_1} \le y_{n_2}$

TEOREMA

Sia dato $f(x)$ con dominio non limitato sup.

So com'è il limite della funzione e voglio conoscere il comportamento della discreta.

IPOTESI $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Allora, se $\{x_n\}$ è una successione (discreta) divergente tale che $\forall n$, $x_n \in$ dom

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$ → consente con certezza di approssimare il limite.
$\quad = y_n$

Se so qual è il comp. del limite di una funzione e se faccio una discretizz. della variabile dipendente, allora ~~...~~ trovo lo stesso limite.

IPOTESI se $\forall \{x_n\}$ tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

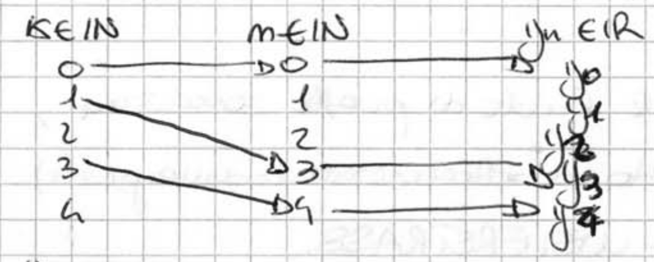
Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se il limite $\exists$ la discreta mi dà lo stesso risultato

ESEMPIO $\frac{\sin(x)}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$ ed è vero $\forall \{x_n\}$ (discretizzazione)

Sottosuccessione o successione estratta. (scelte fra valori assunti dalla successione però dato, rispettando però delle regole).

$K \in \mathbb{N}$ associo gli indici che corrisp. ad alcuni valori della x che voglio prendere (rispettando delle regole).



Deve essere crescente perché K deve far corrisp. o uno dello stesso valore, o superiore. Quindi non posso cambiare l'ordine

ottengo

$\boxed{\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}}$ (l'indice k determina con la regola di estrazione m e poi dall' n_k, ottengo y_n, che sono una funz. di k.

~~ESEMPI~~ $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

- $f(x)$ non definito in x_0 — x_0 non deve x forse appartenere al dominio, ma è necessario che sia un punto di accumulazione.

DEFINIZIONE Dato un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$, e dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo che x_0 è un punto di **accumulazione** per A, se $\forall r > 0$ $\exists$ numero reale $a \in A$, che sono: 1) $a \neq x_0$
2) $a \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$A = (0,1)$

Tutti i punti di accumulazione di A, formano un intervallo chiuso $[0,1]$

Se $A = \{c\}$ allora non ci sono punti di accumulazione. perché non rispetta (1)

Se $A = \mathbb{N}$ " " " " " " " intervallo non limitato

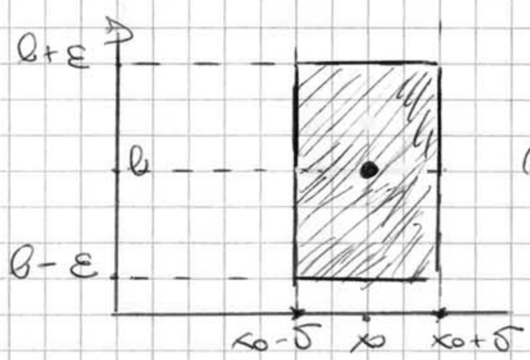
Se $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ allora l'unico punto di accumulazione è zero.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{cases}$$

Sia x_0 un punto di accumulazione per dom f

- Nel caso $+\infty$.
  $\forall M > 0$ $\exists$ $\delta > 0$: $\forall x \in \text{dom} f$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$
  $\Rightarrow f(x) > M$

- Nel caso l
  $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \text{dom} f$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$
  $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ $\qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\quad | \quad f(x) - l = o(1)_{x \to x_0}$ (Landau)



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \qquad 1 = o(f) \quad x \to x_0$$

$$\text{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} \text{sgn}\, x \nexists$ ~~valore~~

$\lim_{x \to 0^+} \text{sgn}\, x = 1$, a condizione di escludere 0,

$\lim_{x \to 0^-} \text{sgn}\, x = -1$ " " " " "

$f(x) = |\text{sgn}\, x|$ $x \neq x_0$ Provarlo

Quando $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ allora la funzione è

un asintoto verticale ~~destro~~ (da destra)

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ asintoto verticale (da sinistra).

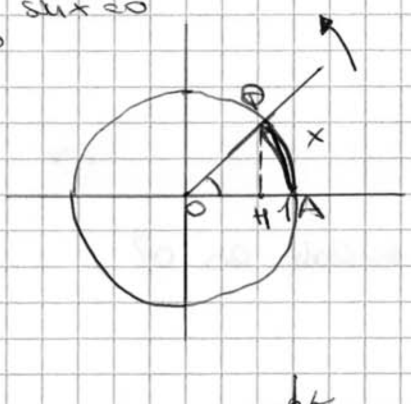
ESEMPI NOTEVOLI

→ Forme indeterminate

→ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (con radianti) $\frac{\pi}{180°}$ (con gradi)

Si presenta in forma $\frac{0}{0}$ F.I.

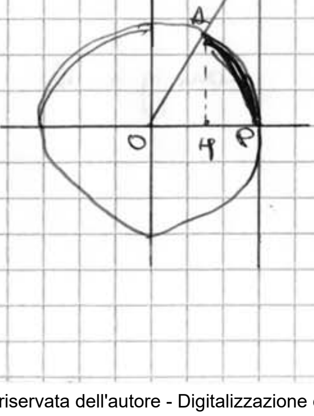
$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$



$\sin x = PH$

$0 \leq \sin x \leq x$ Per il teorema del confronto tende a ZERO

se unisco P con un altro punto P dello retto, la minima distanza è tra con la perpendicolare.



OAK TRIANGOLO

OAP SETTORE CIRCOLARE

AREA DI OAP < AREA DI OAK

$OAP = \frac{x}{2}$ $OAK = \frac{\text{tg}\, x}{2}$ $\Rightarrow 0 \leq x \leq \text{tg}\, x$

FUNZIONI CONTINUE

- Funzione continua in un punto

$f(x)$ $x_0 \in dom f$ (1ª diff con i limiti) , x_0 punto di accumulazione per dom f

Definizione. $f(x)$ si dice continua in x_0 se:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\exists$ finito

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

condizione di continuità

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in dom f \ |x - x_0| \leq \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- le funzioni elementari sono continue nei punti del loro dominio.
- costante $f(x) = c$ $\forall x$ $dom f = \mathbb{R}$

qualunque sia ε e qualunque scelta di δ verificherò pertanto la Def.

quindi la costante è continua in tutti i punti

- affine $f(x) = ax + b$ $dom f = \mathbb{R}$

$$|(ax+b) - (ax_0 - b)| = |a(x - x_0)| = |a||x - x_0| < \varepsilon$$

** con ε arbitrario, si sceglie δ in modo tale che abbia valore $< \varepsilon$

$\to a \neq 0$ $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$

$|a||x - x_0| < \varepsilon$ $\qquad |a||x - x_0| \leq |a| \cdot \delta = \frac{|a|\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$

Tutte le affini sono continue in tutti i punti del dominio.

- $f(x)$ e $g(x)$ continue in x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) \exists$ finito $f(x_0)$

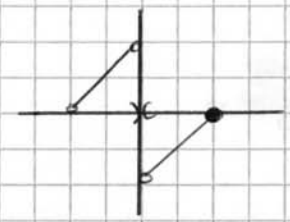
$\lim_{x \to x_0} g(x) \exists$ finito $g(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) \exists$ finito $f(x_0) + g(x_0)$

se 2 funzioni sono continue, allora la somma del limite delle 2 funzioni continue, è continua.

di conseguenza, tutte le potenze x^n continue $\forall x \in \mathbb{R}$

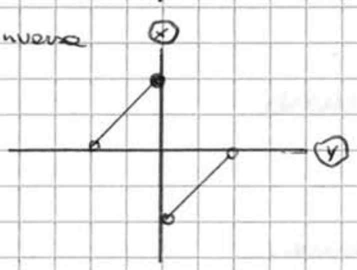
- Polinomi, sono funz continue, perché opera con operazioni



è continua in ogni punto del dominio.

Non monotona
È invertibile, x ké iniettiva.

inversa



$\mathrm{dom}\, f^{-1}\ ]-1, 1[$
immagine della f

f^{-1} è continua in $x_0 = 0 \in \mathrm{dom}\, f^{-1}$? No.

La funz inversa è continua, se il dom f è un intervallo.

TEOREMA

$f(x)$ è definita su un intervallo $I = \mathrm{dom}\, f$ e se è invertibile su I,
allora $f(x)$ continua in $x_0 \in I \Rightarrow f^{-1}(y_0)$ continua in $y_0 = f(x_0)$

○ $f(x) = x^n$

n pari $\sqrt[n]{x}$ è continua $\forall x_0 \geq 0$
(l'inversa della potenza)

n dispari $\sqrt[n]{x}$ è continua $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

Funzioni trigonometriche

$y = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

① PRIMA FASE $x_0 = 0$ (verifica, x un punto generico).

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$

è continua per $x_0 = 0$

② SEC FASE

$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ Riconduzione del problema generico al particolare.

$\forall \varepsilon\ \exists \delta : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$

$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$ PROSTAFERESI

$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < \varepsilon$

$x \to x_0 \quad |x - x_0| \to 0$ tende a 0 se $t \to 0$

$t = \frac{x-x_0}{2} \quad t \to 0$

Data $f(x)$ e dato un insieme $I \subset \text{dom} f$ se $f(x)$ risulta continua $\forall x_0 \in I$ si dice che f è continua su I.

Insieme di tutte le f continue su un dato I:
$$C^0(I)$$

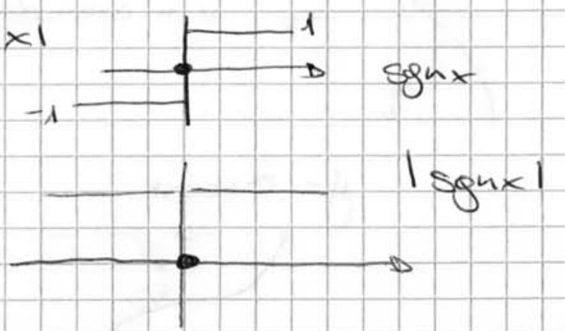
Funzioni discontinue.

CLASSIFICAZIONE

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ lo decompongo x vedere il comportamento.

① $\underbrace{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+}}_{\text{esistono finiti}} f(x) \neq f(x_0)$

Es. $f(x) = |\text{sgn}\, x|$



Discontinuità eliminabile

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

Possiamo ridefinire una nuova funz. sostituendo quel valore trovato dal limite.

$g(x)$ è continua in x_0

· $f(x)$ non definita in x_0

x_0 accumulazione per dom f

$l = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+}$ $\exists$ finito.

Es. $f = \frac{\sin x}{x}$ $x_0 = 0$ non c'è

COMPLETAMENTO PER CONTINUITA'

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

alla f si dà un valore da rendere continua

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l = x_0 \end{cases}$$ | continua

→ FUNZIONI ALGEBRICHE (Radici)

FUNZIONE IDENTICA $y = f(x) = x$

→ FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (INVERSE)

ESPONENZIALI E LOGARITMI

○ ESPONENZIALI

$a^n \quad a^{-n} \quad a^{\frac{1}{n}} \quad a^{\frac{p}{q}} \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{Q}$ per rendere [illegible] in modo da [illegible], quella tutto $\mathbb{R}$.

un po' più complicato l'invece di calcolo ecc!

- $f(x) = a^x$

Supponiamo $a > 1$ $\quad x_0 \in \mathbb{R} <$ Razionale / IRRAZIONALE

ci sono successioni di numeri $\mathbb{Q}$ che hanno come limite x_0, questo, perché sono densi nella retta.

Prendo delle successioni fatte di numeri razionali, che hanno come limite x_0

$x_n \quad x_0 \quad x_n \qquad x_n \in \mathbb{Q}$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

in generale $\lim_{x \to x_0^-} a^x \qquad \lim_{x \to x_0^+} a^x$

facendolo però limitatamente ai razionali che scelgo io uno dannino.

Questi limiti si possono dimostrare che esistono e convergono allo stesso valore. $a > 1$, un modo è dire che a^x è monotona crescente.

suppongo $x_1 \; x_0 \; x_2 \qquad x_1 < x_2$

$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) = a^{x_1}(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ tende a 0, di conseguenza la distanza tende a 0.

$x_2 = x_1 + \frac{1}{n}$

2^{π} è definito da un limite. Se exp. è inv. il valore, si può ottenere applicando dei limiti.

$2^{\pi} = \lim_{r_n \to \pi} 2^{r_n} \qquad r_0 = 3, \; r_1 = 3{,}1, \; r_2 = 3{,}14$

con $a>1$ log. crescente strettamente

$0<a<1$ decrescente strettamente.

Proprietà:

$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

applicando questa regola le moltipl. diventano delle somme.

dom $= (0,+\infty)$

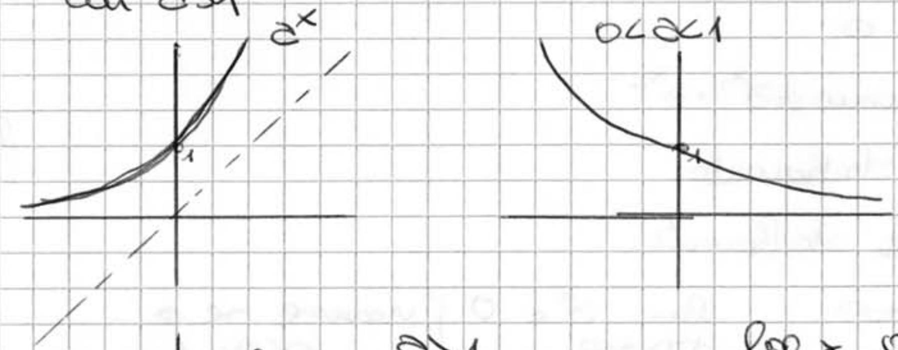
$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ con $a>1$

$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$

$\log_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ $0<a<1$

$\log_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$

con $a>1$



○ $f(x) = x^x$ dom $x > 0$ né potenza né log

$\boxed{f(x) = a^{x \log_a x}}$ con $a > 1$ 1 passaggio $a^{\log_a x^x}$

$\lim_{x \to +\infty} x^x = \lim_{x \to +\infty} a^{x \log_a x} = a^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} x^x = a^{0 \cdot -\infty} = 0^0$ F.I. xhe log $\boxed{\lim_{x \to 0} x \cdot \log_a x = 0}$

$\lim_{x \to 0^+} a^0 = 1$

○ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ dom $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$ $\quad 0^{\infty}$ non F.I.

$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ $\quad \infty^0$ F.I.

1 caso $a^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\infty} \overbrace{\log_a x}^{-\infty}}$ con $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} a^{-\infty}$

2 caso $\lim_{x \to \infty} a^{\overbrace{\frac{1}{x} \log_a x}^{0}}$

○ $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \overbrace{\text{finito}}^{e}$, è compreso tra 2 e 3, è un numero irraz.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = $ 1^{∞} F.I.

con $a > 1$ $\quad a^{\overbrace{x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}^{\infty \cdot 0}}$ con $x \to +\infty$

quindi F.I.

11/11/10

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ anche con $x \to -\infty$

Utilizzo successioni che per eccesso e per difetto, approssimano queste successioni.

○ e viene spesso usato come base degli esponenziali e dei logaritmi.

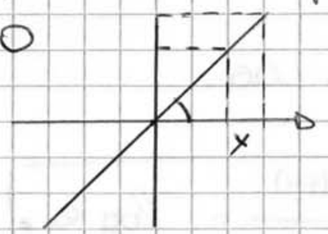
$e^x \quad \cdot \log_e x \Rightarrow \log x \Rightarrow \ln$

$\text{Log}_{10} x$

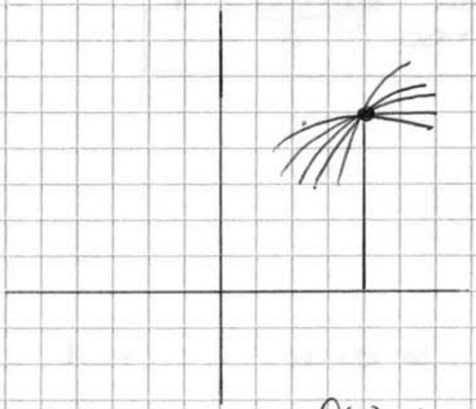
Funzioni lineari $y = ax$

grafico = una retta passante per l'origine.

$a > 0$

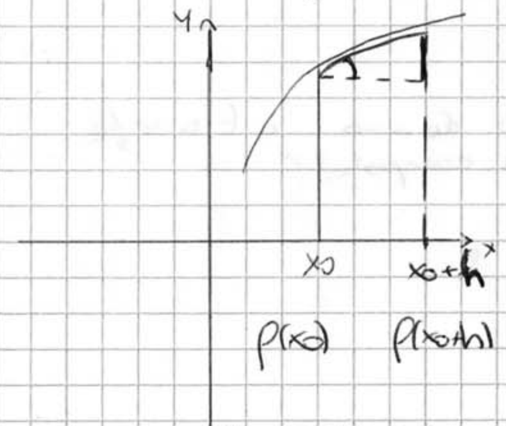


$a = \frac{y}{x}$



la sua funz. cresce o decresce non mi consente di misurare quanto cresce, o se cresce più, o meno di un'altra.

$f(x)$ dominio = intervallo = I



Per capire come cambia, mi sposto un po' dal punto

$h \neq 0$ h "piccolo" = incremento

$x_0 + h \in \text{dom } f$

$x_0 \in I$ non coincidente con un estremo, quindi punto interno

Per vedere di quanto cresce, calcoliamo il dislivello

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ Facciamo un'analisi locale

• Se la f. è continua quando $h \to 0$ il limite di $f(x_0+h) = f(x_0)$ che $- f(x_0) =$

Quindi avremo un $\frac{0}{0}$.

Definizione Sia data una funzione $f(x)$ e sia $]a, b[$ un intervallo contenuto nel dom f. Sia x_0 ~~punto~~ $\in]a, b[$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ = rapporto incrementale "dal valore della parola".

• Se il limite esiste finito, si dice che f è derivabile in x_0.

• Inoltre, il valore del limite si dice la derivata di f nel punto x_0.

• Se il limite del R.I. $\nexists$ o non è finito $(-\infty, +\infty)$, allora si dice che la f non è derivabile.

- $f(x) = ax + b \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{(a(x_0+h)+b)-(ax_0+b)}{h} = \frac{\cancel{ax_0}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax_0}-\cancel{b}}{h} = \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

Il rapporto incrementale è costante.

$f'(x) = a$

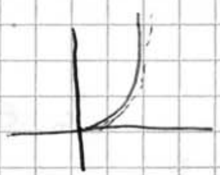
se $f(x) = b \quad (a=0)$

$f'(x) = 0$

- $f(x) = x^2 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{\cancel{x_0^2}+2x_0h+h^2-\cancel{x_0^2}}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2x_0)}{\cancel{h}} = h+2x_0$$

$$\lim_{h \to 0} (\ldots) = 2x_0 \qquad \text{(crescente)}$$



- $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

- $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 \neq 0$

$$\frac{\left(\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}\right)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\cancel{x_0}-\cancel{x_0}-h}{x_0(x_0+h)} = \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{-\cancel{h}}{x_0(x_0+h)} =$$

$$= \frac{-1}{x_0(x_0+h)}$$

$$\lim_{h \to 0} (\ldots) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

la defin. precedente è detta: PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

VEDERE SUL LIBRO 13.3

$\lambda(x-x_0)$ = Differenziale di f nel punto x_0.

applicazione teorica

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(1)(x-x_0)$
$x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ CONTINUA.

<u>TEOREMA</u> se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0

VICEVERSA FALSO

$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \underset{\text{diverso da quello scritto per } f(x)}{o(1)}\,(x-x_0)$

Sommo le 2 formule, membro a membro

$f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + \underbrace{\left(f'(x_0) + g'(x_0)\right)}_{\lambda} \cdot (x-x_0) + o(1)(x-x_0)$

$o(1)$ è ancora diverso, ma sapendo che la somma di infinitesimi è un infinitesimo, posso scriverlo così usandolo. $\left[o(1) + o(1) = o(1)\right](x \to x_0)$

$(f+g)(x) = (f+g)x_0 + \lambda(x-x_0) + o(1)(x-x_0)$

formula dell'incremento finito, applicata alla formula $f+g$.

λ è quindi la derivata della funzione $f+g$.

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (che sarebbe λ)

* per il prodotto occorre

$o(1) + o(1) = o(1)$ se $\varphi = o(1)$ e ψ ha limite finito $\varphi + \psi = o(1)$

(fi)

** La regola del reciproco non richiede specifiche dimostrazioni.

$\frac{1}{f(x)}$ si ricava dalla regola della funzione composta.

$\parallel$

composizione $y = f(x)$ con $\frac{1}{y}$

Derivata di $\frac{1}{y} \longrightarrow -\frac{1}{y^2}$

Derivata di $\frac{1}{f(x)} \to -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$

REGOLA DI DERIVAZIONE DELL'INVERSA

$y = f(x)$ $g(x)$ che supponiamo che una sia l'inversa dell'altra e che quindi la composta dia una funzione identica!

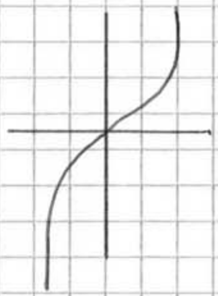
$g(f(x)) = x$

$y = f(x)$ derivabile in x_0

$g(y)$ sia derivabile in $y_0 = f(x_0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 305

◦ $f(x)=x^3$ Strettamente crescente (iniettiva)



$x_0=0$ in questo punto in cui
$f'(x)=3x^2$ la derivata si annulla.

TEOREMA Sia $f(x)$ derivabile IN TUTTI i punti di un intervallo aperto I. Sia $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Allora $f(x)$ crescente su I

A differenza del 1° teorema, si deve valutare e un teorema che vale su tutto I.

◦ Se $f'(x)>0 \quad \forall x \in I$ allora f è strettamente crescente su I.

◦ Se $f'(x)=0 \quad \forall x \in I$ allora f è costante su I

TEOREMA DI FERMAT

Sia dato $f(x)$ e sia x_0 un punto del suo dominio.

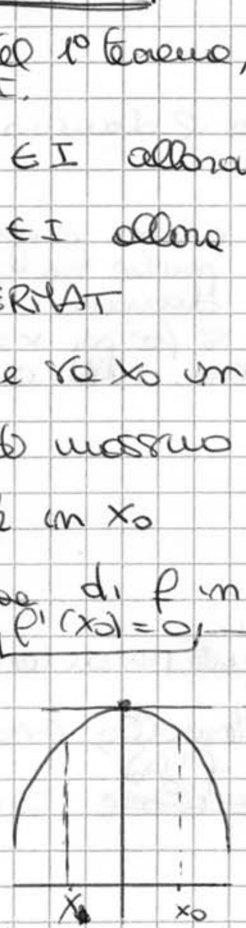
① $f(x)$ punto di massimo in x_0

② $f(x)$ è derivabile in x_0

Allora la derivata di f in x_0 deve essere uguale a 0.
cioè $f'(x_0)=0$

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$f(x_0)>f(x)$ con $x>x_0$
$f(x_0)>f(x)$ con $x<x_0$

$x > x_0$ $\left(\dfrac{\text{negativo o nullo}}{\text{positivo}}\right) \rightarrow \leq 0$

rapp. incrementale

$x < x_0$ $\left(\dfrac{\text{negativo o nullo}}{\text{negativo}}\right) \rightarrow \geq 0$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{un numero su valori} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{un numero su valori} \geq 0$$

$\Rightarrow 0$

Il problema del teorema è che funziona solo dove c'è la derivata e non distingue fra minimo o massimo

Casi di non derivabilità

1) $\lim_{x \to x_0^-}$ Rapporto incrementale — esistono finiti $= l$

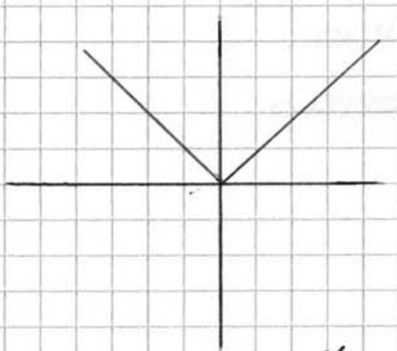
2) $\lim_{x \to x_0^+}$ Rapp. inc. — esistono finiti $= m$

$\Rightarrow$ funzione $f(x)$ è continua in x_0

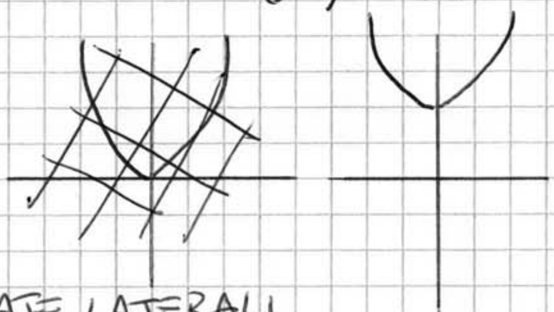
x_0 è un punto angoloso

$f(x) = |x| \qquad x_0 = 0$

$$= \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{x} ; & x \geq 0 \\ e^{-x} ; & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{e^{-x}-1}{-x} = -1$$

DERIVATE LATERALI

- Sia $f(x)$ una funzione continua in un certo punto x_0 e supponiamo che $\exists\, r > 0$, tale che $[x_0, x_0 + r) \subseteq \text{dom} f$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = (D^+ f)(x_0)$$

ESISTA FINITO [a dx]

$$\lim_{x \to x_0^-} --- = (D^- f)(x_0)$$

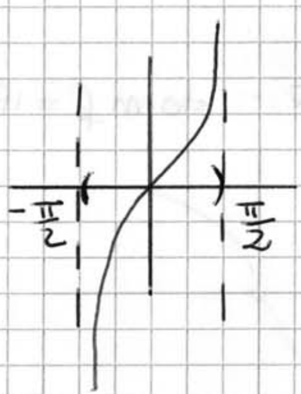
- TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE
  " " " DERIVABILI

$f(x)$ · $[a,b]$ chiuso $a<b$

$f(x)$ continua su $[a,b]$ $(\forall x_0 \in [a,b])$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_0 = b \end{array}\right\}$ continuità laterale

$y = tgx$



continua e non limitata.

TEOREMA DI WEIERSTRASS.

Se $f(x)$ è una funzione continua su $[a,b] \subseteq dom\, f$ (inclusi gli estremi) allora $f(x)$ è limitata.

Dimostrazione

TESI: Dobbiamo dimostrare che esiste $M>0$ tale che $f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$

PER ASSURDO. $\forall M>0$ $\exists x \in [a,b]$: $f(x) > M$

$M = 1, 2, 3 \ldots, M$ — una successione $\{x_n\}$

$f(x_M) > M$

$\underbrace{x_1, x_2, x_3 \ldots x_M}$

Successione contenuta in $[a,b]$ quindi limitata

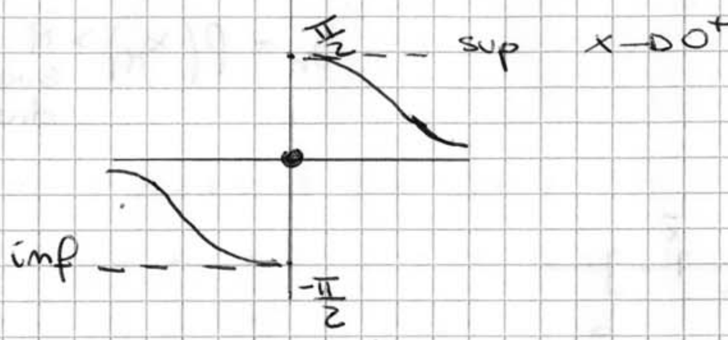
B. W. $\Rightarrow$ Esiste una sottosuccessione convergente

$$\{x_{M_K}\} \quad \lim_{K \to +\infty} x_{M_K} = \bar{x} \in [a,b]$$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$[-1, 1]$

$x \to \infty \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \to 0$



$p(\bar{x})=0$.

oppure passo non trovando mai $p(c^{\dots}) \neq 0$

ES. $p(x) = x - \pi$ $\quad [0,5]$

$\bar{x} = \pi$

con 2, 4, 8 ...

Trovo sempre c razionali

---

supponiamo che nell'esercizio di prima, non abbiamo trovato $p(c)=0$

$a=0$ $\qquad b=0$

a_1 $\qquad b_1$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

a_n $\qquad b_n$

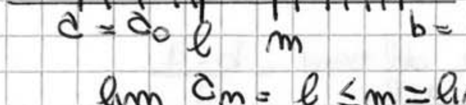
Crescente $\qquad$ Decrescente

Restringo e sono limitate perché b, non sarò mai a sinistra di a.

A e b si avvicinano per $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

lunghezza dopo n restrizioni

Ho costruito una successione di intervalli incapsulati.



$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \le m = \lim_{n\to+\infty} b_n$

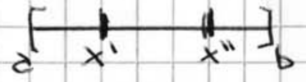
per il teorema del confronto. N.B. deve essere per forza uguale altrimenti si cadrebbe in contraddizione.

Dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = l = m = \lim_{n\to+\infty} b_n = \bar{x}$

Tutto l'intervallo di estremi $f(a)$ e $f(b)$ $\subseteq$ im$f$

$[a,b]$ $x', x'' \in [a,b]$

$$f(x') \le f(x) \le f(x'') \quad \forall x \in [a,b]$$



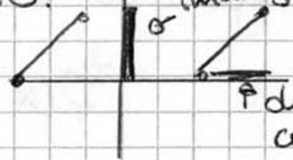
$f([a,b]) = f([x',x''])$ = è un intervallo

~~[illegible]~~

L'immagine, può essere un intervallo quindi se la funzione è continua.

Il dominio no. e non può succedere neanche il viceversa.

ES. immagine = intervallo



dominio non intervallo, perché composto da 2 pezzi separati.

TEOREMA DI LAGRANGE (ROLLE)

Detto anche teorema della media o meglio, DEL VALORE MEDIO.

IPOTESI: (ci sono 2 ipotesi, una per la deriv. una per la continuità!)

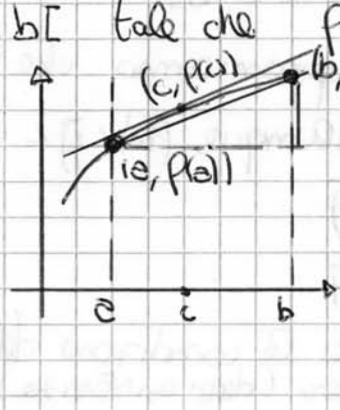
sia data $f(x)$, $[a,b] \subseteq$ dominio della funzione.

① $f(x)$ continua in $[a,b]$

② $f(x)$ derivabile in (a,b)

TESI

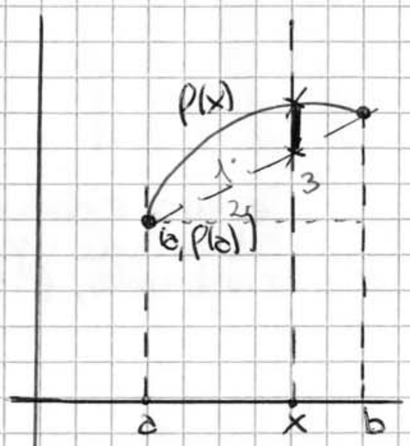
$$\exists\, c \in\,]a,b[\text{ tale che } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Da queste parti c'è un punto tale che $f'(c)$ sarà il coeff angolare nel punto $(c, f(c))$

N.B. La tangente in $(c, f(c))$ è parallela alla retta che unisce a, b.

Teorema di Fermat.
x' punto di minimo.
x' è punto di derivabilità
$\Rightarrow f'(x') = 0$
$\quad \quad \overset{\shortparallel}{c}$



x, si sposta tra a e b. La ~~tangente~~ verticale, interseca la corda, sempre in due punti.
la distanza tra cui la verticale incontra la corda e la retta, varia al variare di x, ma agli estremi, si annulla.

$y = f(x)$

$$g(x) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\text{coeff. angolare}} \cdot (x-a) + f(a)$$

$$f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a)\right] = h(x)$$

h(x) per costruzione, soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

Verifica

$h(b) = f(b) - [f(b) - \cancel{f(a)} + \cancel{f(a)}] = 0$ Terza ipotesi verificata

$h(a) = f(a) - f(a) = 0$

La funzione h(x) è tale che $h(a) = h(b)$

Dalla puntuale, alla globale

$\forall x_1, x_2 \in I \quad \exists c \in]x_1, x_2[\subset I$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

$$f(x_1) = f(x_2) \iff f \text{, è costante.}$$

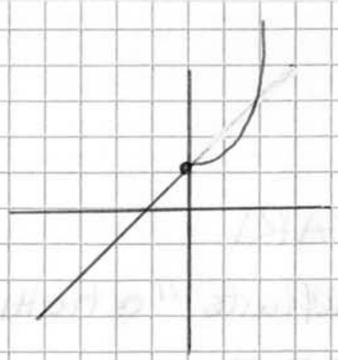
N.B. Questo è verificabile, anche perché consideriamo come ~~dominio~~ insieme di derivabilità, un INTERVALLO.

ES.

$(\operatorname{sgn} x)' = 0$ dove esiste.

Ma non è continua in $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=1 \\ e^x & x>0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x+1 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$

$f(0) = 1$ E' quindi continua.

$$f'(x) \begin{cases} x>0 & 1 \\ x<0 & e^x \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$ E' derivabile

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ per e^x

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x<0 \\ -\operatorname{sen} x & x>0 \end{cases}$$

La derivata non esiste ~~in~~ in 0, perchè non è continua in 0.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ [redacted]

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Risolve gli $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f}{g}$

Sono date due funzioni $f(x), g(x)$ ed è dato x_0

- Supponiamo che siano derivabili in un intervallo del tipo $]x_0, x_0+\varepsilon[$ con $\frac{\infty}{\infty}$ cambia
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0 \; (\infty)$

se $x \to +\infty$ intervallo $]a, +\infty[$ non limitato

$[x_0, x_0+\varepsilon[$ Lagrange soddisfatta.

- Supponiamo $g'(x)$ non si annulli nell'intervallo $]x_0, x_0+\varepsilon[$
- $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ESISTE (finito o infinito)

TESI $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Regola pratica

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$ se finito, sarà uguale al limite del rapporto delle funzioni normali.

N.B. si fa la deriv. del NUM. e quello del DENOM. non la derivata del prodotto

DUE ESEMPI DI APPLICAZIONE SBAGLIATA

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x+2} = 0$

con Hôpital $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{1} = 1$ Sbagliato xké non è una F.I.

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x} = \frac{\infty}{\infty}$ F.I.

con H. $\frac{1-\cos x}{2+\cos x} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ LIMITE NON ESISTE $x \to +\infty$ (*)

$\lim \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$ SBAGL perché non esiste il limite del rapp. delle derivate (*)

senza H

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\left[1 - \frac{\sin x}{x}\right]}{x\left[2 + \frac{\sin x}{x}\right]} = \frac{1}{2}$$

PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI DI EQUIVALENZA

$(x,x) \in G \quad \forall x \in X$ Riflessività

$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in G \\ (y,z) \in G\end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \in G$ Transitività

$(x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$ Simmetria

$x \in X \qquad \underset{\text{equivalenza}}{E(x)} \subset X$

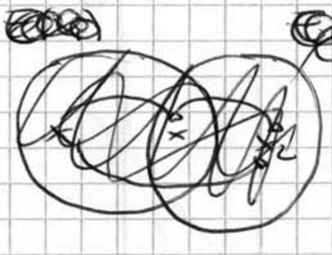
$= \{ y \in X : (x,y) \in G \}$

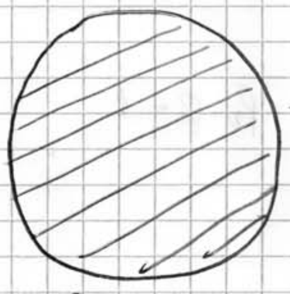
Classe di equivalenza di x.

$x_1, x_2 \in X$ ~~$E(x_1, x_2)$~~ $E(x_1) \cap E(x_2) = \emptyset$ allora coincidono per la prop. transitiva

$\Downarrow$

$E(x_1) = E(x_2)$





X · relazione di equivalenza

sottoinsiemi disgiunti che coprono tutto l'insieme

PARTIZIONE DI CLASSI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle funzioni per $x \to +\infty$

$\to$ Criterio di asintoticità.

DEF. Siano date f, g

Si dice che f e g sono "asintotiche" se $f - g = \underset{\text{infinitesimo}}{o(1)}$ $x \to +\infty$

Nell'esempio della pagina precedente, equivale alla diff. tra $P_0 - P_1$.

È una relazione di equivalenza? verifico le proprietà.

Sì, riflessiva. ~~$f-g$~~ $g - f = o(1)$ quindi OK anche la simmetria.

Per la transitività $f - g = o(1)$, $g - h = o(1)$

$f - g + g - h = (f-g) + (g-h) = o(1)$ OK!

Dati gli infiniti f, g $x \to +\infty$, f è un infinito di ordine superiore a g se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Si scriverà $g = o(f)$ $x \to +\infty$

$$\Updownarrow$$

$1 = o(f)$ $\quad \frac{g}{f} = o(1)$

Questa relazione, spiega il vero significato di o piccolo.

FUNZIONI INFINITE (p.181) $\quad \boxed{x \to +\infty}$

g, f infinite

Quale tende a $+\infty$, più rapidamente? Faccio $\frac{g(x)}{f(x)}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

1. Se il limite del rapporto di queste funzioni esiste finito ed è $\neq 0$, si dice che f e g sono infiniti dello stesso ordine.
2. Se il limite è zero, si dice che f è un infinito di ordine superiore a g.
   $g = o(f)$ (si comporta come una relazione d'ordine, circa come $< f$) ("quasi" ordine).

POLINOMI

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$

$x^n \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x} + \dots}_{0} \right)$

confrontiamo

$f(x) = \underbrace{x^n \log x}_{\text{superiore}}$ rispetto a $g(x)$ $\quad g(x) = x^n \quad \frac{f}{g}$

$f(x) = e^x \quad g(x) = x^n \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

L'esponenziale, prevale su qualsiasi potenza

logaritmo inferiore ad ogni x^n, è inferiore a e^x

Proviamo a "etichettare" problema.

L'unità di "misura" degli infiniti, che determina la scala di misura

$u^{\alpha}(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$u(x) = x$

ricordando che così si può assegnare un alfa a tutti i possibili casi.

DEFINIZIONE

f è un infinito di ordine $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}$ = esiste finito e $\neq 0$

$\to$ f è un infinito di ordine superiore ad α, se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = \infty$

APPLICAZIONI

f, g INFINITESIMI $\boxed{x \to +\infty}$

Stesso ordine di infinitesimo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste finito e $\neq 0$

Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f è un infinitesimo superiore rispetto a g e si scrive $f = o(g)$

$\boxed{\text{N.B}}$ Parlando di infinitesimi, in questo caso o sta per $>$ ed è corretto, perché come INFINITI, prevale g che è minore di f, come infinitesimo.

o Scelta dell'unità di misura $x \to +\infty$

$u(x) = \frac{1}{x}$

Scala dei reciproci delle potenze

$\frac{1}{x^2}$ è superiore a $\frac{1}{x}$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\cancel{x}} x^{\cancel{2}} = x \quad \text{quindi prevale } \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \dots \frac{1}{x} \dots \frac{1}{x^2} \dots \frac{1}{x^3} \dots$

~~Una f è un inf~~ Nemmeno ora si potrà parlare di TUTTI gli infinitesimi.

$\boxed{x \to \mp\infty}$ si deve fare attenzione alla scelta dell'unità di misura.

INFINITI $u(x) = |x|$ $\quad x^{\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}^+$

INFINITESIMI $u(x) = \frac{1}{|x|}$

$\boxed{x \to x_0}$

INFINITI $u(x) = \frac{1}{|x - x_0|}$

Provo a restringere la classe delle funzioni.

ES. $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 0$

$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$

F.I.F. $\quad e^x = 1 + 1\cdot x + \underbrace{o(x)}_{?} \quad x \to 0$

cerco di capire qualcosa di più da $o(x)$

$e^x - (1+x) = o(x) \to 0$

$\left[\begin{array}{l} g = o(f) \\ \frac{g}{f} \to 0 \end{array} \right.$

divido per x

$\frac{e^x - (1+x)}{x} = \frac{o(x)}{x} \to 0$

so che è una F.I. $\frac{0}{0}$ ed è un infinitesimo per $x \to 0$ (ma so se ce l'ho)

cerco di calcolare l'ORDINE di infinitesimo.

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$ studiare questo limite, equivale a chiedersi se quell'infinitesimo, di grado, è di ordine 1 rispetto al campione $u(x) = x$.

con l'Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$ esiste, di conseguenza $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Di conseg. $e^x - (1+x)$ ha ordine 2 e la P.P. è $\left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]$

Con Landau

$\frac{e^x - [1+x]}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$

Moltiplico per x^2

$e^x - [1+x] = \frac{1}{2}x^2 + o(1)\cdot x^2$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(1)\cdot x^2$; $\underbrace{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

lo confronto con

$e^x = 1 + x + o(x)$

Le formule sono le stesse: abbiamo ridotto l'errore perché lo osserviamo $\frac{x^2}{2}$ e si moltiplica rispetto al quadrato dell'incremento

$o(x^2) < o(x)$

② Supponendo f' derivabile in x_0, cioè esiste $f''(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

e l'oggetto da cui ero partito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + o(1)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \boxed{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)}\ *$$

confronto con la 1ª F.T.F. $\downarrow$ $o(x-x_0)$ vedere giù.

FORMULA DI TAYLOR di f in x_0 di ordine 2

impropria, perché non dice l'ordine delle derivate.

La riscrivo pure come

$$f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = o((x-x_0)^2)$$

Al più mentre lo infinitesimo di ordine superiore al secondo

calcolo $\lim_{x\to x_0}$ di:

$$\frac{f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^3}$$

Per arrivare al risultato, sempre verificando le condizioni, applico 2 volte de l'Hôpital.

Se esiste la $f'''(x_0)$ gli o piccoli di ordine 2, * torno fuori un altro pezzo da cui la formula.

$$\frac{f'''(x_0)}{3!} \qquad 3! = 3\cdot 2$$

Dati $f(x)$ x_0 supponendo esista $f^{(n)}(x_0)$

FORMULA DI TAYLOR (POLINOMIO) di f in x_0 di ordine n — l'ordine lo dice proprio l'"o"

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

($0!$ per convenzione)

~~cosx~~ = Lo sviluppo del coseno presenta le caratteristiche del seno, con la differenza che avrò solo termini positivi. → potevo anche scrivere $o(x^{2m+1})$ perché tanto tende a 0.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

→ perché $(2n)! \neq 2(n)!$

$$\sin x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2m+1})$$

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = (1-x)^{-2}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = +2(1-x)^{-3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$ $\qquad f'''(0) = 6$

$f^{m}(x) = m!(1-x)^{-(m+1)}$ $\qquad f^{(m)} = m!$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^n + \underbrace{o(x^{n+1})}_{\text{rapp esplicita degli o piccoli}}$$

, fattorizzo e semplifico con

$(1-x)(1+x+\dots x^n) = 1 - x^{n+1}$] ottenuto per via algebrica.

$1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} \dots \cancel{x^n} +$
$\quad - \cancel{x} - \cancel{x^2} \quad - \cancel{x^n} - x^{n+1}$

se divido $1 + x + \dots x^n = \frac{1}{1-x} - \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)$

questo sarebbe il valore di $o(x^{n+1})$

$$o(x^{n+1}) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

CALCOLO CON GLI SVILUPPI DI TAYLOR

① CASI NOTEVOLI ... (McLaurin)

② REGOLE ... (sviluppi con $x_0 \neq 0$)

② REGOLE

SOMMA $f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$
$g(x) = P_{g,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$

$(f+g)(x) = P_{f+g,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$

questo perché sommando polinomi di grado non superiore a n ottengo un polinomio di grado non superiore a n.

PRODOTTO (per lo sviluppo di ordine n)

$f(x) = \dots$
$g(x) = \dots$ ma il prodotto mi darà potenze di ordine superiore a n.

$(f \cdot g)(x) = P_{f \cdot g, x_0, n}(x)$

Lo faccio il prodotto $P_{f,x_0,n} \cdot P_{g,x_0,n}$ e scrivo ESPLICITAMENTE solo i termini di grado $\leq n$, gli altri li recluto

Per una costante moltiplicativa negli o piccoli.

$a \cdot f(x) = a \cdot P_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$

FUNZIONE COMPOSTA. sviluppo di ordine n. di $g(f(x))$ in x_0

$f(x)$ n derivate in x_0

$y_0 = f(x_0)$

$g(y)$ n derivate in y_0

① Scrivere

$f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + o((x-x_0)^n)$

$g(y) = P_{g,y_0,n}(y) + o((y-y_0)^n)$

calcolo $P_{g,y_0,n}(P_{f,x_0,n}(x))$ e trascuro (nascondo negli "o") i termini di grado superiore a n.

$(g \circ f)(x) = P_{g \circ f, x_0, n}(x) + o((x-x_0)^n)$