



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 146

DATA : 03/10/2011

# A P P U N T I

STUDENTE : Sannipoli

MATERIA : ~~Hkulec"KK~~

Prof. O ~~wukpq"/"I q|| gmkpq~~

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# FISICA 2

11-10-2010

**CORPI ELETTRIZZATI**: capaci di esplicitare il fenomeno di azioni reciproche (ATTRAZIONE o REPULSIONE)  
 VETRO e AMBRA (Elektron è il nome greco dell'AMBRA)

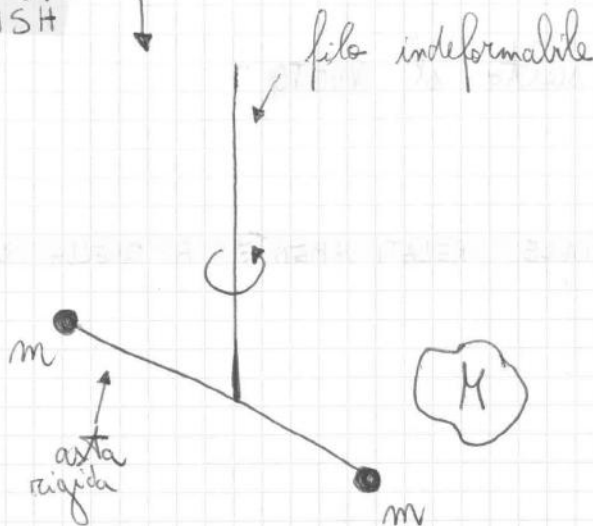
Un corpo elettrizzato non acquisisce CARICHE, le ha già intrinseche.

**CORPI ISOLANTI o DIELETTICI**: mantengono per lungo tempo lo stato di elettrizzazione.  
**CORPI CONDUTTORI**

non possiede cariche libere, ma solo cariche legate (GAS NOBILI)

**ELETTRIZZAZIONE**: rilocazione delle cariche (credo di avere scritto male)

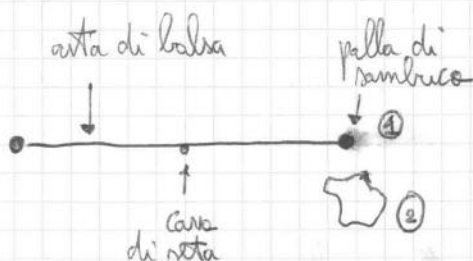
## BILANCIA DI CAVENDISH



Avvicinando  $M$ , dato che c'è una forza di attrazione gravitazionale, l'asta comincia a ruotare.  
 Nell'aria questo esperimento non funziona perché la forza di resistenza che l'aria oppone è troppo più grande della forza di attrazione gravitazionale

## COULOMB

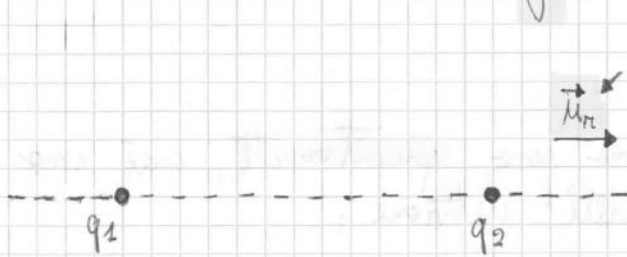
VISTA DALL'ALTO



$q_1$  = stato di elettrizzazione del corpo 1  
 $q_2$  = " " 2

inversamente al quadrato della loro distanza.

Questa equazione ha VALIDITÀ GENERALE, la forza di COULOMB è una grandezza vettoriale:



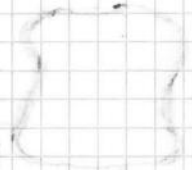
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{M}_r$$

È una forza a distanza, non a contatto

Le cariche sono PUNTIFORMI; se non sono puntiformi bisogna considerare la DENSITÀ delle cariche elettriche:

- DENSITÀ LINEARE: le cariche si trovano lungo una direzione
- DENSITÀ SUPERFICIALE: le cariche si trovano in una superficie
- DENSITÀ VOLUMICA: le cariche si trovano in un volume.

(CENTRO DI MASSA: punto privo di realtà fisica, ma in cui posso pensare di concentrare tutta la massa o tutta la carica elettrica)



DIMENSIONE MEDIA DI UN ATOMO  $\sim 10^{-10}$  m

RAGGIO DI UN ATOMO:  $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$

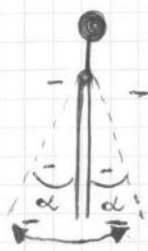
$\downarrow$   $\downarrow$   
 $1,5 \cdot 10^{-15}$  m  $\downarrow$  I + N  
 fermi

DIMENSIONE DI UN PROTONI  $\sim 10^{-15}$  m

DIMENSIONE DI UN NEUTRONI  $\sim 10^{-15}$  m

DIMENSIONE DI UN ELETTRONE  $\sim 10^{-18}$  m

# ELETTROSCOPIO (lamine d'oro)



Non ci dà una misura, un valore numerico, ma solo un'idea di quanto sia grande la repulsione

$$\vec{F}_C = q_1 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}_r \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}_r = \frac{\vec{F}_C}{q} = \vec{E}_0} \rightarrow \text{CAMPO ELETTROSTATICO}$$

- 1 La presenza di  $q_0$  modifica le proprietà, dal punto di vista elettrico, dell'ambiente in cui si trova
- 2  $q_0$  diventa l'origine del fenomeno,  $q_1$  diventa quello che subisce il fenomeno.

Il CAMPO ELETTROSTATICO è una proprietà intrinseca di una certa regione di spazio, questa implica che in questa regione ci sia carica elettrica o una certa distribuzione di carica elettrica.

$$\vec{F}_C = q \cdot \vec{E}_0$$

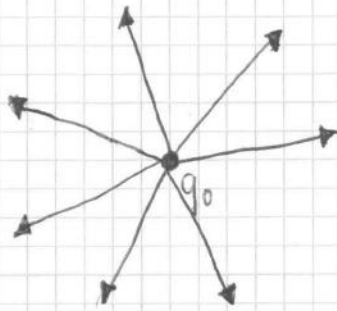
↑  
SORGENTE

N.B. poiché la forza coulombiana è conservativa, il campo elettrostatico relativo a tale forza sarà conservativo

FARADAY studiò una rappresentazione, una visualizzazione del CAMPO ELETTROSTATICO

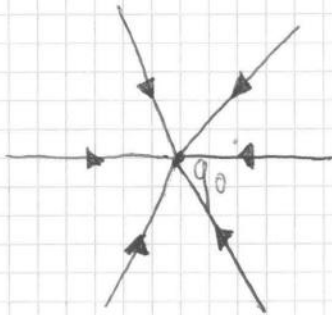
$$\begin{matrix} e & m_e, q_e \\ p & m_p, q_p \end{matrix} \rightarrow \kappa$$

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{r^2}$$



Linee del campo generate da una carica puntiforme positiva

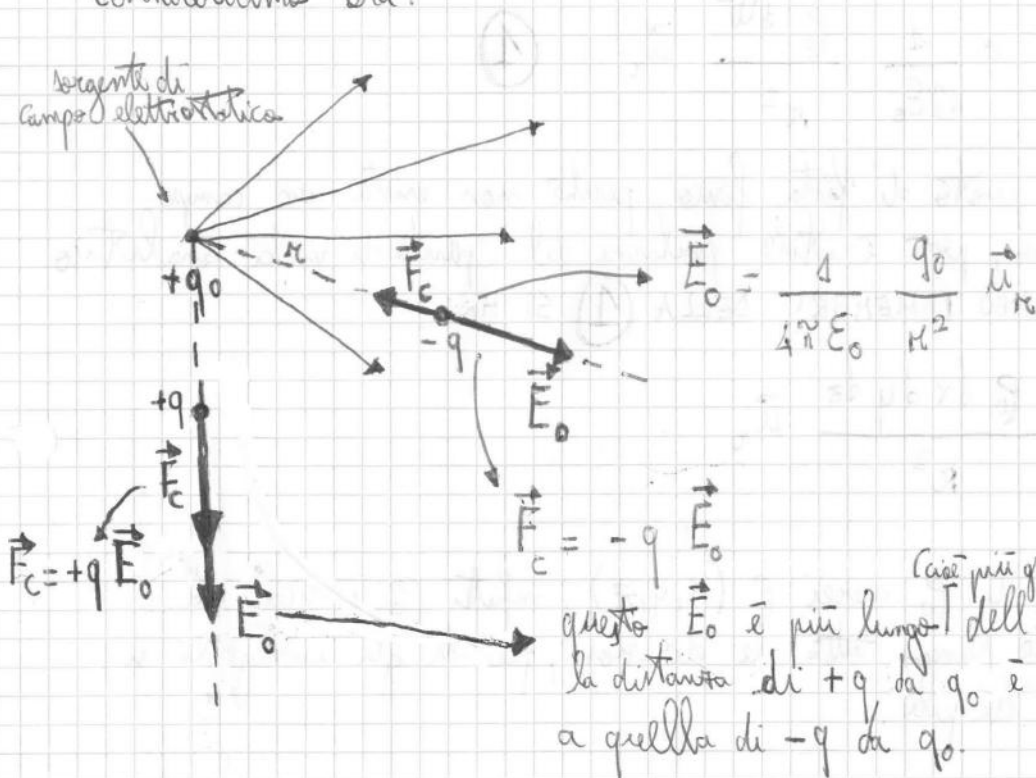
SIMMETRIA RADIALE



Linee del campo generate da una carica puntiforme negativa

Consideriamo ora:

Sorgenti di campo elettrostatico



(caso più grande in modulo)  
 questo  $\vec{E}_0$  è più lungo dell'altro perché la distanza di  $+q$  da  $q_0$  è minore rispetto a quella di  $-q$  da  $q_0$ .

PRINCIPIO DI ADDITIVITÀ DEGLI EFFETTI o PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

L'elettrizzazione di un corpo è un fenomeno fisico (o anche il processo) che conduce ad una sovrabbondanza di cariche di uno stesso segno nel corpo precedentemente neutro. Esistono tre modi per elettrizzare un corpo:

- Per strofinio: fenomeno caratteristico di diversi materiali (sia isolanti che conduttori, questi impugnati per mezzo di isolanti) che, quando sono strofinati, <sup>(cioè attrono o respingono degli elettroni)</sup> acquisiscono la capacità di attrarre o respingere altri oggetti, che possono essere stati a loro volta strofinati (es. la carta è attirata dalla plastica quando questa è stata elettrizzata per strofinio. È un'elettrizzazione per strofinio anche quella della automobile in una giornata ventosa e quella della scala mobile da parte del nastro di gomma.)
- Per contatto: un conduttore neutro può essere caricato mettendolo a contatto con un secondo corpo che possiede un eccesso di cariche elettriche dello stesso segno.
- Per induzione elettrostatica: avviene quando un corpo carico viene posto vicino ad un conduttore. In questo caso le cariche che si trovano su di esso si ridistribuiscono. Le cariche di segno opposto a quelle del corpo inducente sono da esso attratte, le altre allontanate. Il conduttore quindi è attirato dal corpo inducente, pertanto se il conduttore si può dividere in due, è sufficiente separarle affinché risultino elettrizzate con cariche uguali e di segno opposto. (È un'elettrizzazione per induzione quella degli scaffali metallici in un ipermercato quando l'involucro esterno dell'edificio metallico è elettrizzato per strofinio dal vento).

# FISICA 2

15-10-2010

Se ipotizziamo che nell'Universo esista una carica elettrica, a questa carica elettrica dobbiamo associare, per proprietà intrinseche, un campo elettrostatico (diciamo STATICO perché per ora consideriamo, parliamo di cariche FERME)

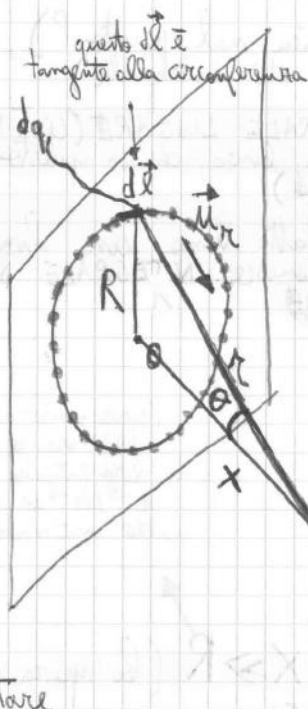
Lo spazio acquisisce la capacità di esercitare un'azione su altre cariche elettriche.

Il vuoto presenta particolari caratteristiche dal punto di vista elettrico, elettromagnetico (per questo la costante dielettrica  $\epsilon$  "di base" è relativa al vuoto) la legge di Coulomb ha validità generale.

Se non ho corpi puntiformi posso comunque applicare la legge di Coulomb che ha validità generale, considerando però:  
 ENTITÀ DELLE CARICHE IN RELAZIONE ALLA GEOMETRIA (cioè la DENSITÀ DELLE CARICHE).

## ESEMPIO DI CALCOLO: DISTRIBUZIONE CIRCOLARE DI CARICA

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \text{DENSITÀ LINEARE}$$



Consideriamo una circonferenza immaginaria e le cariche distribuite lungo la circonferenza uniformemente.

$$dq = \lambda dl$$

1)  $P$  è funzione della variabile  $x$

$$2) \vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}$$

$$3) r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$dq$  mi serve dal punto di vista analitico, ma a me serve calcolare  $q$ , non può essere possibile di carica infinitesima dal punto di vista fisico, ma è utile dal punto di vista analitico.

Dobbiamo stare

attenti alle infinite coppie di cariche omologhe sulla circonferenza.

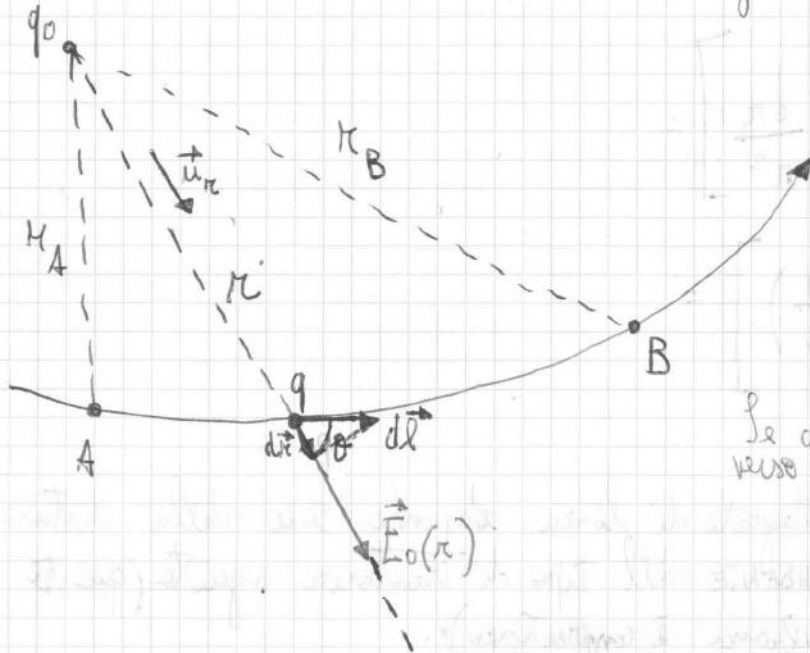
$r$  rappresenta la linea di campo.



# POTENZIALE ELETTROSTATICO (pag. 8)

Esercizio:

Da una carica che si muove lungo questa linea e questa linea è tutta costante nel campo elettrostatico generato da  $q_0$



Se  $q_0$  è positiva,  $\vec{E}_0$  ha questo verso

$$\vec{E}_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}_r$$

## TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:

il lavoro complessivo svolto dalle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{l}$$

INTEGRALE DI LINEA (non è una linea chiusa quindi non è una CIRCUITAZIONE)  
che compare nell'integrale

Se la grandezza fisica è una forza, l'integrale di linea prende il nome di LAVORO.

Ora sostituisco  $\vec{F}_c = q\vec{E}_0$

$$L_{AB} = q \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = q \int_A^B E_0 dl \cos\theta = q \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \int_A^B \frac{dl \cos\theta}{r^2} \right] =$$

INTEGRALE DI LINEA  
(dato che non compare una forza, questo integrale si definisce solo INTEGRALE DI LINEA, ma) non detto chiamato LAVORO

$$q_0 \begin{cases} \vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}_r \Leftrightarrow V_0 \\ U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \Leftrightarrow \vec{F}_C \end{cases}$$

$$L_{AB} = U_A - U_B$$

$$L_{AB} = q \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r_A} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r_B} \right]$$

$$\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

Quindi  $\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$  definisce una grandezza fisica detta:

POTENZIALE ELETTROSTATICO:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r}$$

Se ho una forza posso di energia potenziale, se ho un campo posso di potenziale.

$$L_{AB} = U_A - U_B = q (V_A - V_B)$$

$$\{L\} \rightarrow \{Joule\}$$

$$\{V_A - V_B\} = \frac{\{L\}}{\{q\}} = \frac{1J}{1C} = 1 \overset{\text{Volt}}{V}$$

ORA RICAVIAMO DELLE RELAZIONI IMPORTANTI:

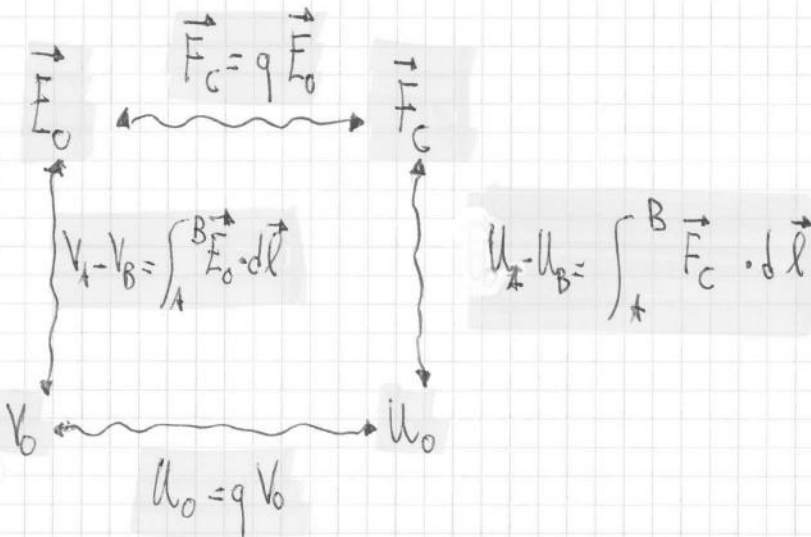
$$L_{AB} = q(V_A - V_B)$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

$$U_A - U_B = q \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

$$U = qV$$

$$\vec{F}_C = q\vec{E}_0$$



Relazione ad anello chiusa dato che sono tutte PROPRIETÀ INTRINSICHE

IN QUALCHE LIBRO (DI STAMPA ANGLOSASSONE) SI PUÒ TROVARE:

$$L_{AB} = q(V_A - V_B) = -q(V_B - V_A) \Rightarrow L_{AB} = -q\Delta V$$

$\Delta V$   
 chiamo  $\Delta V$   
 differenza di  
 potenziale (diff. tra  
 valore finale e  
 valore iniziale)

# FISICA 2

18-10-2010

la corrosione dei ferri d'armatura è legata all'argomento di oggi.

## DIPOLO ELETTRICO PAG. 10

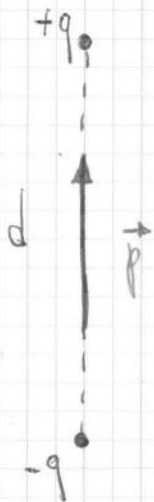
È un sistema di cariche elettriche costituito da due cariche elettriche di identico valore ma di segno opposto e si considerano fisse ad una certa distanza tra di loro.

Nota che stiamo parlando di cariche dell'ordine di  $10^{-6}, 10^{-7} \text{ C}$ , la distanza sarà circa  $10^{-8}, 10^{-3} \text{ m}$ .

**MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO** (grandezza vettoriale: direzione congiungente le due cariche; verso dalla carica negativa alla carica positiva)

$$\vec{p} = qd$$

modulo del MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO



le proprietà intrinseche

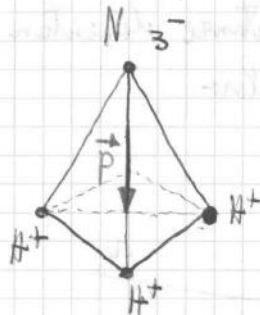
poiché il dipolo elettrico è costituito di cariche, un campo elettrostatico esterno al dipolo che influenza avrà?

Se  $x \gg d$ , cioè il punto deve trovarsi ad una distanza nettamente superiore alle dimensioni fisiche del dipolo:

$$E_{OP}(x) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3} \quad \left[ \text{il campo dipende ancora da una distanza} \right]$$

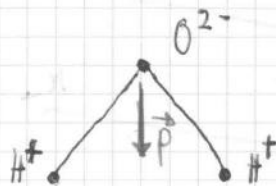
quindi è un campo centrale.

Se consideriamo  $NH_3$ :

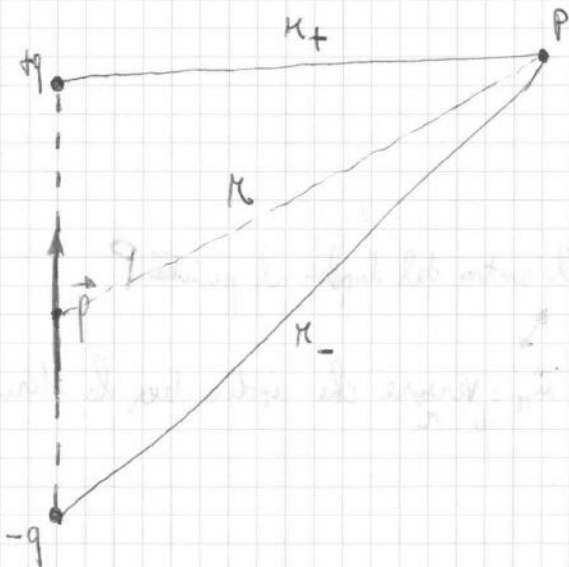


Detto che ci sono due distribuzioni di carica: una positiva ed una negativa allora è presente per proprietà intrinseche un momento di dipolo elettrico

$H_2O$



## 2) POTENZIALE GENERATO DA UN DIPOLO ELETTRICO



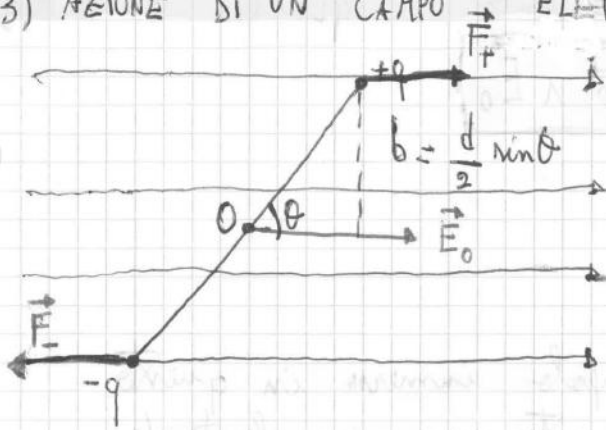
Il potenziale nel punto P è:

$$V_{OP} = V_+ + V_- \quad \text{per il principio di sovrapposizione degli effetti.}$$

$$V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_-}$$

$$V_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{r_+}$$

### 3) AZIONE DI UN CAMPO ELETTROSTATICO SU UN DIPOLO ELETTRICO



Dato che il dipolo ha dimensioni di  $10^{-10}, 10^{-9}$  m, le linee di campo saranno tutte parallele tra di loro ed il campo elettrostatico sarà uniforme, questo poiché le dimensioni del dipolo sono molto piccole rispetto alla regione di spazio in cui si trova.

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_+ &= +q \vec{E}_0 \\ \vec{F}_- &= -q \vec{E}_0 \end{aligned} \right\} F_+ = F_- = q E_0$$

Le forze sono parallele ed opposte, quindi la risultante è nulla; la retta di azione non è la stessa: costituiscono una COPPIA DI FORZE che costituisce un MOMENTO MECCANICO rispetto ad un polo.

Dato che il momento della coppia di forze è indipendente dalla scelta del polo, scegliamo il centro del dipolo. Il caso polo.

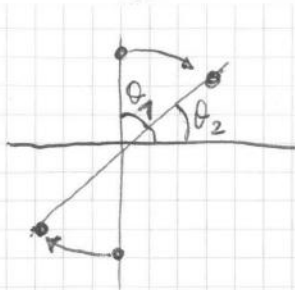
$$\vec{m}_0 = \vec{m}_+ + \vec{m}_- \quad \text{sovrapposizione effetti.}$$

$$\vec{m}_0 = \frac{d}{2} \wedge \vec{F}_+ \quad \text{è orientato verso il foglio (stessa cosa per } \vec{F}_-)$$

$$\Rightarrow |\vec{m}_0| = |\vec{m}_+| + |\vec{m}_-|$$

entrambi hanno valore  $q E_0 \frac{d}{2} \sin \theta$

$$\Rightarrow m_0 = 2 q E_0 \frac{d}{2} \sin \theta = p E_0 \sin \theta$$

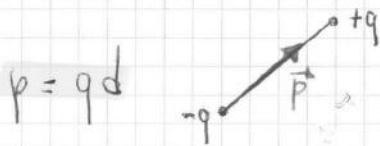


chiamo  $\theta_2$  come  $\theta$   
 $\theta_2 \Rightarrow \theta$   
 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$$L = -p E_0 \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

## RIASSUNTO LEZIONE

Ogni volta che ho un dipolo elettrico, questo è descritto da un MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO.



$$\vec{E}_{OP}(x) \sim \frac{1}{r^3} \quad ; \quad V_{OP} \sim \frac{1}{r^2}$$

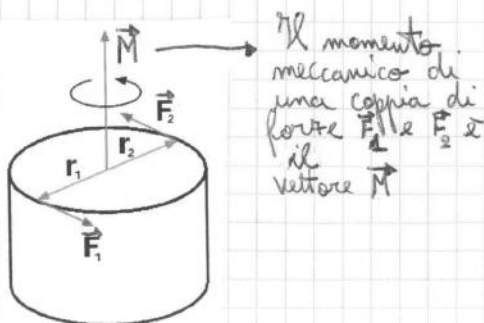
Un campo elettrostatico in cui si trova il dipolo fa sì che si crei una coppia di forze tali da determinare un momento meccanico sul dipolo, questo momento meccanico tende ad allineare il dipolo lungo le linee del campo facendogli assumere la condizione di equilibrio stabile.  
 l'allineamento avviene perché è stata spesa energia sotto forma di lavoro:

$$L = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

# ESERCITAZIONE 18-10-2010

## APPENDICE

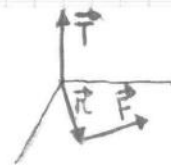
Il momento meccanico è rappresentato da un vettore ed equivale ad una coppia di forze aventi eguale intensità, parallele, di verso opposto ed aventi rette d'azione localizzate ad una distanza non nulla.



$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

dove:

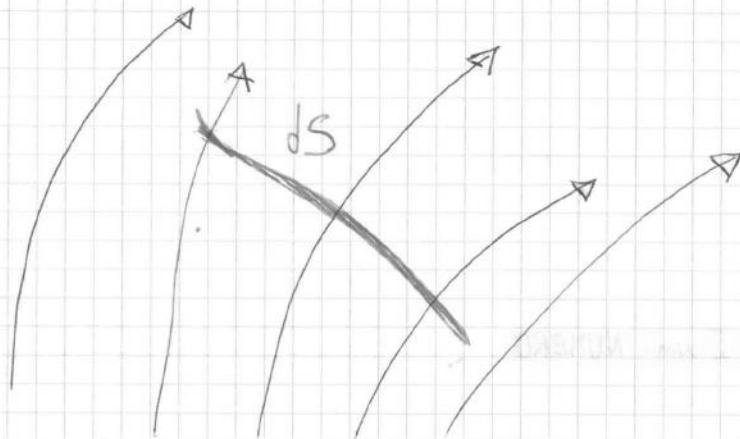
- $T$  è il momento torcente.
- $r$  è il vettore distanza tra il fulcro ed il punto di applicazione della forza
- $F$  è la forza applicata.



# FISICA 2

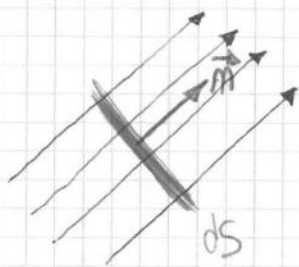
21-10-2010

Immaginiamo di avere un campo qualsiasi (campo elettrostatico, campo delle velocità, campo gravitazionale), cioè un campo riferito ad una <sup>qualsiasi</sup> grandezza vettoriale:



Se riusciamo a calcolare quante linee di campo attraversano la superficie infinitesima, otterremo il FLUSSO DEL CAMPO.

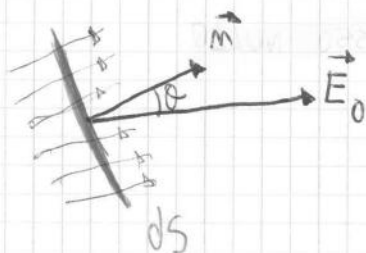
Dato che considero una superficie infinitesima, posso considerare il campo su di essa uniforme (quindi rappresentato da linee parallele).  
dato che la superficie è molto piccola rispetto alla regione di spazio in cui si trova.



$\vec{n}$  identifica la superficie in relazione alla direzione di  $\vec{E}_0$

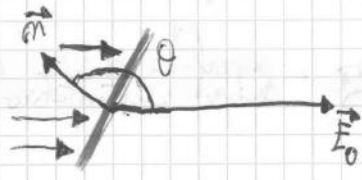
## FLUSSO DEL CAMPO

$$\Phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{n} dS$$





- Se  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$



$\downarrow \Phi(\vec{E}_0) < 0$

FLUSSO ENTRANTE (linee blu)

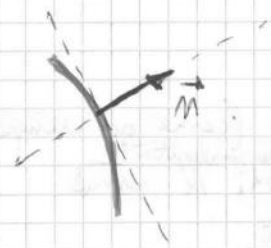
[Se il campo fosse uniforme  $\Rightarrow$  tanto flusso esce e tanto ne entra]  
 $\Rightarrow$  flusso totale = 0

- Se  $\theta = \pi$



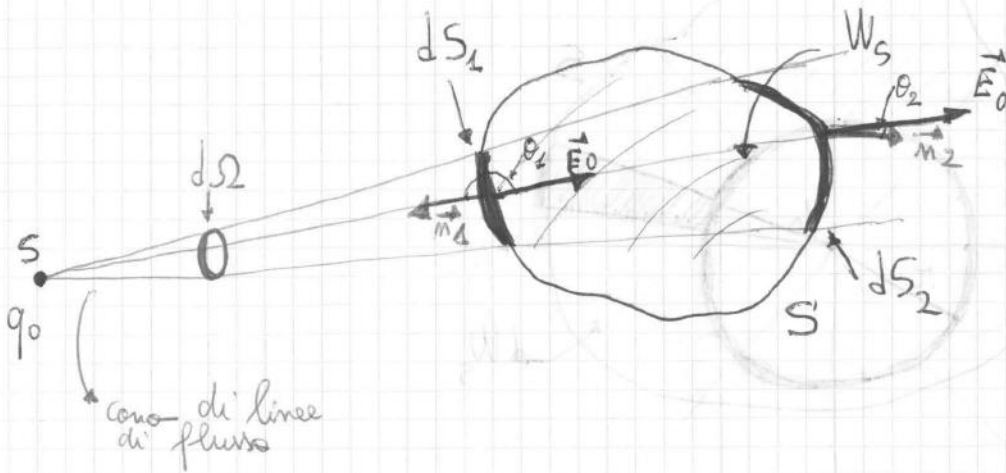
FLUSSO MASSIMO ENTRANTE

Se la superficie fosse curva:



$\vec{n}$  è ortogonale alla tangente e diretta verso l'esterno rispetto al raggio di curvatura

# LEGGE DI GAUSS PAG. 12



$$\underbrace{d\Phi(\vec{E}_0)}_{\text{TOTALE}} = \underbrace{d\Phi_1(\vec{E}_0)}_{\text{ENTRANTE}} + \underbrace{d\Phi_2(\vec{E}_0)}_{\text{USCENTE}}$$

abbiamo  
visto che è  
sempre  $< 0$

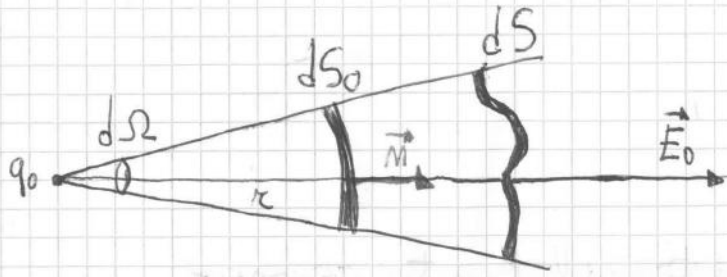
sempre  $> 0$

Se in  $S$  non c'è nessuna sorgente  $\Rightarrow d\Phi_1(\vec{E}_0)$  e  $d\Phi_2(\vec{E}_0)$  sono uguali in modulo, ma di segno opposto  $\Rightarrow d\Phi(\vec{E}_0) = 0$

(Esempio: quando si va nello spazio, per vedere se non c'è "nulla" si calcola statisticamente il flusso totale delle particelle; se è nullo  $\Rightarrow$  c'è il "nulla")

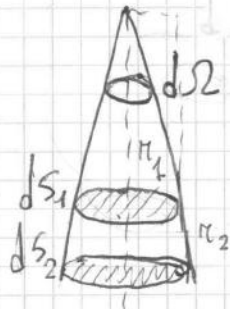
per nulla intendiamo un atomo di idrogeno ogni  $\text{km}^3$

Se all'interno della superficie chiusa ci fosse almeno una carica, quanto sarebbe il flusso complessivo?



$$\vec{n} \parallel \vec{E}_0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\underbrace{d\Phi(\vec{E}_0)}_{dS_0} = E_0 dS$$



$$\rightarrow d\Omega = \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

$dS$

$$d\Phi(\vec{E}_0) = E_0 dS_0$$

$r^2 d\Omega \rightarrow$  per definizione di angolo solido \*\*\*

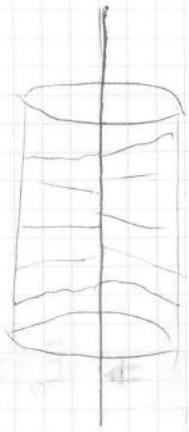
CHIARIMENTO in  
fondo agli appunti sulla  
nozione di angolo solido

$$d\Phi(\vec{E}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} r^2 d\Omega$$

$$\Phi(\vec{E}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \int_{4\pi} d\Omega$$

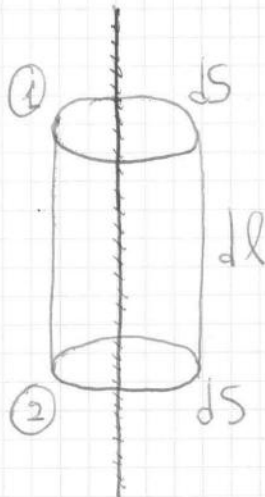
$$\boxed{\Phi(\vec{E}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} q_0}$$

LEGGE DI GAUSS



Se ci fossero infiniti piani ortogonali l'avrei una simmetria cilindrica. alla distribuzione

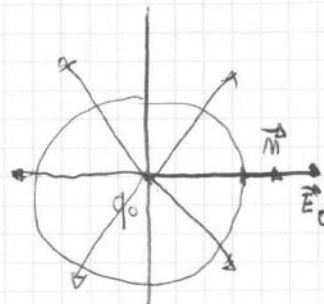
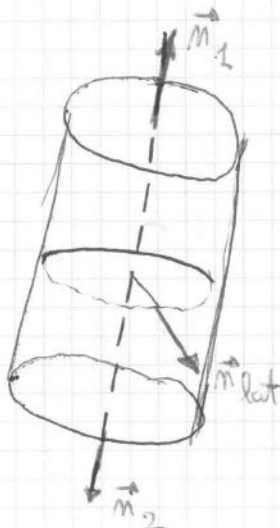
In questo esercizio considero:



Asse del cilindro coincidente con l'asse della distribuzione

$$\underbrace{\int \Phi(\vec{E}_0)}_{\text{TOTALE}} = \int \Phi_1 + \int \Phi_2 + \int \Phi_{\text{lat}}$$

↓  
Flusso attraverso la superficie 1
↓  
Flusso attraverso la superficie 2
↓  
Flusso attraverso il mantello laterale



# \*\*\* CHIARIMENTO ANGOLO SOLIDO

## 4 Legge di Gauss: derivazione generale

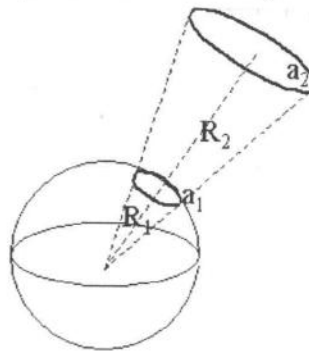
Per capire la prossima dimostrazione ed in generale il concetto di flusso attraverso una superficie di forma arbitraria, conviene introdurre la nozione di angolo solido. Ricordiamo che un angolo piano  $\alpha$ , che sottende un arco  $s$  di una circonferenza di raggio  $R$ , l'angolo, si può esprimere come

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

con  $\alpha$  misurato in radianti; per un angolo infinitesimo  $d\alpha$  che sottende un arco infinitesimo  $ds$ , sulla stessa circonferenza, si può scrivere

$$d\alpha = \frac{ds}{R}$$

Questi concetti possono essere estesi agli angoli che si sviluppano, non su un piano ma nello spazio e che prendono il nome di *angoli solidi*.



Si definisce angolo solido  $\Omega$  lo spazio compreso nella parte di cono in figura e la sua espressione matematica è

$$\Omega = \frac{a_1}{R_1^2} = \frac{a_2}{R_2^2}$$

Se l'angolo solido è infinitesimo,  $d^2\Omega$ , esso sottende un'area infinitesima  $d^2a$  e si può scrivere

$$d^2\Omega = \frac{d^2a}{R^2}$$

ovvero

$$d^2a = R^2 d^2\Omega$$

L'unità di misura degli angoli solidi si chiama *steradiane* e il valore di un angolo solido che sottende una sfera è  $4\pi$ .

→ poiché l'intero spazio sta sotto una calotta di superficie uguale a quella della sfera, quindi  

$$\frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ [sr]}$$

\*  $a_1$  è l'area della porzione di superficie sferica di raggio  $R_1$  vista sotto l'angolo  $\Omega$ .

con come l'angolo piano  
 tra la parte di piano  
 compresa tra le  
 due "rette"



angolo piano

# FISICA 2

22-10-2010

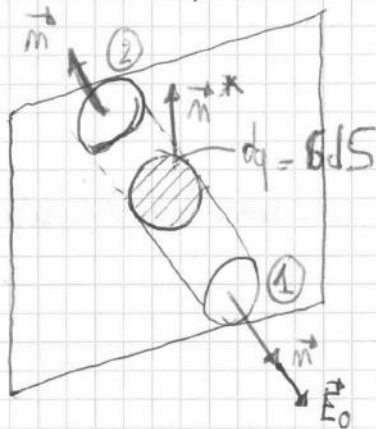
Per una <sup>qualsiasi</sup> grandezza conservativa si ha (come ad esempio <sup>per</sup> il campo elettrostatico)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

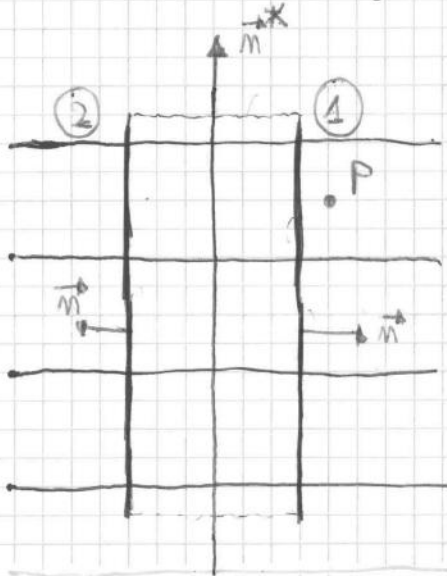
↓  
 integrale di linea lungo una linea chiusa: prende il nome di CIRCUITAZIONE

## ESERCIZIO LEGGE DI GAUSS:

distribuzione piana omogenea di cariche:



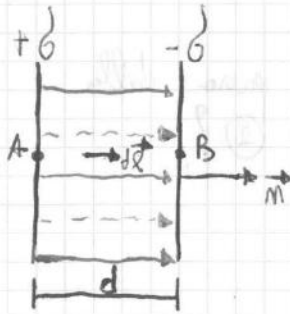
$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \text{cost}$$



Dato che la distribuzione è uniforme  
 $\Rightarrow$  le linee di campo sono tutte parallele tra di loro.

Legge di Gauss: dobbiamo considerare una superficie chiusa <sup>(cilindrica in questo caso)</sup> che racchiude un certo numero di cariche e calcolare il flusso del campo elettrostatico ~~attraverso~~ <sup>attraverso</sup> la superficie ~~attraverso~~ <sup>attraverso</sup> la superficie.

Nella regione di spazio ② tutte le linee di campo sono orientate dalla carica positiva alla carica negativa, quindi.



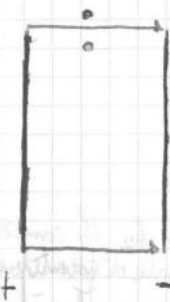
$$\vec{E}_0 = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \vec{n} + \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \vec{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \vec{n}$$

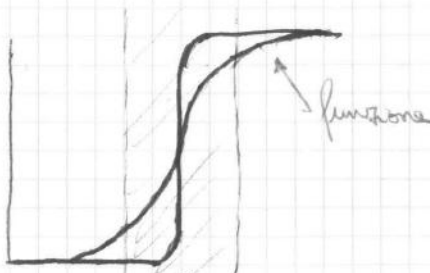
$$\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_0^d E_0 dl = E_0 d = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma d = V_A - V_B$$

QUESTA RELAZIONE MI DICE CHE:

- la differenza di potenziale tra le armature dipende dalla distanza
  - il campo elettrostatico è uniforme, quindi le linee di campo sono tutte parallele tra di loro
- (il campo elettrostatico è uniforme perché si ha  $V_A - V_B = E_0 d$ , infatti si approssima che  $\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$ ; dato che si ha  $V_A - V_B = E_0 d$  significa che  $E_0$  è costante (lo pensiamo portare fuori dal segno di integrale), cioè uniforme)*



N.B. Le distribuzioni devono essere indefinite, se fossero finite come in questo caso, per un infinitesimo dentro le armature c'è il campo, per un infinitesimo fuori il campo è nullo, però la funzione deve essere continua (estremi compresi) per poter essere integrata.



↑ campo di indagine che di solito ci interessa

Quindi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E_{2+} dl + \underbrace{\int_C^D E_{1+} dl}_{-\int_D^C E_{1+} dl}$$

Dato che  $\overline{DC} = \overline{AB}$  posso considerare:  $-\int_D^C E_{1+} dl = -\int_A^B E_{1+} dl$

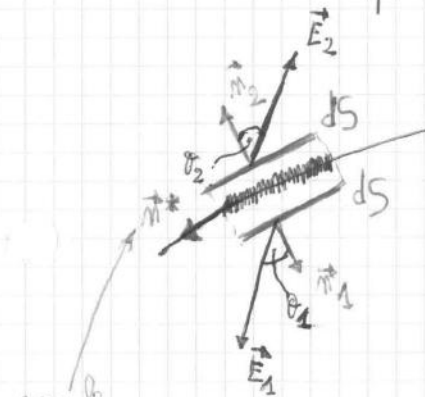
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (E_{2+} - E_{1+}) dl = 0 \rightarrow \text{dato che } \vec{E} \text{ è conservativo}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{1+} = E_{2+}} \Rightarrow$$

le componenti tangenziali del campo sono conservate passando da una banda all'altra!

↑  
CONSERVAZIONE

Considero una superficie gaussiana cilindrica:



$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \vec{n}$$

↑  
chiamo genericamente

normale al generatore laterale

questa normale è ortogonale al campo

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dS}$$

sostituisco  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \vec{n}$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n} - \vec{E}_2 \cdot \vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

$E_1 \cos \theta_1$      $E_2 \cos \theta_2$     ← componenti normale del campo  $\vec{E}_2$   
 componente normale del campo  $\vec{E}_1$



## FISICA 2

25-10-2010

Analizziamo come mai ci sono dei corpi che non mantengono per lungo tempo lo stato di elettrizzazione: i CORPI CONDUTTORI.

Ci sono cariche libere di muoversi. Nei conduttori metallici (ferro, cobalto, rame...) le cariche libere sono gli elettroni periferici che sono in costante agitazione a più nuclei.

$\vec{v}_i$  ← velocità termica con cui si muovono gli elettroni.

$$\langle \vec{v}_i \rangle = 0$$

↑  
valore medio delle velocità termiche

Se ci fosse un campo elettrostatico <sup>esterno</sup>, su ogni elettrone sarà esercitata una forza:

$$\vec{F} = -e \vec{E}_0 = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0$$

(quella della carica libera)

**Se una massa ha una carica libera, il suo moto è vario**

La velocità totale di ogni singola carica libera sotto l'azione di un campo esterno sarà data dalla sovrapposizione della velocità termica e della velocità dovuta all'azione di un campo elettrostatico esterno.

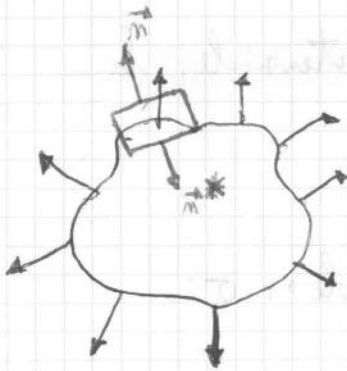
VELOCITÀ TERMICA → distribuzione casuale

VELOCITÀ DI DERIVA → dovuta ad un campo elettrostatico esterno; distribuzione ben precisa

DISTRIBUZIONE ELETTRICA

CORRENTE ELETTRICA

Se il corpo avesse un'elettrizzazione positiva avrei:



Consideriamo una superficie gaussiana cilindrica (rossa)

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \underbrace{E_0 dS}_{\text{flusso attraverso la sup. esterna}} + \underbrace{E_0 dS}_{\text{flusso attraverso la superficie interna}} + 0 = \frac{1}{\epsilon_0} dq$$

$\vec{E}_0$  e  $\vec{n}$  sono paralleli e concordi

flusso attraverso la sup. esterna

flusso attraverso la superficie interna

flusso attraverso il mantello

trascurabile perché  $dS$  è trascurabile (infinitesimo di ordine superiore)

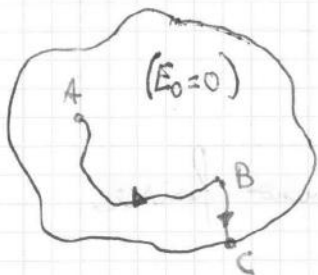
$$E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \vec{n}$$

TEOREMA DI COULOMB (si ha detto l'elicoidale)

\* CHIARIMENTO IN FONDO AGLI APPUNTI

Ora calcoliamo il potenziale



A e B interni al volume del conduttore. Calcoliamo, lungo la linea blu, la differenza di potenziale  $V_A - V_B$ .

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 \quad \boxed{V_A = V_B}$$

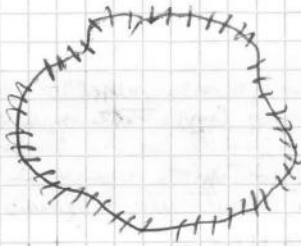
Quindi tutti i punti all'interno del conduttore hanno lo stesso potenziale.

$$V_B - V_C = \int_B^C \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 \quad \boxed{V_B = V_C}$$

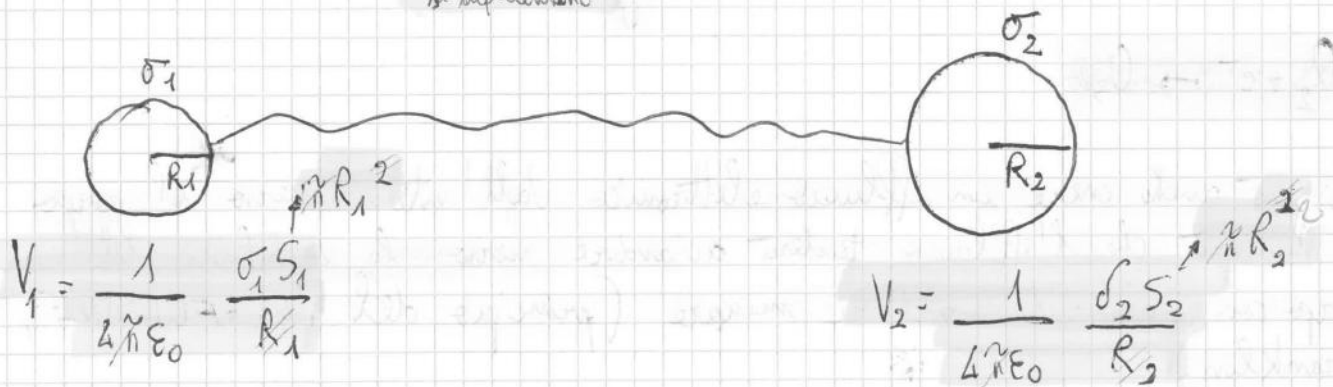
poiché la linea che consideriamo (verde) è interna al conduttore e all'interno del conduttore il campo è nullo  $\Rightarrow \vec{E}_0 = 0$

Sulla superficie di un corpo elettrizzato si ha una densità superficiale di cariche  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ , ma questa densità come è?

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$



Consideriamo una superficie sferica con densità superficiale  $\sigma_1$  e poi un'altra con densità superficiale  $\sigma_2$ .  
 È meglio considerare le due superfici ad una distanza tale che le due superfici non agiscano reciprocamente (questo semplifica i calcoli) si influenzano



$$V_1 = \frac{1}{4\epsilon_0} \sigma_1 R_1$$

$$V_2 = \frac{1}{4\epsilon_0} \sigma_2 R_2$$

Se attraverso un filo conduttore collegarsi le due superfici (filo blu), vuol dire che i potenziali  $V_1$  e  $V_2$  saranno uguali:

$$V_1 = V_2$$

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

Le cariche si distribuiscono sulla superficie del conduttore in modo inversamente proporzionale al raggio di curvatura.

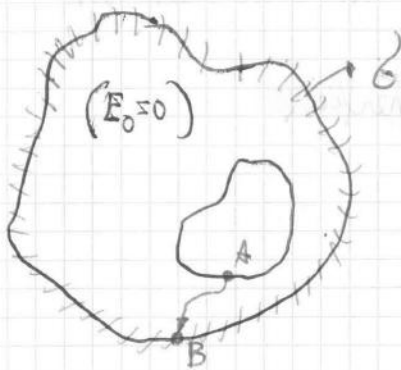
$\vec{E}_0$  è CONSERVATIVO, quindi  $\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 = \underbrace{\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}}_{V_A - V_B \neq 0} + \underbrace{\int_B^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}}_{= 0}$$

Pero perché deve essere  $\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_A - V_B = 0$ , quindi il fatto che in A ci sia una distribuzione  $+\sigma$  e in B una distribuzione  $-\sigma$  è un assurdo  $\Rightarrow$  non ci sono cariche.

La **dimostrazione per assurdo** (per cui si usa anche la locuzione latina *reductio ad absurdum*), nota anche come "ragionamento per assurdo", è un tipo di argomentazione logica in cui si assume temporaneamente un'ipotesi, si giunge ad una conclusione assurda, e quindi si dimostra che l'assunto originale deve essere errato.

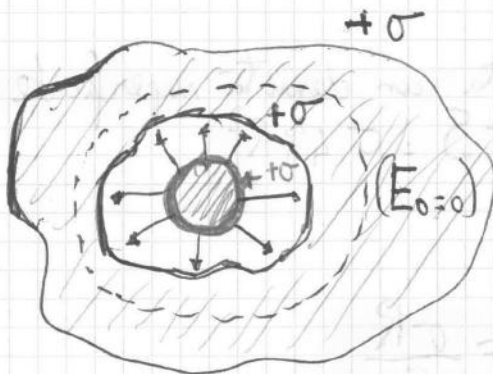
### CARICHE SULLA SUPERFICIE ESTERNA



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

$$V_A = V_B$$

### Le invece anni CONDOTTORE ELETRIZZATO NELLA CAVITÀ DI UN CONDOTTORE NON ELETRIZZATO



Conduttore con all'interno una cavità che ha all'interno una sfera elettrizzata che sulla superficie ha densità superficiale  $+\sigma$

Le considero una superficie gaussiana (tratteggiata) ovvero che  $\Phi(\vec{E}_0) = 0$

Le cambia la distribuzione  $+\sigma$  sulla superficie del conduttore, non cambia niente all'interno della cavità, cioè  $\Phi(\vec{E}_0) = 0$

Quando la capacità vale  $\{1F\}$  aerei:

$$R = \frac{C \rightarrow 1F}{4\pi\epsilon_0}$$

Aerei che  $R$  è uguale al raggio terrestre, quindi il Farad dal punto di vista umano è un'unità di misura colossale; per questo usiamo il milliFarad.

Un corpo che permetta una forte azione di cariche mantenendo sufficientemente costante il suo potenziale è un corpo con una GRANDE CAPACITÀ

## APPENDICE

DA CHIMICA:

MODELLO A GAS DI ELETTRONI:

I metalli sono costituiti da atomi che hanno perso gli elettroni di valenza trasformandosi in ioni positivi. Altri ioni occupano le posizioni reticolari, mentre gli elettroni liberati costituiscono una specie di nuvola o gas elettronico che permea l'intero cristallo. Tali elettroni possiedono una notevole libertà di movimento, che giustifica l'elevata conducibilità elettrica dei metalli.

## \* CHIARIMENTO TEOREMA DI COULOMB

### CAMPO ELETTROSTATICO

Il **teorema di Coulomb** permette di determinare l'intensità del campo elettrico in prossimità della superficie di un corpo conduttore, nota la legge con cui sono distribuite le cariche, e viceversa. Il risultato del teorema può essere sintetizzato nella relazione vettoriale

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

dove  $\sigma$  è la densità superficiale di carica,  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto e  $\mathbf{n}$  è la normale uscente alla superficie del conduttore.

**Nota** il teorema di Coulomb non è da confondere con la legge di Coulomb la quale tratta delle interazioni tra cariche.

## FISICA 2

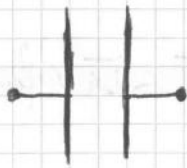
28-10-2010

Se si considerano un sistema di due conduttori affiancati e totalmente isolati, cioè con uguale distribuzione superficiale (cioè uguale numero di cariche) di segno opposto su due superfici vicine e quindi tutte le linee di campo partono dalla superficie con distribuzione positiva e arrivano alla superficie vicina con distribuzione negativa, avremo un:

## CONDENSATORE

I conduttori prendono il nome di ARMATURE DEL CONDENSATORE

## SIMBOLO del CONDENSATORE



La CAPACITÀ del condensatore è definita come:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \text{con } q \text{ valore assoluto della carica su un'armatura}$$

$\Delta V = V_+ - V_-$

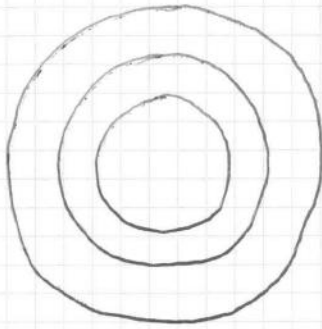
$$\{C\} = \frac{\{1C\}}{\{1V\}} = \{1F\}$$

Ricordiamo che il campo elettrostatico è non nullo unicamente nello spazio fra le due armature

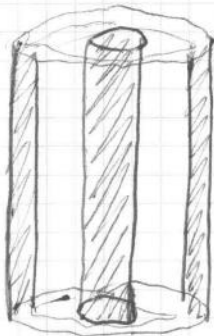
Se le armature fossero piane e parallele (CONDENSATORE PIANO) tutte le linee di campo partono dalla distribuzione positiva e vanno alla negativa, quindi le linee sono tutte parallele tra di loro (il numero di cariche positive e negative è lo stesso) e quindi il campo elettrostatico è UNIFORME e vale:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \vec{n}$$

Esistono 3 TIPOLOGIE DI CONDENSATORI:

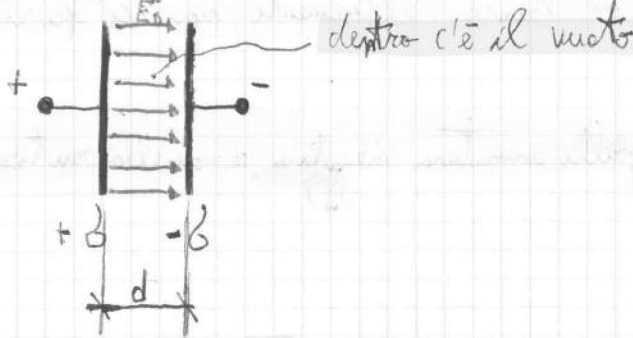


CONDENSATORE SFERICO



CONDENSATORE CILINDRICO

CONDENSATORE PIANO



$$C = \frac{q}{V_+ - V_-}$$

$$= E_0 d \quad \text{ne il campo } E_0 \text{ è uniforme}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \sigma d$$

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{1}{\epsilon_0} \sigma d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad [F]$$

ne il campo è uniforme, è costante

$$\text{infatti si avrebbe: } \int_0^d E_0 dl = E_0 \int_0^d dl = E_0 d$$

Dunque la capacità del condensatore (piano, sferico, cilindrico) è una proprietà geometrica del sistema e non una proprietà fisica del sistema (dipende dalla geometria e dalla loro distanza)

Perché:

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

$$\Rightarrow dL = -dq \frac{1}{C} q$$

All'istante iniziale ho:

$$t_{=0} \rightarrow q=0 \quad \Delta V=0$$

Al generico istante  $t$  ho:

$$t \rightarrow q(t) \quad \Delta V(t)$$

All'istante finale:

$$t_f \rightarrow q_0 \quad \Delta V_0$$

Si ha:

$$q=0 \leq q(t) \leq q_0$$

$$\Delta V=0 \leq \Delta V(t) \leq \Delta V_0$$

Quindi:

$$\int_0^{q_0} -\frac{1}{C} q dq = -\frac{1}{2} \frac{1}{C} q_0^2 = U_i - U_f$$

$\uparrow$   
 Microscopico  
 il lavoro  
 svolto da  
 una forza  
 conservativa  
 $\downarrow = 0$

$\Rightarrow U_e$   
 energia potenziale elettrostatica

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q_0^2$$

dato che  $C = \frac{q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow q_0 = C \Delta V_0$

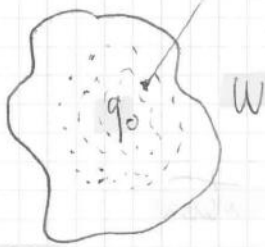
si ottiene:

$$U_e = \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2$$



### LEMA DI GREEN

Immaginiamo un solido con un certo volume  $W$  e all'interno delle cariche; chiameremo  $q_0$  la carica complessiva presente all'interno carica totale  $q_0$



Si avrà:

$E_0 \neq 0$  all'interno del solido dato che ci sono cariche

$V_0 \neq 0$  in ogni punto all'interno del solido dato che ci sono cariche

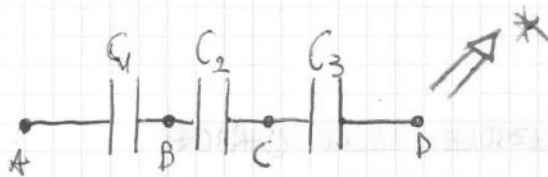
Possiamo dunque applicare il:

### LEMA DI GREEN:

Si può dimostrare che esiste  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

La funzione che descrive questo è la FUNZIONE ARMONICA.

### CORRELAZIONI DEI CONDENSATORI IN SERIE E IN PARALLELO



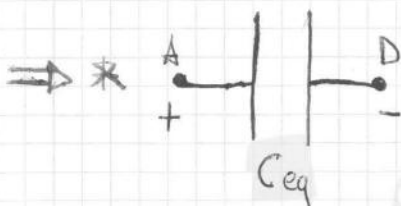
#### COLLEGAMENTO IN SERIE

La carica localizzata è la stessa ai capi di tutti i condensatori; quindi  $q =$  cioè che varia è la differenza di potenziale tra i condensatori, cioè i condensatori non hanno la stessa differenza di potenziale

$$C_1 = \frac{q_0}{V_A - V_B} ; C_2 = \frac{q_0}{V_C - V_B} ; C_3 = \frac{q_0}{V_D - V_C}$$

ADDITIVITÀ DEGLI EFFETTI:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) = V_A - V_D$$



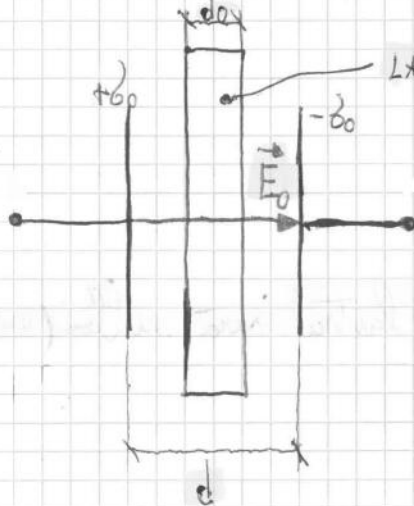
$$C_{eq} = \frac{q_0}{V_A - V_D} = \frac{q_0}{(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D)} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

# FISICA 2

29-10-2010

## PROPRIETÀ FISICHE E INGEGNERISTICHE DEI MATERIALI DAL PUNTO DI VISTA ELETTRICO

Consideriamo un condensatore a superfici piane e parallele



LASTRA CONDUTTRICE (CONDUTTORE) che inserisco all'interno delle due armature.

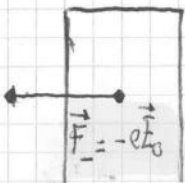
↑ ingrandisco enormemente la distanza  $d$  tra le armature per capire meglio ma nella realtà la distanza è poca.

$$C_0 = \frac{q_0}{\Delta V_0}$$

$$\vec{E}_0$$

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Sotto l'azione del campo  $\vec{E}_0$ , gli elettroni liberi nel conduttore metallico tenderanno a spostarsi verso sinistra sotto l'azione della forza  $\vec{F}_- = -e\vec{E}_0$



Anche questo è un fenomeno transiente (si parte dall'istante iniziale in cui le cariche libere (gli elettroni) non sono localizzati e si arriva alla situazione finale con gli elettroni ricalibrati).

$$\Delta V_k = \frac{1}{k_e} \Delta V_0$$

ma  $\Delta V_0 = E_0 d$ , quindi:

$$\Delta V_k = E_k d = \frac{1}{k_e} \Delta V_0$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{k_e} \frac{\Delta V_0}{d}$$

$$\Rightarrow \text{poiché } \frac{\Delta V_0}{d} = E_0 \Rightarrow E_k = \frac{1}{k_e} E_0$$

Quindi anche l'intensità del campo elettrico viene diminuita.

La differenza di campo  $\Delta E = E_0 - E_k$  tra i due casi limite (tra le armature c'è il vuoto e poi c'è tutto il dielettrico)

$\downarrow$   
 $E_0$

$\downarrow$   
 $E_k$

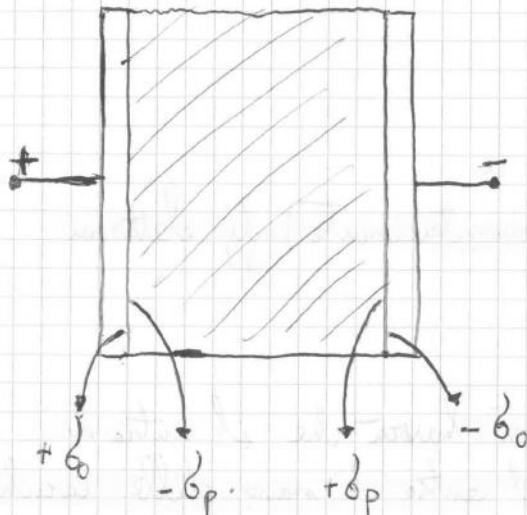
$$\Delta E = E_0 - E_k = E_0 - \frac{1}{k_e} E_0 = \frac{k_e - 1}{k_e} E_0$$

$$k_e - 1 = \text{SUSCETTIVITÀ ELETTRICA} = \chi_e$$

↑

propensione del materiale a lasciarsi indurre elettricamente favorendo a meno l'aumento del campo elettrostatico.

↑  
"chi"



Se le distribuzioni  $\pm \sigma_0$  e  $\pm \sigma_p$  sono formate da CARICHE REALI  
 Le distribuzioni  $+\sigma_0$  e  $-\sigma_0$  sono dovute a cariche libere.  
 Invece le cariche di polarizzazione sono cariche legate.

Perché nel dielettrico avviene questo ???  
 Come può giustificare una comparsa di distribuzione di cariche legate?  
 Allora:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad \text{ne c'è il vuoto tra le armature}$$

$$C_K = \frac{q_0}{\Delta V_K} \quad \text{ne c'è il dielettrico tra le armature}$$

$$\Delta V_K = \frac{1}{k_e} \Delta V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V_K} = k_e \frac{1}{\Delta V_0}$$

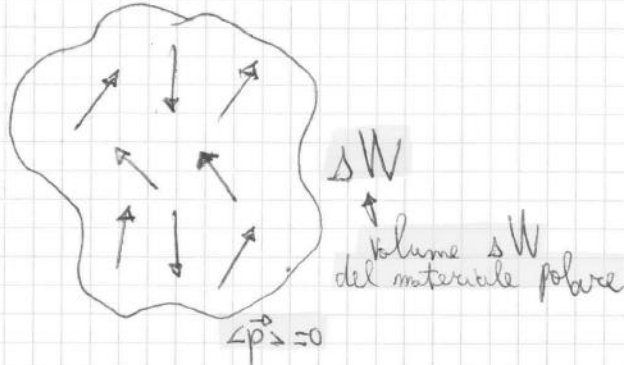
$$\Rightarrow C_K = q_0 k_e \frac{1}{\Delta V_0} \quad \Rightarrow \quad \text{dato che } C_0 = \frac{q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow C_K = k_e C_0$$

La capacità aumenta di un fattore pari alla costante dielettrica

$$C_K = k_e \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d} \quad \epsilon = k_e \epsilon_0 = \text{COSTANTE DIELETTICA ASSOLUTA}$$

# SOSTANZE POLARI

Presentano un dipolo elettrico naturale (questi materiali sono:  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $NH_3$ )



La distribuzione di questi momenti di dipolo intrinseco è del tutto CASUALE, il che si esprime statisticamente dicendo che il valore medio di queste grandezze è NULLO ( $\langle \vec{p} \rangle = 0$ )

Il materiale presenta le stesse caratteristiche elettriche in ogni direzione (MATERIALE È ISOTROPO)

Se ci fosse un campo elettrico esterno  $\vec{E}_0$

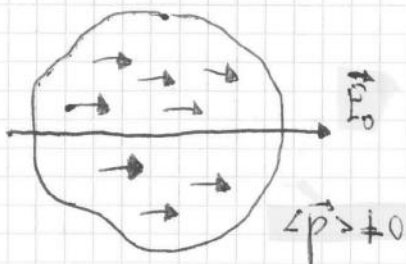


in ogni momento di dipolo intrinseco verrebbe esercitato un momento meccanico:

$$\vec{m}_i = \vec{p}_i \wedge \vec{E}_0$$

$$L_i = -\vec{p}_i \cdot \vec{E}_0$$

il lavoro in questione serve a coarctare i singoli momenti di dipolo ad allinearsi nella stessa direzione del campo



Però c'è sempre l'agitazione termica che tende a ricreare una distribuzione casuale ai momenti di dipolo intrinseco.

**SATURAZIONE DI POLARIZZAZIONE**: quando il 90% dei momenti di dipoli elettrici intrinsechi sono allineati nella direzione del campo elettrostatico (non è possibile ottenere una polarizzazione maggiore del 90%)

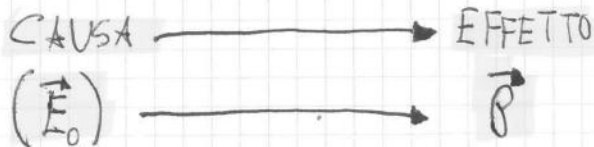
# FISICA 2

04-11-2010

DIELETTRICI LINEARI (1)  
 DIELETTRICI CRISTALLINI (2)

PAG. 30 IN ALTO

Il loro comportamento dal punto di vista elettrico è sufficientemente uguale. L'elemento che correla i due è che esiste una correlazione lineare <sup>e diretta</sup> tra:



La causa si esplica nel materiale dielettrico

$$\vec{P} = \epsilon_0 (k_e - 1) \vec{E}_0$$

↓  
 SUSCETTIVITÀ  
 ELETTRICA

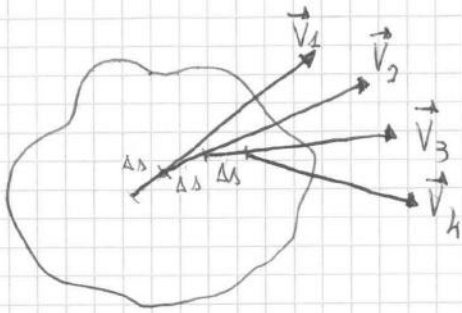
I materiali che presentano questa caratteristica sono chiamati **AMORFI** (dielettrici lineari) e sono fortemente isotropi. (ISOTROPIA: proprietà di indipendenza della direzione da parte di una grandezza definita nello spazio)

Per i dielettrici cristallini questa proprietà non vale lungo tutte le direzioni, ma solo lungo <sup>tre</sup> assi privilegiati (i tre assi principali: ASSI CRISTALLOGRAFICI), questo perché sono fortemente anisotropi.

Esempio: <sup>(è un dielettrico)</sup> l'armatura vicina ad una linea elettrica; l'armatura interna al cablo comincia a "arruolare" (quindi a disgregarsi) proprio a causa della polarizzazione.

GRATTACIELO A DUBAI DI 500 m: c'è una d.d.p. tra la cima e il piano di circa 300 V; poi a causa del clima umido e dell'inclusione di salinità del Mar Rosso, c'è una presenza di cariche statiche grandissima e quindi possibilità di polarizzazione e quindi probabilità di ossidazione dei ferri dell'ar...

Consideriamo un campo vettoriale:



Ottengo una massata.

N.B. RICORDARE CHE:

$\Delta s$ : spostamento finito

$ds$ : spostamento infinitesimo

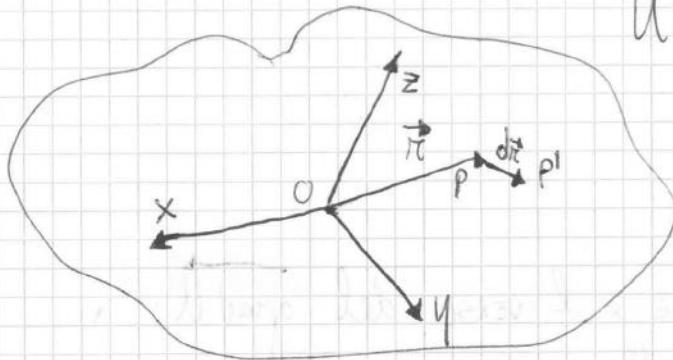
**LINEA DI CAMPO VETTORIALE:** linea che si ottiene considerando spostamenti  $ds$  infinitesimi, cioè  $ds$ .

Per ogni punto passa una e una sola linea di campo; i punti in cui passano più linee sono dei punti singolari che possono identificarsi nelle SORGENTI.

Immaginiamo di avere una regione di spazio in cui è presente un **CAMPO SCALARE** individuato da una grandezza scalare; in questo campo consideriamo un sistema di riferimento:

**GRADIENTE DI UNA GRANDEZZA SCALARE** (Potenziale) (parte pag. 2)

$$U(x, y, z)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow U(x, y, z) \\ \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \end{array} \right.$$

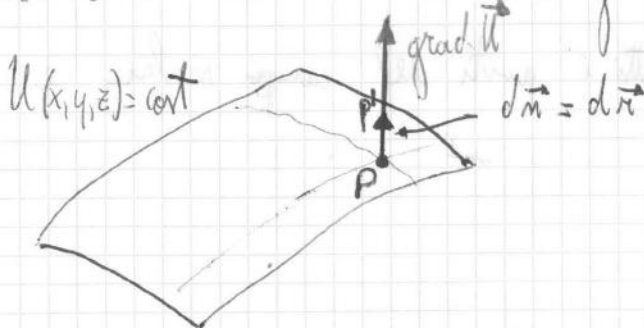
$$P' \rightarrow U(x, y, z) + dU(x, y, z) = U'(x, y, z)$$

$$d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

$$dU = 0 \iff \vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\implies \vec{\text{grad}} U \perp \text{superficie di livello}$$

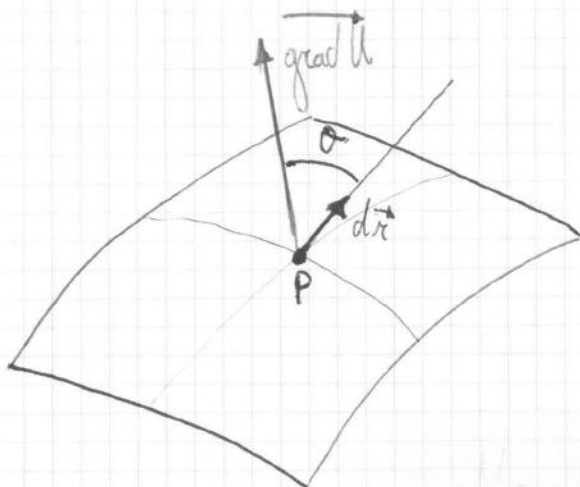
Ora determiniamo il modulo di  $\vec{\text{grad}} U$ :



$$dU = |\vec{\text{grad}} U| dm \implies |\vec{\text{grad}} U| = \frac{dU}{dm} \quad (3)$$

quindi il modulo del gradiente di  $U$  è:

derivata, lungo la direzione ortogonale alla superficie di livello, della grandezza  $U$ , che descrive i punti di questa superficie di livello.



$$\frac{dU}{dr} = |\vec{\text{grad}} U| \cos \theta$$

$\implies$  dalla (3) si ha  $\implies$

$$\implies \frac{dU}{dr} = \frac{dU}{dm} \cos \theta$$

Fra tutte le possibili variazioni, c'è una direzione dove la variazione è massima; la direzione perpendicolare alla superficie (PRINCIPIO DI FERMAT o PRINCIPIO DELLA MINIMA AZIONE)



chiamata POTENZIALE MATEMATICO DEL CAMPO

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{\pi} = 0$$

↓  
integrale di  
linea lungo una linea  
chiusa o CIRCUITAZIONE

CAMPO CONSERVATIVO

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} U$$

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{\pi} = U_B - U_A$$

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{\pi} = 0$$

# FISICA 2

05-11-2010

Se la grandezza vettoriale  $\vec{V}$  fosse una grandezza fisica  $\Rightarrow$  il campo vettoriale è un campo vettoriale fisico, e inoltre se  $\vec{V}$  è una grandezza fisica, allora la grandezza scalare  $U$  (potenziale matematico del campo) diventa il potenziale fisico del campo.

Il POT. FISICO è uguale a - POT. MATEMATICO

ricordare infatti:  $\vec{V} \rightarrow \vec{E}_0 \rightsquigarrow \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = -(V_B - V_A)$

Il corpo SCAMBIA lavoro, non COMPIE lavoro.

PAG. 17  
FOTOCOPIE\*

## DIVERGENZA

OPERATORE che trasforma una grandezza vettoriale in una grandezza scalare

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$\nabla \cdot \vec{V}$  notazione anglosassone

## TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Se ho un campo vettoriale descritto in ogni punto dalla grandezza  $\vec{V}(x, y, z)$ , e ho una superficie  $S$  che racchiude un certo volume  $W_S$  chiusa.

IL TEOREMA DICE CHE:

$$\oint \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{W_S} \text{div } \vec{V} dW$$

divergenza del campo calcolata entro il volume  $W_S$

integrale di superficie su una superficie chiusa (non è una circonferenza, perché la circonferenza è UNIDIMENSIONALE)

## Applicazione

Consideriamo un campo elettrostatico ed una superficie chiusa nel campo.



La legge di Gauss dice che:  $\Phi(\vec{E}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} q$

scritta in notazione complessiva o integrale

anche racchiuse nella superficie

Esiste un operatore che trasforma una grandezza vettoriale in un'altra grandezza vettoriale:

**ROTORE** → PAG. 10 FOTOCOPIE

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V}$$

↑  
rotazione angolarmente

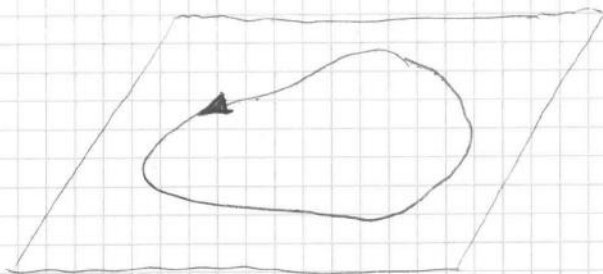
$$\text{rot}_x \vec{V} = \vec{u}_x \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)$$

$$\text{rot}_y \vec{V} = -\vec{u}_y \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \vec{u}_y \left( -\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$

$$\text{rot}_z \vec{V} = \vec{u}_z \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

**TEOREMA DEL ROTORE (o DI STOKES)** → PAG. 12 FOTOCOPIE

Il teorema permette di dimostrare:

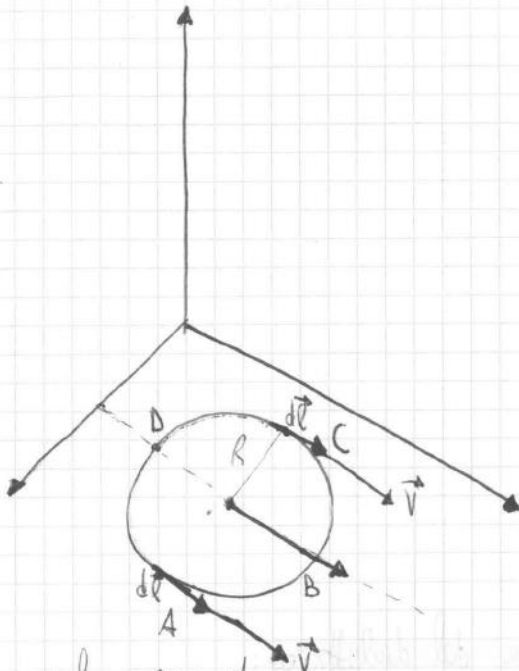


$$\oint_l \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

↑  
superficie che ha come contorno la linea chiusa l.

Le superfici che hanno la linea chiusa come contorno sono infinite ⇒ scegliere sempre la più semplice

APPLICAZIONE PAG. 14 FOTOCOPIE IN ALTO  
MOTO PURAMENTE TRASLATORIO

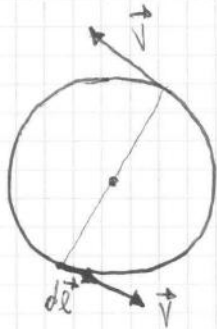


calcoliamoci la circolazione

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint v dl = \oint \omega R dl =$$

$$= \int_{ABC} \omega R dl + \int_{CDA} \omega R dl = 0$$

MOTO PURAMENTE ROTATORIO



$$v = \omega R$$

calcoliamoci la circolazione:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \omega R dl = \omega R \underbrace{\oint dl}_{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}}_{(4)} = 2\pi \omega R^2 = 2\omega S \Rightarrow \text{per il teorema di Stokes} \Rightarrow$$

$$\text{l'integrale (4) è uguale a } \iint \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 2\omega S \Rightarrow \text{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

Se invece  $\vec{P}$  non è uniforme  $\Rightarrow$  ho una densità volumica di cariche di polarizzazione.

Si arriva a dimostrare che:

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$$

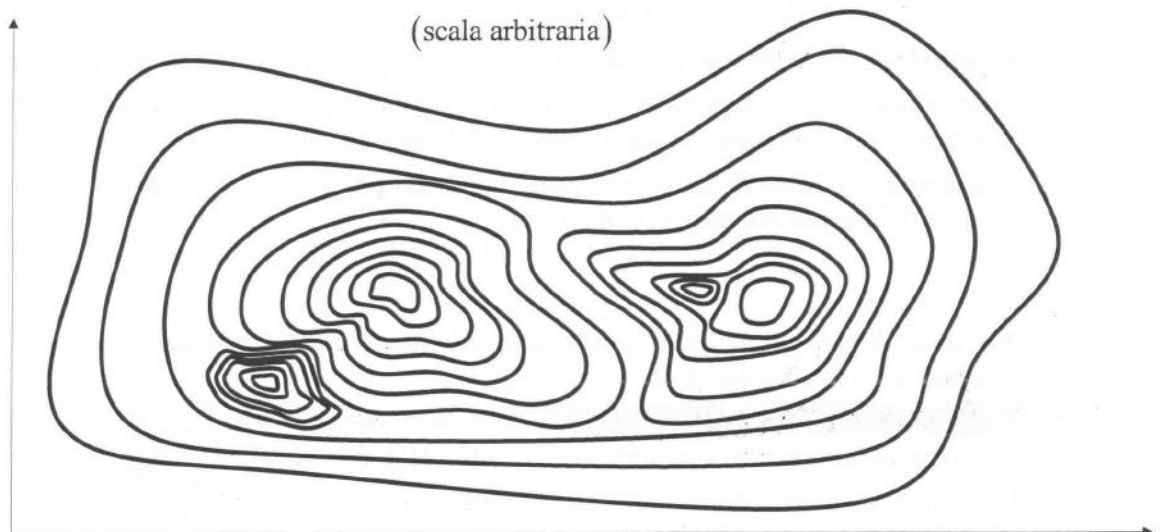
## LEZ. 04-A-1010 ← CAMPO SCALARE

- **Campo scalare:** regione di spazio in ogni punto della quale è definita una grandezza scalare  $U\{x, y, z\}$ , funzione delle coordinate  $\{x, y, z\}$ . La temperatura di un ambiente, la densità di un fluido in seno al fluido stesso sono esempi di grandezze scalari che definiscono un campo scalare, quando è possibile pensarle funzioni delle coordinate spaziali.
- **Superficie di livello:** luogo dei punti nei quali la funzione scalare  $U\{x, y, z\}$  assume un determinato valore costante

$$U\{x, y, z\} = k$$

Essendo arbitrario il valore della costante  $k$ , l'equazione  $U\{x, y, z\} = k$  rappresenta una famiglia di infinite superfici di livello e per un ben specifico valore  $k_0$ , in ogni punto  $P\{x_0, y_0, z_0\}$  passa una ed una sola superficie di livello.

- **Rappresentazione grafica:** si ottiene disegnando i valori della famiglia di funzioni  $U\{x, y, z\} = nk_0$ , essendo  $k_0$  un dato valore costante ed  $n$  un qualsiasi multiplo intero o semintero. I cartografi, sezionando l'andamento orografico del terreno con piani equidistanti e paralleli a quello del livello del mare (in tale caso il valore arbitrario di  $k_0$  è nullo), ottengono curve dette linee di isolivello. Sulla carta di rappresentazione, dove le coordinate geografiche si identificano con quelle cartesiane, le linee di isolivello visualizzano l'andamento del suolo, almeno localmente. Tanto più le linee sono vicine fra loro, tanto più il dislivello fra i relativi piani di livello è grande e viceversa.



## LEZ. 04-A-2010 ← CAMPO VETTORIALE

- **Campo vettoriale:** regione di spazio in ogni punto della quale è definita una grandezza vettoriale  $\vec{V}\{x, y, z\}$ , detta vettore intensità di campo, funzione delle coordinate  $\{x, y, z\}$ .
- **Linee di campo:** un campo vettoriale si può rappresentare con le linee di campo che godono della proprietà di avere la direzione della tangente, in ogni loro punto, concorde con la direzione di  $\vec{V}\{x, y, z\}$ . Nel punto  $P_0$  il vettore intensità valga  $\vec{V}\{x, y, z\}$  e compiendo lo spostamento  $\Delta\vec{s} = (P_1 - P_0)$ , lungo la direzione del campo, valga  $\vec{V}_1\{x, y, z\}$  poco dissimile da quello iniziale.

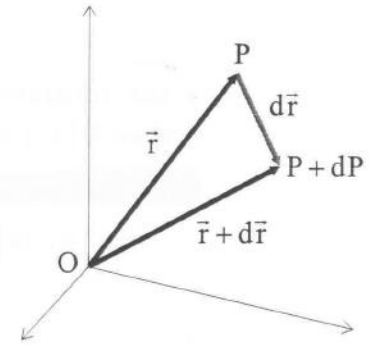
$$P - O = \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

il valore della grandezza scalare sia  $U\{x, y, z\}$ . La variazione infinitesima

$$d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

determina la variazione  $dU\{x, y, z\}$  di tale grandezza, la cui entità dipende sia dal valore sia dalla direzione dello spostamento [fig. 5]. A meno di infinitesimi di ordine superiore, la variazione totale della funzione scalare vale

$$dU\{x, y, z\} = \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial x} dx + \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial y} dy + \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial z} dz$$



[fig. 5]

Tenendo presente che  $\{dx, dy, dz\}$  sono le tre componenti di  $d\vec{r}$  e ipotizzando che sia possibile definire un vettore di componenti  $\{\partial U\{x, y, z\}/\partial x, \partial U\{x, y, z\}/\partial y, \partial U\{x, y, z\}/\partial z\}$ , la variazione risulterebbe essere il prodotto scalare fra questo vettore e la variazione  $d\vec{r}$ .

- **Operatore gradiente o gradiente di uno scalare:** è definito dalla relazione

$$\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}} = \nabla U\{x, y, z\} = \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial z} \vec{u}_z$$

- Il suo modulo vale

$$|\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial z}\right)^2}$$

- i coseni direttori dati da

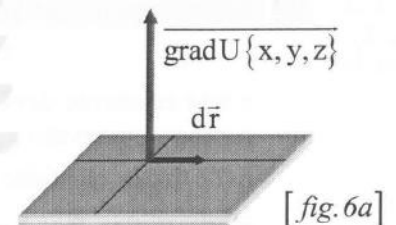
$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial x}}{|\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}|} \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial y}}{|\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}|} \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial z}}{|\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}|}$$

La variazione  $dU\{x, y, z\}$  assume la forma

$$(1) \quad dU\{x, y, z\} = \overline{\text{grad}U\{x, y, z\}} \cdot d\vec{r}$$

- **Significato dell'operatore gradiente:** considerato un punto P sulla una generica superficie di livello  $U\{x, y, z\} = \text{cost}$ , lo spostamento  $d\vec{r}$  può essere considerato secondo differenti modalità e precisamente

- **$d\vec{r}$  giace sulla superficie di livello:** in tale caso la relazione (1) è nulla (sulla superficie di livello  $dU\{x, y, z\} = 0$ ), quindi i due vettori sono ortogonali fra loro. La direzione del vettore  $\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}$  è sempre normale, in ogni punto, ad una superficie di livello [fig. 6a].

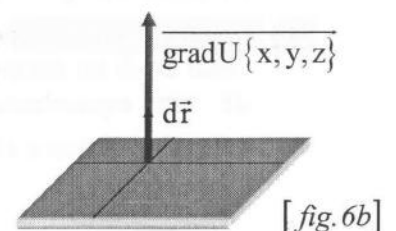


[fig. 6a]

- **$d\vec{r}$  è normale alla superficie di livello:** lo spostamento infinitesimo è parallelo e concorde con il versore normale  $\vec{n}$  alla superficie nel punto considerato. Si può identificare  $d\vec{r} \equiv d\vec{n}$  e la relazione (1) vale [fig. 6b]

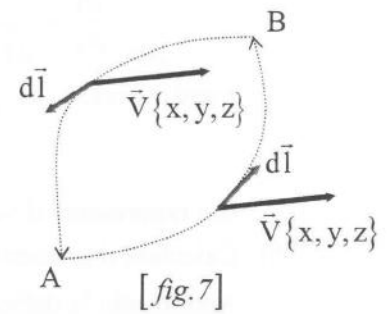
$$dU\{x, y, z\} = |\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}| dn$$

da cui



[fig. 6b]

e tale risultato evidenzia un fatto intrinseco con il concetto di conservatività: *il valore dell'integrale è indipendente dal tipo di linea scelta fra il punto iniziale A e quello finale B. Il valore dell'integrale dipende solamente dalla variazione di valore che la funzione scalare  $U\{x, y, z\}$  assume nel punto finale ed iniziale.* Considerando un'altra linea orientata dal punto B al punto A, per quanto detto, si ha [fig. 7]



$$U_A - U_B = \int_B^A \overline{\text{grad}U\{x, y, z\}} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{V}\{x, y, z\} \cdot d\vec{l}$$

e si evince che l'integrale di linea, lungo una qualsiasi linea chiusa, risulta nullo

$$\oint_{ABA} \vec{V}\{x, y, z\} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{V}\{x, y, z\} \cdot d\vec{l} = 0$$

**Attenzione:** l'integrale di linea, lungo una linea chiusa, è detto *circuitazione* e viene indicato con il simbolo  $\oint(\dots)$ .

- **La funzione scalare  $U\{x, y, z\}$  è detta potenziale matematico del campo vettoriale conservativo.** In fisica, ad una grandezza vettoriale conservativa viene associato a questa un potenziale fisico ed **il potenziale fisico è definito uguale al potenziale matematico cambiato di segno.**

$$U\{x, y, z\} = -U\{x, y, z\}$$

- **Se la grandezza vettoriale è una forza, la grandezza scalare è detta energia potenziale.**

• **Riassumendo:**

- l'operatore gradiente trasforma una grandezza scalare  $U\{x, y, z\}$  in una vettoriale secondo la relazione

$$\overline{\text{grad}U\{x, y, z\}} = \nabla U\{x, y, z\} = \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U\{x, y, z\}}{\partial z} \vec{u}_z$$

- per un campo vettoriale conservativo valgono le seguenti affermazioni tutte equivalenti fra loro

$$\vec{V}\{x, y, z\} = \overline{\text{grad}U\{x, y, z\}}$$

$$\int_A^B \vec{V}\{x, y, z\} \cdot d\vec{l} = U_B - U_A$$

$$\oint \vec{V}\{x, y, z\} \cdot d\vec{l} = 0$$

## APPLICAZIONI

- 1) Calcolare il gradiente delle tre coordinate cartesiane  $\{x, y, z\}$

Applicando la definizione operativa,

$$\overline{\text{grad}x} = \frac{\partial x}{\partial x} \vec{u}_x = \vec{u}_x \qquad \overline{\text{grad}y} = \frac{\partial y}{\partial y} \vec{u}_y = \vec{u}_y \qquad \overline{\text{grad}z} = \frac{\partial z}{\partial z} \vec{u}_z = \vec{u}_z$$

si ricava che il gradiente delle tre coordinate è uguale ai tre versori degli assi coordinati.

- 2) Si consideri il vettore posizione  $P - O = \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$  del generico punto P in un riferimento

$O\{x, y, z\}$ , calcolare il gradiente del modulo  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Applicando la definizione operativa, si ricava

$$\overline{\text{grad}r} = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{u}_z$$

con



–  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  :  $d\Phi(\vec{V}) < 0$  ed in tale caso le linee di campo sono entranti nella superficie

- **Convenzione della normale:** il versore normale  $\vec{n}$  è sempre orientato esternamente alla curvatura della superficie nel punto considerato.
- **Superficie chiusa:** data la superficie chiusa  $d\Sigma$ , tutta contenuta nel campo vettoriale, il flusso vale

$$d\Phi(\vec{V}) = d\Phi_e(\vec{V}) + d\Phi_u(\vec{V})$$

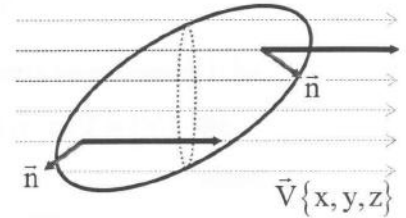
essendo  $d\Phi_e(\vec{V})$  il flusso entrante e  $d\Phi_u(\vec{V})$  il flusso uscente.

Se non vi sono punti singolari all'interno della superficie chiusa, per cui il numero di linee di campo entranti ed uscenti è lo stesso, si ha  $d\Phi_e(\vec{V}) = d\Phi_u(\vec{V})$ . Per una superficie chiusa e finita, priva al suo interno di punti singolari di campo, il flusso nullo è espresso dalla relazione [fig. 9]

$$\Phi(\vec{V}) = \oiint_{\Sigma} \vec{V}\{x, y, z\} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0$$

ed il simbolo  $\oiint_{\Sigma}(\dots)$  esprime che la superficie è chiusa.

- Il significato fisico del flusso risulta evidente considerando una massa  $\Delta m$  di fluido incomprimibile, in moto stazionario<sup>1</sup> con velocità  $\vec{v}\{x, y, z\}$  entro un condotto di sezione  $\Delta\Sigma_0$ . Nell'unità di tempo la massa di fluido, che attraversa una qualsiasi sezione  $\Delta\Sigma_0$ , è uguale a quella contenuta nel volume  $\Delta W = [\vec{v}\{x, y, z\}(\Delta t = 1)]\Delta\Sigma_0$ . Essendo la velocità normale alla sezione,  $\Delta W = \vec{v}\{x, y, z\} \cdot \vec{n} \Delta\Sigma_0$ , si ricava  $\Delta m = \rho \Delta W = \rho \vec{v}\{x, y, z\} \cdot \vec{n} \Delta\Sigma_0$ .



[fig. 9]

LEZ. 05-11-2010

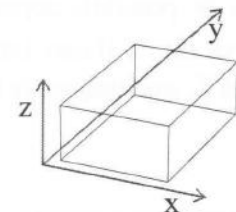
## DIVERGENZA DI UNA GRANDEZZA VETTORIALE

Si definisce divergenza l'operatore che muta una grandezza vettoriale  $\vec{V}\{x, y, z\}$  in una scalare secondo la relazione

$$\text{div} \vec{V}\{x, y, z\} = \nabla \cdot \vec{V}\{x, y, z\} = \frac{\partial V_x\{x, y, z\}}{\partial x} + \frac{\partial V_y\{x, y, z\}}{\partial y} + \frac{\partial V_z\{x, y, z\}}{\partial z}$$

DI MOSTRAZIONE  
TEOREMA  
DELLA DIVERGENZA  
EA: NON FATTA

In un campo vettoriale  $\vec{V}\{x, y, z\}$  si consideri il volume infinitesimo  $dW = dx dy dz$ , orientato secondo gli assi del riferimento  $O\{x, y, z\}$ , non contenente punti singolari del campo. Attraverso alla superficie  $d\Sigma$  del predetto volume, il flusso totale è pari alla somma dei flussi attraverso le singole facce che, per motivi di simmetria, sono tre coppie omologhe [fig. 10].



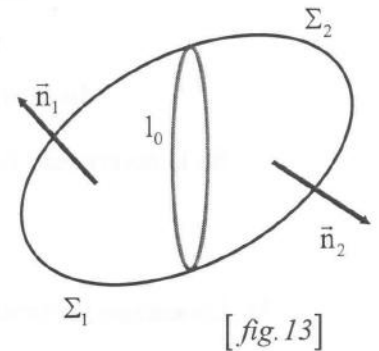
[fig. 10]

- **Flusso attraverso la coppia di facce  $d\Sigma_x = dy dz$ :** le relazioni sono [fig. 11]
  - all'ascissa  $x$ , il versore normale alla faccia sia  $-\vec{n}_x$  ed il vettore intensità di campo
 
$$\vec{V}\{x, y, z\} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$$
  - all'ascissa  $x + dx$ , il versore normale alla faccia sia  $\vec{n}_x$  ed il vettore intensità di campo

<sup>1</sup> Ricordare che in tale caso la velocità è funzione delle sole coordinate spaziali e non del tempo.

- $\Phi_{\text{tot}}(\vec{V}) = 0 \rightarrow \text{div} \vec{V}\{x, y, z\} = 0$ : il numero di linee di campo uscenti dalla superficie chiusa è uguale a quello delle linee entranti (nessuna sorgente di campo)
- $\Phi_{\text{tot}}(\vec{V}) < 0 \rightarrow \text{div} \vec{V}\{x, y, z\} < 0$ : il numero di linee di campo uscenti dalla superficie chiusa è minore a quello delle linee entranti (presenza di sorgenti negative)

- **Campo vettoriale solenoidale: quando in tutti i punti vale  $\text{div} \vec{V}\{x, y, z\} = 0$ .** Considerando in un campo vettoriale  $\vec{V}\{x, y, z\}$  una linea chiusa orientata  $l_0$ , vi sono infinite superfici che hanno come contorno la linea considerata [fig. 13]. Siano  $\Sigma_1$  ed  $\Sigma_2$  due di tali superfici e i loro versori normali  $\vec{n}_1$  ed  $\vec{n}_2$  siano orientati concordemente con la linea chiusa.



Il flusso attraverso alla superficie complessiva  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$  è uguale alla somma algebrica dei due flussi  $\Phi_1(\vec{V})$  e  $\Phi_2(\vec{V})$  (attenzione orientamento dei due versori normali)

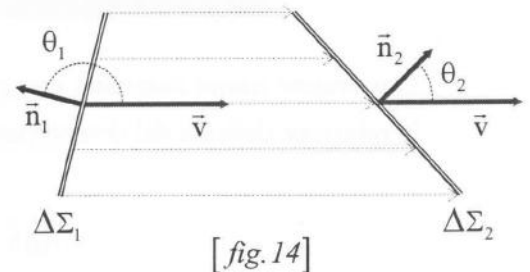
$$\Phi(\vec{V}) = \Phi_1(\vec{V}) - \Phi_2(\vec{V})$$

Se all'interno di S non vi sono punti singolari del campo,  $\Phi(\vec{V}) = \Phi_1(\vec{V}) - \Phi_2(\vec{V}) = 0$  per cui  $\Phi_1(\vec{V}) = \Phi_2(\vec{V})$  e la divergenza di  $\vec{V}\{x, y, z\}$  è nulla: il campo risulta essere solenoidale.

- **Esempio idrodinamico:** in un condotto a sezione variabile, il campo delle velocità stazionarie  $\vec{v}\{x, y, z\}$  di un fluido (incomprimibile, di densità  $\rho = \text{cost}$  e con coefficiente di viscosità  $\eta = 0$ ) risulta essere solenoidale se non sono presenti sorgenti di campo. Si consideri un tubo di flusso di sezione  $\Delta\Sigma_1$  e  $\Delta\Sigma_2$  in tale condotto: il flusso totale del campo delle velocità vale [fig. 14]

$$\Delta\Phi_{\text{tot}}(\vec{v}) = \Delta\Phi_1(\vec{v}) + \Delta\Phi_2(\vec{v}) + \Delta\Phi_{\text{lat}}(\vec{v}) = 0$$

essendo  $\Delta\Phi_1(\vec{v})$  il flusso entrante nella sezione  $\Delta\Sigma_1$  (valore negativo),  $\Delta\Phi_2(\vec{v})$  il flusso uscente dalla sezione  $\Delta\Sigma_2$  (valore positivo),  $\Delta\Phi_{\text{lat}}(\vec{v})$  il flusso uscente dal mantello laterale (valore negativo in quanto  $\vec{n} \perp \vec{v}\{x, y, z\}$ ). Poiché  $\Delta\Phi_1(\vec{v}) = \Delta\Phi_2(\vec{v})$ , attraverso ad una qualsiasi sezione  $\Delta S$  del condotto si ha



$$\Delta\Phi(\vec{v}) = \vec{v}\{x, y, z\} \cdot \vec{n} \Delta\Sigma = v\{x, y, z\} \Delta\Sigma \cos\theta = v\{x, y, z\} \Delta\Sigma_0 = \text{cost}$$

Tale relazione è la **portata** e si può riscrivere come

$$\rho \Delta\Phi(\vec{v}) = \rho \left[ \underbrace{v\{x, y, z\}(\Delta t = 1)}_{\text{spazio unitario}} \right] \Delta\Sigma_0 = \rho \Delta W_{\text{unitario}} = m = \text{cost}$$

la portata, cioè la massa di fluido (con le caratteristiche fisiche predette) che nell'unità di tempo attraversa una qualsiasi sezione normale di un condotto, risulta costante nel tempo.

## APPLICAZIONI

- 1) Calcolare la divergenza del vettore posizione  $P - O = \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$  nel riferimento  $O\{x, y, z\}$   
Applicando la definizione dell'operatore divergenza