



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 134

DATA : 05/09/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Ottone Gabriele

MATERIA : Strutture Aerospaziali, Esercizi
Prof. Frulla

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



80023

Carico uniaxiale

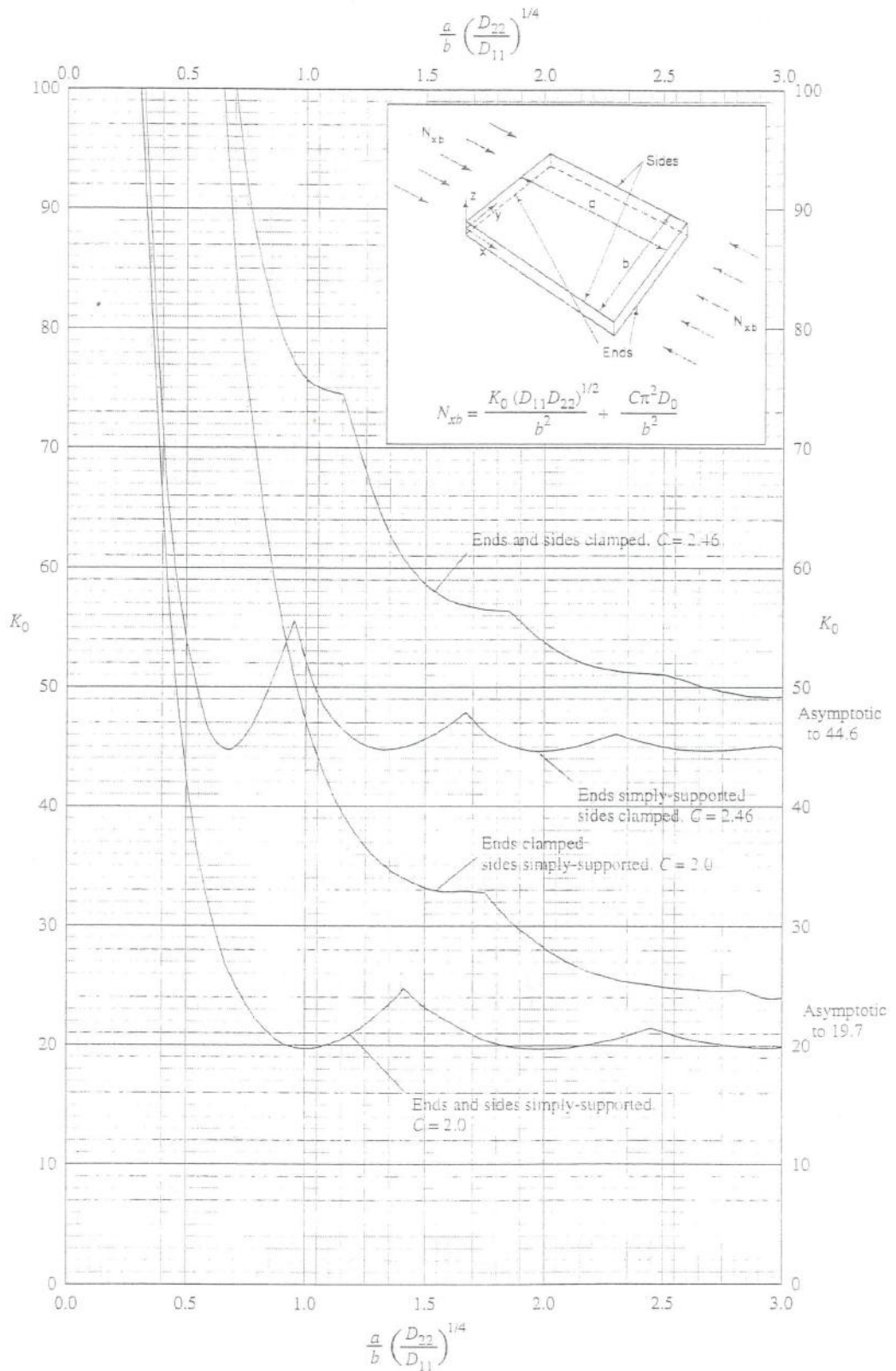
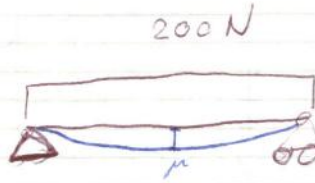
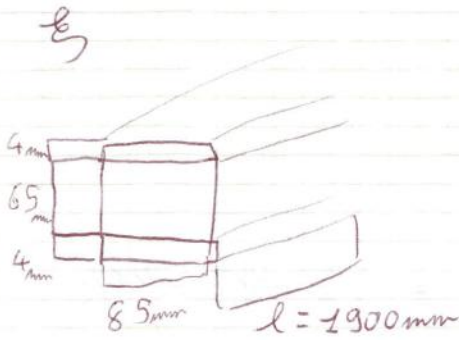


FIGURE 1 UNIAXIAL LOAD. COMBINATIONS OF CLAMPED AND SIMPLY-SUPPORTED EDGE CONDITIONS



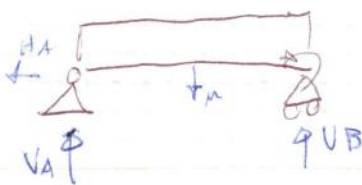
$$K_B = \frac{5}{384} \quad K_S = \frac{2}{8}$$

rispetto alla teoria della trave classica, nella trave sandwich, nel caso di flessione, il cuore e le facce non rimangono \perp all'asse z della trave. Con la teoria di de Saint Venant non si può applicare

$$f = K_B (PL^3/EI) + K_S (PL/AGc)$$

$$AGc = Gc \left(\frac{b d^2}{h c} \right) = 150 \text{ MPa} \left(\frac{85 \cdot 71^2}{65} \right) = 9,88 \cdot 10^5$$

Castigliana



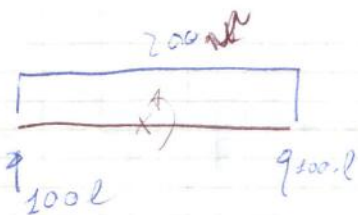
$$V_A + V_B - 200N \cdot l$$

$$H_A = 0$$

$$\sum M_B - V_A \cdot l + \frac{200 \cdot l^2}{2} = 0$$

$$V_A = 100 \cdot l$$

$$V_B = 100 \cdot l$$



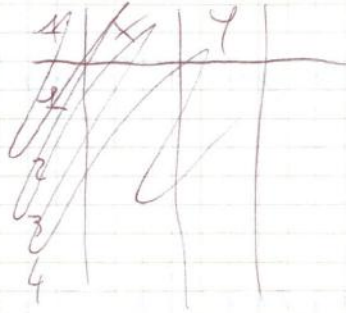
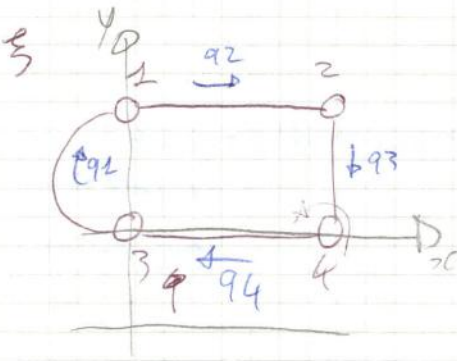
$$M + 200 \cdot \frac{z^2}{2} - 100 \cdot l \cdot z = 0$$

$$M = 100lz - \frac{100z^2}{1}$$

$$\int \frac{(100lz - 100z^2)}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int (100l^2 \cdot z^2 - 2 \cdot 100^2 l \cdot z^3 + 100z^4) dz$$

$$\frac{1}{EI} \left[100^2 l^2 \cdot \frac{z^3}{3} - 2 \cdot 100^2 l \cdot \frac{z^4}{4} + 100^2 \frac{z^5}{5} \right] = \frac{100^2 l^5}{3} - 2 \cdot \frac{100^2 l^5}{4} + \frac{100^2 l^5}{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 5 \cdot 100^2 \frac{l^4}{3} - 10 \cdot 100^2 \frac{l^4}{4} + 9 \cdot 100^2 \frac{l^4}{5}$$



$$q_1 = q_1^* + q_I$$

$$q_2 = q_2^* + q_I$$

$$q_3 = q_3^* + q_I$$

$$q_4 = q_4^* + q_I$$

esercizio aree uguali il baricentro sarà a $b/2$ e $h/2$

$$4) F \cdot et = 2R_1 q_1 + 2R_2 q_2 = 2 \frac{\pi h^2}{4} q_1 + b \cdot h q_2$$

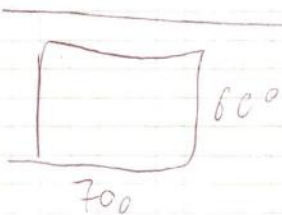
$$\dot{\theta} = 0 = \frac{1}{2RGS} \left[q_4 b + q_1 \frac{\pi h}{2} + q_2 b + q_3 h \right]$$

$$\left\{ \begin{aligned} F \cdot et &= 2 \left(\frac{\pi h^2}{4} q_1 + b \cdot h q_2 \right) \\ \frac{1}{2RGS} \left[q_4 b + q_1 \frac{\pi h}{2} + q_2 b + q_3 h \right] &= 0 \end{aligned} \right.$$

nel caso in cui si ha gemello verticale
ugual a 55 si ha

$$\frac{1}{2RGS} \left[q_4 \frac{b}{5} + q_1 \frac{\pi h}{5} + q_2 \frac{b}{5} + q_3 \frac{h}{55} \right]$$

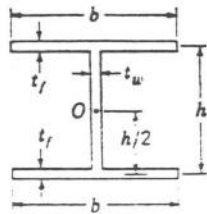
$$b/2 = \frac{\left(\frac{\pi h^2}{4} + \frac{b h}{2} \right) q_1 + b \cdot h q_2}{F}$$



$$F = 7700$$

TABLE A-3. PROPERTIES OF SECTIONS

O = shear center J = torsion constant C_w = warping constant

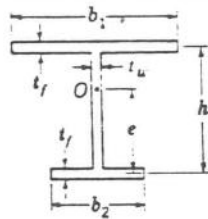


$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$$

$$C_w = \frac{t_f h^2 b^3}{24}$$

If $t_f = t_w = t$:

$$J = \frac{t^3}{3} (2b + h)$$



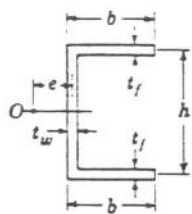
$$e = h \frac{b_1^3}{b_1^3 + b_2^3}$$

$$J = \frac{(b_1 + b_2)t_f^3 + ht_w^3}{3}$$

$$C_w = \frac{t_f h^2}{12} \frac{b_1^3 b_2^3}{b_1^3 + b_2^3}$$

If $t_f = t_w = t$:

$$J = \frac{t^3}{3} (b_1 + b_2 + h)$$



$$e = \frac{3b^2 t_f}{6bt_f + ht_w}$$

$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$$

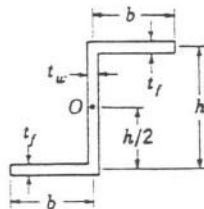
$$C_w = \frac{t_f b^2 h^2}{12} \frac{3bt_f + 2ht_w}{6bt_f + ht_w}$$

If $t_f = t_w = t$:

$$e = \frac{3b^2}{6b + h}$$

$$J = \frac{t^3}{3} (2b + h)$$

$$C_w = \frac{tb^2 h^2}{12} \frac{3b + 2h}{6b + h}$$



$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$$

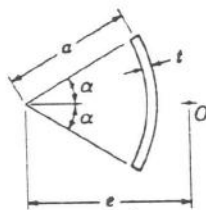
$$C_w = \frac{b^3 h^2}{12(2b + h)^2} \times [2t_f(b^2 + bh + h^2) + 3t_w bh]$$

If $t_f = t_w = t$:

$$J = \frac{t^3}{3} (2b + h)$$

$$C_w = \frac{tb^3 h^2}{12} \frac{b + 2h}{2b + h}$$

Cost. flexo-torsionale



$$e = 2a \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$J = \frac{2aat^3}{3}$$

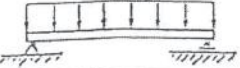

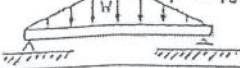



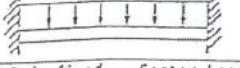
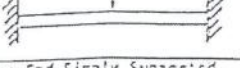
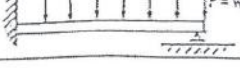
$$C_w = \frac{2ta^5}{3} \times \left[\alpha^2 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

If $2\alpha = \pi$:

$$e = \frac{4a}{\pi} \quad J = \frac{\pi at^3}{3}$$

$$C_w = \frac{2ta^5}{3} \left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{12}{\pi} \right) = 0.0374ta^5$$

$$f = K_D (P L^3 / EI) + K_S (P L / AG_C)$$

Beam Type	Maximum Shear Force V	Maximum Bending Moment M	Bending Deflection Constant K_B	Shear Deflection Constant K_S
Simple Support Uniform Load $P = wL$ 	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{5}{384}$	$\frac{1}{8}$
Simple Support Center Load P 	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{4}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{4}$
Simple Support Triangular Load $P = 16wL$ 	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{6}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{6}$
Cantilever Uniform Load $P = wL$ 	P	$\frac{PL^2}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Cantilever End Load P 	P	PL	$\frac{1}{3}$	1
Cantilever Triangular Load $P = 16wL$ 	P	$\frac{PL}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
Both Ends fixed Uniform Load $P = wL$ 	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{12}$	$\frac{1}{384}$	$\frac{1}{8}$
Both Ends fixed Center Load P 	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{4}$
One End Simply Supported One End fixed Uniform Load $P = wL$ 	$\frac{5P}{8}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{1}{185}$	$\frac{1}{14.2}$

* Beam Types (according to Ref. [1], [4])

Fig. 15

Come esempio, determiniamo la linea elastica della trave a sbalzo incastrata caricata da una forza all'estremo libero orientata verso il basso.

$$\begin{aligned}
 M &= -EIv_{0,x} \\
 C &= \frac{FL^2}{2EI} \\
 D &= -\frac{F(L)^3}{6EI} \\
 v_0 &= -\frac{F(L-z)^2}{2EI} + C \\
 v_0(z=L) &= -\frac{F(L)^3}{6EI} + Cz + D
 \end{aligned}$$

Approccio variazionale alla trave. Possiamo ricavare le equazioni di equilibrio della trave anche utilizzando una metodologia energetica basata sul PLV. Si tratta di scrivere i PLV per la trave nell'ipotesi EITB e di procedere a integrazioni successive fino a ridurre il problema in forma variazionale, ai termini minimi.

$$\begin{aligned}
 \int_L^A \sigma_z \delta \epsilon_z dV - \int_L^A q \delta v_0 dz &= 0 \\
 \int_L^A (\sigma_z \delta v_{0,z} - v \delta v_{0,z}) dV - \int_L^A q \delta v_0 dz &= 0 \\
 \int_L^A [N(\delta v_{0,z}) - M(\delta v_{0,z,z})] dz - \int_L^A q \delta v_0 dz &= 0 \\
 \int_L^A \left[\frac{\partial}{\partial z} (N \delta v_0) - N_z \delta v_0 - \frac{\partial}{\partial z} (M \delta v_{0,z}) + \frac{\partial}{\partial z} (M \delta v_{0,z,z}) - M_{,zz} \delta v_0 \right] dz - \int_L^A q \delta v_0 dz &= 0
 \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_L^A \left[\frac{\partial}{\partial z} (N \delta v_0) - N_z \delta v_0 - \frac{\partial}{\partial z} (M \delta v_{0,z}) + \frac{\partial}{\partial z} (M \delta v_{0,z,z}) - (M_{,zz} + q) \delta v_0 \right] dz &= 0 \\
 \delta v_0; N_z &= 0 \\
 \delta v_{0,z}; (M_{,zz} + q) &= 0; -EIv_{0,zzzz} + q = 0 \\
 (M \delta v_{0,z,z})_{,z} &= 0 \\
 (M \delta v_{0,z})_{,z} &= 0
 \end{aligned}$$

Le ultime tre relazioni sono le condizioni al contorno che nel caso della trave a sbalzo considerano nulle le variazioni virtuali all'estremo incastrato e considerano nulli i risultanti di carico all'estremo libero.

Per la trave a sbalzo le condizioni al contorno risultano:

$$\begin{aligned}
 z=0; v_0 &= 0 & z=L; T &= \frac{dM}{dz} = 0; v_{0,zz} = 0 & H &= F = 0 \\
 z=0; v_{0,x} &= 0 & z=L; M &= 0; v_{0,x} = 0 & C &= \frac{-qL}{EI}; D = \frac{qL^2}{2EI} \\
 v_0 &= \frac{q}{EI} \frac{z^4}{24} + C \frac{z^3}{6} + D \frac{z^2}{2} + Fz + H \\
 v_0 &= \frac{q}{EI} \frac{z^4}{24} + \left(\frac{-qL}{EI} \right) \frac{z^3}{6} + \left(\frac{qL^2}{2EI} \right) \frac{z^2}{2}
 \end{aligned}$$

Da cui all'estremità si ottiene:

$$\begin{aligned}
 z=L; v_0 &= \frac{qL^4}{8EI} \\
 z=L; v_{0,x} &= \frac{qL^3}{6EI}
 \end{aligned}$$

Verificabile con la procedura classica basata su PLV.

La linea elastica può anche essere ottenuta osservando che:

$$\begin{aligned}
 M &= -EIv_{0,xx} \\
 v_{0,xx} &= -\frac{M}{EI}
 \end{aligned}$$

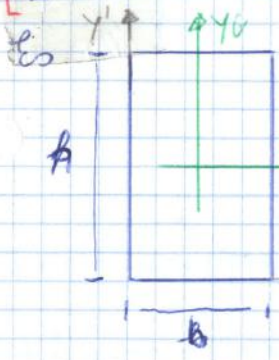
Nota quindi il diagramma di momento, mediante integrazione lungo z è possibile ottenere la funzione spostamento trasversale:

$$\begin{aligned}
 M &= -EIv_{0,xx} \\
 v_{0,x} &= -\frac{M}{EI} \\
 v_0 &= \int \left(-\frac{M}{EI} \right) dz + C \\
 v_0 &= \int \left(\int \left(-\frac{M}{EI} \right) dz + C \right) dz + D
 \end{aligned}$$

Le due costanti vanno poi calcolate in funzione delle condizioni al contorno.

[ESERCIZI STRUTTURE]

(I)



baricentro

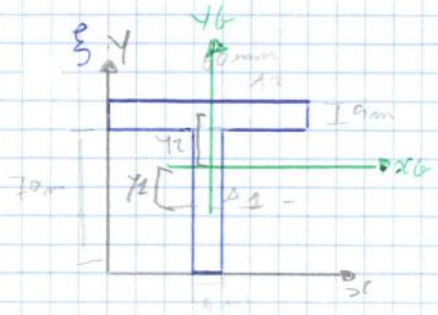
$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum A_i \cdot x_{Gi}}{\sum A_i} & \text{ci dà distanza } x_G \text{ da asse } y' \\ y_G = \frac{\sum A_i \cdot y_{Gi}}{\sum A_i} & \text{ci dà distanza } y_G \text{ da asse } x' \end{cases}$$

Momenta inerziali

$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{vale per sezione rettangolare}$$

$$I_{y_G} = \int_A x^2 dA = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$I_{x_G y_G} = \int_A x \cdot y dA = 0$ in una sez. rettangolare gli assi baricentrici paralleli ai lati sono anche principali



$$x_G = \frac{\sum A_i \cdot x_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot 30 + A_2 \cdot 30}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 70 \cdot 30 + 5 \cdot 60 \cdot 30}{5 \cdot 70 + 5 \cdot 60} = 30 \text{ mm}$$

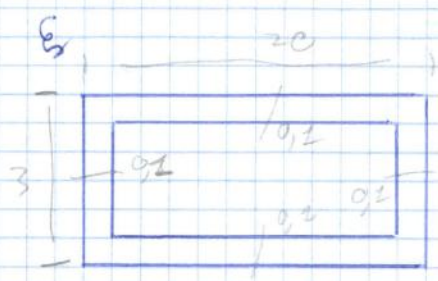
$$y_G = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot 35 + A_2 \cdot 73.5}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 70 \cdot 35 + 5 \cdot 60 \cdot 73.5}{5 \cdot 70 + 5 \cdot 60} = 52.3 \text{ mm}$$

$$I_{x_G} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot y_1^2 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot y_2^2 = \frac{5 \cdot 70^3}{12} + 5 \cdot 70 \cdot (17.3)^2 + \frac{60 \cdot 5^3}{12} + 60 \cdot 9 + 20.2^2 = 37070.9 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_G} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} + A_1 \cdot x_1^2 + \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} + A_2 \cdot x_2^2 = \frac{70 \cdot 5^3}{12} + \frac{5 \cdot 60^3}{12} = 90720 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_G y_G} = I_{x_1 y_1} + d_1 c_1 d_1 y_1 \cdot A_1 + I_{x_2 y_2} + d_2 c_2 d_2 y_2 \cdot A_2 = 0$$

non hanno momento $I_{x_1 y_1}$ proprio i corpi rettangolari se abbiamo sez. con assi di simmetria



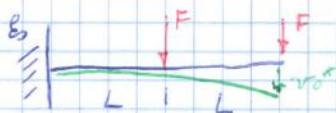
Nel caso di conformazioni di questo tipo possiamo utilizzare in modello approssimato

considerando il fatto che contiamo 2 volte le aree x e per chioma le aree

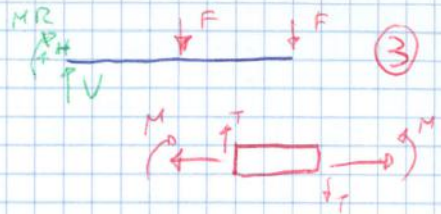
Più la trave è sottile e più risultano in accordo con il risultato (X)

$$I_{x_G} = 2 \cdot \left(\frac{0.1 \cdot 3^3}{12} \right) + 2 \left[\frac{20 \cdot 0.1^3}{12} + 20 \cdot 0.1 \cdot \frac{3^2}{4} \right]$$

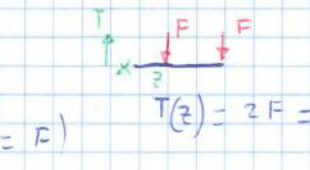
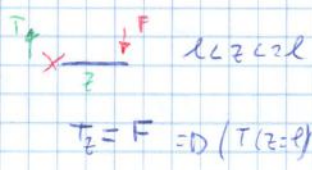
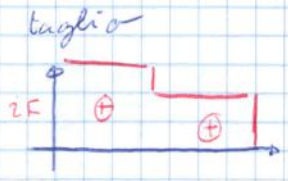
$$(X) \quad I_{x_G y_G} = 0 \quad I_{x_G} = \frac{20 \cdot 3^3}{12} - \frac{19.8 \cdot 3^3}{12} \quad I_{y_G} = \frac{3 \cdot 20^3}{12} - \frac{2.8 \cdot 19.8^3}{12}$$



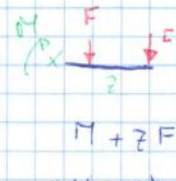
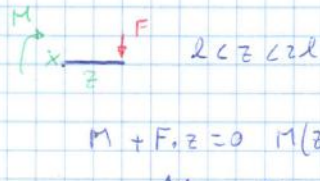
trasferire T, M con linea elastica?



$\rightarrow H = 0$
 $\uparrow) V - 2F = 0 \Rightarrow V = 2F$
 $\circ) MR + F \cdot 2l + F \cdot l = 0 \Rightarrow MR = -3F \cdot l$



$T_z = F \Rightarrow T(z=l) = F$
 $T(z) = 2F \Rightarrow T(2L) = 2F$



$M + F \cdot z = 0 \Rightarrow M(z=0) = 0 \Rightarrow M(z=l) = -Fl$
 $M = -Fz = [2F \cdot l - Fz]$
 $M(z=l) = -Fl \Rightarrow M(z=2L) = -3Fl$
 $[M = -3Fl + 2Fz]$

Unica linea elastica

$v_0, z = -\frac{M}{EI}$

avendo 2 momenti devo spostare in due parti la linea elastica, e come condizioni al contorno metterò che lo spostamento subito nel primo tratto sia uguale a quello del secondo

$l < z < 2l$

$\overline{v_0, z} = \frac{F(2l-z)}{EI}$
 $\overline{v_0, z} = \frac{-F(2l-z)^2}{2} + C$
 $\overline{v_0} = \frac{F}{EI} \frac{(2l-z)^3}{6} + C \cdot z + D$

subisco stessi spostamenti del tratto $0 < z < l$ $z=l \Rightarrow \overline{v_0} \equiv \overline{v_0}$
 $0 < z < l \Rightarrow \overline{v_0, z} \equiv \overline{v_0, z}$

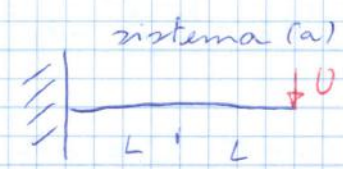
$\overline{v_0, z} = -\frac{(-3Fl + 2Fz)}{EI}$
 $\overline{v_0, z} = -\frac{F}{EI} (-3Lz + \frac{2z^2}{2}) + C$
 $\overline{v_0} = -\frac{F}{EI} (-\frac{3Lz^2}{2} + \frac{2z^3}{6}) + C \cdot z + D$

$z=0 \Rightarrow \overline{v_0} = 0$ spostamento verticale
 $z=0 \Rightarrow \overline{v_0, z} = 0$ tangente nulla

$\overline{v_0} = \frac{F}{EI} (\frac{3}{2}Lz^2 - \frac{z^3}{3})$ $0 < z < l$
 $\overline{v_0} = \frac{F}{EI} (Lz^2 - \frac{z^3}{6}) + \frac{FL^2 \cdot z}{EI \cdot 2} - \frac{FL^3}{6EI}$

da cui $\overline{v_0}(z=2l) = \frac{2L}{6} \frac{FL^3}{EI}$

Proviamo con lavori virtuali
 Sistema (b) quello con le forze reali

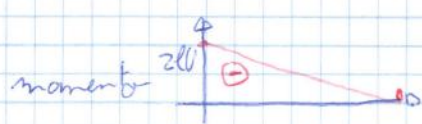


Sistema (a) con forza unitaria nel punto di spostamento

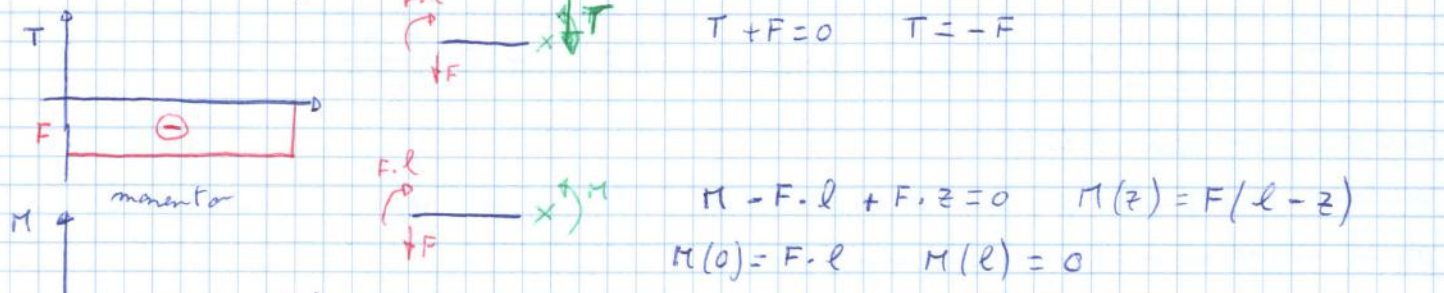
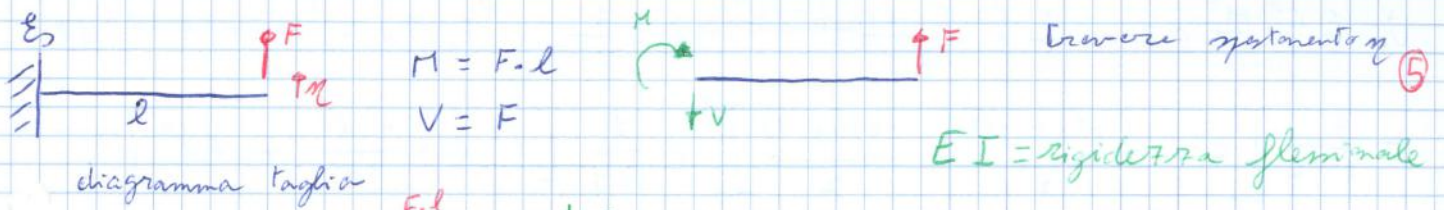
$\uparrow V = U$
 $\uparrow M = 2L \cdot U$



$\uparrow I = U$



$M + 2LU - Uz = 0 \Rightarrow [M = -2LU + Uz]$

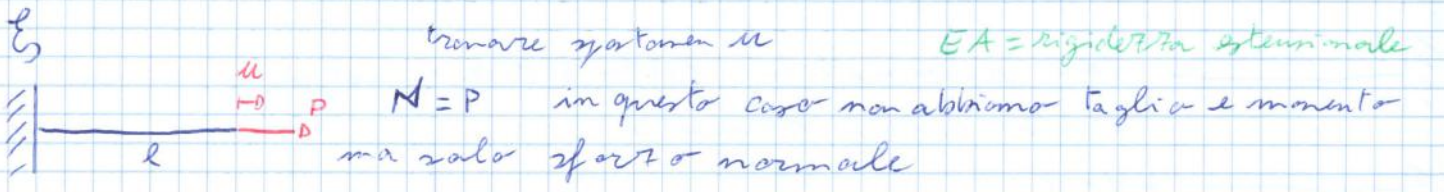


appliciamo teo di Castiglione

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2(l-z)^2}{EI} dz = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI} \int_0^l (l-z)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI} \left[-\frac{(l-z)^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI} \frac{l^3}{3}$$

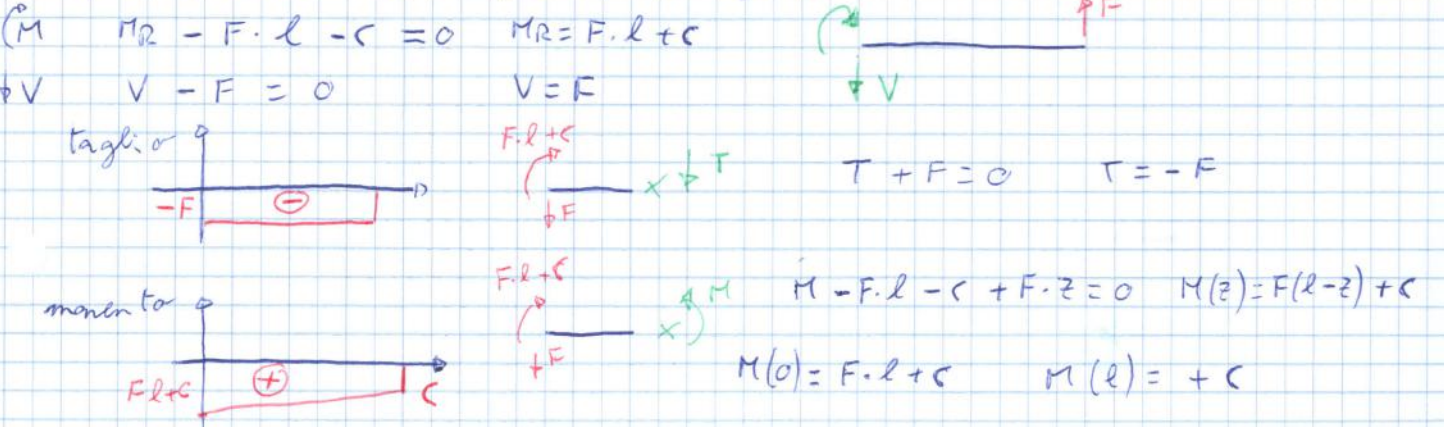
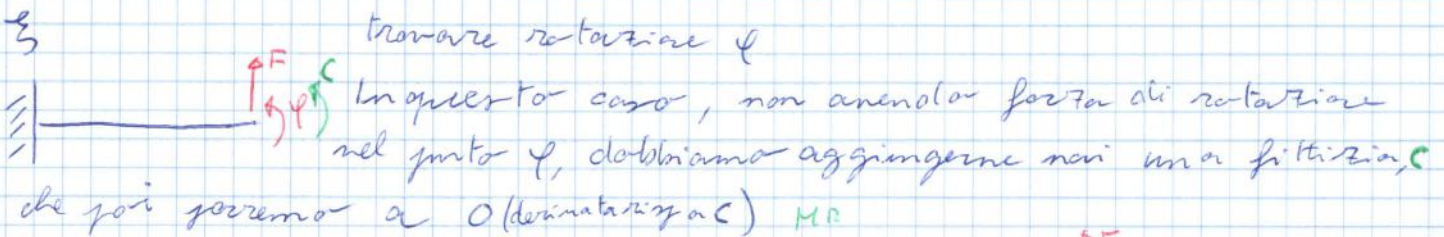
$$\frac{dU}{dF} = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l^3}{3} = \delta$$



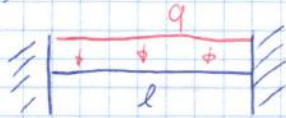
l'energia di deformazione da applicare in questo caso è

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dz = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2}{EA} dz = \frac{1}{2} \left[\frac{P^2}{EA} \cdot z \right]_0^l = \frac{1}{2} \frac{P^2 \cdot l}{EA}$$

$$\frac{dU}{dP} = \frac{P}{EA} \cdot l = u$$

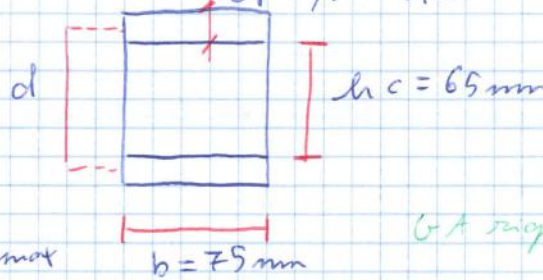


Es



$q = 20 \frac{N}{m}$ $l = 1400 \text{ mm}$

trave sandwich $sf = 2,5 \text{ mm Al}$



$G_c = 700 \text{ MPa}$
 $E_c = 300 \text{ MPa}$
 $E_f = 73000 \text{ MPa}$

(7)

trovare freccia massima f_{max}

GA rigidezza torsionale

$f_{max} = K_B \frac{PL^3}{EI} + K_S \frac{PL}{GA}$ i valori di K_B, K_S e P , vengono presi dalla fotocopia data dal prof

traviamo che

$K_B = \frac{1}{384}$ $K_S = \frac{1}{8}$ $P = q \cdot l = 20 \cdot 1,4 = 28 \text{ N}$ $d = hc + \frac{sf}{2} + \frac{sf}{2} = 67,5 \text{ mm}$

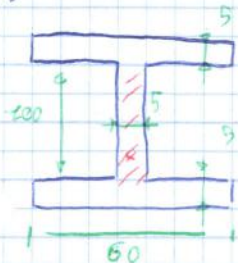
ora dobbiamo trovare valori di EI e GA relativi a trave sandwich

$GA = G_c \frac{b \cdot d^2}{hc} = 700 \cdot \frac{75 \cdot (67,5)^2}{65} = 3680048 \text{ [N]}$

$EI = E_c \frac{bhc^3}{12} + 2E_f \left[\frac{b \cdot sf^3}{12} + b \cdot sf \cdot \frac{d^2}{4} \right] = 300 \cdot \frac{75 \cdot 65^3}{12} + 2 \cdot 73000 \left[\frac{75 \cdot 2,5^3}{12} + 75 \cdot 2,5 \cdot \frac{67,5^2}{4} \right]$
 $= 3,17 \cdot 10^{10} \text{ [N} \cdot \text{mm}^2]$

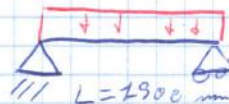
$f_{max} = \frac{1}{384} \left[\frac{28 \cdot 1400^3}{3,17 \cdot 10^{10}} \right] + \frac{1}{8} \left[\frac{28 \cdot 1400}{3680048} \right] = 0,0104 \text{ mm}$

Es



$E = 73000 \text{ MPa}$

$G = \frac{73000}{2,6} = 28000 \text{ MPa}$



$q = 1 \frac{N}{mm}$

$P = q \cdot L = 1900 \text{ N}$

trovare freccia massima f_{max}

$f_{max} = \frac{1}{8} \frac{P \cdot L}{GA} + \frac{5}{384} \frac{PL^3}{EI}$ valori trovati in fotocopia

$GA =$ un'ottima approssimazione per rettangolo $= \frac{G \cdot S_{eff}}{l} = \frac{28000 \cdot 5 \cdot 100}{1,18} = 1,18 \cdot 10^7 \text{ N}$

dove $l = \frac{12 + 11}{10(1 + \nu)} = 1,18$ $\nu = 0,3$ per i metalli

$EI = E \left[\frac{5 \cdot 100^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot 60 \cdot 5 \cdot \frac{100^2}{4} \right] = 1,51 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}^2$

$f_{max} = \frac{1}{8} \frac{1900 \cdot 1900}{1,18 \cdot 10^7} + \frac{5}{384} (1900) \cdot \frac{(1900)^3}{1,51 \cdot 10^{11}} = 0,46 \text{ mm}$

Se G dell'anima ν è molto piccola il termine \otimes non può essere più considerata trascurabile

9

Esercizio

Velivolo Utility (SEMI ACROBATICO)

$b = 11 \text{ m}$ $C_{rcat} = 1,55 \text{ m}$ $C_{Lmax} = 1,407$ $c_{omin} = 0,11$
 $A = 7,1$ $W_{MTO} = 1250 \text{ Kg}$ $C'_{Lw} = 9,2$ $V_{crociera} = 300 \text{ Km/h (2500 m)}$
 $S_m = 17,05 \text{ m}^2$ $W_{FUEL} = 250 \text{ Kg}$ $e = 0,9$

Diagramma di manovra a quota 0 e Diagramma di raffica a quota 0 significa che $V_{EAS} = V_{TAS}$. Tutti i dati che ci occorrono vengono trovati nel Volume 1.

Cerchiamo il fattore di carico massimo n_{max} nel paragrafo 233.337;

Troviamo che per velivoli semiacrobatici $n_{max} = 4,4$ e $n_{min} = 0,4$ $n_{max} = 1,76$

Ora calcoliamo la V_{st} (velocità di stallo)

$$V_{Stallo} = \sqrt{\frac{W_{MTO}}{1/2 \rho_0 S C_{Lmax}}} = \sqrt{\frac{1250}{1/2 \cdot 0,125 \cdot 17,05 \cdot 1,407}} = 28,9 \text{ m/s} = 104 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Pratico con perché stiamo lavorando in Kg

Ora calcoliamo la V_A (velocità di manovra) nel paragrafo 223.335:

$$V_A = V_{Stallo} \cdot \sqrt{n_{max}} = 60,6 \text{ m/s} = 218 \text{ Km/h}$$

La V_C (velocità di crociera) che abbiamo a 2500m, va riportata a quota 0

$$V_{CEAS} = V_{C2500} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{2500}}{\rho_0}} = 300 \cdot \sqrt{\frac{0,0975}{0,125}} = 73,6 \text{ m/s} = 265 \text{ Km/h}$$

La prima trovata sulla tabella aria tip e

Nella ref. 223.335 ci viene detto che la V_C non deve essere inferiore a

$$V_C \geq 27,67 \sqrt{\frac{W(Kg)}{S(m^2)}} = 27,67 \sqrt{\frac{1250}{17,05}} = 237 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \text{ OK}$$

I valori rispettivi del n_{max} e n_{min} vengono trovati nel paragrafo 223.337.

Si legge che $n_{max} = 4,44$ (preso nella ref. 233.337) vale fino alla V_D (velocità di picchiata), mentre $n_{min} = 1,76$ vale fino alla V_C , mentre per la V_D vale $n = -1$. Nel diagramma useremo la V_{Cmin} se non abbiamo la V_C di crociera.

Ora calcoliamo la V_D come

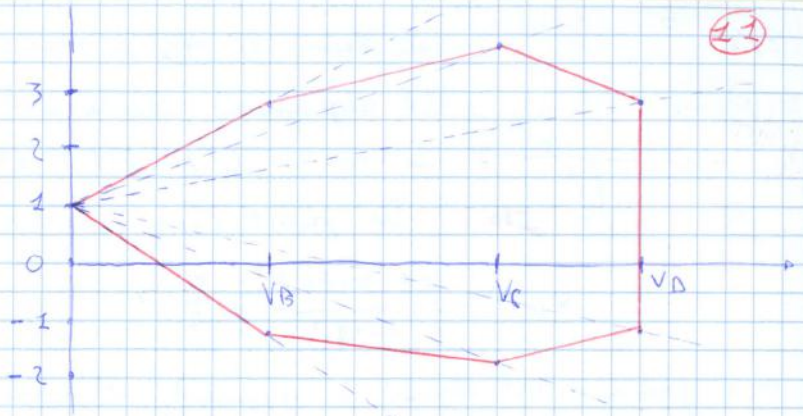
$$V_D = \sqrt{\frac{W}{1/2 \rho_0 S c_{omin}}} = \sqrt{\frac{1250}{0,9 \cdot 0,125 \cdot 17,05 \cdot 0,11}} = 103 \text{ m/s} = 371 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Nella ref. 223.335 ci dice che la V_D dev'essere maggiore di

$$V_D > 1,5 \cdot V_C \text{ il libro è poco chiaro, allora usiamo valore di } V_C \text{ calcolato in precedenza } 237 \text{ Km/h}$$

$$V_D > 1,5 \cdot V_C = 355 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \text{ OK}$$

V	n
$V_B = 45$	3,2
$V_C = 73,9$	3,7
$V_D = 103,3$	2,9
$V_B = 45$	-3,2
$V_C = 73,9$	-1,7
$V_D = 103,3$	-1,2



Se diagramma di raffica è dentro a quello di manovra significa che coincide con diagramma d'impulso di volo.

Ora bisogna trovare carica su ala e su coda



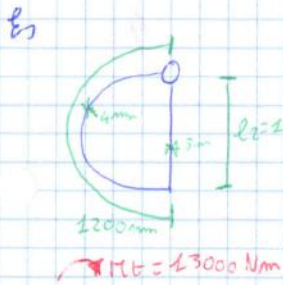
Si come il contributo dell'alettoni è molto piccolo, noi lo trascuriamo, e consideriamo solo contributo ala. Per cui

$$\begin{cases} L_T + L_W = nW \\ C_G M_W - L_W \cdot x_{GT} - L_T (x_{GT} + l_T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_W = nW_{T0} - L_T \\ M_W - x_{GT} nW_{T0} + L_T x_{GT} - L_T x_{GT} - L_T l_T = 0 \\ -L_T l_T = 0 \end{cases}$$

e infine otteniamo

$$\begin{cases} L_T = \frac{M_W - nW_{T0} \cdot x_{GT}}{l_T} & (\text{negativo}) \\ L_W = nW_{T0} - L_T & (\text{maggiore di } W_{T0}) \end{cases}$$

In questo caso la V_B non va calcolata (chiesto al prof)



$R = 60000 \text{ mm}^2$

$G = 40000 \text{ N/mm}^2$

Calcolare q ? τ ? θ ? Uniamo le formule per una cella

Il corrente non dà contributo da cui $q_1 = q_2 = q$



$q_1 \cdot dz - q_2 \cdot dz = 0$

Ora applichiamo prima formula $\left[q = \frac{Mt}{2R} \right] = \frac{13000000}{2 \cdot 60000} = 108 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

E ora applichiamo a ogni sezione

$[q = \tau \cdot s]$

$\tau_1 = \frac{q}{s_1} = 27 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\tau_2 = \frac{q}{s_2} = 36 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

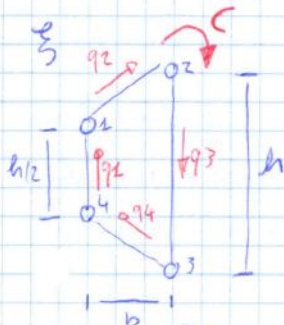
Ora usiamo II formula. $\left[\theta = \frac{q}{2R \cdot G} \int \frac{dl}{s} \right] = \frac{q}{2R \cdot G} \left[\frac{l_1}{s_1} + \frac{l_2}{s_2} \right]$

$= \frac{108}{2 \cdot 60000 \cdot 40000} \cdot \left[\frac{1200}{4} + \frac{150}{3} \right] = 7,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$

Se avessimo $G_1 = 40000 \text{ N/mm}^2$ e $G_2 = 28000 \text{ N/mm}^2$ le τ non cambiano in quanto $q = \text{cost}$; ovvero in cambiamento in quella a rottura cambierà

$\theta = \frac{q}{2R} \int \frac{dl}{G \cdot s} = \frac{q}{2R} \left[\frac{l_1}{G_1 \cdot s_1} + \frac{l_2}{G_2 \cdot s_2} \right] = 8,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$

[Vediamo che più la sezione è grande e più è rigida]



(Per trovare risultante coppia si utilizza regola della mano destra)

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 100 \text{ mm}^2$

$h = 200 \text{ mm}$

Calcolare

$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0,5 \text{ mm}$

$b = 350 \text{ mm}$

q ? τ ? θ

$G = 28000 \text{ N/mm}^2$

$C = 900 \text{ N.m}$

Ricordiamo che i correnti non influenzano e che quindi abbiamo $q = \text{cost}$

$R = (h/2 + h) \cdot b/2$

$q = \frac{Mt}{2R} = \frac{900000}{(h/2 + h) \cdot b} = 8,57 \text{ N/mm}$

$\tau = \frac{q}{s} = 17,14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ abbiamo che $l_2 = l_4 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{h}{4}\right)^2}$

$\theta = \frac{q}{2R \cdot G \cdot s} \left[h + \frac{h}{2} + l_2 + l_4 \right] = 7,076 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$

(15)

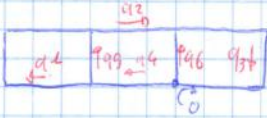
E₅

Per il caso a 2 celle, e come se avessimo 2 flussi circolari



$\circlearrowleft 2R_1 \cdot q_1 + 2R_2 \cdot q_2 = M_T$ poi dobbiamo imporre che abbiamo lo stesso gradiente $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}$. Il flusso q_3 è data da $q_3 = q_2 - q_1$.

Nel caso a N celle avremo N flussi circolatori



$$M_T = 2R_1 \cdot q_1 + 2R_2 \cdot q_2 + 2R_3 \cdot q_3 + 2R_5 \cdot q_5$$

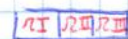
che sarà uguale a dire $M_T = 2R_I q_I + 2R_{II} q_{II} + 2R_{III} q_{III} + \dots$

e come gradiente di torsione $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3$ (per trovare poi $\dot{\theta}$ basterà calcolarlo a una singola cella).

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2R_I \cdot b} \left[\frac{q_1 l_1}{s_1} - \frac{q_5 l_5}{s_5} \right] \quad \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2R_{II} \cdot b} \left[\frac{q_2 l_2}{s_2} + \frac{q_4 l_4}{s_4} - \frac{q_6 l_6}{s_6} + \frac{q_3 l_3}{s_3} \right] \quad \dot{\theta}_3 = \frac{1}{2R_{III} \cdot b} \left[\frac{q_6 l_6}{s_6} + \frac{q_3 l_3}{s_3} \right]$$

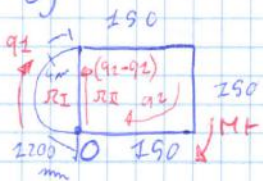
o dare $q_I = q_1 - q_5 \quad q_{II} = q_2 + q_4 - q_6 \quad q_{III} = q_3 + q_6$

Se facciamo la somma di ogni area del corrente otterremo R_I, R_{II}, R_{III} per il polo che abbiamo preso



$$R_I = R_1 - R_5 \\ R_{II} = R_2 + R_4 \\ R_{III} = R_3$$

E₆



$$G = 40000 \text{ N/mm}^2$$

$$S = \text{cost}$$

$$M_T = 13000 \text{ N.m}$$

Calcolare i flussi q_1 e τ e $\dot{\theta}$

$$R_1 = 60000 \text{ mm}^2$$

$$R_2 = 150 \cdot 150 = 22500 \text{ mm}^2$$

Scegliamo come polo O e otteniamo

$$\begin{cases} M_T = 2R_I q_I + 2R_{II} q_{II} \\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2R_I G} \left[\frac{q_I l_1}{s_1} - \frac{(q_{II} - q_I) l_5}{s_5} \right] = \frac{1}{2R_{II} G} \left[(q_{II} - q_I) l_5 + q_{II} \cdot l_2 \right]$$

$$q_I \cdot l_1 - q_{II} \cdot l_5 + q_I l_5 = \frac{R_I}{R_{II}} (q_{II} l_5 - q_I l_5 + q_{II} l_2) \quad \text{da cui}$$

$$q_I = \frac{\left[150 + \frac{60000}{22500} (150 + 450) \right]}{\left[1200 + 150 + \frac{60000}{22500} \cdot 150 \right]} \cdot q_{II} \Rightarrow q_I = q_{II} \quad \text{andando poi a sostituire in } M_T \text{ si ottiene}$$

$$M_T = 13000000 = [2 \cdot 60000 + 2 \cdot 22500] \cdot q_{II}$$

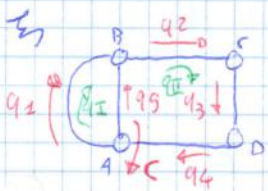
$$q_{II} = \frac{13000000}{2(60000 + 22500)} = 78,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad q_I = 78,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

In questo caso notiamo che il pannello centrale è scarico, e che ai fini del avere una struttura leggera può essere eliminato. Per il $\dot{\theta}$ basta vedere una tra $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2R_I \cdot b} [q_I \cdot l_1 - q_{II} \cdot l_5 + q_I \cdot l_5] = 4,92 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

La τ nel pannello centrale è zero mentre per l_1 e l_2 è uguale

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{q}{s} = 19,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



$S = 0,9 \text{ m}$ $C = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$
 $BC = AD = 300 \text{ mm}$ $G = 28000 \text{ MPa}$
 $AB = CD = 200 \text{ mm}$ Calcolare q, τ, θ ?

17

$2q$ ai nodi $q_1 = q_I$ $q_2 = q_3 = q_4 = q_{II}$ $q_5 = q_{II} - q_I$

Scegliamo come polo A

$$C = 2J_1 q_I + 2J_2 q_{II}$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

$J_1 = \frac{\pi r^2}{2} = 2570706 \text{ mm}^2$ $J_2 = 200 \cdot 300 = 600000 \text{ mm}^2$
 $l_1 = \frac{2\pi r}{2} = 314,16 \text{ mm}$

$$\frac{1}{2J_1 G \cdot S} [q_I \cdot l_1 - (q_{II} - q_I) l_5] = \frac{1}{2J_2 G \cdot S} [q_{II} \cdot l_2 + (q_{II} - q_I) \cdot l_5]$$

$$q_I (\pi \cdot 100) - q_{II} \cdot 200 + q_I \cdot 200 = \frac{J_1}{J_2} [q_{II} \cdot 800 + q_{II} \cdot 200 - q_I \cdot 200]$$

$$q_I = \frac{(\frac{J_1}{J_2} \cdot 800 + \frac{J_1}{J_2} \cdot 200 + 200)}{(\pi \cdot 100 + 200 + \frac{J_1}{J_2} \cdot 200)} \cdot q_{II} \Rightarrow q_I = 0,815 \cdot q_{II}$$

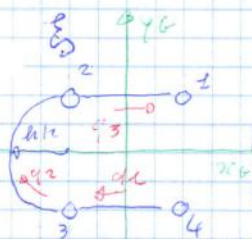
$$C = 2J_1 \cdot 0,815 \cdot q_{II} + 2J_2 \cdot q_{II} \Rightarrow q_{II} = \frac{C}{(2J_1 \cdot 0,815 + 2J_2)} = 686 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$q_I = 5,59 \text{ N/mm}$ $q_5 = 1,27 \text{ N/mm}$

Calcoliamo le τ

$\tau_1 = \frac{q_I}{S} = 11,18 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $\tau_2 = \frac{q_{II}}{S} = 13,72 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $\tau_3 = \frac{q_5}{S} = 2,54 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

E infine θ_1 $\theta_1 = \frac{1}{2J_1 G \cdot S} [q_I \cdot l_1 - q_5 \cdot l_5] = 3,415 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$



Le aree sono tutte uguali; calcolare i flussi q_1, q_2, q_3 ed τ .

Per prima cosa si calcola il baricentro; essendo le aree tutte uguali, il baricentro sarà al centro delle due aree.

Nel caso di sez. aperta, e di taglio, dobbiamo calcolarci:

Contributi dei $\frac{d\sigma_z}{dz}$ dove $\sigma_z = K_0 + K_1 x + K_2 y$, in questo caso

si ha che K_0 e $K_1 = 0$ per cui si ottiene $\left[\frac{d\sigma}{dz} = \frac{T y}{I_x} \right]$

quindi occorre trovare il momento d'inerzia I_x

$I_{xc} = 4 A \left(\frac{h}{2}\right)^2 = A h^2$

riportiamo in tabella i valori dei dP_i che servono

$$dP_i = \frac{T y_i}{I_x} \cdot A_i y_i$$

A _i	A	x	y	dP _i
A ₁	A	h/2	h/2	$\frac{F d^2}{2h}$
A ₂	A	-h/2	h/2	$\frac{F d^2}{2h}$
A ₃	A	-h/2	-h/2	$-\frac{F d^2}{2h}$
A ₄	A	h/2	-h/2	$-\frac{F d^2}{2h}$

ora bisogna fare l'equilibrio ai correnti per trovare i flussi

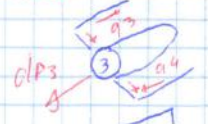
ora facciamo subito eq. di corrente: (6-1 = 5 eq.)



$$q_1 \cdot dz - q_2 \cdot dz - dp_1 = 0 \Rightarrow q_2 = q_1 - \frac{dp_1}{dz}$$



$$q_3 \cdot dz - q_2 \cdot dz + dp_2 = 0 \Rightarrow q_3 = q_2 - \frac{dp_1}{dz} - \frac{dp_2}{dz}$$



$$q_4 \cdot dz + dp_3 - q_3 \cdot dz = 0 \Rightarrow q_4 = q_1 - \frac{dp_1}{dz} - \frac{dp_2}{dz} - \frac{dp_3}{dz}$$



$$q_5 \cdot dz - q_4 \cdot dz + dp_4 = 0 \Rightarrow q_5 = q_1 - \frac{dp_1}{dz} - \frac{dp_2}{dz} - \frac{dp_3}{dz} - \frac{dp_4}{dz}$$



$$q_6 \cdot dz - q_5 \cdot dz + dp_5 = 0 \Rightarrow q_6 = q_1 - \frac{dp_1}{dz} - \frac{dp_2}{dz} - \frac{dp_3}{dz} - \frac{dp_4}{dz} - \frac{dp_5}{dz}$$

Per risolvere sistema di flussi utilizzeremo altra eq. di momento (I form. di Bredt) scegliendo polo 4:

$$F \cdot d = 2 \left(\frac{2a \cdot h}{2} \right) q_1 - 2 \left(\frac{a \cdot h}{2} \right) \cdot q_2 + 2 \left(\frac{a \cdot h}{2} \right) \cdot q_3$$

si può fare anche come forze risultanti; in tal caso

$$F \cdot d = (q_1 \cdot h) \cdot 2a + (q_2 \cdot a) \cdot h + (q_3 \cdot a) \cdot h$$

Sostituiamo i flussi q e otteniamo

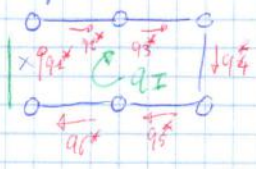
$$F \cdot d = q_1 (2ah + ah + ah) - ah \frac{dp_1}{dz} - \frac{a \cdot h \cdot dp_2}{dz} - \frac{a \cdot h \cdot dp_3}{dz}$$

$$\text{dove otteniamo } q_1 = \frac{F \cdot d + ah \frac{dp_1}{dz} + ah \frac{dp_2}{dz} + ah \frac{dp_3}{dz}}{(2ah + ah + ah)} \text{ che}$$

sostituita risolve il sistema precedente.

Natino che i flussi trovati sono funzione di un solo flusso.

Quindi un modo alternativo di risoluzione è quello di aprire la cella, e calcolarsi i flussi q_i^* , e poi rimpristinareannello con flussi correttivi e utilizzare bredt. Sarà che i dp non cambiano! (stavo qI)



Prima troviamo i flussi $q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*, q_6^*$ aprendo la cella.

Poi applichiamo flusso qI e troviamo i flussi q_1, \dots

$$q_1 = q_1^* + q_I \quad q_4 = q_4^* + q_I$$

$$q_2 = q_2^* + q_I \quad q_5 = q_5^* + q_I$$

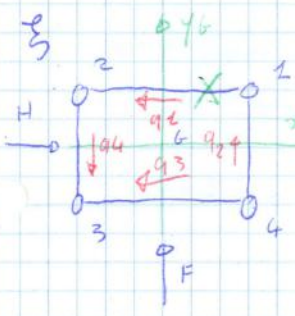
$$q_3 = q_3^* + q_I \quad q_6 = q_6^* + q_I$$

per trovare poi qI usino

I formule di bredt

Per trovare et, imponiamo rotazione nulla $\theta = 0$, e da questa ricaviamo qI, che sostituita in $F \cdot et = 2Jq$ troviamo et.

(22)



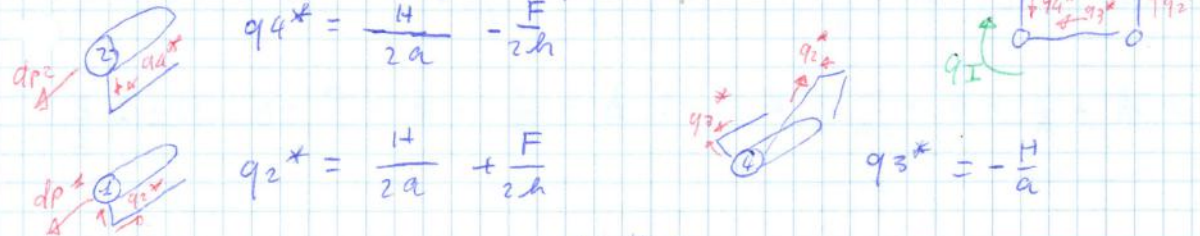
$A_i = A$ trovare q ?
 $S_i = S$ S_i pro come sempre:
 $G_i = G$ S_i trova baricentro (in questa caso è nel centro)
 si trovano i vari momenti d'inerzia
 $I_{xc} = 4 A \frac{h^2}{4} = A h^2$ $I_y = 4 A \frac{a^2}{4} = A a^2$ $I_{x,y}$

Per il dp_i , in questo caso, ricordando che $\sigma_z = K_0 + K_1 x + K_2 y$ diventa
 $d\sigma_z = \frac{dK_1}{I_y} \cdot x_i + \frac{dK_2}{I_x} \cdot y_i = \frac{H dz}{I_y} x_i + \frac{F dz}{I_x} y_i$ da cui

$$[dP_i = \frac{H dz}{I_y} \cdot A \cdot x_i + \frac{F dz}{I_x} \cdot A \cdot y_i]$$
 in questo caso i segni di H e F sono positivi

Ora calcoliamo i dp_i :
 $dp_1 = \left(\frac{H dz}{2a} + \frac{F dz}{2h} \right)$ $dp_2 = -\frac{H dz}{2a} + \frac{F dz}{2h}$ $dp_3 = -\frac{H dz}{2a} - \frac{F dz}{2h}$ $dp_4 = \frac{H dz}{2a} - \frac{F dz}{2h}$

Ora si calcolano i flussi q^* aprendo una cella



Ora ripartiamo il flusso q_I , e troviamo i flussi reali:
 $q_1 = -q_I$ $q_4 = q_4^* - q_I$ $q_3 = q_3^* + q_I$ $q_2 = q_2^* - q_I$

Ora applichiamo i formule di Breda:

$$G \theta = -2 R_1 \cdot q_1 - 2 R_2 \cdot q_2 \cdot h \cdot \frac{a}{2} + q_3 \cdot a \cdot \frac{h}{2} - q_4 a \cdot \frac{h}{2}$$

$$0 = q_I - q_2^* + q_I + q_3^* + q_I - q_4^* + q_I \Rightarrow q_I = \frac{q_2^* - q_3^* + q_4^*}{4}$$

da cui otteniamo $q_I = \frac{H}{2a}$ $q_1 = -\frac{H}{2a}$; $q_2 = \frac{F}{2h}$; $q_3 = -\frac{H}{2a}$; $q_4 = -\frac{F}{2h}$

Per verificare calcoli, facciamo le simultanti:

$$1) q_2 h - q_4 h = +\frac{F}{2} + \frac{F}{2} = 0$$

$$\rightarrow -q_1 \cdot a - q_3 \cdot a = H$$

Ora, visto che le forze zero applicate nel et, troveremo che il θ sarà uguale a zero; verificiamo

$$\theta = \frac{1}{2 R G \cdot S} (-q_1 \cdot a - q_2 \cdot h + q_3 \cdot a - q_4 \cdot h)$$

$$= \frac{1}{2 R G \cdot S} \left[\frac{H}{2} - \frac{F}{2} - \frac{H}{2} + \frac{F}{2} \right] = 0$$

Le forze applicate nel et non generano torsione

80

(23)

$n = nA = 3$ $SW = 589,3 \text{ ft}^2 (50,5 \text{ m}^2)$, $AR = 11,1$ $\lambda = 0$; $Q = 166,2 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$
 $\lambda = \frac{C_{tip}}{C_{root}} = \frac{1,325}{1,49} = 0,89$; $t/c = 0,18$; $Nz = 4,5$; $w_{to} = 40000 \text{ lb}$; $w_{fuel} = 4000 \text{ lb}$
 $w_{motore} = 800 \text{ lb}$; $b = 80 \text{ ft} (\approx 24,5 \text{ m})$; $c_{mo} = -0,1$; $x_{gc} = 9,5 \text{ m} (\approx 31,1 \text{ ft})$

$lT = 11,56 \text{ m}$; $\bar{c} = 7,37 \text{ ft}$ (corda media) ; $V = 45 \text{ m/s}$ (ipotizzata)

Disegnare diagramma stima della portanza $z_{ft} = 0,304$
 Calcoliamo $MW = \frac{1}{2} \rho_a V^2 \cdot SW \cdot c_{mo} \cdot \bar{c} = -14030 \text{ Nm}$ $z_{lb} = 0,45 \text{ kg}$

Ricordando poi che

Semiala $b/2$

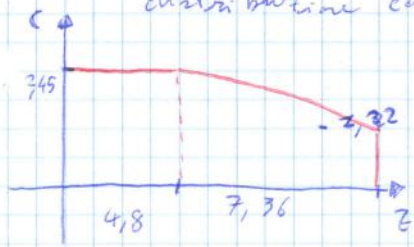
$$L_T = \frac{MW - \frac{1}{2} w_{to} \cdot c_{mo}}{lT} = -24000 \text{ N}$$

ora studiamo distrib.

$$L_W = n w_{to} - L_T = 593740 \text{ N}$$

portanza su ala

distribuzione corda



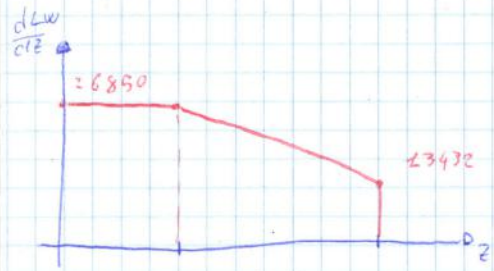
Per la distribuzione della portanza, utilizziamo la semplice relazione $\left[\frac{dLW}{dz} = \frac{LW}{SW} \cdot c(z) \right]^*$

Quindi cerchiamo analizzato LW al variare di $c(z)$ e otteniamo:

$c(0) = 7,45 \Rightarrow \frac{dLW}{dz} = 26850 \text{ N/m}$
 $c(b/2) = 1,32 \Rightarrow \frac{dLW}{dz} = 13432 \text{ N/m}$

$\int_0^{b/2} \frac{dLW}{dz} = \frac{LW}{z}$

Come verifica, calcolando le aree del grafico bisogna trovare tale risultato



Cerchiamo ora carico su ala w_w ; esso viene approssimato da pesi discreti nella stessa categoria. Nel nostro caso

$$w_w = 0,036 \left(\frac{SW}{b} \right)^{0,758} \cdot w_{fuel}^{0,035} \cdot \left(\frac{AR}{\cos \lambda} \right)^{0,6} \cdot Q^{0,006} \cdot \lambda^{0,04} \cdot \left(\frac{100 \cdot t/c}{\cos \lambda} \right)^{-0,3} \cdot (Nz \cdot w_{to})^{0,49}$$

il risultato ci viene dato in libbre

$$w_w = 0,036 (546,4)^{0,758} \cdot (4000)^{0,035} \cdot (11,1)^{0,6} \cdot (166,2)^{0,006} \cdot (0,5)^{0,04} \cdot (18)^{-0,3} \cdot (4,5 \cdot 40000)^{0,49}$$

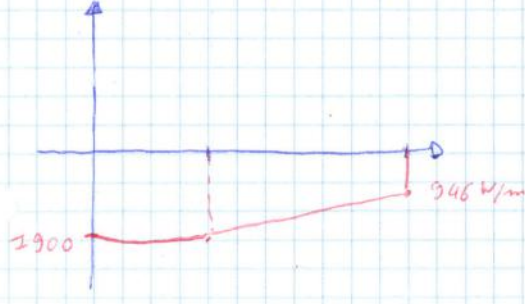
$$= 20,58 \text{ lb} = 0,13055 \text{ N}$$

ora lo distribuiamo come per la portanza

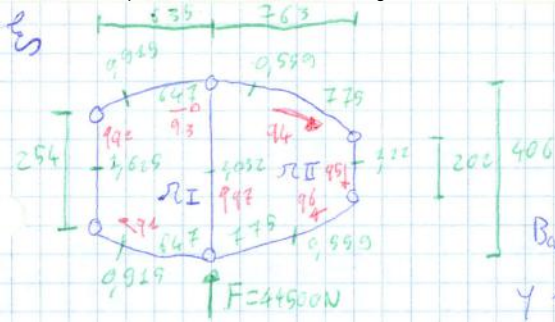
Non considereremo zero semplice, ma il peso inerziale complessivo. $(n \cdot w_w)$

Utilizziamo stessa formula al primo

$$\frac{dnw_w}{dz} = \frac{nw_w}{SW} \cdot c(z)$$



$c(0) = 7,45$ $\frac{dnw_w}{dz} = 1900 \text{ N/m}$
 $c(b/2) = 1,32$ $\frac{dnw_w}{dz} = 946 \text{ N/m}$



$$A_1 = A_6 = 1290 \text{ mm}^2$$

$$J_{I1} = 232000 \text{ mm}^4$$

25

$$A_2 = A_5 = 1936 \text{ mm}^2$$

$$J_{I2} = 258000 \text{ mm}^4$$

$$A_3 = A_4 = 645 \text{ mm}^2$$

$q_i?$ $\tau_i?$

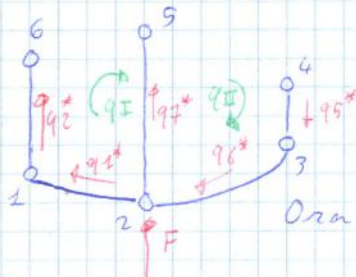
Baricentro sarà a metà per l'asse x ; dell'asse y non ci interessa, in quanto avendo già un'asse di simmetria x area I_x $y=0$.

$$I_x = \sum A_i y_i^2 = 2A_1 \cdot 127^2 + 2A_2 \cdot 203^2 + 2A_3 \cdot 102^2 = 2,14 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Calcoliamo ora i dP_i

y_i	A_i	$dP_i = \frac{F \cdot dZ}{I_x} y_i \cdot A_i$
127	1290	-34,07 dZ
203	1936	-81,72 dZ
202	645	-13,55 dZ
102	645	13,55 dZ
203	1936	81,72 dZ
127	1290	34,07 dZ

Dopo di che apriamo le 2 celle che abbiamo e ci calcoliamo i flussi q_i^*



Con questa configurazione

attenzione che $q_3^* = 0$ e $q_4^* = 0$

Ora calcoliamo gli altri

$$q_2^* \cdot dZ = dP_6 \Rightarrow q_2^* = 34,07 \frac{N}{\text{mm}}$$

$$q_7^* \cdot dZ = dP_5 \Rightarrow q_7^* = 81,72 \frac{N}{\text{mm}}$$

$$q_5^* \cdot dZ = -dP_4 \Rightarrow q_5^* = -13,55 \frac{N}{\text{mm}}$$

$$dP_1 + q_2^* \cdot dZ - q_1^* \cdot dZ = 0 \Rightarrow q_1^* = 0 \frac{N}{\text{mm}}$$

$$dP_3 + q_6^* \cdot dZ - q_5^* \cdot dZ = 0 \Rightarrow q_6^* = 0 \frac{N}{\text{mm}}$$

Ora applichiamo flussi correttivi q_I e q_{II} che ripristinano la continuità superficiale e ci calcoliamo i flussi q_i

$$q_3 = q_3^* + q_I \quad q_2 = q_2^* + q_I \quad q_1 = q_1^* + q_I \quad q_4 = q_4^* + q_{II}$$

$$q_5 = q_5^* + q_{II} \quad q_6 = q_6^* + q_{II} \quad q_7 = q_7^* + q_{II} - q_I$$

Ora applichiamo I formule di Breda, e la condizione di uguale deformità (delle due celle)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_{II} \\ 0 = \sum z_i J_i \cdot q_i \end{cases}$$

Per le aree spaziate attenzione

$$J_{I1} = \frac{J_{II} - \left(\frac{406+254}{2}\right) \cdot 635}{2}$$

$$J_{I2} = \frac{254 \cdot 635}{2}$$

$$J_{I3} = \frac{406 \cdot 635}{2} + J_{I2}$$

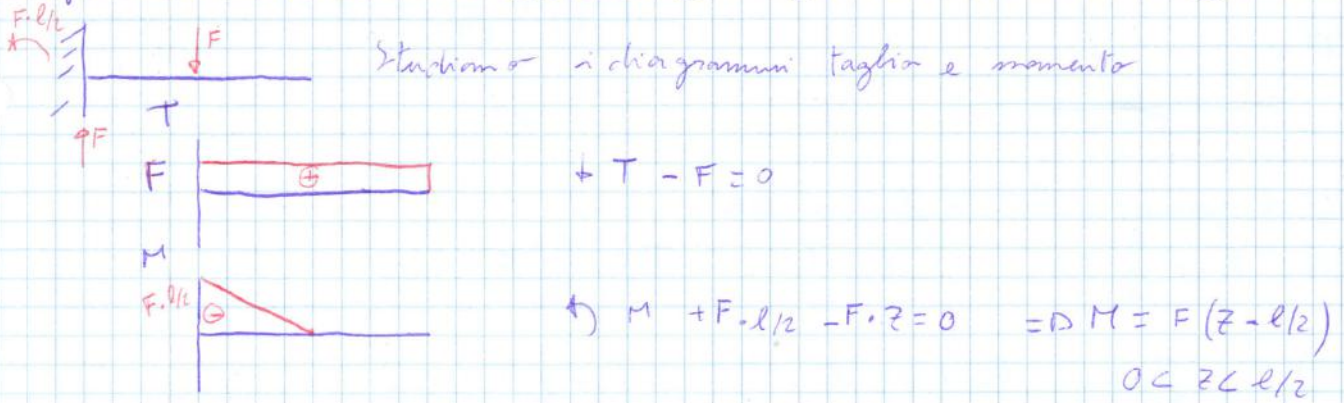
$$J_{I6} = \frac{J_{II} - \left(\frac{406+202}{2}\right) \cdot 763}{2}$$

$$J_{I4} = \frac{406 \cdot 763}{2} + J_{I6}$$

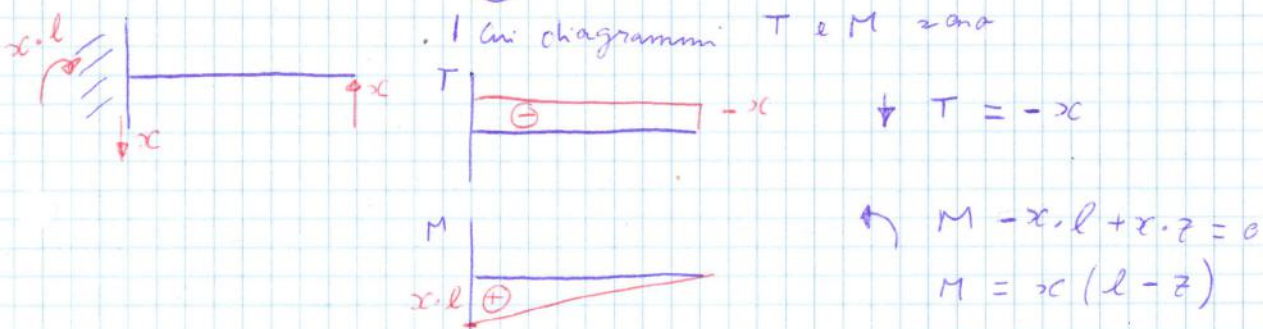
$$J_{I5} = \frac{202 \cdot 763}{2}$$

Ora studiamo diagrammi taglio e momento del sistema (b).
 Per far ciò studiamo i sistemi (1) e (2). Vediamo sistema (1).

(27)



Vediamo ora sistema (2)



È ora sommando i diagrammi dei due sistemi si ottiene l'eq di momento:

$$M^{(b)} = F(z - l/2) + x(l - z) \quad 0 \leq z \leq l/2 \quad M^{(b)} = x(l - z) \quad l/2 \leq z \leq l$$

Ora applicando PLV si avrebbe $\int \frac{M^{(a)} \cdot M^{(b)}}{EI} dz = w_{01}$ ma visto che lo spostamento deve essere nullo, per via del vincolo, si ottiene $\int \frac{M^{(a)} M^{(b)}}{EI} dz = 0$ che ci permette di trovare la forza incognita x (Se avessimo avuto 2 incognite avremmo dovuto trovare un'altro sistema (b) e sistema (a) per trovare l'incognita y).

Applicando \times otteniamo

$$\int_0^{l/2} (l - z) (F(z - l/2) + x(l - z)) dz + \int_{l/2}^l (l - z) \cdot x(l - z) dz$$

dove

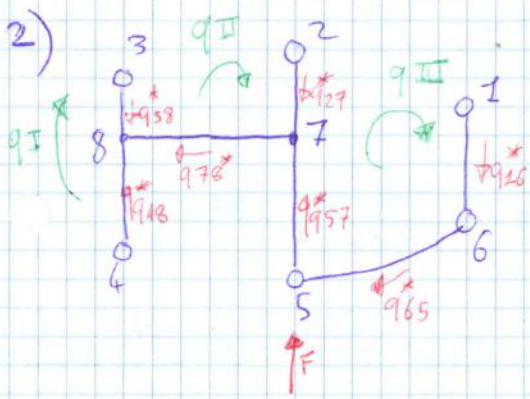
$$\int_0^{l/2} F(l \cdot z - \frac{l}{2} - z^2 + l \cdot z/2) + (l - z)^2 dz = \left[F \frac{3}{2} l \frac{z^2}{2} - \frac{F l^2}{2} \cdot z - \frac{F z^3}{3} - \frac{x(l - z)^3}{3} \right]_0^{l/2}$$

$$= F \frac{3}{16} l^3 - F \frac{l^3}{4} - \frac{F l^3}{24} - x \frac{l^3}{24} + \frac{x}{3} l^3$$

$$\int_{l/2}^l x(l - z)^2 dz = \left[-x \frac{(l - z)^3}{3} \right]_{l/2}^l = + \frac{x}{24} l^3 \text{ e sommandoli si ottiene}$$

$$F \cdot \frac{3}{16} l^3 - F \frac{l^3}{4} - \frac{F l^3}{24} - x \frac{l^3}{24} + \frac{x}{3} l^3 + \frac{x}{24} l^3 = 0 \text{ otteniamo}$$

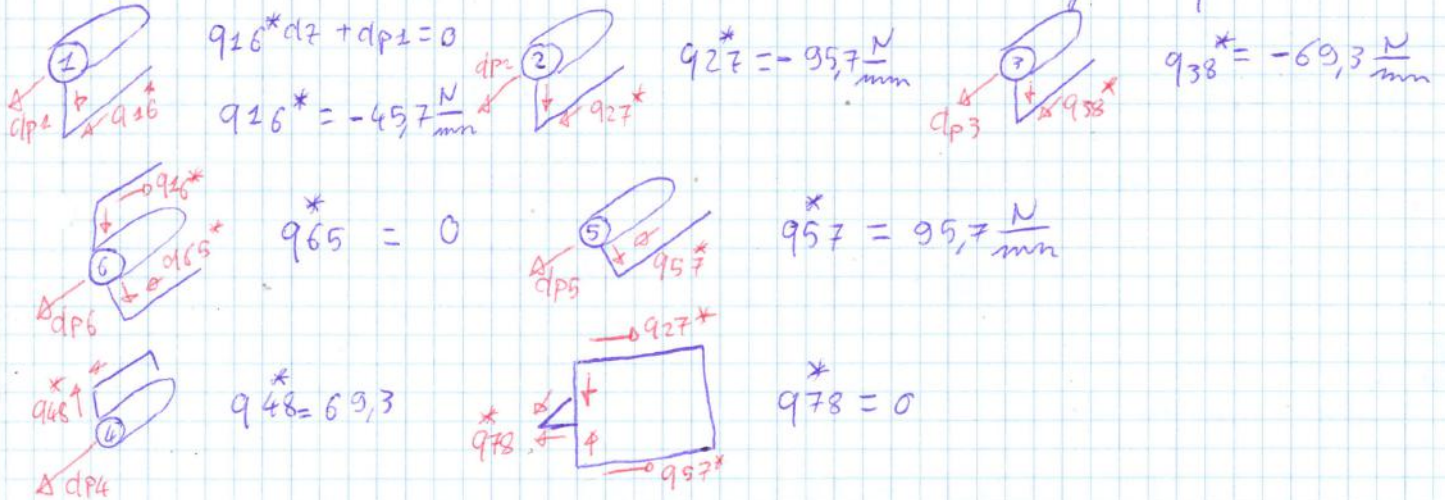
$$\left[x = \frac{5}{16} \cdot F \right] \text{ che sostituito nelle eq di momento ci permette di trovare i diagrammi M e T}$$



Per prima cosa calcoliamo i dpi di ogni corrente come $dpi = \frac{F \cdot d^2}{I_x} \cdot \gamma_i \cdot A_i$ (29)

Corrente	γ_i	A_i	dpi
1-165	2580		45,7 dz
2-230	3880		99,7 dz
3-200	3230		69,3 dz
4-200	3230		-69,3 dz
5-230	3880		-99,7 dz
6-165	2580		-45,7 dz

Poi apriamo le 3 celle che abbiamo e ci calcoliamo i flussi q_i^*



Da qui applichiamo i flussi corretti q_I, q_{II}, q_{III} che rispettano la continuità superficiale e ci calcoliamo i flussi q_i

$$\begin{aligned}
 q_{43} &= q_I & q_{32} &= q_{II} & q_{21} &= q_{III} & q_{16} &= q_{16}^* + q_{III} & q_{65} &= q_{III} \\
 q_{57} &= q_{57}^* + q_{III} & q_{27} &= q_{27}^* - q_{III} + q_{II} & q_{38} &= q_{38}^* - q_{III} + q_I \\
 q_{48} &= q_{48}^* - q_I & q_{78} &= q_{II}
 \end{aligned}$$

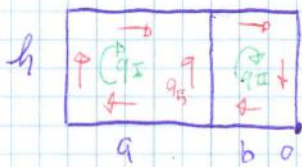
Adesso applichiamo la formula di Bredt, e la condizione di uguale deformata $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ e altre

$$\begin{aligned}
 0 &= 2 \rho_{43} \cdot q_{43} + 2 \rho_{32} \cdot q_{32} + 2 \rho_{21} \cdot q_{21} + 2 \rho_{16} \cdot q_{16} + 2 \rho_{65} \cdot q_{65} \\
 &\quad + 2 \rho_{48} \cdot q_{48} - 2 \rho_{38} \cdot q_{38} - 2 \rho_{78} \cdot q_{78}
 \end{aligned}$$

le cui aree sono

$$\begin{aligned}
 \rho_{43} &= \rho_{I7} \frac{400 \cdot 1270}{2} & \rho_{32} &= \frac{460 \cdot 1270}{2} \cdot \rho^* \\
 \rho_{21} &= \rho^{**} + \frac{460 \cdot 1020}{2} & \rho_{65} &= \rho^{**} & \rho_{38} &= \frac{190 \cdot 1270}{2} \\
 \rho_{16} &= \frac{330 \cdot 1020}{2} & \rho_{48} &= \frac{250 \cdot 1290}{2} & \rho_{78} &= \frac{1270 \cdot 220}{2}
 \end{aligned}$$

Es



Calcolare q_i

$q_3 = q_{II} - q_I$ (+quelli con lo stesso verso, - quelli di verso opposto)

Scegliamo come polo O e applichiamo i principi di Bresse

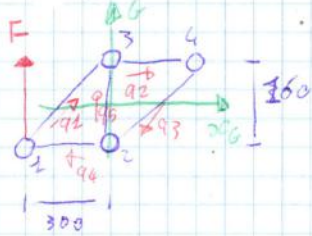
$$\begin{cases} M_0 = 2q_I \left(h \cdot \frac{a}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \right) + 2q_{II} \frac{b \cdot h}{2} + 2(q_{II} - q_I) \frac{a \cdot h}{2} \\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 \Rightarrow \frac{1}{2 \pi I_{G-x}} \left[q_I (a + a + h) - (q_{II} - q_I) \cdot h \right] = \frac{1}{2 \pi I_{G-y}} \left[q_{II} (2b + h) + (q_{II} - q_I) \cdot h \right] \end{cases}$$

da quest'ultima ricaviamo q_I

$$q_I = \frac{\left[\frac{I_{II}}{I_I} (2b + 2h) + h \right]}{(2a + 2h) + \frac{I_I}{I_{II}} \cdot h} \cdot q_{II}$$

che sostituita in (2) ci permette di trovarci il flusso q_I e q_{II} e infine q_3 .

Es



$A_1 = A_2 = 200 \text{ mm}^2$
 $s = 1 \text{ mm}$
 $G = 28000 \text{ MPa}$
 $F = 10000 \text{ N}$

Per prima cosa ci calcoliamo il baricentro

$$x_G = \frac{(A_2 + A_3) \cdot 300 + A_4 \cdot 600}{4 \cdot A} = 300$$

$$y_G = \frac{2A \cdot 160}{4A} = 80$$

Essendo tutte le aree uguali il baricentro cade al centro delle aree.

Ora calcoliamoci i momenti d'inerzia

$$I_{xc} = \sum A_i \cdot y_i^2 = A \cdot (-80)^2 + 4 \cdot (-80)^2 + A \cdot (80)^2 + A \cdot (80)^2 = 5,12 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yc} = \sum A_i \cdot x_i^2 = A \cdot (300)^2 + A \cdot (-300)^2 = 36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \sum A_i \cdot x_i \cdot y_i = A \cdot (-80) \cdot (-300) + (80) \cdot (300) = 9,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

La formula completa del $d\sigma_i$

$$d\sigma_i = \frac{dM_x \cdot I_{xx} - dM_{xc} \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot x_i + \frac{dM_{xc} \cdot I_y - dM_y \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot y_i$$

dove $dM_{xc} = F \cdot \phi$ e $dM_y = H \cdot \phi$

In questo caso $dM_y = 0$, per cui otteniamo

$$d\sigma_i = \left(- \frac{F \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot x_i + \frac{F \cdot I_y}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot y_i \right) \cdot A_i$$

che per ogni corrente vale $0,000520833$ e $0,001953125$

$d\sigma_1 = -0,93 \text{ N/mm}$

$d\sigma_3 = 31,25 \text{ N/mm}$

$d\sigma_2 = -31,25 \text{ N/mm}$

$d\sigma_4 = 31,25 \text{ N/mm}$

Es [Arte comprene]

Per le arte comprene la P_{cr} è data come $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2}$
 Se normaliamo la $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{A L^2}$

(33)

Ad dove L varia a seconda di cosa dobbiamo come vincolo, se cerniere sferiche, cilindriche ecc.

La σ_{cr} si può risolvere come $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot P_{min}}{L^2}$ dove P_{min} è il raggio d'inerzia. Definiamo poi la snellezza come

$\lambda = \frac{L}{\rho}$ a seconda della snellezza che abbiamo possiamo capire se possiamo usare l'approssimazione euleriana o meno.

In grafico



Come si vede per $\lambda \rightarrow 0$ $\sigma_{cr} \rightarrow \infty$, e ciò è ingiustificato; per questo motivo si taglia il diagramma a una sigma limite σ_P , che riguarda il limite di proporzionalità elastica.

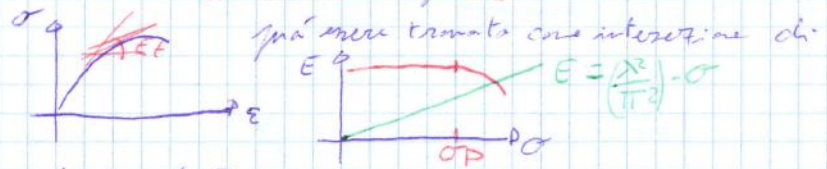
Il valore di λ , superato il quale, non vale più σ_{cr} euleriana perché abbiamo superato comportamento vale

$\lambda' = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}$ e si chiama snellezza limite.

Se $\lambda < \lambda'$ non vale euler.
 Se $\lambda > \lambda'$ vale euler.

Se siamo in tratti corte, si sostituisce formula euleriana con un'altro approccio di modifca E . Si chiama metodo tangente

$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t}{\lambda^2}$ dove



Oppure si può usare la parabola di Janson data come

$\sigma = \sigma_s - \frac{\sigma_s^2}{4 \pi^2 E} \cdot \lambda^2$ dove σ_s è la sigma di smernanta

In pratica si parte da un punto di $\lambda = 0$ e si ricollega l'iperbole di euler con la parabola.

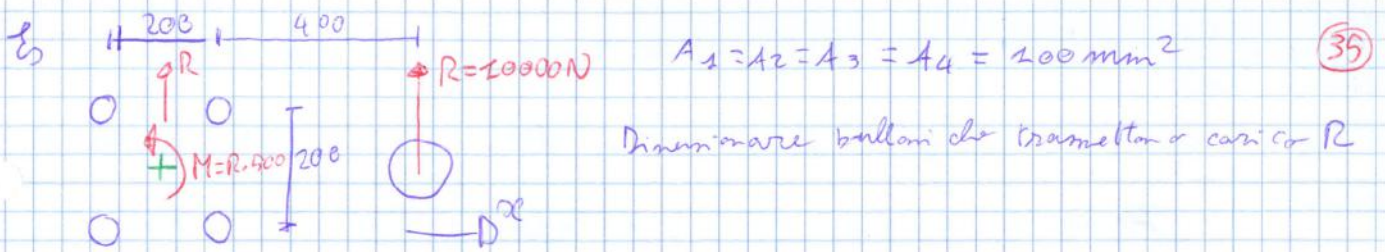


Per l'instabilità torzionale

$\sigma_c = \frac{G J_T}{I_P} + \frac{\pi^2 E I}{L^2 I_P}$

per l'instabilità locale

$\sigma_{crl} = \frac{\sigma_s}{1 + k_B \frac{\sigma_s}{E}}$



Per prima cosa conviene calcolarsi il baricentro, per capire dove si applicheranno la forza R più la sua risultante. In questo caso, essendo aree uguali, cadrà in mezzo. Il momento di trasporto sarà dato dalla forza $M = d \cdot R$. Per trovare la risultante nelle sezioni, consideriamo prima il solo contributo di R .

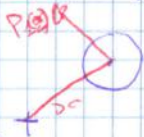
Con R abbiamo che:

$$\left[\tau_{mi} = \frac{R}{\sum A_i} \right] \text{ dal quale poi otteniamo } \left[P_i^{(2)} = \tau_{mi} \cdot A_i \right]$$

Coni troviamo tutte le componenti verticali. Nel caso di componenti orizzontali opereranno alla stessa maniera.

Ora consideriamo il solo contributo di M :

Ogni sezione subirà una rotazione. Prendiamo raggio che parte dal baricentro e arriva fino al centro di una sezione, e da lì facciamo partire la componente verticale del momento, perpendicolare a tale asse.



Perpendicolarità di questa componente $P_i^{(2)}$, la scomponiamo nelle sue componenti x e y .

Per prima cosa troviamo la componente $\left[P_i^{(2)} = \frac{M \cdot r_i}{J_p} A_i \right]$ dove J_p è data

$$\left[J_p = \sum_i A_i \cdot r_i^2 \right] \text{ con } r_i = \rho_i$$



Per esempio:

Si ha che $P_{\pm 90} = -P_{\pm 270}$ con α e $P_{\pm 45} = P_{\pm 135} \cos 45$

Per trovare α $\sin \alpha = \frac{y_i}{r_i}$ $\cos \alpha = \frac{x_i}{r_i}$ e otteniamo

$P_{\pm 90} = -6250$ $P_{\pm 45} = 6250$

Riportando in tabella

$P_i^{(2)}$	$P_{i \pm 90}$	$P_{i \pm 45}$	$P_{i(x)tot}$	$P_{i(y)tot}$	risultati P
1 2500	-6250	6250	-6250	8750	10750
2 2500	-6250	-6250	-6250	-3750	7289
3 2500	6250	-6250	+6250	-3750	7289
4 2500	6250	6250	6250	8750	10750

Ora abbiamo trovato tutti i carichi, possiamo calcolarci la τ_{media} in ogni sezione

zonta l'angolo per il troncamento

$$\left[\sigma_{\text{CRITICA}} = K E \left(\frac{h}{b} \right)^2 \right] \quad \left[\text{dove } K = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

Ricordiamo che

$$\left[P_{CR} = S \cdot b \left(K E \left(\frac{S}{b} \right)^2 \right) \right] \quad \text{e se dividiamo per } b \text{ troviamo}$$

$$\left[N_{CR} = S \cdot K \cdot E \left(\frac{S}{b} \right)^2 \right] \quad \text{e se ancora dividiamo per la sezione } S$$

$$\left[\sigma_{CR} = K \cdot E \left(\frac{S}{b} \right)^2 \right] \quad \text{Per il parametro } K: \text{ si calcola, oppure si cerca in tabella; elemento calcolatore il rapporto } a/b, \text{ trovare la condizione in cui si trovano, e poi interpolare la curva}$$

Es

$a = 800 \text{ mm}$

$b = 400 \text{ mm}$

$h = 2 \text{ mm}$

$E = 73000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\nu = 0,3$

4 appoggi

calcolare la σ_{CR} ?

Per prima cosa ci occorre calcolare il rapporto a/b (con b ~~il~~ estremo in cui insiste carico, e a lato libero) e si ottiene $\frac{a}{b} = 2$

Ora andiamo a cercare il valore di K sul grafico, e otteniamo

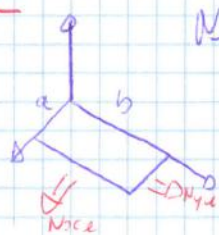
$K = 3,62$. Sul grafico la formula data è

$$\left[N_{CR} = S \cdot E \cdot K \left(\frac{S}{b} \right)^2 \right] = 13,213 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \text{ per trovare la } \sigma_{CR}$$

basterà dividere per la sezione e otteniamo

$$\left[\sigma_{CR} = \frac{N_{CR}}{S} \right] = 6,606 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

COMPRESSIONE BIASSIALE



Nel caso biassiale si ha $N_{xc} \neq 0$ $N_{yc} \neq 0$ $N_{xcyc} = 0$

con $N_{xe} = -N_{xc}$ e $N_{ye} = -N_{yc}$

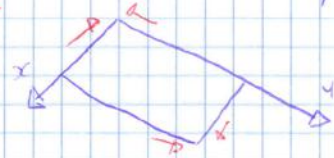
con stesso ragionamento si ottiene

$$\left[\bar{N}_{xc} \text{ critico} = \frac{D \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right)}{\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \lambda \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)} \right]$$

dove $\lambda \geq 0$ viene nel caso biassiale

$$\lambda = \frac{\bar{N}_{yc}}{\bar{N}_{xc}}$$

Pannelli isotropi soggetti a taglio



Leq di equilibrio reale

$$\bar{M}_{xx,xx} + 2\bar{M}_{xy,xy} + \bar{M}_{yy,yy} + 2N_{xy} \epsilon \cdot \bar{w}_{,xy} = 0$$

La τ critica invece reale

$$\tau_{CR} = \bar{K} \cdot E \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

in questo caso b è il lato minore

Per la \bar{K} c'è l'apparato grafico (in libro); trovando $\frac{a}{b}$, interpelliamo il grafico e troviamo il corrispondente valore di \bar{K}

- Se facciamo in campo tangenziale, si ha che (nel caso di $\tau_{zall} < \tau_{critica}$)

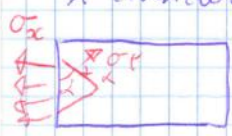
$$\begin{cases} \sigma_t = 2 \tau_{zall} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \tau = \tau_{zall} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

che nel caso di $\alpha = 45^\circ$ diventa

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \tau_{zall} & \sigma_{sc} &= 0 \\ \sigma_c &= \tau_{zall} & \sigma_y &= 0 \end{aligned}$$

- Se facciamo in campo diagonale completo ($\tau_{zall} \gg \tau_{critica}$)

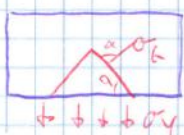
si considera σ_c uguale a 0 e si fanno due componenti σ_x e σ_y



con equilibrio \uparrow) $\sigma_t \cdot s \cdot \pm \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \tau_{zall} \cdot 1 \cdot s = 0$

\rightarrow) $\sigma_c \cdot s \cdot \pm \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sigma_{sc} \cdot 1 \cdot s = 0$

$$\left[\sigma_{sc} = \tau_{zall} \cdot \tan \alpha \right] \text{ che con } \alpha = 45^\circ \quad \sigma_{sc} = \tau_{zall}$$



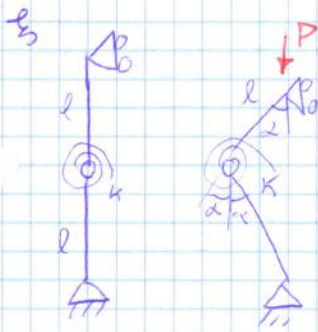
\uparrow) $-\sigma_y \cdot 1 \cdot s + \sigma_t \cdot s \cdot \pm \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$

\rightarrow) $\sigma_t \cdot s \cdot \pm \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \tau_{zall} \cdot 1 \cdot s = 0$

$$\left[\sigma_y = \tau_{zall} \cdot \tan \alpha \right] \text{ che con } \alpha = 45^\circ \quad \sigma_y = \tau_{zall}$$

- Se infine facciamo nel campo diagonale incompleto si fanno sovrapposizioni degli effetti dei primi due casi.

	TANGENZIALE	DIAG. COMPLETO	DIAG. INTERMEDIO
σ_t	τ_{zall}	$2\tau_{zall}$	$\tau_{crit} + 2\Delta\tau$
σ_c	τ_{zall}	0	τ_{crit}
σ_x	0	τ_{zall}	$\Delta\tau$
σ_y	0	τ_{zall}	$\Delta\tau$
σ_t	τ_{crit}	che diventa $2\Delta\tau$	$\tau_{CR} + 2\Delta\tau$
σ_c	τ_{crit}	0	τ_{CR}
σ_x	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$
σ_y	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$



Studiare la stabilità del sistema.

(41)

L'abbanzato che misisce la struttura è data da $V = 2l - 2l \cos \alpha$ mentre l'energia di deformazione della molla è data da $V = \frac{1}{2} k (2\alpha)^2$ mentre dell'inta $V = -P(2l - 2l \cos \alpha)$ da cui

$$\pi = \frac{1}{2} k (\alpha \cdot 2)^2 - P(2l - 2l \cos \alpha)$$

Per trovare le condizioni di equilibrio, bisogna porre $\delta \pi = 0$

$$\delta \pi = k \cdot 4\alpha - 2Pl \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow 4k\alpha - 2Pl \cdot \sin \alpha = 0$$

e si trova $\alpha = 0 \quad P = \frac{2k\alpha}{l \sin \alpha}$

Per capire se la struttura è stabile, bisogna trovare quando $\delta^2 \pi > 0$ per le 2 condizioni trovate

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta \alpha} = 4k - 2Pl \cos \alpha > 0$$

Vediamo per $\alpha = 0$

$$4k > 2Pl \Rightarrow P < \frac{2k}{l} \text{ quindi la struttura è stabile}$$

per $P < \frac{2k}{l}$.

Per verificare se punto trovato è stabile, lo sostituisco nella $\delta^2 \pi$ e vediamo se è > 0 .

$$4k - 2l \frac{2k}{l} = 0 \quad \left(1 - \frac{2}{2} \right) > 0 \text{ sempre stabile}$$

Si come non sappiamo che segno abbiano

facciamo derivata $\delta^3 \pi > 0$

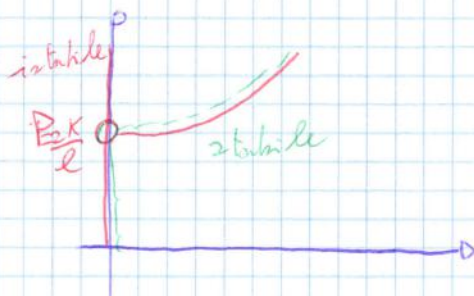
$$\delta^3 \pi = 2Pl \sin \alpha > 0 \quad \text{con } \alpha = 0 \quad \delta^3 \pi = 0 \text{ facciamo derivata questa}$$

$$\delta^4 \pi = 2Pl \cos \alpha > 0 \quad \text{con } \alpha = 0 \quad \delta^4 \pi > 0 \text{ per cui il punto è stabile}$$

Vediamo ora per $\frac{2k}{l} < P < \frac{2k}{l}$

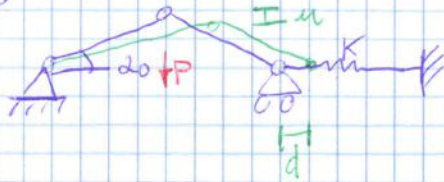
$$4k - 4 \frac{k\alpha}{l \sin \alpha} > 0 \text{ è sempre maggiore di zero}$$

Il diagramma della stabilità diventa



E₅

43



Studiammo la stabilità

$$d = 2l \cos \alpha - 2l \cos \alpha_0$$

$$u = l \sin \alpha - l \sin \alpha_0$$

L'energia interna della molla è data da $V = \frac{1}{2} k(d)^2$ mentre quella della struttura da $V = -P(l \sin \alpha - l \sin \alpha_0)$

$$\Pi = \frac{1}{2} k (2l \cos \alpha - 2l \cos \alpha_0)^2 - P(l \sin \alpha - l \sin \alpha_0)$$

Studiamo le condizioni di equilibrio ponendo $\delta \Pi = 0$

$$\delta \Pi = k 4l^2 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) (-\sin \alpha) + P l \cos \alpha = 0$$

che è pari a zero quando

$$P = \frac{4kl^2}{l \cos \alpha} (\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha)$$

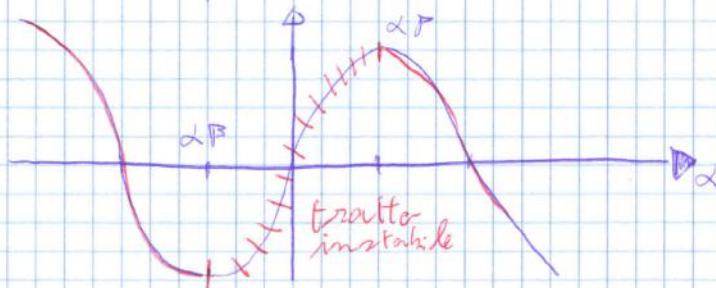
Per studiare la stabilità si pone $\delta^2 \Pi > 0$, per cui

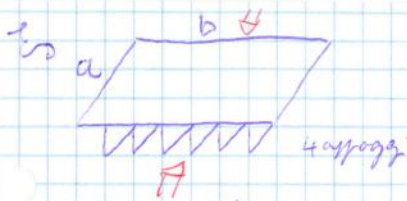
$$\delta^2 \Pi = \cancel{k 4l^2 (\sin^2 \alpha)} + \cancel{k 4l^2 \cos \alpha_0 \cos \alpha} + 4k l^2 \cos \alpha (-\cos \alpha + \cos \alpha_0) - 4k l^2 \sin \alpha (-\sin \alpha) - P l \sin \alpha$$

da cui

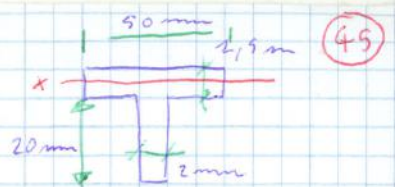
$$4k l^2 (-\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha_0 + \sin^2 \alpha) - P l \sin \alpha = 0$$

Da cui deduciamo che per $\cos^2 \alpha = \cos \alpha_0 = 1 \Rightarrow \alpha \equiv \alpha_0$





$a = 800 \text{ mm}$ $E_{al} = 73000 \text{ MPa}$
 $b = 600 \text{ mm}$ $\nu = 0,3$
 $n = 10 \text{ mm}$ $P = \frac{b}{n} = 50 \text{ mm}$



Trovare N_{CRIT} in direzione dei correnti per due metri.

- EULERIANO

Prima dobbiamo calcolare I_{xc} rispetto ad asse baricentrica, il baricentro male (rispetto a x)

$$y^* = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{20 \cdot 2 \cdot (10 + 0,75)}{20 \cdot 2 + 50 \cdot 1,5} = 3,74 \text{ mm dal quale si trae}$$

$$I_{xc} = \frac{50 \cdot 1,5^3}{12} + (50 \cdot 1,5) \cdot 3,74^2 + \frac{2 \cdot 20^3}{12} + (2 \cdot 20) \cdot 7,02^2 = 4362,1 \text{ mm}^4$$

con il quale si può calcolare EI^*

$$EI^* = \frac{EI_x}{P} = 6,37 \cdot 10^6$$

Dal quale infine possiamo calcolare $N_{xCR} = \frac{\pi^2 (E \cdot I^*)}{l^2} = 98,2 \frac{N}{\text{mm}}$ dove $l = a$ in quanto gli estremi sono appoggiati.

- RIGIDENZE DISTRIBUITE

Dobbiamo calcolare le D del gannello ortotropo equivalente, date come

$$D_{11} = \frac{EI_{xc}}{P} = 6,37 \cdot 10^6 \quad D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D_{SKIN} = \frac{73000 \cdot 1,5^3}{12(1-0,3^2)} = 22561$$

$$D_{12} = \nu \cdot D_{SKIN} = 6768,3 \quad D_{66} = D_{SKIN} \frac{(1-\nu)}{2} = 7896,39$$

$$D_0 = D_{12} + 2D_{66} = 22561 = D_{SKIN}$$

Trovati tutti i valori ora applichiamo N_{xCRIT} della lamina ortotropo

$$N_{xCRIT} = \frac{K_0 \cdot \sqrt{D_{11} \cdot D_{22}}}{P h^2} + \frac{C \pi^2 \cdot D_0}{b^2}$$

dove m —————
 cui agisce carico

Per trovare K_0 calcoliamo prima $\left[\frac{a}{b} \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \right)^{1/4} \right] = 0,39$ e poi andiamo a interrogare in grafico, e troviamo:

$K_0 = 63$ e $C = 2$

per cui otteniamo

$$N_{xCRIT} = 97,3 \frac{N}{\text{mm}}$$

$$D \left(\frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} - q_0 = ER \quad \text{Sarà uguale} \quad (47)$$

a un residuo perché Galerkin utilizza un'approssimazione, e per eliminare tale residuo devo moltiplicare ogni singolo termine per la funzione semplificatrice, e ottengo

$$A_{11} \cdot D \left(\frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy - \int_0^a \int_0^b q_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$$

sostituito $\frac{ab}{4}$
(per le tabelle integrali)
 $-q_0 \frac{4ab}{\pi^2}$

E ricavando A_{11} si ottiene

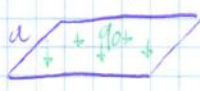
$$A_{11} = \frac{q_0 \frac{4ab}{\pi^2}}{D \left(\frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) \frac{ab}{4}} = \frac{q_0 \cdot 16 \cdot a^4 \cdot b^4}{D \pi^6 (a^2 + b^2)^2}$$

che sostituito in

$$W = A_{11} \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$$

permette di ricavare la freccia del pannello soggetto a carico distribuito

Es



$q_0 = 10^{-3} \frac{N}{mm^2}$
 $a = 400 \text{ mm}$
 $b = 600 \text{ mm}$

$S = 7 \text{ mm}$
 $\nu = 0,3$
 $E = 75000 \text{ MPa}$

$W_{max}?$

Data la funzione $W = A_{11} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$ se ci viene detto di fermarci al primo termine utilizziamo la formula di cui sopra

$$A_{11} = \frac{q_0 \cdot 16 \cdot a^4 \cdot b^4}{D \pi^6 (a^2 + b^2)^2} = 3,82 \quad \text{con } D = \frac{E S^3}{12(1-\nu^2)} = 53480$$

Se invece ci viene detto di svilupparla, bisogna a 2, si ottiene

$$W = A_{11} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) + A_{12} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right) + A_{21} \dots + A_{22}$$

E per ogni costante A si deve applicare la \otimes .

Infine se avessimo un carico pari a $q_0 = 10^{-3} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$, dovremmo sostituire in \otimes e così otterremo una \otimes chiusa, in questo caso

$$A_{11} = \frac{10^{-3} \frac{ab}{4}}{D \left(\frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) \frac{ab}{4}}$$

che poi si sostituisce in \otimes e risolviamo l'esercizio