NUMERO : 131

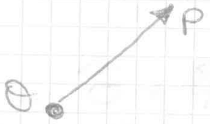
DATA : 05/09/2011

APPUNTI

STUDENTE : Zeroual Youssef

MATERIA : Geometria, Teoria + Esercizi
Prof. Carlini

VETTORI APLICATI



sono caratterizzati da una freccia, direzione, ecc..

DEF: $\vec{OP}$ vettore applicato è caratterizzato da:

- punto di applicazione
- direzione
- verso in cui percorre la retta
- modulo del versore o identità $|\vec{OP}| = ||\vec{OP}||$ lunghezza

OSS. modulo nullo ⟶ vettore nullo $\vec{0}$

$|\vec{0}| = 0$ no direzione e verso

DEF: se $|\vec{OP}| = 1$ → allora $\vec{OP}$ è un versore.

Operazioni tra vettore:

I) PRODOTTO PER SCALARE:

scalare = numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice scalare

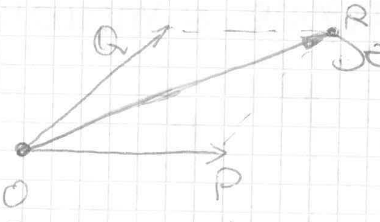
DEF: Dato $\vec{OP}$ e lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $\lambda \vec{OP}$ è tale che:

- Ha lo stesso punto di applicazione di $\vec{OP}$
- Ha la stessa direzione di $\vec{OP}$
- Stesso verso di $\vec{OP}$ se $\lambda > 0$
  verso opposto se $\lambda < 0$
- $|\lambda \vec{OP}| = |\lambda||\vec{OP}|$

OSS. $\lambda = 0$ $0 \cdot \vec{OP} = \vec{0}$

II) SOMMA TRA VETTORI

Vettori che hanno lo stesso punto di applicazione:



DEF. Dato $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$

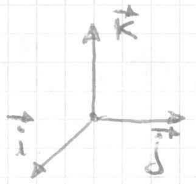
$$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$$

R è il vertice opposto ad O del parallelogramma di lati $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$

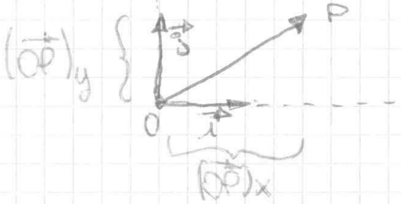
Regola del parallelogramma

VERSORI:

$\vec{i}$ versore asse x
$\vec{j}$ versore asse y
$\vec{k}$ versore asse z.



piano



$$(\vec{OP})_x\,\vec{i} + (\vec{OP})_y \cdot \vec{j} = \vec{OP}$$

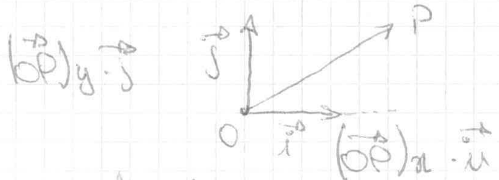
$$(\vec{OP})_x\,\vec{i} + (\vec{OP})_y \cdot \vec{j} + (\vec{OP})_z \cdot k = \vec{OP}$$

Teorema: Ogni vettore nel piano o nello spazio è univocamente determinato dalle sue componenti rispetto al sistema fissato

Dimostrazione: (nel piano)

Da provare

I) dato $\vec{OP}$ devo trovare $(\vec{OP})_x$ e $(\vec{OP})_y$.



II) Le componenti sono uniche:

$$\vec{OP} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = (\vec{OP})_x\vec{i} + (\vec{OP})_y\,\vec{j}$$

Da trovare $\alpha = (\vec{OP})_x$
$\beta = (\vec{OP})_y$

$$+(-1)(\vec{OP})_x\vec{i}\ \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \cancel{(\vec{OP})_x\vec{i}} + (\vec{OP})_y\vec{j} + \cancel{(-1)(\vec{OP})_x\vec{i}}$$

$$\vec{0} + \alpha\vec{i} + (-1)(\vec{OP})_x = (\vec{OP})_y\vec{j} + (-1)\beta\vec{j} + \vec{0}$$

$$(\alpha - (\vec{OP})_x)\,\vec{i} = ((\vec{OP})_y - \beta)\cdot\vec{j} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} x = (\vec{OP})_x \\ y = (\vec{OP})_y \end{cases}$$

$(\vec{OR})_x = (\vec{OP})_x + (\vec{OQ})_x$

la somma di due vettori nel piano o nello spazio ha come componente la somma dei componenti lungo l'asse.

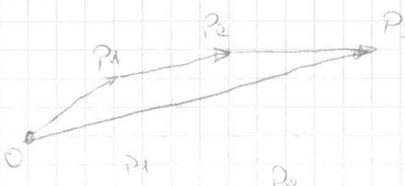
Teorema: la somma di due vettori è associativa.

Dimostra: $(\vec{OP} + \vec{OQ}) + \vec{OR} = \vec{OP} + (\vec{OQ} + \vec{OR})$

$(\vec{OP} + \vec{OQ}) + \vec{OR} \quad \left[\vec{i} ((OP)_x + \vec{OQ}_x) + ((\vec{OP})_y + (\vec{OQ})_y) \vec{j} \right] + ((\vec{OR})_x + (\vec{OR})_y) \vec{i}$

$\vec{i} \left((\vec{OP})_x + (\vec{OQ})_x + (\vec{OR})_x \right) + i \left((\vec{OP})_y + (\vec{OQ})_y + (\vec{OR})_y \right)$

Somma (testa <-> coda)



$\vec{OP_1} + \vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} = \vec{OP_3}$

$\vec{OP_1} + \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} = \vec{OP_1} + \vec{u}$

Vettori liberi

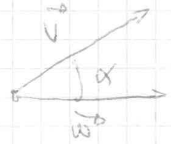
Definizione: $\vec{v}$ vettore libero rappresenta tutti i vettori applicati che hanno il modulo, la direzione ed il verso di $\vec{v}$

Somma, con parallelogramma

Prodotto per scalare: come per applicati.

Prodotto scalare: nel piano e nello spazio.

Definizione: dati vettori $\vec{v}$ $\vec{w}$, il prodotto scalare di $\vec{w}$ e $\vec{v}$ è $\vec{w} \cdot \vec{v} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$



Proprietà:

1) $\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ simmetria
2) $\vec{w} \cdot \vec{w} = |\vec{w}| \, |\vec{w}| \cos 0 = |\vec{w}|^2 \geq 0$ POSITIVITÀ
3) $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{w} = \vec{0}$
4) $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ con $\vec{w} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$

Proposizione:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

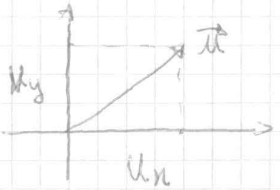
$$\vec{v}\ \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + u_z u_z$$

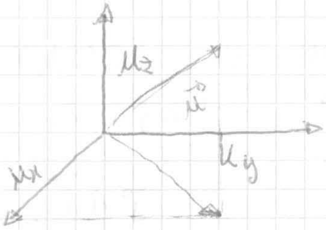
OSS: $\vec{u}\ \vec{u} = |\vec{u}|^2$

$$= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

Nel piano:

$$|\vec{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2$$





Esempio: Applicazione; calcolare l'angolo tra

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{i}$$

$$\vec{u}\ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3}$$

$$|\vec{v}| = 1$$

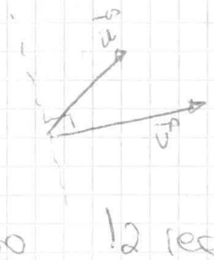
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Prodotto vettoriale: nello spazio:

Definizione: dati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vettori nello spazio, il prodotto vettoriale di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è $\vec{u} \wedge \vec{v}$ $\quad \vec{u} \times \vec{v}$

è il vettore di modulo $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin\alpha$

direzione la comune perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$



Verso la regola della mano destra.

$\vec{u}$ si sovrappone a $\vec{u}$ percorrendo l'angolo + piccolo

Proprietà:

1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ il prodotto è antisimmetrica

Proposizione:

$A = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{z}$

$B = \vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{z}$ $\quad A = -B$

$A = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{z} \cdot \vec{u} = \vec{z} \wedge \vec{u} \cdot \vec{v}$

$B = \vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{z} \cdot \vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{v} \cdot \vec{u}$

Teorema: il prodotto vettore è lineare

- $(\lambda \vec{v}) \wedge \vec{u} = \lambda (\vec{v} \wedge \vec{u})$
- $(\vec{v} + \vec{u}) \wedge \vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{z} + \vec{u} \wedge \vec{z}$

Dimostrazione:

$\vec{a} = (\vec{v} + \vec{u}) \wedge \vec{z}$ $\quad$ da provare $\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{b} = \vec{v} \wedge \vec{z} + \vec{u} \wedge \vec{z}$

proveremo che $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \quad \forall \vec{c} \Rightarrow$

$\vec{a}\vec{c} - \vec{b}\vec{c} =$

$\vec{a}\,\vec{c} = (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{z} \cdot \vec{c} = \vec{z} \wedge \vec{c} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{z} \wedge \vec{c} \cdot \vec{v} + \vec{z} \wedge \vec{c} \cdot \vec{u}$

$= \vec{c} \wedge \vec{v} \cdot \vec{z} + \vec{c} \wedge \vec{u}\, \vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{z} \cdot \vec{c} + \vec{u} \wedge \vec{z}\, \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{v} \wedge \vec{z} \cdot \vec{c} + \vec{u} \wedge \vec{z} \cdot \vec{c}$

$\vec{b}\,\vec{c} = \vec{v} \wedge \vec{z}\ \vec{c} + \vec{u} \wedge \vec{z} \cdot \vec{c}$

Es: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} \qquad \vec{u} \wedge \vec{v}$?

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \wedge \vec{v} = \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{v}}_{\vec{k}} + \underbrace{\vec{j} \wedge \vec{v}}_{-2\vec{k}} + \vec{k} \wedge \vec{v}$

$\vec{i} \wedge \vec{v} = \vec{i} \wedge (2\vec{i} - \vec{j}) = \vec{i} \wedge 2\vec{i} - \vec{i} \wedge \vec{j}$

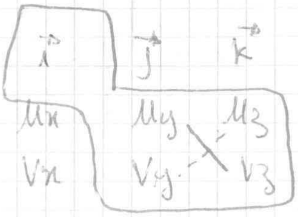
$= 2\,\vec{i} \wedge \vec{i} - \vec{i} \wedge \vec{j}$

$= 0 - \vec{k}$

$\vec{j} \wedge \vec{v} = 2\,\vec{j} \wedge \vec{i} = -2\vec{k}$

$\vec{k} \wedge \vec{v} = 2\vec{k} \wedge \vec{i} - \vec{k} \wedge \vec{j}$

$= 2\vec{j} + \vec{i} = 2\vec{j} + \vec{i}$



$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

Teorema: formula $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$(u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \wedge (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) =$

$\vec{i}\,(u_y v_z - u_z \cdot v_y)$

Es: la matrice nulla.

$0 = (a_{ij})$ dove $a_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i, j$.

Es: A 1×1 un elemento

$A = (a)$

A 1×2 $\Rightarrow (a_{11} \; a_{12})$ vettore riga.

A 2×1 $\Rightarrow (a_{11} \; a_{21})$ vettore colonna.

Definizione: $\mathbb{R}^{n,m} = \{$ matrici $n \times m$ a coefficienti reali $\}$

$= \{ A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} , \; a_{ij} \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^{n,m} =$

Definizione: A $n \times m$ si dice quadrata (matrice) se $n = m$

Se $n \neq m$ si dice matrice rettangolare.

Oss: $\vec{v}$ vettore libero nel piano, fissato un sistema di riferimento $\vec{i}$ e $\vec{j}$

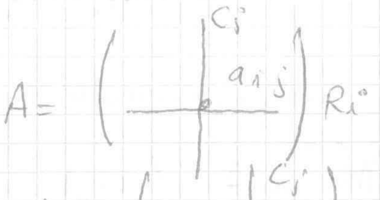
$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$

$\vec{v} \longleftrightarrow (v_x, v_y) \Rightarrow \in \mathbb{R}^{1,2}$

$\lambda \vec{v} \longleftrightarrow (\lambda v_x, \lambda v_y)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

OPERAZIONI SULLE MATRICI



1) prodotto per scalare:

$\lambda \in \mathbb{K}$

$(a_{ij}) = A \in \mathbb{K}^{n,m}$

$\lambda A = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$

2) Somma:

$A + B = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$

$A = (a_{ij})$
$B = (b_{ij})$ $\in \mathbb{K}^{n,m}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 11+11 & 1(-1)+1(-1) \\ 11+1(1) & 11+1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 11+(-1)(1) & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS: AB e BA sono matrici diverse → di solito ⇒ ∄ proprietà commutativa nelle matrici.

OSS: se $AB = 0$ ⇒ matrice nulla. NON È DETTO CHE $A = 0 \vee B = 0$.

Nelle matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.

Proprietà

- Associativa: $(AB)C = A(BC)$
- Distributività: $A(B+C) = AB + AC$.
  $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

OSS: (matrice nulla)

$A \in \mathbb{K}^{n,m}$ $\qquad O \in \mathbb{K}^{p,m}$

$OA \in \mathbb{K}^{p,m} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = 0$

Esiste una matrice X: $XA = A$

- $A \in \mathbb{K}^{1,m}$ $\qquad X \in \mathbb{K}^{1,1}$
  $XA = A$ $\qquad X = 1$
  $(x)(a_1 \dots a_n) = (a_1 \dots a_n)$
- $A \in \mathbb{K}^{2,2}$ $\qquad X \in \mathbb{K}^{2,2}$

matrice identica 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3x3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Definizione: Matrice identica $n \times m$ è la matrice $n \times n$ $I = (a_{ij})$ dove $a_{ii} = 1$ $\quad a_{ij} = 0$ $i \neq j$

Proposizione: $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ $\qquad I_n \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\qquad I_m \in \mathbb{K}^{m,m}$

$\Rightarrow IA = A \qquad AI = A$

Forma matriciale :

n equazioni
m incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{\cancel{m}1}x_1 + \dots \dots + a_{\cancel{m}m}x_m = b_{\cancel{m}\,n} \end{cases}$$

$AX = B$

Matrice dei coefficienti :

$$\underset{n \times m}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrice incognite : Matrice termini noti :

$$\underset{m \times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \underset{n \times 1}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Forma matriciale del sistema : $AX = b$. $\underset{n \times m}{A}\ \underset{m \times 1}{X} = \underset{n \times 1}{b}$

Definizione : sistema quadrato se $n = m$

numero eq = numero incognite A quadrata.

Definizione : se $b = 0$ sistema omogeneo.

Es: $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\quad \vec{w} \perp \vec{v}$?

$\vec{w} = (x, y, z)$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \qquad x(1) + y(1) + z(1) = 0$

$= \quad x + y + z = 0$

$x = 1 \quad y = (-1) \quad z = (0)$

$x = -y - z$

$\vec{w} = x + y + z \implies (-y - z)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad y, z \in \mathbb{R}$

Es: $A = (1, 2 . 3) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

AB BA
AC CA
BC CB.

$$AB = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + 2 + 3) = (6)$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{simmetrica}$$

Es. A 1×1

$A = (0)$ infatti ${}^t(x) = (x) = -(x)$.

A 2×2 antisimmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

${}^tA = -A$.

$$\begin{cases} a = -a \\ d = -d \\ c = -b \\ b = -c \end{cases} \qquad \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} \qquad \overset{{}^tA}{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}} \qquad a_{ii} = -a_{ii}$$

Morale: A antisimmetrica $\Rightarrow$ la diagonale di A è nulla.

Es: A simmetrica e antisimmestria. $\Rightarrow$ $A = 0$

Proposizione: 1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

2) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Dimostrazione: 1)

2) $$\underset{n \times m}{A} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \qquad \underset{m \times p}{B} = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n \times p}{AB} = \begin{pmatrix} R_1C_1 & \cdots & R_1C_p \\ \vdots & R_iC_j & \vdots \\ R_nC_1 & & R_nC_p \end{pmatrix}$$

$$\underset{p \times n}{{}^tAB} = \begin{pmatrix} R_nC_1 & \cdots & R_nC_1 \\ R_1C_p & & R_nC_p \end{pmatrix} \qquad {}^t(C_1)\ {}^t(R_1) = {}^t(R_1C_1)$$

$$\underset{p \times m}{{}^tB} = \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \\ {}^tC_p \end{pmatrix} \qquad \underset{m \times n}{{}^tA} = \begin{pmatrix} {}^tR_1 & \cdots & {}^tR_n \end{pmatrix}$$

$${}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} {}^tC_1 \cdot {}^tR_1 \end{pmatrix}$$

Righe

1) Scambio $R_i \to R_j$
2) moltiplicazione $R_i \to \lambda R_i$
3) combinazione lineare $R_i \to R_i + \lambda R_j$

Colonne:

1) scambio
2) moltiplicazione
3) Comb lineare

$R_1 \to R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to 2R_1$ $$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_3$ $$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_3$ $$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

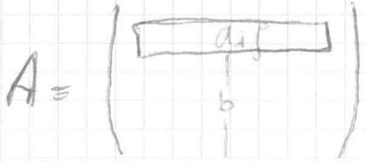
$R_3 \to R_3 - 4R_2$ $$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{22} \end{pmatrix}$$ ridotta.

(algoritmo di riduzione Gaussiana)

Data A $n \times m$ ⇒ esiste una successione di operazioni elementari che trasforma A in una matrice ridotto in righe

→ sistema di equazioni → matrice → riduco → risolvo il sistema. Avrò soluzione(i)
- finita
- infinita
- unica.

Dimostrazione:



R_i 1) R_i = 1° riga non nulla.

$\exists A^{-1} : A^{-1}A = I = AA^{-1}$

$^t(A^{-1})\, ^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I$

^tA è invertibile $(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = {}^tA^{-1}$

Matrice a scala:

facciamo in modo che

1) tutte le righe nulle sono sul fondo della matrice
2) l'elemento speciale della riga R_i è più a sinistra dell'elemento speciale di R_j $j>i$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici elementari:

Definizione: le matrici elementari sono matrici $n \times n$ ottenute da I tramite una operazione elementare.

1) E_{ij} $R_i \leftrightarrow R_j$

Es: $n = 3$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $E_i(\lambda)$ $R_i \to \lambda R_i$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = (R_2 - R_1)\, A = E_1 A$$

$$E_1 \Rightarrow E_{21}(-1)$$

Teorema - Definizione: A $(n \times m)$ il numero di righe non nulle di ogni matrice ridotta per righe ottenute da A e costante:

$$\begin{tikzcd} & A' \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & A'' \end{tikzcd}$$

} numero di righe di A' e A'' sono uguali

A', A'' matrice ridotte.

RANGO e caratteristica di A.

$$\rho(A)$$

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ? = 1 \qquad R_2 \to R_2 - R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione: per assurdo.

suppongo che

$$\begin{tikzcd} & A' \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & A'' \end{tikzcd}$$

ridotta per righe $\rho(A') \neq \rho(A'')$.

$$A' = E_r \cdots E_1 A = EA$$

$$A'' = E'_r \cdots E'_1 A = E'A$$

prodotto di matrici invertibili = matrice invertibile

Oss: E ed E' sono matrici invertibile

$$\overset{3}{\rho(A')} > \overset{2}{\rho(A'')}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_3 \\ & & & \boxed{0} & & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 \neq 0 \\ \lambda_2 \neq 0 \\ \lambda_3 \neq 0 \end{matrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \mu_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_2 & \cdots & \cdots \\ & \boxed{0\ 0} & & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mu_1 \neq 0 \\ \mu_2 \neq 0 . \end{matrix}$$

1) $C_i \longleftrightarrow C_j$ $\quad A\, E_{ij}$
2) $C_i \longrightarrow \lambda C_i$ $\quad A\, E_i(\lambda)$
3) $C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j$ $\quad A\, E_{ji}(\lambda)$

Esempio: $m = 2$ (colonne).

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}} \overset{E_{12}(\lambda)}{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ \vdots & \\ a_n & \lambda a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & A_R \\ A \arrow[ur, bend left, "\text{riduco per righe}"] \arrow[dr, bend right, "\text{riduco per colonne}"'] & \\ & A_C \end{tikzcd}$$

$\rho(A_R) = \rho(A)$

$\rho(A_C) = \rho(A) :=$ numero colonne non nulle.

Teorema: A $n \times m$ $\quad A_C$ riduzione per colonne.
A_R riduzione per righe.

$\rho_R(A)$ Numero righe non nulle di A_R =
$\rho_C(A)$ Numero colonne non nulle di A_C $:= \rho(A)$.

OSS.

$$\rho_R(A) \leq \min\{n, m\}.$$

$$\rho_C(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Dimostrazione Teorema per assurdo:

Supponiamo $\underset{3}{\rho_R(A)} > \underset{2}{\rho_C(A)}$

$$\underset{\nearrow}{E}A = A_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots \lambda_3 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$ 3 righe. $\Rightarrow A = E^{-1} A_R$.

λ_1, λ_2 e $\lambda_3 \neq 0$.

E, F matrici elementari

$$AF = A_C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \end{pmatrix}$$ 2 colonne $\Rightarrow A = A_C F^{-1}$

$\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$

$E\, E^{-1} A_R = A = E A_C F^{-1}$

$$A_R = \underbrace{E A_C}\, F^{-1}$$

$$\begin{array}{c} D_1\ D_2\ D_3 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \text{---} \\ \lambda_2 \text{--} \\ \text{---}\ \lambda_3 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \longrightarrow \begin{array}{c} C_1\ C_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c} \vdots & \vdots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Il numero di colonne può solo crescere.

Eq Matriciali

$D_1 = a_1 C_1 + b_2 C_2$ +

$D_2 = a_2 C_2 + b_2 C_2$

$D_3 = a_3 C_1 + b_3 C_2$

2) Dimostrazione:

$$\rho(A+C) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

Rango massimo:

A $n \times m$ $\quad \rho(A) \overset{}{\boxed{=}} \min\{n, m\}$
$\downarrow$
allora A ha rango uguale
massimo.

A cosa serve la matrice inversa:

Es: SISTEMA QUADRATO $(A_{n \times n})$

$Ax = b$ se A ha rango MAX. $\searrow$

$\rho(\overbrace{A}^{n}|\overbrace{b}^{n+1}) = n \qquad \rho(A) = n.$ $\qquad$ A = quadrata

$\rho(A|b) \leq n. \qquad (A|b)$ riduco per colonne.

$$\left(\overbrace{\;\;\;\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}^{n}\;\middle|\; b\right)$$

allora $\exists !$ soluzione:
se il sistema e quadrato ammette una sola soluzione.
* se il sistema è omogeneo la soluzione unica è nulla $= 0$.

Se $\exists A^{-1} \Rightarrow \exists !$ soluzione

$$A^{-1}A x = A^{-1} b$$

Legame tra rango massimo è invertibilità.

Teorema: $\quad A$ $n \times n \longrightarrow A$ è invertibile $\Longleftrightarrow \rho(A) = n$

Dimostrazione per assurdo $\quad \rho(A) < n$

$AF = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}$ ipotesi sia invertibile.

ma: se $\exists A^{-1}$

$A^{-1} \cdot A = I \quad \rho(I) = n$

$A^{-1}AF = IF \quad$ IF sto riducendo per colonne la matrice identica.

Data A $n \times n$

Costruisco $n \times (2n)$ $(A | I)$

Operazioni sulle righe (riduco A dall'alto e poi dal basso)

Se ottengo (I/B) $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$

perchè non è detto che A ha sempre rango massimo.

Esempio: perchè funziona? (dal teorema)

$$A^{-1} = E' = \underbrace{F_R \cdots F_1}_{\text{"dal basso"}} \underbrace{E_R \cdots E_1}_{\text{riduzione per righe di } A \text{ ~~dal basso~~}} = \text{successioni di operazioni".}$$

$$E_1 \left(A \mid I \right)^{R_1}_{R_2} = \left(E_1 A \mid E_1 I \right)$$

$R_2 \to R_2 + R_1$

$$E'(A|I) = (E'A/E'I) = (E'A/E') \Rightarrow (I/E')$$

Se $\rho(A) = n = \max$

Esempio: $A = 3 \times 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A ha rango massimo

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{A} & \multicolumn{3}{c}{I} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$R1 \to R1 - R3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ la 1° riga e la 1° colonna.

A_{12} = cancello la 1° riga e la seconda colonna

$$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{1+i} a_{1i}A_{1i} + \dots + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}A_{1n}.$$

A_{ij} = complemento algebrico, si ottiene cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 45-48 -2(36-42) +3(32-35)$$
$$= -3 -2(-6) +3(-3)$$
$$= -3 +12 -9 = 0$$

Determinante di matrici notevoli

1) Diagonale

$d_{ij} = \Delta$ $n \times n$ è diagonale se $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$

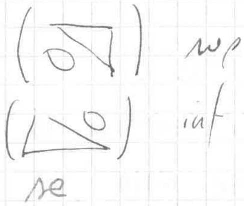
$$\Delta = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta) = |\Delta| = d_{11}\begin{vmatrix} d_{12} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0.$$

$$|\Delta| = d_{11}d_{12}\begin{vmatrix} d_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = d_{11}d_{12}d_{13} \cdots \cdots d_n$$

$$\det(I) = |I| = 1.$$

2) Triangolari: superiore o (alta) sup.
inferiore o (bassa) inf



$T = (t_{ij})$ $n \times n$ triangolare inf o (bassa) se $j > i \Rightarrow t_{ij} = 0$

2) $|A| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{1+i} a_{1i} A_{1i}$ $\qquad A_{1i} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11} \quad a_{12} \cdots a_{1n}} \\ \boxed{0 \quad \cdots \quad 0} \end{pmatrix} (n \times n)$

Se la prima riga di A è nulla allora $|A| = 0$.

Altrimenti $A_{1i} = 0$ per ipotesi induttiva $\forall i \Rightarrow |A| = 0$

Teorema di "Binet"

- $|AB| = |A||B|$ $\qquad |\lambda A| \neq \lambda |A|$
- $|A+B| \neq |A|+|B|$. $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \qquad \det(B) = 1$.

$|A+B| = 8$

Data B $n \times n$

$EB = B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \det(E) = |E_k| \cdots |E_1|$.

$E = E_k \cdots E_1$

Teorema (delle matrici elementari)

$|E_{ij} \cdot E_{ij}| = |I| \qquad \longrightarrow E_{ij} = -1$..

$|E_{ij}|\,|E_{ij}| = 1$. $\qquad |E_{ij}|^2 = 1 \qquad |E_{ij}| = \pm 1$

$E_i(\lambda) \qquad R_i \to \lambda R_i \qquad E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$|E_i(\lambda)| = \lambda$$

$E_{ij}(\lambda) = 1$. $\qquad R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j \qquad E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c|c} & \quad i \quad j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \boxed{\top \text{ alta}}$

se $i < j$

se $j < i \qquad E_{ij}(\lambda)$

$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \boxed{\top \text{ bassa}}$

2)

cioè

$$0 = |A'| = \underbrace{|E_{ij}(-1)|}_{1} \, |A| \quad \Rightarrow |A| = 0$$

Teorema: se una riga di A è combinazione lineare di altre righe di A, allora $|A| = 0$

Analogamente per le colonne.

Teorema: $\overset{n\times n}{A}$ è invertibile $\Longleftrightarrow \rho(A) = n = max \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

* fine teoria.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -1(2-4) = +2.$$

1° teorema di Laplace:

$$|A| = (-1)^{1+i} a_{i1} A_{i1} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} A_{in}.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

Sviluppo rispetto ad una riga qualunque.

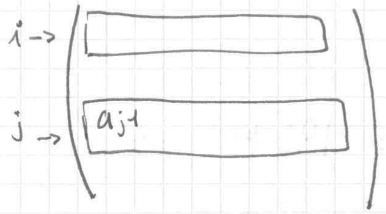
Dimostrazione: $i=2$ sviluppo rispetto alla prima riga.

$$E_{12} A = A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \\ a_{11} & a_{12} & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad |A'| = -|A|$$

$$|A'| = a_{21} \underset{\overset{\shortparallel}{A_{21}}}{A'_{21}} - a_{22} A'_{22} + \dots$$

$$|A| = -a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + \dots\dots + (-1)^{2+n} A_{2n}.$$

2° teorema di Laplace:



$$(-1)^{j+1} a_{j1} A_{i1} + \dots\dots + (-1)^{j+n} a_{jn} A_{in} = 0$$

Dim =>

Se A invertibile => $\exists A^{-1} : AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

$$|A||A^{-1}| = 1 = |I| \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

OSS:
$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \, {}^tA^*$$

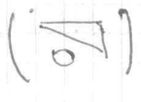
Dim: Combinazione su righe o colonne il det non cambia.

$$|A| = |{}^tA|$$

Se A è invertibile <=> ${}^tA$ è invertibile

* Sicuramente $|A| = 0 \iff |{}^tA| = 0$ . . . <= $\det(A) = 0$

<= $\det(A) \neq 0$

$EA =$  <- operazioni su righe dall'alto

$FEA = I$ <- operazioni " " dal basso.

↘ $A = E^{-1}F^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^t(F^{-1})\,{}^t(E^{-1})$.

$\det(A) = |E^{-1}||F^{-1}|$ $\qquad \det({}^tA) = |{}^tF^{-1}||{}^tE^{-1}|$.

$E^{-1} = |E_R| \dots |E_1|$ $\qquad |E^{-1}| = |{}^tE^{-1}|$

${}^tE^{-1} = \ = |{}^tE_1| \dots |{}^tE_R|$.

Basta provare il teorema sulle matrici elementari

$$|A| = |{}^tA|.$$

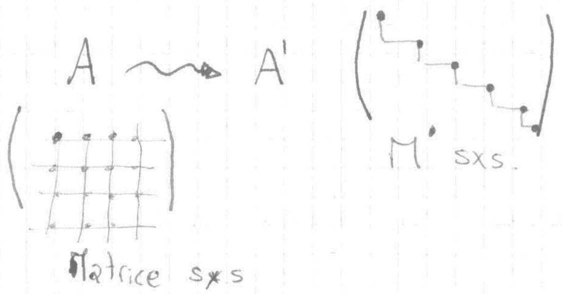
B 4x5

$\rho(B) = 4 \iff$ se $\exists$ matrici 4x4 "dentro" B con $\det \neq 0$

Definizione:

data A $n \times m$ una sottomatrice di ordine r è la matrice ottenuta intersecando r righe e r colonne di A.

Il determinante di ciascuna di queste si chiama MINORE di ordine r.



$\rho(A') = s \Rightarrow$ s elementi speciali.

M' si ottiene da M riducendo per righe

$\rho(M') = \max = s \qquad \rho(M) = \max = s \Rightarrow$

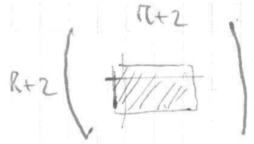
$|M'| \neq 0 \Rightarrow |M| \neq 0$

1) Se $\exists$ minore di ordine $r \neq 0$

2) Se $\forall$ minore di ordine $r+1 = 0$ $\Big\} \Rightarrow \rho(A') = r$

Dimostrazione : ρ, $r+2$?

Se $\rho(A)$ fosse $s = r+2$



Dimostrazione :

$\rho(A) = r \Rightarrow$ * $\exists$ minore di ordine $r \neq 0$

* $\forall$ minore di ordine $r+1 = 0$

Es :

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_1+R_2 \\ = R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4\times 5$$

$\rho = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 2$

sottomatrice di ordine 3 :

$\underbrace{\binom{4}{3}}_{4} \times \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} = 40 \longleftrightarrow 6$

Def : Orlato di una sottomatrice di ordine r è una sottomatrice di ordine $r+1$ ottenuta aggiungendo una riga ed una colonna alla matrice sotto= r.

Teorema : (orlati) $\Rightarrow$ $\rho(A) = r \Longleftrightarrow$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

1) $\exists$ minore di ordine $r \neq 0$

2) tutti i suoi orlati di ordine $r+1$ hanno determinante nullo.

Es: $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale? sì

$V = \mathbb{R}$

somma → somma in $\mathbb{R}$

p. per scalare → prodotto in $\mathbb{R}$

Es: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ No : mancanza dell'elemento neutro nella somma.

Es: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ No :

1) $\forall \lambda$ in $\mathbb{K}$ e $\forall v$ in V $\lambda v \in V$.

$\lambda = 2$ $v = \frac{1}{2}$ $\lambda v = 1 \notin V$ non vale il prodotto scalare non è definito, non funziona sempre.

2) $\underset{-1}{\overset{}{v}} \in V$ non ha opposto (1).

OSS: $V = \emptyset$ → No : Nella somma $\exists$ almeno un elemento ($\exists$ dello zero).

OSS: $V = \{*\}$ è $\mathbb{K}$-~~esem~~ sp vettoriale?

? operazioni ?

necessariamente: $* = 0_V$

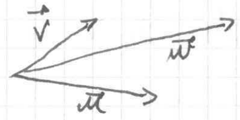
somma → $* + * = 0_V + 0_V = 0$

prodotto → $\lambda * = 0_V$

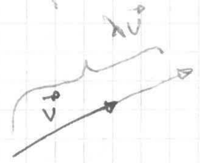
Vettori liberi nello spazio: ? sono un $\mathbb{R}$-sp vettoriale? Sì

V è l'insieme dei vettori liberi nello spazio

somma:



prodotto per scalare



Somma → Ben definita (non ci sono due vettori che sommati ~~so~~ non danno un vettore)

→ ASS.

→ 0_V

→ opposti

Prodotto per scalare: → $1\vec{v} = \vec{v}$

→ ASS : $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$.

→ Distr. :+ $\lambda(\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$

:Δ $(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.

OSS: V sp-vett su $\mathbb{K}$

$0 \in \mathbb{K}$ $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$0 \cdot \vec{v} \in V$ ⇒ $\exists$ opposto $-0\vec{v}$

Perchè valgono gli Assiomi

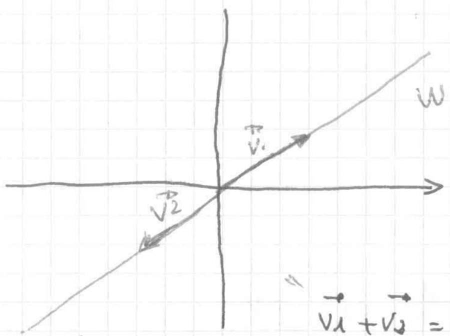
$0 + 0 = 0$

$0 \cdot \vec{v} = \underbrace{(0+0)\,\vec{v}} = 0\vec{v} + 0\vec{v} = 0\vec{v}$

$0\vec{v} - 0\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v} - 0\vec{v}$

$\vec{0}_V = 0\vec{v} + \vec{0}_V = 0 \cdot \vec{v}$

fine.



W retta per l'origine è un sotto spazio di $\mathbb{R}^2$.

verifica : prendo $\vec{v}$ lo moltiplico per $\lambda \in \mathbb{R}$

~~$\lambda \in \mathbb{R}^2$~~ $\lambda \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ma

" $\lambda \vec{v} \in W$ "

" $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_3} \in W$ "

la somma è associativa in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ lo è in W.

commutativa.

→ $0_W = 0_{\mathbb{R}^2}$.

→ ? opposti ? si

il prodotto per scalare :

associativa in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ lo è in W

$1 v = v$. in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ " in W

Distributiva in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ " " ..

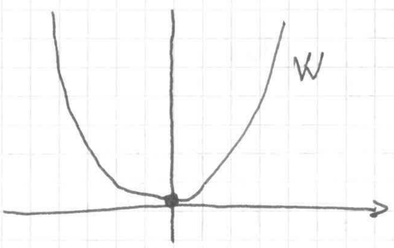
Proposizione : (criterio per sottospazi).

V $\mathbb{K}$-sp vettoriale e $W \subset V$ sottoinsieme

W è $\mathbb{K}$ - sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\forall v_1, v_2 \in W$

$\lambda v_1 + \mu v_2 \in W$.

$W = \{ (x, x^2) : x \in \mathbb{R} \}$.



W è sotto spazio di $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$ $P \notin W$

$\lambda(x_1, x_1^2) + \mu(x_2, x_2^2) \in W$. $\bullet P(1,-1)$

$\left(\underbrace{\lambda x_1 + \mu x_2}_{\alpha} , \underbrace{\lambda x_1^2 + \mu x_2^2}_{\alpha^2} \right)$ $\alpha \neq \alpha^2$

basta scegliere $\lambda = -1$ $x_1 = 1$ $\alpha = -1$

$\mu = 0$ $x_2 = 0$. $\alpha^2 = 1$

W non è un sottospazio.

Dimostrazione $\Rightarrow$ " ovvia "

" $\Leftarrow$ " È ben definito ?

1) il prodotto scalare : $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda v \in W$ si basta che $\mu = 0$

2) la somma : $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$ se $\lambda = \mu = 1$

$0_V \in W$? si $\lambda = \mu = 0$ v_1 e v_2 qualunque.

$\lambda \vec{v_1} + \mu \vec{v_2} = \vec{0_V} + \vec{0_V} =$ somma di W che eredita tra

Criterio :

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $\forall A, B \in W$

$\Rightarrow \lambda A + \mu B \in W$?

$A, B \in W \Rightarrow Tr(A) = Tr(B) = 0$.

$\lambda A + \mu B \in W$? $\Leftrightarrow Tr(\lambda A) + Tr(\mu B) = 0$

$$\lambda \underbrace{Tr(A)}_{0} + \mu \underbrace{Tr(B)}_{0} = 0$$

Combinando le tracce linearmente, W è sempre un sotto spazio. W è $\mathbb{K}$ sottospazio di $\mathbb{K}^{2,2}$.

Conti

$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $Tr(W) = 0$ $a + d = 0$ $a = -d$

$W \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & -(a+x) \end{pmatrix}$ $Tr(A+B) = a + x \mp a - x = 0$.

$n \times m$

Proposizione : l'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow b = 0$, sistema omogeneo.

Dimostrazione : $\mathbb{K}^n \longleftrightarrow \mathbb{K}^{n,1}$

$V = \{ y \in \mathbb{K}^{n,1} . Ax = b \}$ insieme di soluzioni.

$\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n} \in V \Leftrightarrow b$ è il vettore nullo.

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$ $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in V$. $Ay = 0$ e $Az = 0$

V è sottospazio $\Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\forall y, z \in V$

$(\lambda y + \mu z) \in V \Leftrightarrow$

$\lambda y + \mu z$ è soluzione di $Ax = 0$.

$\Leftrightarrow \underbrace{A(\lambda y + \mu z)}_{\lambda A y + \mu A z = 0} = 0$.

$\lambda \underbrace{Ay}_{0} + \mu \underbrace{Az}_{0} = 0$ $\xRightarrow{\text{Implica}}$ che V è un sottospazio.

④

Dimostrazione 3

1) $W = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_r)$ sottospazio

2) Se $W' \ni v_1, \ldots, v_r$ è sottospazio allora $W' \supset W$.

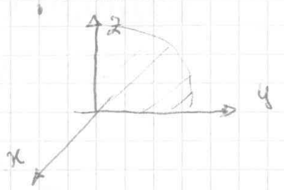
2) W' sotto spazio : $\ni v_1, v_2, \ldots, v_r \in W'$

$\ni \lambda v_1, \ldots, \lambda_r v_r \in W'$

$\ni \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_r v_r \in W'$

$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + \ldots + \lambda_r v_r \in W' \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{K}$.

Es: $\mathbb{R}^3$.



$v_1 = (1, 0, 0)$

$v_2 = (0, 1, 0)$

$v_3 = (0, 0, 1)$

retta n

$\mathcal{L}(v_1) = \{(\lambda, 0, 0)\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

piano y,3

$\mathcal{L}(v_2, v_3) = \{\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \qquad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0, \lambda_2, \lambda_3) \qquad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$

Es: $V = \mathbb{K}^{2,2}$

$\lambda_1\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{L}(v_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$.

$\lambda_2\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{L}(v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix},\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$

$\lambda_3\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{L}(v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_2)$

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + \boxed{\lambda_2 + \lambda_3} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2 + \lambda_3} \end{pmatrix} \right.$$

$V = \mathbb{R}^4$

$v_1 = (1, 0, 0, 1)$

$v_2 = (0, 1, 1, 0)$

$v_3 = (1, 1, 1, 1)$

$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \rightarrow \boxed{v_1 + v_2 = v_3}$

$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1, v_2) \qquad v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 1$

$\hookrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$\hookrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 (v_1 + v_2)$.

$(\lambda_1 + \lambda_3)\, v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)\, v_2$.

$A, B \quad n \times n \qquad (A+B)(A-B) = AA - AB \overset{\neq}{+} BA - BB.$

$\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{} R_3 \to R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(1\ 1\ 1) = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONI:

I) $A = 0$ matrice nulla $\Rightarrow \rho(A)$

$\rho(A) = 0 \Rightarrow A = 0.$ Vero

II) $A \quad n \times m \qquad \rho(A) \leq n.$

proposizione: $A \quad n \times m$ allora $\rho(A) \leq \min\{n, m\}$

Dimostrazione: da provare $\rho(A) \leq m.$

$A \xrightarrow{\text{riduco x righe}} A' = \left(\lambda_1 \quad \lambda \quad \cdots \right) \qquad \lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 \neq 0. \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r.$

OSSERVAZIONE: due elementi speciali non stanno nella stessa colonna. $\rho(A) = r$

$\Rightarrow \underset{m}{\underset{=}{\#}}$ colonne di $A \geq r = \rho(A).$

Sistemi di equazioni:

$\underset{(n \times m)}{A} x = \underset{(n \times 1)}{b}$ n equazioni.   A coefficienti   b termini noti

$n \times (m+1)$ m incognite.

(A/b)

Matrice completa

$\rho(A)$

$\textcircled{\leq}$

$\rho(A/b) \Rightarrow (A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & \cdot & a_{2m} & b_2 \end{array} \right)$

Es: $x + y + z = 1$

dimostrazione $x + y + z = 2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad R_2 \to R_2 - R_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \rho(A) = 1 < \rho(A/b) = 2.$

Dimostrazione : Ricordiamo $\rho(A) \leq \rho(A|b)$

1) $\rho(A) < \rho(A|b) \Rightarrow \nexists$ soluzioni

numero righe $A' = \rho(A)$.

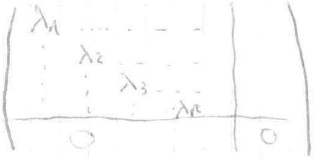
$\lambda \neq 0$.

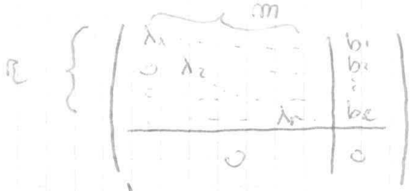
$\rho(A) < \rho(A|b) \Rightarrow$ ho l'equazione $0+0+\cdots+0 = \lambda \neq 0$
Impossibile

1) $\rho(A) = \rho(A|b) = r \Rightarrow \exists$ soluzioni

r righe

} equazioni superflue.



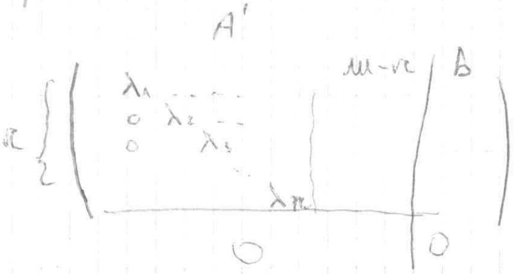


Sostituendo trovo $\boxed{1}$ soluzione

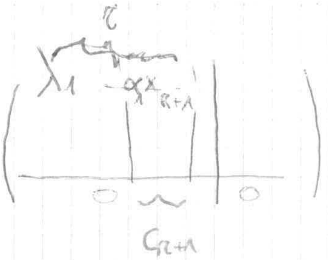
$\infty^{~~r-\rho(A)~~}$ $\infty^{m-\rho(A)} = \infty^{r-r} = \infty^0 = 1$

$\lambda_1 \neq 0$
$\lambda_2 \neq 0$

Se $m > r$



$m-r$ incognite diventano parametri $(m-r)$ che non hanno elementi speciali



$C_{m+1} \rightarrow C_{m+1} - C_{r+1}$.

Es8

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-y+z = 1 \\ 2x+2z = 2 \end{cases}$$

$(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

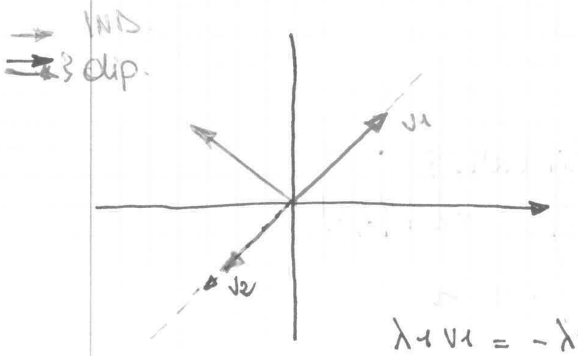
2

Vettori linearmente indipendenti:

$v_1, \dots\dots, v_r \in V$ $\mathbb{K}$-sp vett

lin indi $\iff$ $\sum_{i+1}^{r} \lambda_i v_i = 0$ se e solo se $\lambda_i = 0 \ \forall i$

Es $\mathbb{R}^2$:



$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ /

lin indip. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$\iff \lambda_1, \lambda_2 = 0$

lin dip $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$\iff \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2$$

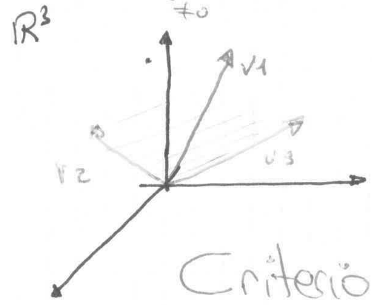
$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$$

$v_1 = (x, y)$

v_2 = lin dip con v_1 $\quad v_2 = (\lambda x_1, \lambda y)$.

Es: $n=3$ lin dip. suppongo $\lambda_1 \neq 0$.

$$\underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \qquad v_1 = -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)$$



v_2 e v_3 formano un piano.
$v_1 \in$ al piano quindi
sono lin dipendenti.

Criterio per lin. indip. in $\mathbb{K}$

$v_1, \dots, v_r \in V$.

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & & v_r \\ | & | & & | \end{pmatrix} = A \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0 \iff A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$$

$v_1 \dots v_r$ lin indipendente $\iff A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$ ha un'unica soluzione, cioè quella nulla

Es.: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: generano i vettori liberi nello spazio.

Es: $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \vec{i} = (1,0) = e_1 \\ \vec{j} = (0,1) = e_2 \end{array}\right\}$ generano $\mathbb{R}^2$?

Domanda!

$\forall\, v \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$?

$\Longleftrightarrow \mathcal{L}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$

Es: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,1)$

$v_2 = (2,2)$

Generano $\mathbb{R}^2$? No.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) \Rightarrow$ non generano $\mathbb{R}^2$.

Es: $(1,0)$ non si genera $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Es: $\mathbb{R}^{2,2} = V$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_4$$

I vettori $v_1, \ldots, v_4$ generano V? Sì

$v_1, \ldots, v_4$ generano $V \Longleftrightarrow \mathcal{L}(v_1, \ldots v_4) = V$

$\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$

$v \in V$.

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum \lambda_i v_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = a$

$\lambda_2 = b$

$\lambda_3 = c$

$\lambda_4 = d$

$\#$ incognite $= r$

$\infty^{r-\rho}$ soluzioni $\iff \rho \neq n$

$\#$ vettori

r deve essere almeno n $\Rightarrow \boxed{\rho = n \leq r}$

$v_1 \dots v_r \in \mathbb{K}^n$ generano $\mathbb{K}^n \iff r \geq n$ e

$$\rho\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_r \\ | & & | \end{pmatrix} = n$$

1 vettore in $\mathbb{R}^2$ non è un sistema di generatori.

Oss:

$\textcircled{r < n}$ $v_1, \dots v_r \in \mathbb{K}^n$ non è un sistema di generatori $\mathbb{K}^n$

Esempio: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

$v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,4)$ $\Big\}$ Non generano $\mathbb{R}^2$, $\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 < 2$

$e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$ $\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ generano

ma anche $e_1, e_2, v = (x,y)$ generano.

Proposizione: i vettori $e_1 = (1,0,\dots,0)$ $\vdots$ $e_n = (0,0,\dots,1)$ $\Big\}$ generano $\mathbb{K}^n$.

Oss: $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$

1) $v_1, \dots, v_n$ Lin indip?

$$\rho\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = n \Rightarrow \text{linearmente indipendenti}$$

2) $v_1, \dots v_n$ generano $\mathbb{K}^n$?

$$\rho\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = n \Rightarrow \text{generano } \mathbb{K}^n.$$

$v_1, \dots v_n \Rightarrow$ sono lin indipendenti $\iff$ sono generatori !!

BASI:

Def: $v_1, \dots, v_r \in V$ $\mathbb{K}$-sp vett.

$v_1, \dots v_r$ sono una Base di V se

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^2$?

lin indip $\iff$ $\rho\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}} = 3$ (No)

OSS: $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$

se $r < n$ non generano se $r > n$

↙ elementi finito

Teorema: Se V ha una base E con $\# E < \infty$

definizione allora se F è base di V $\# F = \# E$

il numero $\# E$ si dice Dimensione di V.

$\dim V = \# E$

Teorema: V $\mathbb{K}$-sp vett, E base di V, $\# E < \infty$ allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi

Definizione V $\mathbb{K}$ sp-vett. $\dim V$ la dimensione di V è il numero di elementi di una base.

Dimostrazione: E e F basi di V da provare

$\# E = \# F$.

$E = \{v_1, v_2\}$

Per assurdo $\underset{2}{\# E} < \underset{3}{\# F}$

$F = \{w_1, w_2, w_3\}$

E sistema di generatori:

quindi $w_1 = \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2$ $\quad$ λ, μ scalari $\in \mathbb{K}$.

$w_2 = \lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2$

$w_3 = \lambda_3 v_1 + \mu_3 v_2$.

① affermazione $\mathcal{L}(w_1, w_2) \ni v_1, v_2$

riesco a trovare w_1 e w_2 in funzione di $v_2 \Rightarrow$

si formalizza costruendo la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \rho(A) \leq 2.$$

se $\rho(A) = 0$ contraddizione $\Rightarrow$ assurdo.

$w_i = 0 \Rightarrow F$ è base

V insieme delle sol. $V \subseteq \mathbb{R}^4$.

Teo. R.C. => ∞^2 sol

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases} \quad V = \left\{ (x,-x,z,-z) : x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

pongo un parametro libero = 1 il resto = 0

$x=1 \quad z=0 \qquad\qquad x=0 \quad z=1$

$a=(1,-1,0,0) \qquad\qquad b=(0,0,1,-1)$.

1) a, b lin indipendenti.

2) $xa + zb = (x,-x,z,-z)$

a e b generano V.

Base di $V = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\}$

Oss: $V=\{0_V\}$ vettore nullo -> l'unico linearmente dipendente => ∄ base => dimensione nulla.

dim V = 0

Basi per sottospazi di $\mathbb{K}^n$:

$v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n \to \mathcal{L}(v_1,\dots,v_r) = W$.

1) ?come trovo una base di W?

2) ? come trovo la dim di W?

1) Costruisco la matrice

$$M = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_r \\ | & & | \end{pmatrix}_{m \times r}$$

riduco per colonne => combinazione lineare tra i vettori $v_1, \dots, v_r$.

$$M' \text{ ridotta}, M' = \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} \times & & \\ \vdots & \times & \\ \vdots & \vdots & \times \end{matrix}}_{\rho(M)} \;\Big|\; 0}^{r} \right)$$

esegue le operazioni al contrario per ottenere M.

$M' = ME^{-1}$ op elementari sulle colonne di M

E si può invertire

$$(w_1 | \dots | w_\rho | 0 | 0)$$

$M'E^{1} = M$ op elementari sulle colonne di M'

$w_1, \dots, w_\rho$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ $(1,1)$ è soluzione $\Rightarrow$ $v_4 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$.

In conclusione v_1 e v_2 sono una base per V

Completamento a base:

Dati: ($\dim V < \infty$)

$v_1, \dots, v_r \in V$ lin indipendenti

Trovare. E base di V

$E \supset \{v_1, \dots, v_r\}$.

Algoritmo:

- $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) = V \Rightarrow$ base.
- $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) \subsetneq V \Rightarrow$ c'è un vettore $\in V$ ma non appartiene a $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$
- aggiungo w_1 alla lista
- $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) = V \Rightarrow$ base.
- $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) \subsetneq V$
- $\exists\, w_2 \in V$, $w_2 \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$.
- aggiungo w_2 alla lista.

... forse finisce il procedimento.

Se $\dim V = n$

aggiungendo w_1 alla lista ho $r+1$ vettori

Oss: $\{v_1, v_2, w_1, \dots, w_r\}$. lin indipendenti.

Se $\dim V = n$

l'algoritmo termina perchè

$r+s \leq n$

Esempio 8 $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,1,1)$ $v_2 = (2,3,0)$

Completamento?

cerco $v = (x, y, z)$:

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 3$$

Componenti di un vettore:

Definizione: V $\mathbb{K}$-sp vett. $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ base.

Dato $v \in V$ le <u>componenti</u> di v rispetto a E

$$(v)_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : \sum_1^n \lambda_i v_i = v$$

Oss: data E base di V

1) $\forall v \in V : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$v = \sum \lambda_i v_i$$

base $\iff$ sistema di generatori $\wedge$ linearmente indipendenti.

2) Dato v $\exists! \lambda_1 \dots \lambda_n$:

$$v = \sum \lambda_i v_i \quad \text{altrimenti:}$$

$$v = \sum_1^n \mu_i v_i$$

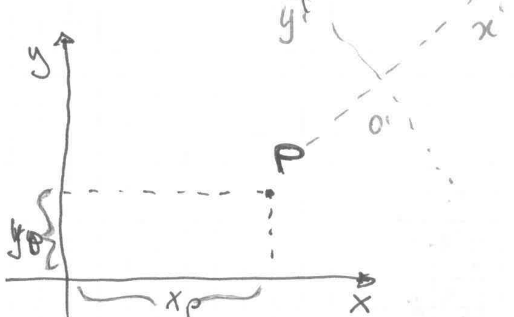
Quindi:

$$\sum_1^n \lambda_i v_i = \sum_1^n \mu_i v_i \iff \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0^{*}$$

* Se trovo una combinazione lineare $\sum(\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$ $\Rightarrow$ λ, μ sono tutti nulli.

$\Rightarrow$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \quad \forall i$

Esercizio:



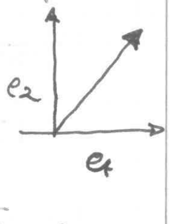
$P \leftrightarrow (x_P, y_P)_{xOy}$

$P \leftrightarrow (x'_P, 0)_{x'O'y'}$

Es $V = \mathbb{R}^2 \ni v$ $\quad v = (1,1)$ scritto così: (sottointeso)

sono le componenti in base $\mathbb{K}$ canonica

$K = \{e_1, e_2\} \Rightarrow v = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$



Scelgo una nuova base:

$E = \{(1,0), (1,2)\}$ $\to$ lin indipendenti $\to$ sono generatori (ρ = max) $\to$ sono base.

1) $(v)_E$, $(v)_F$

2) dato $(v)_E$ trovare $(v)_F$.

1) trovare $(v)_E$:

$$\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right) (v)_E = (v)_K$$ e risolvo il sistema

matrice di PASSAGGIO.

$$P_{EK} = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right)$$

$$E \to K$$

Oss: $|P_{EK}| \neq 0$.

2) Dato $(v)_E$, trovare $(v)_F$.

$$\underbrace{P_{EK} (v)_E}_{(v)_K \text{ base canonica.}} = \underbrace{\left(w_1 \middle| \dots \middle| w_n \right)}_{P_{FK}} (v)_F$$

$$P_{EK} (v)_E = P_{FK} (v)_F$$?

– o risolvo il sistema oppure $(v)_F = P_{FK}^{-1} P_{EK} (v)_E$

Definizione : In $\mathbb{K}^n$, K base canonica

base $E = \{ v_1, \dots, v_n \}$

$\uparrow$ scritto in $\mathbb{K}$: $\uparrow$

la matrice di PASSAGGIO da E a K è

$$P_{EK} = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right).$$

base $F = \{ w_1, \dots, w_n \}$

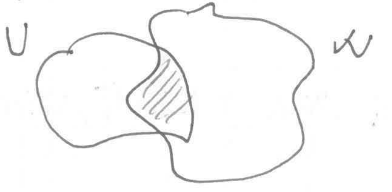
la matrice di PASSAGGIO da E a F è :

$$P_{EF} = (P_{FK})^{-1} P_{EK}.$$

Domanda : ? $[P_{KF}]$?

Operazioni in spazi vettoriali :

V $\mathbb{K}$-sp vett. U , W ⊂ V sottospazio.



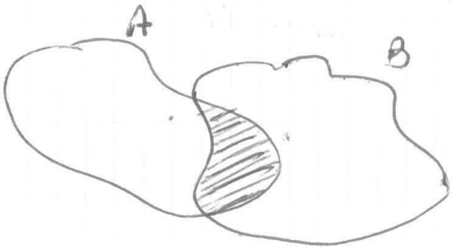
l'insieme $U \cap W$ è un sottospazio di V? ⓈⒾ

$$\dim(V \cup W) \geq \max\{\dim V, \dim W\}.$$

Formula di Grassmann:

$V \to U, W$ sottospazio.

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$



$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Dimostrazione:

$U \cap W$ base $\{c_1, \dots, c_n\}$

$U \cap W \subset U$

U base $\{c_1, \dots, c_n\}, a_1, \dots, a_r\}$

$U \cap W \subset W$

W base $\{c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_s)$

$$\dim(U+W) = \underbrace{\dim U}_{n+r} + \underbrace{\dim W}_{n+s} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{n}$$

Dimostro che:

$$\dim(U+W) = n+r+s.$$

$$E = \{c_1, \dots, c_n, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots b_s\}$$

1) E genera "$U+W$"
2) elementi di E lin. indip.

1) $v \in U+W \iff v = u+w \; : \; u \in U, \; w \in W.$

$u = \sum \alpha_i c_i + \sum \alpha_i' a_i$ combinazione fra gli a_i e c_i

$w = \sum \beta_i c_i + \sum \beta_i' b_i$ $\} \Rightarrow E$ genera $U+W$.

2) $\sum \gamma_i c_i + \sum \alpha_i a_i + \sum \beta_i b_i = 0$ ↑ intersezione tra U e W!!

$$\underbrace{\sum \gamma_i c_i + \sum \alpha_i a_i}_{\in U} = \underbrace{-\sum \beta_i b_i}_{\in W} = z$$

? $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a, b fissati

$\varphi(x) = ax + b$ è lineare?

Proposizione !!

$\varphi : V \to W$ applicazione lineare $\boxed{\varphi(0_V) = 0_W}$

Dimostrazione: $0_V + 0_V = 0_V$

$\varphi(0_V + 0_V) = \varphi(0_V)$

Essendo lineare

$\varphi(0_V) + \cancel{\varphi(0_V)} = \cancel{\varphi(0_V)}$ sommo $-\varphi(0_V)$ in ambo i membri

$\varphi(0_V) + 0_W = 0_W$

$\varphi(0_V) + 0_W = 0_W$. Se aggiungo 0_W non succede niente.

Esercizio: No!

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = x^2 + 1$ Non è lineare.

Esercizio: No!

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = x^2$ $\neq$ $\varphi(x+y) = (x+y)^2$ $\neq$ $\varphi(x) + \varphi(y) = x^2 + y^2$

** Esercizio: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. SI

$\varphi(x, y) = (x+y, x-y, 2x)$

Es. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. SI

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE: per dare una applicazione lineare!!

Data $A \in \mathbb{K}^{n,m}$

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\varphi(v) := \overset{n\times m}{A} \overset{m\times 1}{v}$

Come assegnare:

$\varphi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$

1) Formula

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = (L_1(x_1, \dots, x_m), L_2(x_1, \dots, x_m), \dots, L_n(x_1, \dots, x_m))$$

Esercizio ** $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x_1, x_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{L_1(x_1, x_2)}, \overbrace{x_1 - x_2}^{L_2(x_1, x_2)}, \underbrace{2x}_{L_3(x_1, x_2)})$$

$$\begin{tikzcd} \text{Formula:} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & & \text{MATRICE}^{?} \\ \text{BASE} \arrow[urr, bend right] & & \end{tikzcd}$$

? Passare dalla formula alla matrice?

Matrice Associata:

Definizione: V, W sp vett $E = \{v_1; v_n\}$ base di V.

$F = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W.

$\varphi : V \to W$ app. lineare.

la matrice associata a φ nelle Basi E e F

$M^{E,F}_{\varphi}$ $\quad$ $\dim V = n$

$\dim W = m$

è una matrice $\underbrace{(\dim W)}_{m} \times \underbrace{(\dim V)}_{n}$

$$M^{E,F}_{\varphi} = \left(\varphi(v_1)_F \,\middle|\, \dots\dots \,\middle|\, \varphi(v_n)_F \right)$$

Esercizio:

$V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ } base canoniche. $\quad$ 3x2

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x,y) = (x+y, x-y, 2x) \Rightarrow M^{K,K}_{\varphi} = \left(\cancel{\varphi(e_1)_K} \,\middle|\, \cancel{\varphi(e_2)_K} \,\middle|\, \varphi(e_3)_K \right)$

$$M^{K,K}_{\varphi} = \overset{3\times 2}{\left(\varphi(e_1)_K \,\middle|\, \varphi(e_2)_K \right)} =$$

$\varphi(e_1) = \varphi(1,0) = (1,1,2)$

$\varphi(e_2) = \varphi(0,1) = (1,-1,0)$

$$M^{K,K}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$M^{K,K}_{\varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix}$$

OSS:

$$\varphi\begin{pmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{pmatrix}_F = M^{E,F}_{\varphi} \begin{pmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{pmatrix}_E$$

$E = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad$ $F = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\quad$ $M^{E,F}_{\varphi} = \left(\varphi(v_1)_F \,\middle|\, \middle|\, \varphi(v_n)_F \right)$

$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$

$$M_\varphi^{\varepsilon, F} = \left(\varphi(e_1) \middle| \varphi(e_2) \cdots \right) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Def: V, W $\mathbb{K}$ sp-vett. $\varphi, V \to W$ app lineare.

- φ si dice Iniettiva se
  $\left.\begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \\ v_1 \neq v_2 \end{array}\right\} \to \varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$

- φ si dice surpettiva o (suriettiva) se
  $\forall w \in W$
  $\exists v \in V : \varphi(v) = w$.

- φ si dice isomorfismo se e solo se φ è Iniettiva e Suriettiva.

Esercizio:

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è lineare

$\varphi(x) = (x, x)$ è applicazione lineare.

è iniettiva? $\bigcirc\!\!\!\!\text{Sì}$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 \neq x_2$

$\underset{\sim}{\varphi(x_1)} \neq \varphi(\underset{\sim}{x_2})$

$(x_1, x_1) \neq (x_2, x_2)$

è suriettiva?

sì $\Longleftrightarrow \forall w \in \mathbb{R}^2$

$\exists v \in \mathbb{R} : \varphi(v) = w$

$v = x$

$\varphi(v) = \varphi(x) = (\underline{x}, \underline{x}) \in \mathbb{R}^2$ $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$

Proposizione : $\varphi: V \to W$ app. lineare :

$\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq V$ è un sottospazio

OSS: φ è iniettiva $\Longleftrightarrow$ dim $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$

Esempio: Calcolare $\mathrm{Ker}(\varphi)$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x,y,z) = (x+y, z)$

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y,z) = (0,0)\}$

Per trovare la base Ker si risolve il sistema di equazioni!

∞^1 soluzioni.

$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$, dim $\mathrm{Ker}(\varphi) = 1$ $\Leftarrow$ per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$

base : $\{(-1, 1, 0)\}$

Risolto con la matrice associata:

$$M_\varphi^{K,K} = \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right| & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$\varphi(e_1) = (\overset{1+0}{x}+\overset{,0}{y}, z) = (1,0)$ ecc....

$$\cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{2\times 3}{=} \varphi(x+y, z)$$

Per trovare il nucleo : $\mathrm{Ker}(\varphi) \longleftrightarrow M_\varphi^{K,K} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

1) Formula 2) base $M_\varphi^{E,F}$.

1) caso 1, Formula:

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m : \varphi(x_1, \dots, x_m) = 0 \in \mathbb{K}^m\}$

risolvere il sistema di eq dato da φ

$\varphi(x_1, \dots, x_m) = (L_1(x_1, \dots, x_m), \dots, L_m(x_1, \dots, x_m))$

Formula $\to$ sistema :

$\varphi(x_1, \dots, x_m) = 0$ $\begin{cases} L_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ L_m(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$

2) 2° caso : base:

Calcolo di $Im(\varphi)$

Es $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x,y) = (y, x, x+y)$? è suriettiva?

$\varphi(1,0) = \varphi(e_1)$

$\varphi(0,1) = \varphi(e_2)$

$$M_\varphi^{K,K} = \underset{3\times 2.}{\left(\varphi(e_1) \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} \varphi(e_2) \right)}$$

$w \in Im\varphi \iff w = \varphi(v)$

$v = xe_1 + ye_2$

$\varphi(v) = \varphi(xe_1) + \varphi(ye_2) = x\underbrace{\varphi(e_1)}_{} + y\underbrace{\varphi(e_2)}_{}$

1°colonna! 2°colonna!

Le colonne della matrice associata $M_\varphi^{K,K}$ generano $Im(\varphi)$

base di $Im\varphi$ $\{(0,1,1),(1,0,1)\}$

$= \dim Im(\varphi) = 2 < 3$

$\Rightarrow \varphi$ non è suriettiva.

$\varphi : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$

$M_\varphi^{E,F}$ le colonne di $M_\varphi^{E,F}$

1) generatori di $Im(\varphi)$ se $F = K$.

2) se $F \neq K$: le colonne sono le componenti in base F dei generatori $\to \dim Im(\varphi) = \rho$ della matrice associata.

Proposizione: $\varphi : V \to W$ app lineare.

$$\rho(M_\varphi^{E,F}) = \dim Im(\varphi)$$

$$\dim V - \rho(M_\varphi^{E,F}) = \dim Ker(\varphi)$$

dim di partenza.

Teorema: Iniett. Suriettiva

dim $Ker(\varphi) = 0$

$\varphi : V \to W$ app lineare.

$$\dim V = \dim Ker(\varphi) + \dim Im(\varphi).$$

Dim: $Ker(\varphi) \in V$ sottospazio

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$

OSS: $\varphi: V \to V$ è isomorfismo $\Leftrightarrow$ iniettiva $\Leftrightarrow$ suriettiva.

$\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq W$ $\quad\quad$ $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq W$

$$\varphi: V \to W$$

φ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$

φ è suriettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,\varphi = W$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim W$.

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi)$$

1) Data φ, verifico che $v \in V$

?$v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$?

$v \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = 0_W$.

2) Dati φ e $w \in W$, ?$w \in \mathrm{Im}(\varphi)$?

$w \in \mathrm{Im}(\varphi) \Leftrightarrow \exists\, v \in V$ e $\varphi(v) = w$.

Esempio: $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

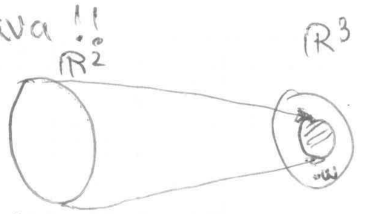
può essere suriettiva.

φ è suriettiva $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 3$.

$$\underbrace{\dim \mathrm{Im}(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}(\varphi)}_{\mathbb{R}^2} = 2.$$

Proposizione: $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ appli lin.

se $n < m \Rightarrow \varphi$ non è suriettiva!!



$\varphi(x, y) = (x+y,\ x-y,\ 2x+y)$

$w = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$

$w \in \mathrm{Im}(\varphi)$?

Incompatibile $\Rightarrow \nexists$ soluzione

Cerco $(x, y) = v$: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Risolvo il sistema di eq.

se $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ 2x+y \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow w \notin \mathrm{Im}(\varphi)$.

$\Rightarrow$ metto dei valori a caso di x, y.

$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\} \to \varphi(1, 2) = (3, -1, 4) = z$

$z \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

$$\boxed{M^{E,F}_{\varphi} = \left(P^{F,E}\right)^{-1} M^{E,E}_{\varphi}\, P^{F,E}}$$

Oss:

$$P^{F,E} = \left(P^{E,K}\right)^{-1} P^{F,K}$$

Def: $\varphi : V \to W$ app lineare se $V = W$ allora φ si chiama **Endomorfismo**

Def: $\varphi : V \to V$ si dice semplice se $\exists$ base E di V :

$M^{E,E}_{\varphi} = \Delta$ = matrice diagonale.

Def: A matrice n×n si dice "diagonalizzabile" se $\exists$ P matrice invertibile n×m : $P^{-1}AP = \Delta$ con Δ matrice diagonale.

Proposizione: $\varphi : V \to V$ endomorfismo E una base di V

φ è semplice $\iff$ $M^{E,E}_{\varphi}$ è Diagonalizzabile

Es: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile !! Sì $P = I$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? è diagonalizzabile ?

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = M^{K,K}_{\varphi}$ φ è semplice?

Cerco E base di $\mathbb{R}^2$:

$M^{E,E}_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ devo trovare $E = \{v_1, v_2\}$

$\varphi(v_1)$

so che $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1$ $\qquad v_1 = (\ , \ )$

$\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2$ $\qquad v_2 = (\ , \ )$

$\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1$

$A v_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 I v_1 \implies \overset{2\times 2}{A} v_1 = \lambda_1 \underset{\sim}{\overset{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}}{I}} v_1$

$\underbrace{(A - \lambda_1 I)}\,\underbrace{v_1} = 0$

Proposizione: $\varphi : V \to V$ endomorfismo. E, F basi di V.

$$M_\varphi^{E,E} = \left(P^{E,F}\right)^{-1} M_\varphi^{F,F} P^{E,F}$$

Dimostrazione: (idea)

$v \in V$

$(v)_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\qquad (\varphi(v))_E = M_\varphi^{E,E} (v)_E$.

$(\varphi(v))_F = M_\varphi^{F,F} (v)_F$

passaggio da un espressione a base E -> ad un espressione in base F.

$P^{E,F}$ $\quad E \to F$ $\qquad P^{F,E}$ $\quad F \to E$

$(v)_F = P^{E,F} (v)_E$ $\qquad (v)_E = P^{F,E} (v)_F$.

$\Rightarrow \quad (v)_F = \underbrace{P^{E,F} P^{F,E}}_{I} (v)_F$. $\quad \to \left(P^{E,F}\right)^{-1} = P^{F,E}$.

$\underbrace{(\varphi(v))_E} = M_\varphi^{E,E} \underbrace{(v)_E} = P^{F,E} (v)_F$.

$P^{F,E} \cdot (\varphi(v))_F$

$P^{F,E} (\varphi(v))_F = M_\varphi^{E,E} P^{F,E} (v)_F$

$(\varphi(v))_F = \boxed{\left(P^{F,E}\right)^{-1} M_\varphi^{E,E} P^{F,E}} (v)_F$.

definizione della matrice $\boxed{M_\varphi^{F,F}}$ che associa $(v)_F$ a φ da base F in base F.

OSSERVAZIONE: φ semplice $\Longleftrightarrow$

$\exists$ base E $\quad M_\varphi^{E,E}$ = diagonale = Δ $\Longleftrightarrow$

$\forall$ base F $\quad M_\varphi^{F,E} = \left(P^{E,F}\right)^{-1} \Delta P^{E,F}$.

Definizione: A $n \times m$ si dice diagonalizzabile se $\exists$ P invertibile, $\exists$ diagonale : $A = P^{-1} \Delta P$

Definizione: A e B $n \times n$ sono simili se $\exists$ P inversa : $A = P^{-1} B P$

Oss: A è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ A è simile ad una matrice diagonalizzabile.

$\varphi : V \to V$ semplice. $\quad E = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$v \neq 0 \qquad Av = 0 \qquad \lambda v = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

$|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore, i vettori di $\mathcal{L}((1,-1))$ sono autovettori relativi a $\lambda = 0$.

Cerco ~~se~~ v_2 autovettore e λ_2 autovalore:

$$Av = \lambda v.$$

$Av - \lambda v = 0 \qquad (\underbrace{A - \lambda I}_{\substack{n\times n\\ 2\times 2}})\underset{\neq 0}{v} = 0$

$(A - \lambda I)v = 0$ ha soluzioni non nulle $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \cancel{1} - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{1} = \cancel{2\lambda(2+\lambda}$

$\lambda(\lambda - 2) = 0$

gli Autovalori sono $\left\{\begin{matrix}\lambda = 0\\ \lambda = 2\end{matrix}\right\}$ della matrice A

$\lambda = 2$.

Risolvo $(A - 2I)v = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\rho(A-2I) \neq \max = 2 \Rightarrow$ perché $\det(A - 2\lambda I) = 0$. per $\lambda = 2$!

$x = 1 \;, y = 1. \qquad \mathcal{L}((1,1))$

$Av = \lambda v \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\lambda}_{=2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

gli autovalori sono infiniti

Definizione: $\varphi: V \to V$ endomorfismo, λ autovalore

$V_\lambda = \{\underbrace{v \in V : \varphi(v) = \lambda v}\}\, V$

Si chiama autospazio relativo all'autovalore λ.

Definizione A $n\times n$ (quadrata) il polinomio $p(\lambda) = \underbrace{|A - \lambda I|}$ $\leftrightarrow$ si chiama polinomio caratteristico di A

Prop: $\varphi: V \to V$ endomorfismo λ autovalore

$V_\lambda \subset V$ è un sottospazio.

proposizione!

A $n\times n$ $\quad P_A(\lambda)$ polinomio caratteristico.

Esercizio 3

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda) \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$

$\mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 1.$

Es.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = p(\lambda) = (1-\lambda)^2.$

$\lambda_1 = 1$

$\mu_1 = 2$ $\boxed{\text{molteplicità} = 2}$

OSS 3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

Prop: la dimensione del sottospazio è sempre uguale o minore della molteplicità. $V_{\lambda_i} \leq \mu_i$

OSS 3 $A \; n \times n$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \qquad \mu_1 = \ldots\ldots = \mu_n = 1.$? A è diagonalizz.?

$\dim V_{\lambda_1} \geq 1$ contiene sempre almeno un elemento.

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} \textcircled{=} 1 \qquad \boxed{\dim V_{\lambda_i} = 1} \quad \forall i$

$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}(v_1) \qquad V_{\lambda_2} = \mathcal{L}(v_2) \quad \ldots\ldots \quad V_{\lambda_n} = \mathcal{L}(v_n)$

~~prendo~~ ? $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V ?

? sono lin indip?

? $v_1, \ldots, v_n$ lin indip? $\Rightarrow \quad a_1v_1 + a_2v_2 = 0$

$(v_1 | v_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad$ (supponendo φ lineare)

$\varphi(a_1v_1 + a_2v_2) = 0$

$\hookrightarrow \quad a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 = 0 \qquad$ pongo $a_1 \neq 0$.

$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 = \underbrace{a_1v_1 + a_2v_2}.$ $\quad v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$

$-a_2\lambda_1 v_2 + a_2\lambda_2 v_2 =$

$-a_2 v_2 (\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$

$v_2 \neq 0 \rightarrow$

$\varphi : V \to V$ $\qquad V_{\lambda_i} \subseteq V$.

completo a base di V. $\{\underline{v_1, \dots, v_m}, w_1, \dots, w_s\}$

matrice associata

$\varphi(v_1) = \lambda_i v_1 \qquad \varphi(v_2) = \lambda_i v_2$.

$$M^{E,E}_{\varphi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & & \\ 0 & \lambda_i & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m}$$

polin. caratteristico:
calcolo il determinante
rispetto alla prima colonna:

$$p(\lambda) = \left|\overbrace{\begin{matrix} \lambda_i - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i - \lambda & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{m}\right| \overbrace{\begin{matrix} ? \end{matrix}}^{s}$$

$p(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^m \boxed{q(\lambda)}$

(molteplicità dell'autovalore) $\mu_i \geq m$ = dimensione dello spazio V_{λ_i}

Proposizione: $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2} \neq \dots \neq \lambda_n$ (autovalori)

$v_i \in V_{\lambda_i}$ autovettori, allora.

$v_1, \dots, v_2 \Rightarrow$ sono lin. indipendenti

autovettori di autovalori diversi sono lin. indipendenti.

Dim: v_1, v_2 lin indip: se non lo fossero

$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ $*$ $\qquad a_1, a_2 \neq 0$.

$\varphi(a_1 v_1 + a_2 v_2) = 0$

$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$

$*$: $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$. $\quad$ con $a_1, a_2 \neq 0$.

$a_1 \lambda_1 - \frac{a_2}{a_1} v_2 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$

$a_2 \cdot (\underbrace{\lambda_2 - \lambda_1}_{=0}) v_2 = 0$. Assurdo perchè $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$.

Teorema: $\varphi : V \to V$ (endomorfismo) $\dim V = \underline{\underline{n}}$

Se φ ha $\underline{\underline{n}}$ autovalori distinti $\Rightarrow \varphi$ è semplice

OSS: (molteplicità = 1) $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$. $\Rightarrow$

φ è semplice.

Teorema $\varphi: V \to V$ (endomorfismo)

φ è semplice $\iff$ [redacted] $\mu_i = n - \rho(A - \lambda_i I)$

$n = \dim V$ λ_i autovalore.

$A = M_\varphi^{F,F} \to F$ base di V.

Dim: E base di V : $E = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_r, v_1 \dots \dots v_n}_{\text{autovettori}} \}$

metto vicini autovettori che hanno lo stesso autovalore.

$$E = \{ \underbrace{v_1, \dots}_{\lambda_1}, \underbrace{\dots, v_2}_{\lambda_2}, \underbrace{v_1, \dots}_{\lambda_3} \dots \dots v_n \}$$

$$M_\varphi^{F,F} = \begin{pmatrix} \boxed{\overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{\dim V_{\lambda_1}} \; \lambda_2 \dots \lambda_2 \; \dots} & & 0 \\ & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\dim V_{\lambda_1}} \dots \dots (\lambda_r - \lambda)^{\dim V_{\lambda_r}}.$$

$$\underbrace{\mu_1 = \dim V_{\lambda_1}}_{} = \underbrace{n - \rho(M_\varphi^{E,E} - \lambda_1 I)}_{}$$

solo se è semplice.

$$\mu_i = \dim V_{\lambda_i} = n - \rho(M_\varphi^{E,E} - \lambda_i I)$$

Quindi è semplice.

* da provare che se $\mu_i = n - \rho(A - \lambda_i I)$ allora φ è semplice.

Cioè esiste base di autovettori

scelgo una base di V_{λ_i} $\forall i$ costruisco un insieme F.

$$F = \{ \underbrace{v_1, \dots v_r}_{V_{\lambda_1}}, \underbrace{v_{r+1}, \dots}_{V_{\lambda_2}}, v_0, \dots \}$$ sono lin indi

F è base di V $\iff$ $\# F = \dim V$

$\# F = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = n$

Da provare che

$$\sum_{\lambda}^{r} \dim V_{\lambda_i} = n$$

ma: $\Rightarrow \dim V_{\lambda_i} = \mu_i$ e $\sum \mu_i = n$.

Somma delle molteplicità da il valore n.

OSS: φ è semplice $\iff \mu_i = \dim V_{\lambda_i}$ $(= n - \rho(A - \lambda_i I))$

OSS: T triangolare alta: $T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

③

① $A = P_1^{-1} \Delta_1 P_1 \Rightarrow P_1^{-1} = \begin{array}{cc} \lambda_1=0 & \lambda_2=2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)} \end{array}$

② $A = P_2^{-1} \Delta_2 P_2 \Rightarrow P_2^{-1} = \begin{array}{cc} \lambda_2=2 & \lambda_2=0 \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)} \end{array}$

$$\underset{P_1^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(P_1^{-1})^t}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I. \qquad P_1 = \frac{1}{2}(P_1)^t$$

Matrici ortogonali

Def: $A_{n \times m}$ si dice ortogonale se $A \cdot (A^t) = I$

oss: A ortogonale: $|A| = \pm 1$

ortogonale

$A\,({}^tA) = I \qquad |A|\,|{}^tA| = 1 \qquad |A|^2 = 1 \qquad |A| = \pm 1.$

Esempio di matrici ortogonali sono le matrici che esprimono rotazioni.

? $A({}^tA) = I$. ?

Da rotazione $\Rightarrow \overset{A}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{sen}\theta \end{pmatrix}}$ è ortogonale. $\det A = 1$.

rotazione e simmetr a specchio. cos~~θ~~ ~~senθ~~ $\overset{B}{\begin{pmatrix} +\text{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\theta \end{pmatrix}}$ è ortogonale ma $\det B = -1$

I $\varphi: V \to V$ endomorfismo $\Rightarrow$ è semplice $\Leftarrow$ gli autovalori sono distinti.

$n = \dim V$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n \text{ autovalori} \\ \mu_1 \ldots\ldots \mu_n \text{ molt.} \Rightarrow \mu_1 = \ldots\ldots = \mu_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Semplice.

II $\varphi: V \to V$ endo.

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \ldots \lambda_n \text{ autovalori} \\ \mu_1 \ldots \mu_n \text{ molt.} \end{array}\right\}$ φ semplice $\Leftrightarrow \mu_i = \dim \underset{\text{autospazio.}}{V_{\lambda_i}}$

④