



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 130

DATA : 05/09/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Zeroual Youssef

MATERIA : Elettrotecnica I, Teoria + Esercizi
Prof. Chiampi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

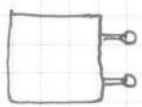
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Circuito elettrico.

4 eq. di Maxwell $B(x, y, z, t)$ (induzione magnetica)
 3 eq. continue

Non siamo in grado di risolvere le eq. di Maxwell inoltre la soluzione da valore che è troppo sintetico poiché è molto dettagliato => NON SI USANO.

=> ipotesi limitata



n° limitato di volumi / punti geometrici (morsetti, poli)
 A seconda dei numeri di morsetti (Bipolo, tripolo, ...)

Caso delle lampadine.

Non si studia cosa succede dentro un n-polo, ma si spiega cosa succede ai morsetti (corrente, tensione) => "formazione sintetica"

=> 2 ipotesi:

- a) tutta l'energia passa nei morsetti (e non nello spazio circostante)
- b) all'interno di una rete elettrica tutti i fenomeni elettrici vanno simultanei, si propagano alla velocità della luce.

=> il ritardo tra un morsetto e l'altro è talmente piccolo che lo trascuriamo.

a) e b) => Circuiti elettrici. (No relazionari, fotocamere, ...)

Regimi di funzionamento

Strettamente connesse alla ipotesi di base.

Ma si hanno dimensioni spaziali -> eq. diff. ordinate nel tempo

Regime stazionario (o statico)

Tutte le grandezze elettriche sono costanti nel tempo

=> 2 conseguenze:

- 1. - Tutta l'energia fluisce tra i morsetti ($I_p = I_s$)
- 2. - Tutto simultaneo.

2. - Poiché è costante, le derivate sono nulle => Eq. Algebriche

Applicazione: corrente continua (con generatore elettrolitico)

Es: Pila (bassa energia)

Ferraria (?)

Linee di trasmissione HVDC (linee sotto marine)

↳ minori cadute di linea.

Lunghezza d'onda. $\lambda = cT = \frac{c}{f}$

Rappresenta l'estensione lineare che un fenomeno copre in un periodo. per $f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = 6000 \text{ km}$

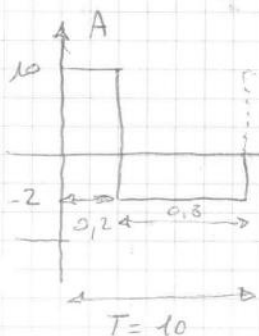
$L \ll \lambda$ $L =$ lunghezza della linea.

Per rappresentare il sistema tramite un circuito elettrico

$f = 1 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = 3 \text{ m}$

Linee troppo lunghe \Rightarrow circuito non accettabile

Si possono definire delle grandezze.



Valore istantaneo: $a(t)$ \rightarrow rappresenta l'andamento della funzione se SINUSOIDE $a(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi)$

Valore di cresta: 1) positivo
2) negativo.

1) $A_{cp} = \max |a(t) > 0| = 10$

2) $A_{cn} = \max |a(t) < 0| = 2$

- Valore di picco: (valore di max / valore di cresta)

$\hat{A} = \max (A_{cp}, A_{cn}) = 10$

rappresenta il massimo valore assoluto \Rightarrow max sollecitazione.

- Valore medio e effettivo.

$A_e = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} a(t) dt = 2 - 1,6 = 0,4$

- Valore EFFICACE:

$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} a^2(t) dt} = 4,82$

$A \geq A_e$ sempre ($A = A_e$ in Regime STAZIONARIO)

- VALORE MEDIO CONVENZIONALE:

$A_c = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |a(t)| dt = 3,2$

A_e in una sinusoidale è sempre nullo \Rightarrow non serve

A rappresenta l'equivalente di una grandezza che sia costante nel tempo dal punto di vista energetico (fondamentale)

\hat{A} è importante in fase progettuale

- FATTORE DI CRESTA / PICCO:

$K_p = \frac{\hat{A}}{A} \geq 1$

$K_p = 1$ in c.c.

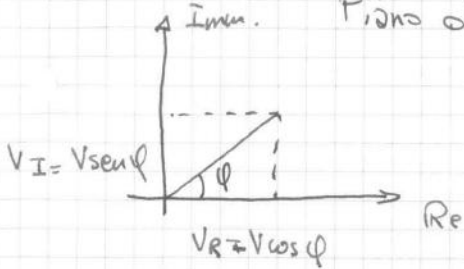
meglio se è più basso possibile per il funzionamento

NUMERI COMPLESSI :

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

$\sqrt{-1} = i = \boxed{j}$ → usa in elettrotecnica

Piano di Gauss :



$\vec{V} = V e^{j\varphi} = V_R + j V_I$

Vettore rotante ⇒ angolo ruota.

$\sqrt{-1}$ fa ruotare di $\pi/2$.

$\alpha(t) = \omega t + \varphi \Rightarrow \vec{V} = V e^{j\alpha(t)} = V e^{j(\omega t + \varphi)} = V e^{j\varphi} e^{j\omega t}$
 non è fisso.

$e^{j\omega t}$ = FASORE.

$\vec{V} = (A_R + j A_I) e^{j\omega t} \Rightarrow \bar{A} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = (A_R + j A_I) e^{j\omega t}$

$\vec{B} = B e^{j\beta} e^{j\omega t} = (B_R + j B_I) e^{j\omega t}$
 \bar{A} = fasore di A pag 260

$\vec{D} = D e^{-j\alpha} e^{j\omega t}$

$d(t) = \sqrt{2} D \text{sen}(\omega t - \alpha)$

$a(t), b(t) \rightarrow$ eq. diffe. $g(t)$

studio + lavoro ma facile.

$\bar{A}, \bar{B} \xrightarrow{\text{Algebra}} \bar{C}$

⊕ $a(t) + b(t) \Leftrightarrow \bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$

Somma di 2 sinusoidi iso freq. è una sinusoid iso freq.

⊖ $K a(t) \Leftrightarrow K \bar{A} = \bar{B}$

$\frac{d}{dt} (a(t)) = +\omega\sqrt{2} A_R \cos(\omega t) - \omega\sqrt{2} A_I \text{sen}(\omega t)$

$\bar{A} = (A_R + j A_I) e^{j\omega t}$

$\frac{d}{dt} (\bar{A}) = (A_R + j A_I) j \omega e^{j\omega t} = j \omega (A_R + j A_I) e^{j\omega t}$ Divergenza temporale

= $j \omega \bar{A} \Rightarrow$ diventa un fasore e porta a un'equazione ALGEBRICA

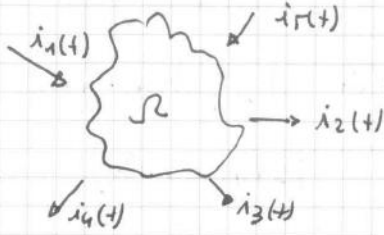
$\bar{A} = (j \omega A_R - \omega A_I) e^{j\omega t}$

= $(- \omega A_I + j \omega A_R) e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{d}{dt} (a(t)) = -\omega\sqrt{2} A_I \text{sen} \omega t + \omega\sqrt{2} A_R \cos \omega t$

⊖ $\frac{d}{dt} (a(t)) \Leftrightarrow \int j \omega \bar{A} \int a(t) dt$

$\int \bar{A} dt = \int (A_R + j A_I) e^{j\omega t} dt =$

Legge delle correnti:



La somma delle correnti entranti deve essere uguale in ogni istante alla somma delle correnti uscenti

$$i_1(t) + i_5(t) = i_2(t) + i_3(t) + i_4(t)$$

$$\sum_e i_e(t) = \sum_n i_n(t) \quad (\text{in regime sinusoidale})$$

In regime Stazionario

$$I_1 + I_5 = I_2 + I_3 + I_4$$

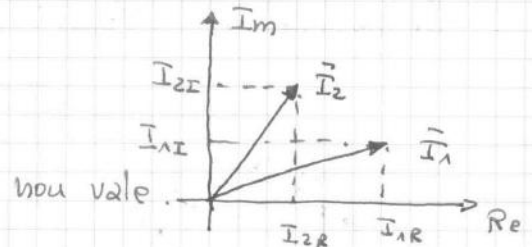
In regime sinusoidale

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_5 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4$$

R = reale I = Immaginario.

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_{1R} + \bar{I}_{5R} &= \bar{I}_{2R} + \bar{I}_{3R} + \bar{I}_{4R} \\ \bar{I}_{1I} + \bar{I}_{5I} &= \bar{I}_{2I} + \bar{I}_{3I} + \bar{I}_{4I} \end{aligned} \right\}$$

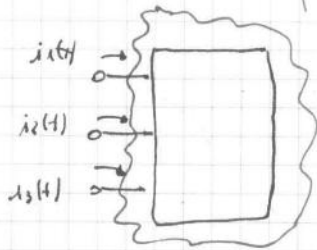
$$|\bar{I}_1| + |\bar{I}_5| = |\bar{I}_2| + |\bar{I}_3| + |\bar{I}_4|$$



$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_{1R} + \bar{I}_{2R} \\ \bar{I}_{1I} + \bar{I}_{2I} \end{aligned} \right\} \quad I = \sqrt{(\bar{I}_{1R} + \bar{I}_{2R})^2 + (\bar{I}_{1I} + \bar{I}_{2I})^2}$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\bar{I}_{1I} + \bar{I}_{2I}}{\bar{I}_{1R} + \bar{I}_{2R}} \right)$$

Si ha un tripolo:



$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

Se si hanno n-poli, allora si possono definire n-1 correnti la n-esima corrente è determinata dalla legge delle correnti

Bipolo:



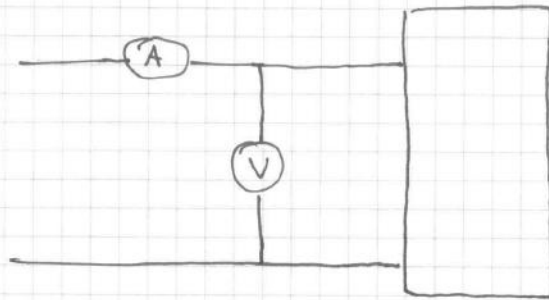
$$i_1(t) + i_2(t) = 0$$

$$\Rightarrow i_2(t) = -i_1(t)$$

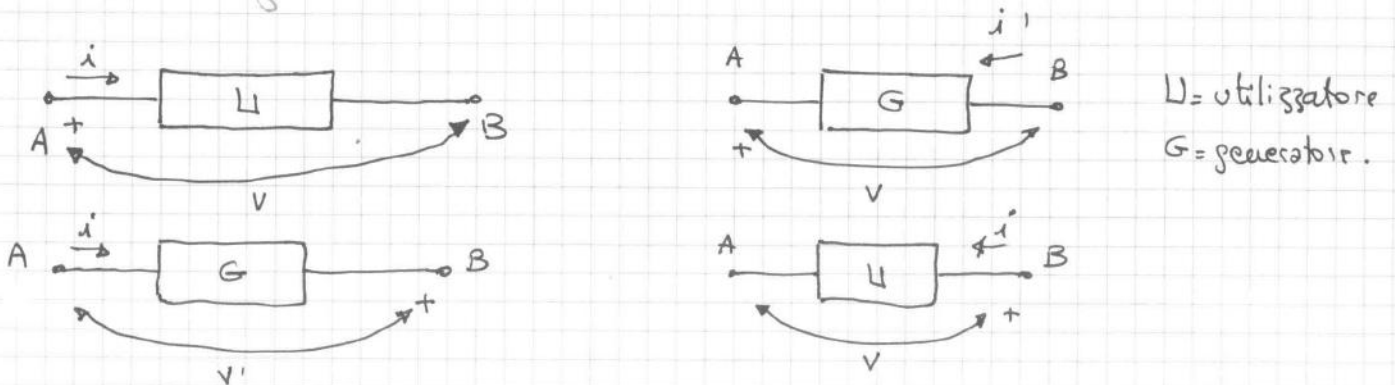
- 1) Un solo valore di corrente
- 2) Il segno meno indica che la corrente entra da un morsetto ed esce dall'altro

Tensione (differenza di potenziale o f.e.m.)
 Ad ogni punto si può attribuire un potenziale, come sulla terra una quota.
 La d.d.p. è la differenza tra le quote

Come si calcolano V e i in un bipolo.



Convenzioni:



Sono scelte arbitrarie.

Ci sono però due coppie

- 1) la corrente esce dal morsetto positivo (G)
- 2) " entra " " " (U)

(U) Convenzione degli utilizzatori

(G) " dei generatori

Sono indifferenti tutti e 4, ma bisogna sapere quale convenzione si usa (per la potenza)

Potenza elettrica:

Si ha un bipolo: $i(t)$ $v(t)$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \rightarrow \text{valore istantaneo (istante per istante)}$$

Se si usa la convenzione degli utilizzatori:

$p(t) > 0$ è fornita dalla rete al bipolo

Se si usa la convenzione dei generatori:

$p(t) > 0$ è fornita dal bipolo alla rete.

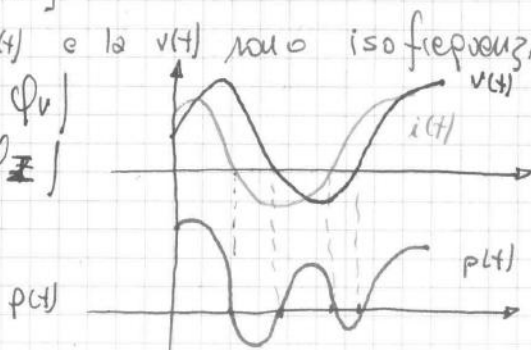
Unità di misura WATT [W]

Nel regime sinusoidale, $i(t)$ e $v(t)$ non sono isofrequenziali

$$v(t) = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \varphi_V)$$

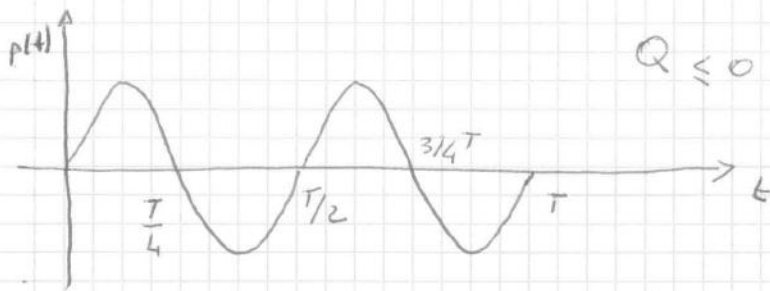
$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi_I)$$

$$\varphi_I > \varphi_V$$



ELETTROTECNICA

\vec{I}, \vec{V} non fasori



$$v(t) \Rightarrow \vec{V} = V e^{j\varphi_V} e^{j\omega t}$$

$$i(t) \Rightarrow \vec{I} = I e^{j\varphi_I} e^{j\omega t}$$

\vec{I}^* (fasore complesso e coniugato) = $I e^{-j\varphi_I} e^{-j\omega t}$

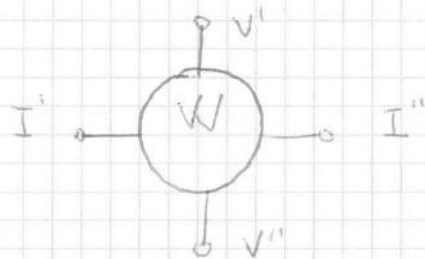
$$\vec{V} \cdot \vec{I}^* = V \cdot I e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} \cdot 1 = V \cdot I \cdot e^{j\varphi}$$

$\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ sfasamento tra tensione e corrente

$$V I e^{j\varphi} = V I \cos\varphi + j V I \sin\varphi = P + jQ$$

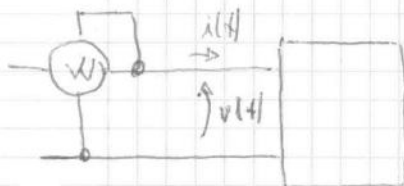
per fortuna: il fasore della tensione x il fasore della corrente mi da come risultato un numero complesso che non è un fasore la cui componente reale coincide con la potenza attiva e la parte immaginaria con la potenza reattiva.

Wattmetro? è un quadripolo



I', I'' sono morsetti ampereometrici

V', V'' morsetti voltmetrici che misurano il differenziale di potenziale.



(sistema ideale)

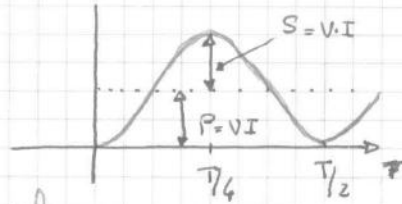
il wattmetro messo così misura il prodotto

$$V_V \hat{I}_I \cdot \cos \varphi = P$$

$$P = VI \cos 0$$

$$S = VI$$

$$Q = 0$$



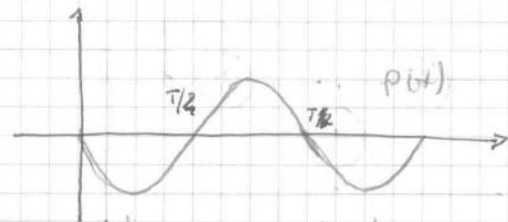
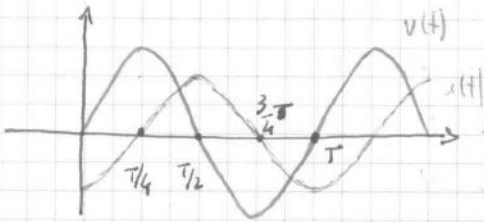
$$\textcircled{*} \quad \varphi_V - \varphi_I = \frac{\pi}{2} \quad \varphi_V = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$P = 0$$

$$S = VI$$

$$Q = VI \sin \frac{\pi}{2} = VI$$



potenza scambiata in un periodo intero = 0

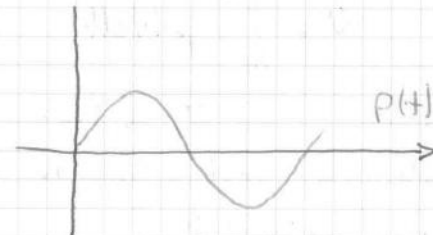
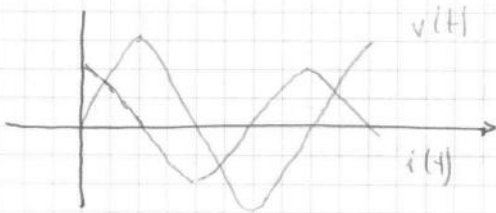
$$Q = +VI$$

$$\textcircled{*} \quad \varphi_V - \varphi_I = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_V = 0$$

$$P = 0$$

$$S = VI$$

$$Q = -VI$$



$$Q \leq 0$$

$P > 0$ e $Q < 0$: cambia bob quando m da o si riceve energia \rightarrow si ha lo stesso scambio totale

$$v(t) \Rightarrow V e^{j\varphi_V} e^{j\omega t} = \bar{V}$$

$$i(t) \Rightarrow \bar{I} = I e^{j\varphi_I} e^{j\omega t}$$

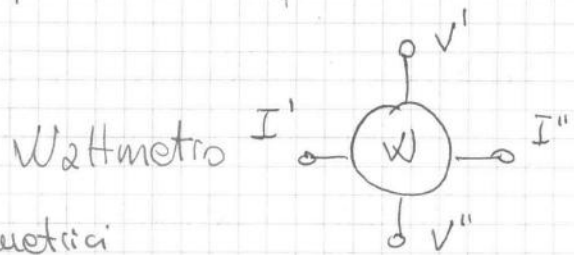
$$\bar{I}^* = \text{Fasore complesso coniugato} = I e^{-j\varphi_I} e^{-j\omega t}$$

$$\bar{V} \cdot \bar{I}^* = VI e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = VI e^{j\varphi} = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi$$

\rightarrow NON è più un fasore, ma un n° complesso

$$279 \text{ (metri)} \Rightarrow \bar{V} \cdot \bar{I}^* = P + jQ$$

Per misurare la potenza



I' e I'' = morsetti amperometrici

\hookrightarrow percorsi della corrente che percorre il polo

V' e V'' = morsetti voltmetrici (misura la tensione)

$$\rightarrow P = V \cdot I$$

Pagina vuota.

Cu ha resistività ($\frac{1}{3}$ dell'alluminio).

Al il doppio del volume per lo stesso.



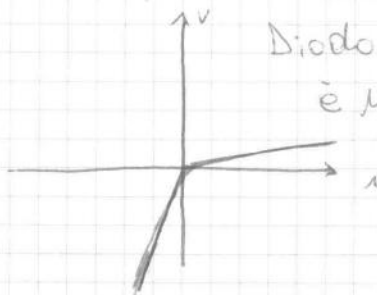
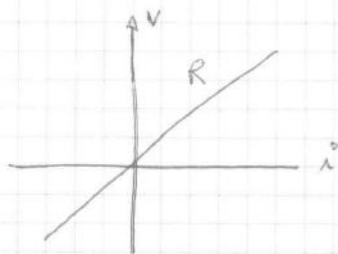
Corrente sinusoidale si distribuisce ai limiti della periferia del conduttore.

Corrente continua si distribuisce uniformemente nel conduttore (sezione).

$P_R = R I_R^2$ $P_R \propto I_R^2 \Rightarrow$ per diminuire la potenza

$P = V I_R = V' I_R'$ dissipata P_R bisogna controllare la I_R .

se $V' > V \Rightarrow I_R' < I_R$ ho abbassato la corrente.



Diode: per correnti grandi la resist. è molto piccola e viceversa.

$R=0$ Corto circuito

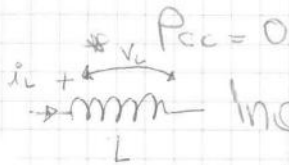


$V_{CC} = R I_R \equiv 0$

$G=0$ Circuito aperto



$I_{CA} = G V_R \equiv 0$



Induttore ideale. (convenzione utilizzatori.)

$v_L = L \frac{di_L}{dt}$

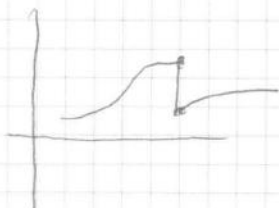
$L =$ induttanza [H] Henry

dal punto di vista energetico:

$P_L = v_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i_L^2 \right)$ energia magnetica immagazzinata

che si crea col passaggio della corrente.

La corrente i_L non deve essere discontinua.

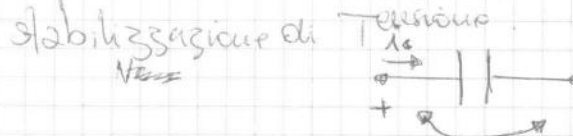


\Rightarrow Es. di discontinuità, derivata dx e sx diverse \Rightarrow v' diverge e v può assumere valori infiniti \Rightarrow non può essere.

NB: ci dice che la corrente non può variare bruscamente, ma.

$$\bar{S}_L = \bar{V}_L \cdot \bar{I}_L^* = j X_L I_L^2 = 0 + j X_L I_L^2 = j \frac{V_L^2}{X_L}$$

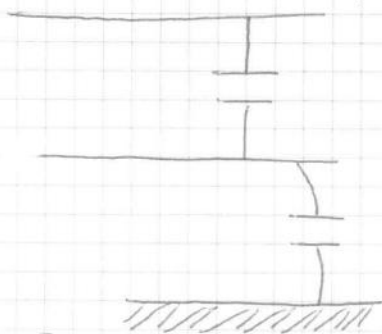
Rifasamento e Condensatore Ideale (conven. Utiliss.)



C capacità [F] Farad
(valore di μF , nF e pF)

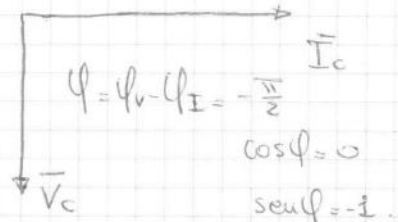
$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow I \text{ in rapporto di proporzionalità con corrente e derivata di } v_c$$

$p_c = v_c i_c = C v_c \frac{dv_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v_c^2 \right)$ Energia elettrostatiche
Nel condensatore ideale la tensione non può variare bruscamente.



Comportamento in regime?

sfasamento di \bar{v}_c di $\frac{\pi}{2}$ in ritardo



Stazionario $I_c = 0$ circuito aperto.

Sinusoidale

$$\bar{I}_c = j 2\pi f_c \bar{V}_c$$

$$V_c = \frac{1}{j 2\pi f_c} I_c = -j \left(\frac{1}{2\pi f_c} \right) I_c = -j X_c I_c$$

Reatt. capaci [R]

$$\bar{V}_c = -j X_c \bar{I}_c$$

$$P_c = 0$$

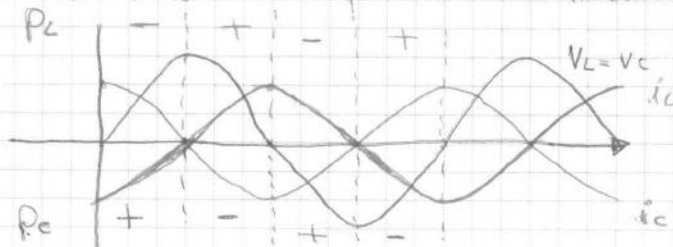
$$Q_c = -V_c I_c \equiv -S_c$$

numericamente uguali.

$P_c = 0 \Rightarrow$ in media il bipolo non scambia energia con la rete, ma istante per istante scambia.

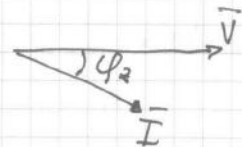
$$\bar{S}_c = \bar{V}_c \bar{I}_c^* = -j X_c I_c^2 = -j \frac{V_c^2}{X_c}$$

Nel caso di condensatore $Q < 0$, induttore $Q > 0$ perché cambia il tempo in cui si libera energia.

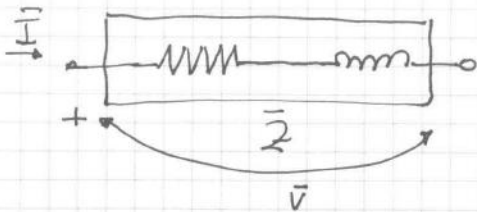


$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = \arctg \pm \frac{X}{R}$$



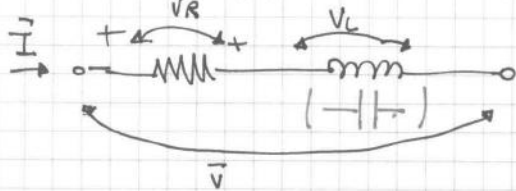
$$\frac{\vec{V}}{\vec{I}} = Z e^{j\varphi_Z}$$



$$\vec{Z} = R + jX \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{V}{I}$$

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^* = \vec{Z} \cdot \vec{I} \cdot \vec{I}^* = (R + jX) I^2 = RI^2 + jXI^2 = \vec{P} + j\vec{Q}$$

$$\vec{Z} \Rightarrow P = R \cdot I^2 \quad Q = \pm X I^2$$



$$P = \frac{V_R^2}{R} \quad Q = \frac{V_L^2}{X}$$

$$Z = R + jX \quad V \quad P? \quad Q?$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad P = R I^2 \quad Q = X \cdot I^2$$

$$S = V \cdot I = Z \cdot I^2 = \frac{V^2}{Z} \quad \text{potenza apparente relativa all'impedenza}$$

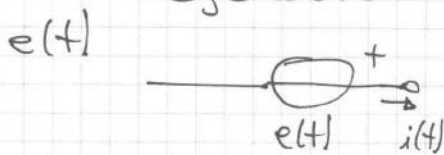
Admettenza. (reciproco dell'impedenza)

$$\vec{Y} = \frac{1}{\vec{Z}} e^{-j\varphi_Z} \quad \text{cambia il segno nella parte immaginaria}$$

$$Z [R] \quad Y [S]$$

Bipolo attivo:

Generatore ideale di tensione:

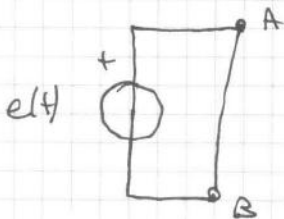


elemento in grado di mantenere una tensione, $e(t)$ tra i suoi morsetti,

costante nel tempo. $p(t) = e(t) \cdot i(t)$

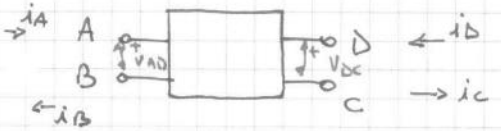
la corrente $i(t)$ dipende dalle caratteristiche della rete a cui viene connessa, il generatore ideale ha potenza illimitata.

Circuito PATOLOGICO: non può essere studiato poiché al suo interno ha delle incompatibilità. In questo caso la tensione del generatore è $e(t)$ mentre la tensione del generatore è $e(t)$



Generatori a corrente continua:

Doppi bipoli



$$i_A = i_B$$

$$V_{AB}$$

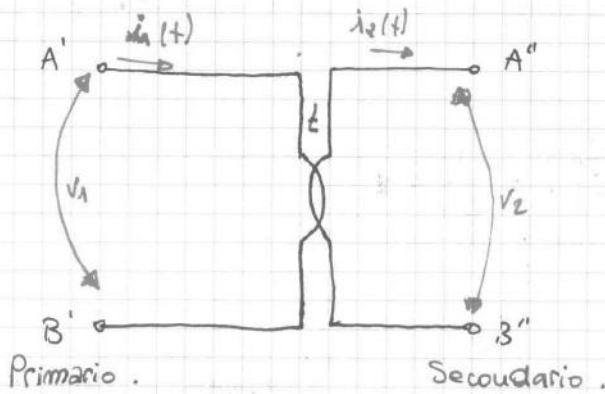
$$i_D = i_C$$

$$V_{BC}$$

Doppio bipolo è caratterizzato da 4 morsetti, 2 correnti (1 corrente entra ed esce) e 2 tensioni presenti nelle 2 coppie di morsetti.

Esempi di "doppio bipolo"

TRASFORMATORE IDEALE:



$k =$ rapporto di trasformazione
 "parametro caratteristico di un trasfor."

$$k \in \mathbb{R}, k > 0$$

$$0 < k < \dots$$

nel circuito primario si utilizza la convenzione degli utilizzatori.
 " " secondario " " " " dei generatori ($i_2(t) > 0$).

$$\begin{cases} V_1 = k V_2 \\ i_1 = \frac{1}{k} i_2 \end{cases}$$

$k > 1$ trasformatore abbassatore $i_1 < i_2$

$k < 1$ " " elevatore $i_1 > i_2$.

La potenza entrante:

$$P_1(t) = v_1(t) \cdot i_1(t) = k v_2(t) \cdot \frac{1}{k} i_2(t) = v_2(t) \cdot i_2(t) = P_2(t)$$

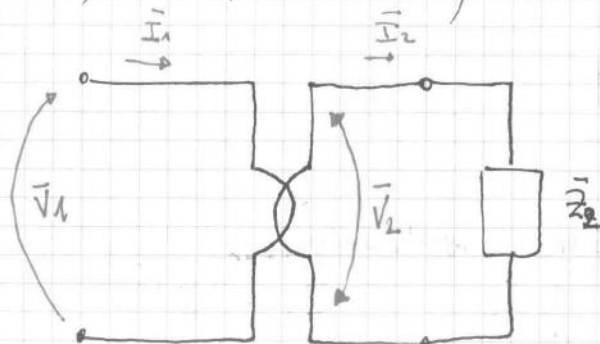
$P_1(t)$ potenza che entra (+) secondo la conv. degli utilizzatori;

$P_2(t)$ potenza che esce (+) secondo la conv. dei generatori.

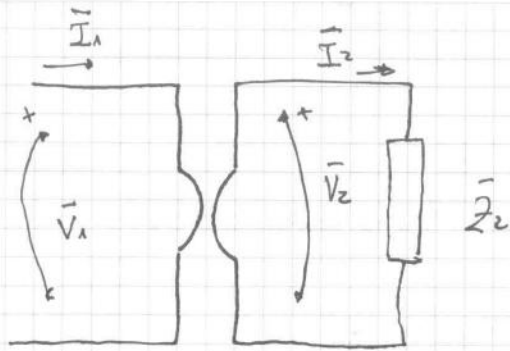
Trasformatore: simula l'energia elettrica trasferendola in da un circuito all'altro.

Trasformatore reale: macchina statica, con due circuiti sconnessi

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = k \bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{1}{k} \bar{I}_2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= \bar{Z}_2 \bar{I}_2 \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$



$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{I}_2}{\gamma \bar{V}_2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2} = \frac{1}{\gamma^2} \bar{Z}_2$$

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{\gamma^2 \bar{Z}_2}$$

una impedenza del 2° circuito diviso per ammettenza per il circuito 1° secondo $\frac{1}{\gamma^2}$.

Esempio:

$$\bar{Z}_2 = jX_L$$

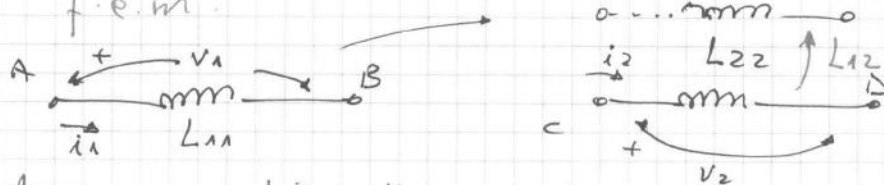
$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{jX_L} = \frac{1}{\gamma^2 jX_L} = -j \frac{1}{\gamma^2 X_L} = -j \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{X_L}$$

$\frac{1}{j} = -j$ condensatore.

N.B: se colleghiamo al secondario una reattanza induttiva (induttore) il primario lo vede come una reattanza capacitiva (condens.)

Induttore mutuamente accoppiato:

un circuito percorso da corrente variabile nel tempo $i(t)$ che genera un campo magnetico \rightarrow in vicinanza di altri circuiti, la $i(t)$ grazie al campo magnetico può generare delle f.e.m.



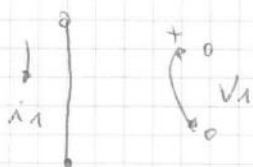
L_{11}, L_{22} sono autoinduttanze

$$\begin{cases} v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} \end{cases} \begin{cases} \text{nel caso di induttori mut.} \\ \text{accoppiati, la tensione dipende} \\ \text{non solo dall'induttore stesso ma} \\ \text{anche dal circuito in prossimità.} \end{cases}$$

Generatori ideali pilotati caratterizzati da 2 circuiti diversi:

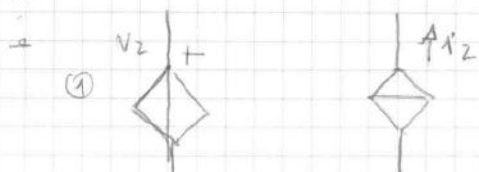
* CIRCUITO DI PILOTAGGIO

+ circuito senza perdite, usato per misurare un segnale che serve per controllare



* CIRCUITO DI POTENZA.

+ è un generatore di tensione (v) o generatore ideale di corrente (i)

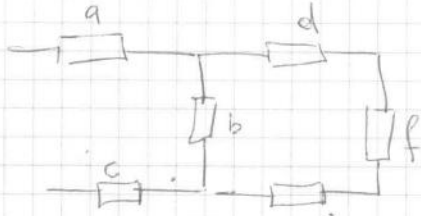


Serie.

- due bipoli sono connessi in serie se si verificano 2 condizioni
- 1) stessa corrente.
 - 2) la medesima corrente percorre successivamente



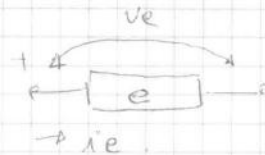
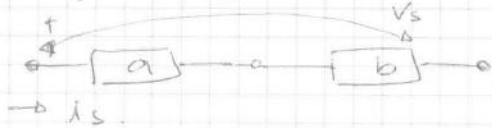
a, b hanno un morsetto unico in comune.



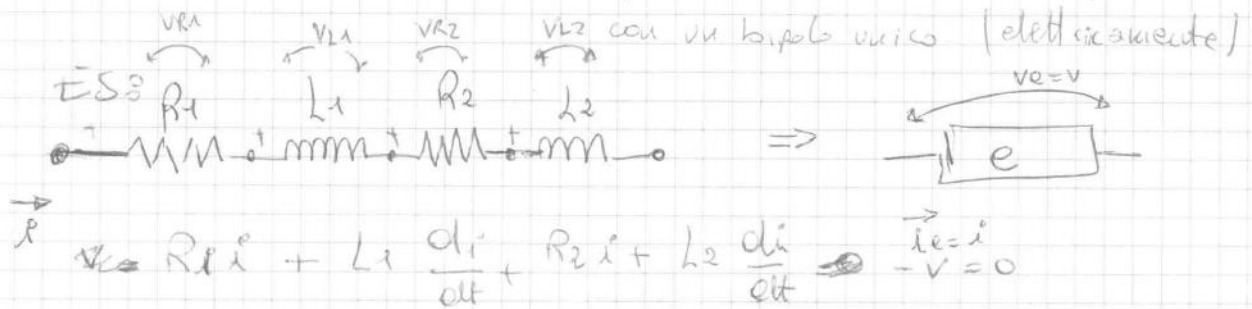
d, f, g sono in serie

a, c sono in serie.

Bipoli equivalenti



se $\begin{cases} v_s = v_e \\ i_s = i_e \end{cases} \Rightarrow$ allora, indice che e è un bipolo equivalente ad (a,b) \Rightarrow posso sostituire

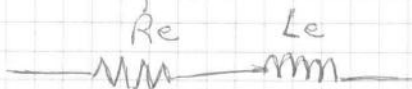


$$v_e = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \quad \begin{matrix} i_e = i \\ -v = 0 \end{matrix}$$

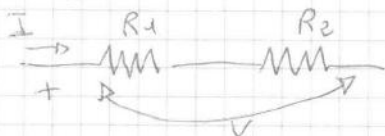
$$v = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} =$$

$$= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} \Rightarrow \begin{cases} R_e = R_1 + R_2 \\ L_e = L_1 + L_2 \end{cases}$$

Circuito equivalente




Reg: Stazionario

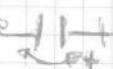


$$\frac{I_e}{v_e} = \frac{R_e}{v_e} \Rightarrow R_e = R_1 + R_2$$

Reg: Sinusoidale

$$V_{eo} = \sum_{i=1}^n \pm V_{c10}$$

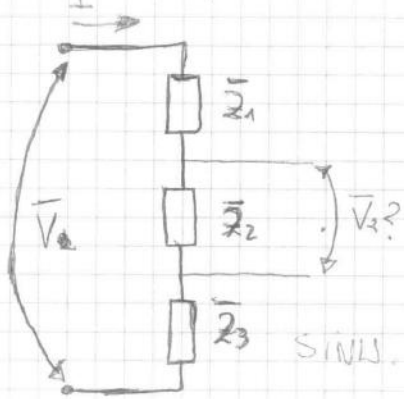
(+) se il segno ~~è~~ ^{il segno} è ~~lo stesso~~ e concorde 

(-) se il segno della tensione è discorde 

SINUSOIDALE

$$\bar{Z}_e = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i = \sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^n \pm jX_i$$

PARTITORE DI TENSIONE

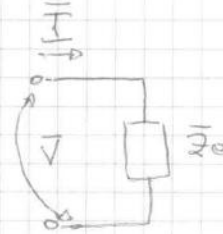


$$\bar{V}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I}$$

$$\bar{Z}_e = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3$$

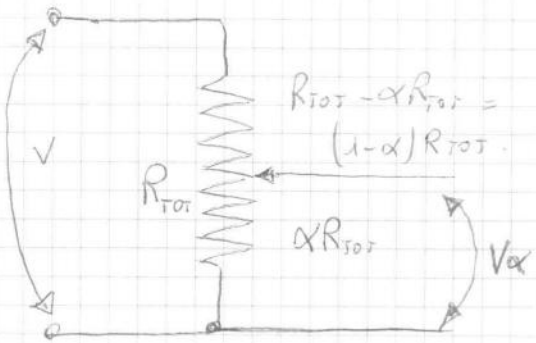
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_e}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I} = \bar{Z}_2 \cdot \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_e}$$



SINU. $\bar{V}_2 = \bar{V} \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$ Partitore di tensione.

STAT. $V_2 = V \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$



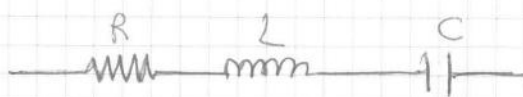
$\alpha R =$ frazione di R
 $0 \leq \alpha \leq 1$

$$V_\alpha = V \cdot \frac{\alpha R_{TOT}}{\alpha R_{TOT} + (1-\alpha)R_{TOT}} = V \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$V_\alpha = V \cdot \frac{\alpha R_{TOT}}{\alpha R_{TOT} + (1-\alpha)R_{TOT}} = V \cdot \frac{\alpha}{\alpha + (1-\alpha)}$$

$$V_\alpha = \alpha \cdot V$$

* * * * *
 SINUSOIDALE



$$X_L = 2\pi fL$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

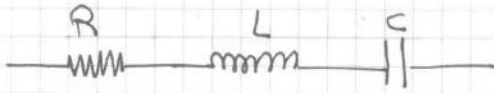
$$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

se $X_L = X_C$ il bipolo n dice in RISONANZA.

$$\bar{Z} = R$$

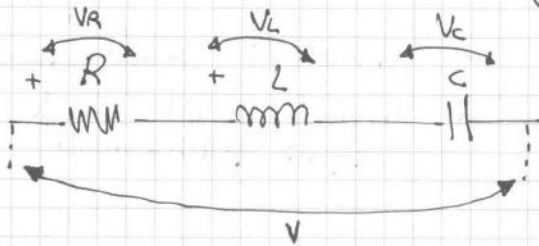
Tensione in Risonanza $\bar{V}_R = R \bar{I}_R \Rightarrow P_R = R \bar{I}_R^2$

$$\bar{V}_{Lc} = j X_L \bar{I}_R \quad \bar{V}_{Ce} = -j X_C \bar{I}_R \quad Q_R = 0$$



$$X_L = X_C \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Banda passante: l'intervallo $[f_1, f_2]$ entro il quale il valore della corrente è superiore al valore arbitrario $\frac{I_M}{\sqrt{2}}$



$$\bar{V}_R = \bar{V} \frac{R}{R + jX_L + jX_C}$$

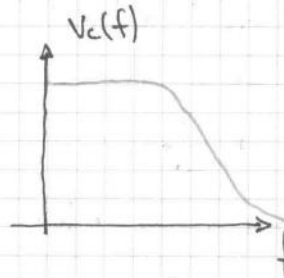
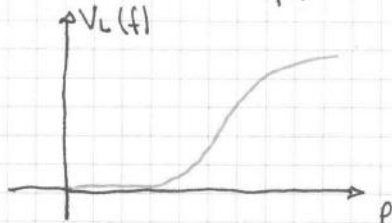
$$V_R = V \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

F. passa banda: a parità di tensione ottengo frequenze diverse.

$$\bar{V}_L = \bar{V} \frac{jX_L}{R + jX_L - jX_C} \Rightarrow V_L = V \frac{2\pi fL}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2}}$$

$\left. \begin{array}{l} f \rightarrow 0 \\ V \rightarrow 0 \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} f \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \text{infinito} \end{array} \right\}$

$$V_C = V \frac{1/2\pi fC}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2}}$$



caso:

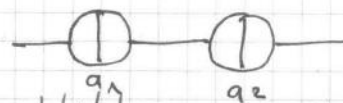
$V_L(f)$: le frequenze basse si eliminano e quella alte vengono amplificate.

$V_C(f)$: contrario di $V_L(f)$.

→ I comportamenti "capacitivo ed induttivo" non sono eliminabili in una rete elettrica.

- 1) la corrente → genera campo magnetico ⇒ fenomeno induttivo in circuiti in vicinanza.
- 2) Cavi conduttori isolati → fenomeno capacitivo.

Generazione di corrente?



$a = \text{corrente}$

1) se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow$ caso di incompatibilità

2) se $a_1 = a_2 \Rightarrow$ ok, ma diventa indistinguibile che cosa succede in ogni singolo generatore

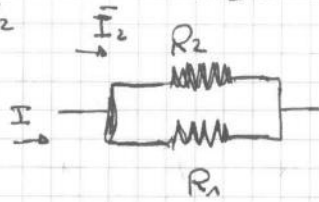
$$\vec{V} = \vec{I} \cdot \vec{Z}_e = \vec{I} \cdot \frac{\vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2} \Rightarrow \vec{I}_1 = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_1}$$

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{I} \cdot \vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2}{\vec{Z}_1(\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2)} = \vec{I} \cdot \frac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2}$$

Partitore di corrente.

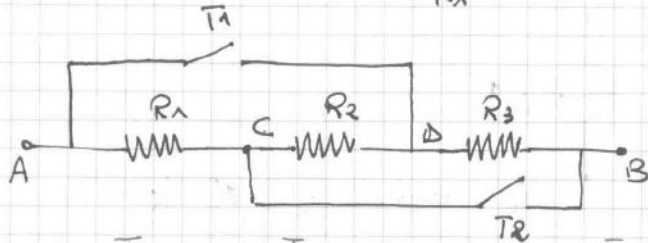
$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

SHUNT:



$$R_2 = 99 R_1$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad I_2 = I \cdot \frac{1}{100}$$



- caso $T_1 = 0, T_2 = 0$

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3$$

- caso $T_1 = C, T_2 = 0$

$$R_e = R_3$$

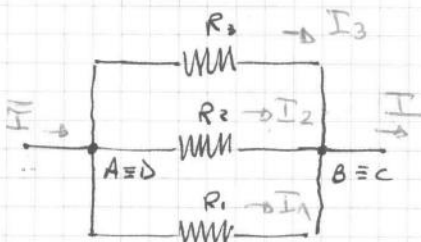
- caso $T_1 = 0, T_2 = C$

$$R_e = R_1$$

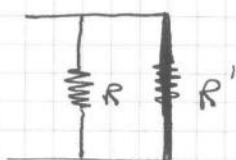
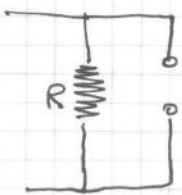
- caso $T_1 = T_2 = C$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

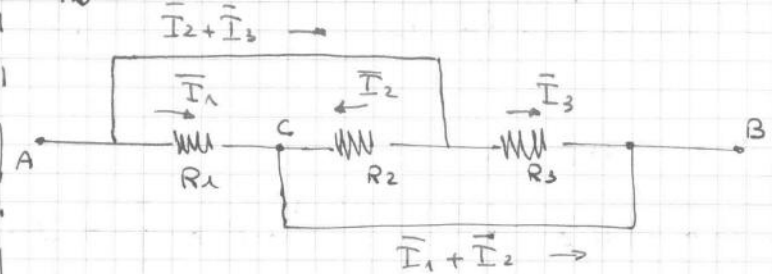
Circuito equivalente:



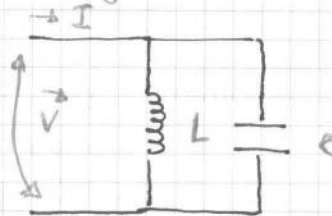
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$



$$R_e = \frac{R \cdot R'}{R + R'} = 0$$



Regime sinusoidale:



$$X_L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$\vec{Z}_e = \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - (-jX_C)} = \frac{X_L \cdot X_C}{j(X_L - X_C)} = -j \frac{X_L \cdot X_C}{X_L - X_C}$$

se $X_L \rightarrow X_C$ o $X_C \rightarrow X_L$

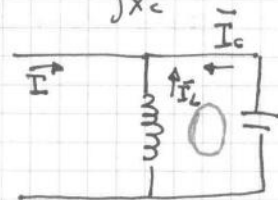
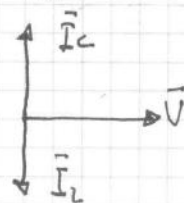
$Z_e \rightarrow \infty$ = circuito aperto

$$f_a = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

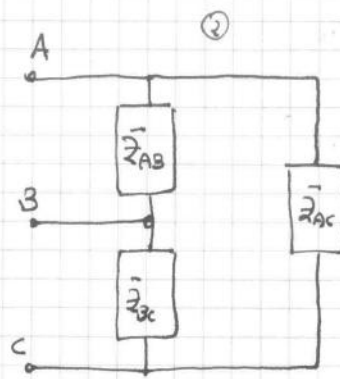
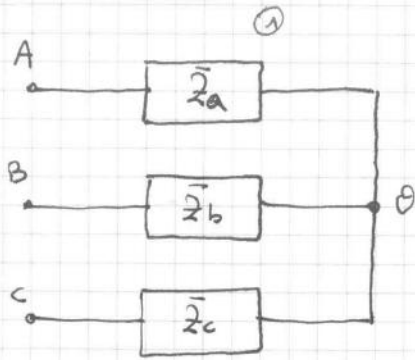
$$I = 0$$

$$I_L = \frac{\vec{V}}{jX_L}$$

$$I_C = -\frac{\vec{V}}{jX_C}$$



Continuazione triangolo-stella



(1) è equivalente a (2) e viceversa se le tensioni ai morsetti e le correnti circolanti rimangono inalterati (uguali).

trasformazione

$Y \rightarrow \Delta$

tutti i prodotti possibili

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b + \frac{\bar{Z}_a \bar{Z}_b}{\bar{Z}_c} = \frac{\bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_c + \bar{Z}_b \cdot \bar{Z}_c + \bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_b}{\bar{Z}_c}$$

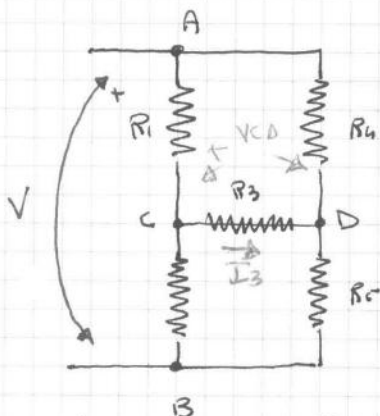
$$\bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_b + \bar{Z}_c + \frac{\bar{Z}_b \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_a} = \frac{\bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_c + \bar{Z}_b \cdot \bar{Z}_c + \bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_b}{\bar{Z}_a}$$

$$\bar{Z}_{CA} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_c + \frac{\bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_b} = \frac{\bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_c + \bar{Z}_b \cdot \bar{Z}_c + \bar{Z}_a \cdot \bar{Z}_b}{\bar{Z}_b}$$

Se $\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = \bar{Z}_Y$

$$\Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_{CA} = \bar{Z}_\Delta = 3\bar{Z}_Y$$

Esercizio



Dati

$$R_1 = 15 \Omega$$

$$R_2 = 10 \Omega$$

$$R_3 = 15 \Omega$$

$$R_4 = 15 \Omega$$

$$R_5 = 5 \Omega$$

esprimete

Richieste:

R_e

$$I_3 = ? \text{ con } V = 132 \text{ V}$$

A serie o parallelo \Rightarrow ho 2 configurazioni stella e 2 config. triangolo.

$$Y \Rightarrow C (R_1, R_2, R_3)$$

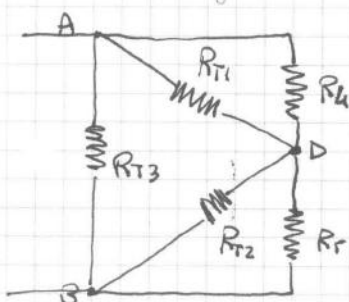
$$\Delta \Rightarrow R_1, R_3, R_4$$

$$\Delta \Rightarrow (R_4, R_3, R_5)$$

$$\Delta \Rightarrow R_2, R_3, R_5$$

Cercò di sostituire $Y \rightarrow \Delta$ o viceversa?

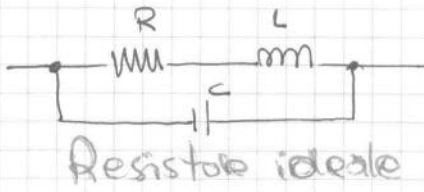
Alla configurazione stella gli centri C (R_1, R_2, R_3) sostituisco una config. 2 triangolo.



R_{11}, R_{12}, R_{13} sono ottenute secondo le relazioni che legano $\Delta \leftrightarrow Y$

\Rightarrow pieno a calcolare R_{eq} .

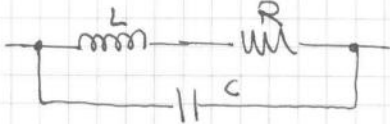
$$R_{11} \parallel R_4, R_{12} \parallel R_5 \text{ ecc.}$$



Resistore ideale

$R \ll \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow$ la corrente in parallelo passa prevalentemente attraverso L e non attraverso C

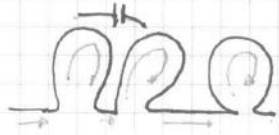
Induttore reale.



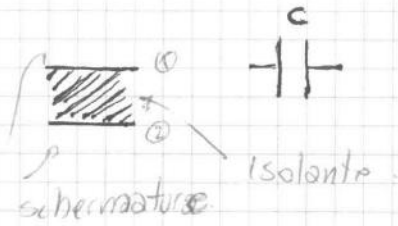
$f \cdot 2\pi f L \gg R$

Capacità parassite: non sono facilmente individuabili, non solo capacitivamente (interna) ma anche di tipo esterno (con la terra).

Ogni tanto si fanno sentire con dei comportamenti di "risonanza".



la corrente salta da una spira all'altra. \Rightarrow la corrente è distribuita uniformemente lungo tutta la spira \Rightarrow si può rappresentare con un condensatore

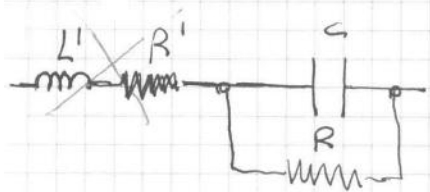


isolante

il passaggio della corrente in un condensatore ~~non~~ ideale avviene per via di polarizzazione.

isolante ha resistenza altissima ma non infinita \Rightarrow la corrente passa:

- \rightarrow per conduzione (piccolissima corrente) R
- \rightarrow per polarizzazione C



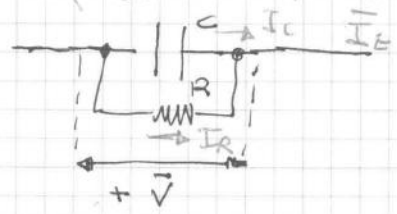
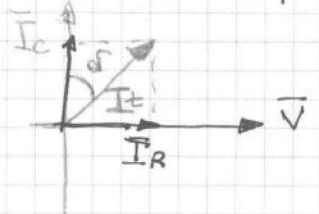
la corrente che arriva all'isolante (e) si distribuisce in R' (conduzione)

la corrente che percorre il condensatore ideale crea un campo magnetico L'

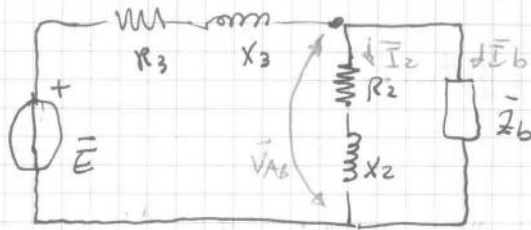
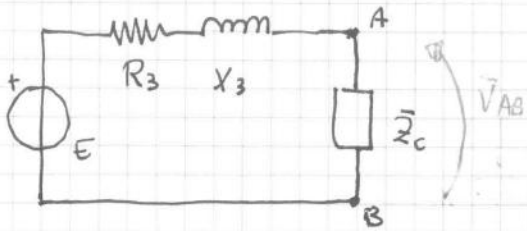
L' e R' non trascurabili.

Maggiore è R maggiore è la qualità del condensatore.

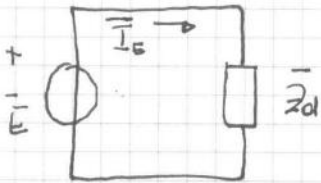
$f \Rightarrow \frac{1}{2\pi f C} = X_C$



$$\bar{z}_c = \frac{\bar{z}_b (R_2 + jX_2)}{\bar{z}_b + R_2 + jX_2}$$



$$\bar{z}_d = \bar{z}_c + R_3 + jX_3 = 12 + j9$$



$$\bar{I}_E = \frac{\bar{E}}{\bar{z}_d} = \frac{120}{12 + j9} = \frac{12 - j9}{12 - j9} = \frac{12 - j9}{15}$$

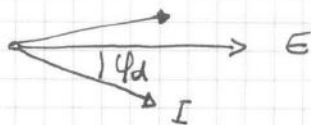
$$\bar{I}_E = \frac{120}{15} (12 - j9) = 6,4 - j4,8$$

$$\varphi_d = \tan^{-1}\left(\frac{9}{12}\right) = 0,64$$

$$I = \frac{E}{|\bar{z}_d|} e^{j(\varphi_e - \varphi_d)} = \frac{120}{15} e^{-j\varphi_d}$$

\bar{V}_{AB} si calcola anche con il partitore di tensione

$$\bar{V}_{AB} = \bar{I}_E \cdot \bar{z}_c = (6,4 - j4,8)(5 + j5) = 56 + j8$$



$$\bar{z}_b = R_2 + jX_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_E \frac{\bar{z}_b}{\bar{z}_b + R_2 + jX_2} = \frac{\bar{I}_E}{2}$$

$$\bar{I}_2 = 3,2 - j2,4$$

$$\bar{I}_b = 3,2 - j2,4$$

$$I_1 = \frac{\bar{V}_a}{R_1} = 0,4 - j2,8$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_b - \bar{I}_1 = (3,2 - j2,4) - (0,4 - j2,8) = 2,8 + j0,4$$

$$\bar{V}_1 = jX_1 \cdot \bar{I}_b = j64 + 48 = 48 + j64$$

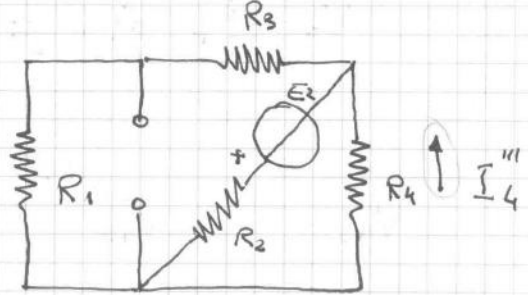
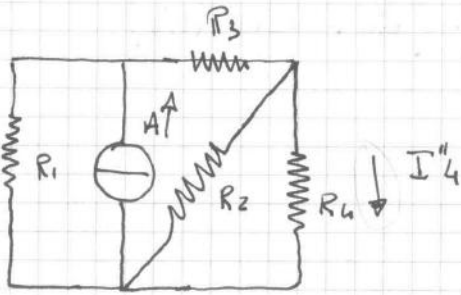
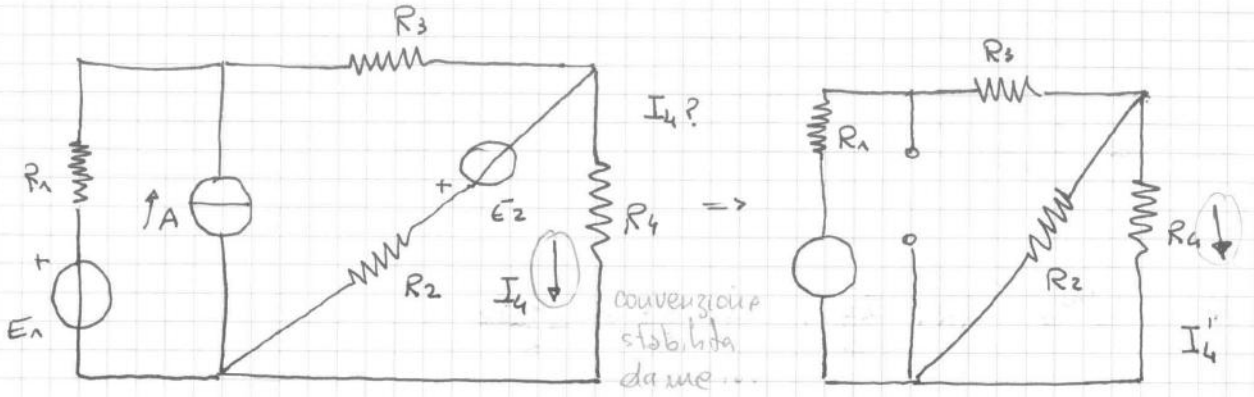
$$\bar{V}_a = \bar{V}_{AB} - \bar{V}_1 = 56 + j8 - 48 - j64 = 8 - j56$$

$V_{AB} < V_1 \Rightarrow$ perché X_1 (elemento induttivo) e \bar{z}_a elemento capacitivo si compensano a v.c.c.a.

Falsa Posizione

Supponiamo che nella capacità circoli una corrente arbitraria (circuito iniziato) $I_c = 1 + j0$

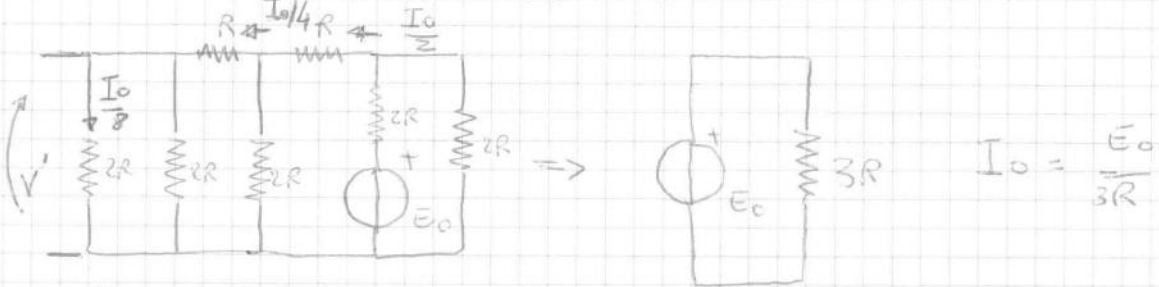
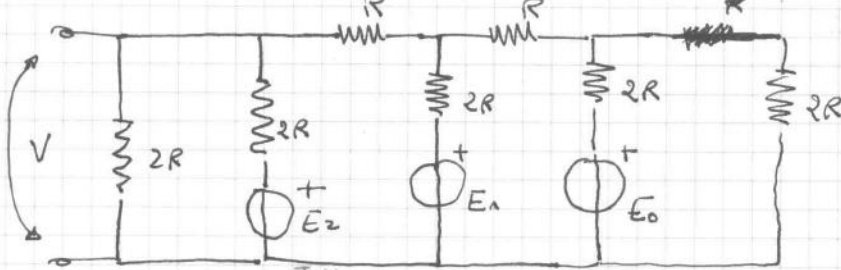
Trovo \bar{E}' tensione del generatore e per linearità $\frac{\bar{I}_c}{\bar{E}'} = \bar{K}$



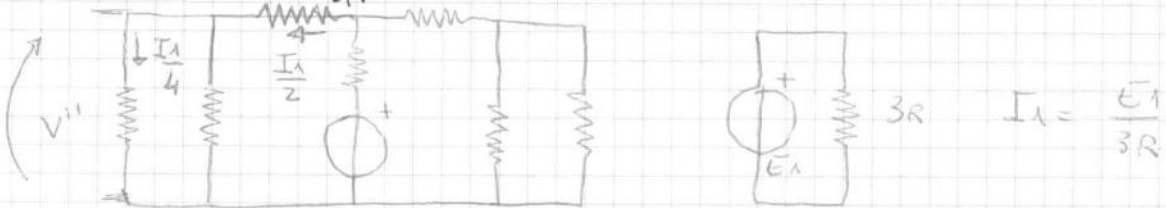
$$I_4 = +I_4' + I_4'' - I_4'''$$

$P_4 \neq P_4' + P_4'' + P_4'''$ No perché le potenze non sono lineari

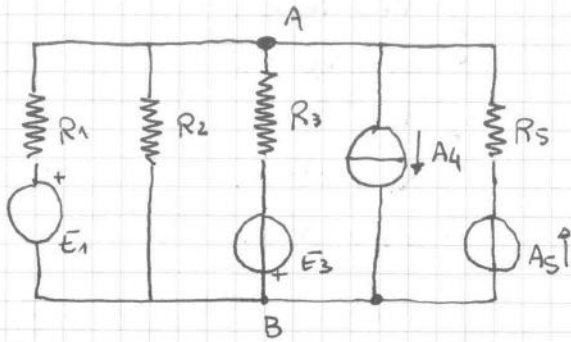
* * * * *



⊕ $V' = 2R \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{E_0}{3R} = \frac{E_0}{12}$



⊕ $V'' = 2R \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{E_1}{3R} = \frac{1}{6} E_1$



In situazione di generatore ideale di tensione:

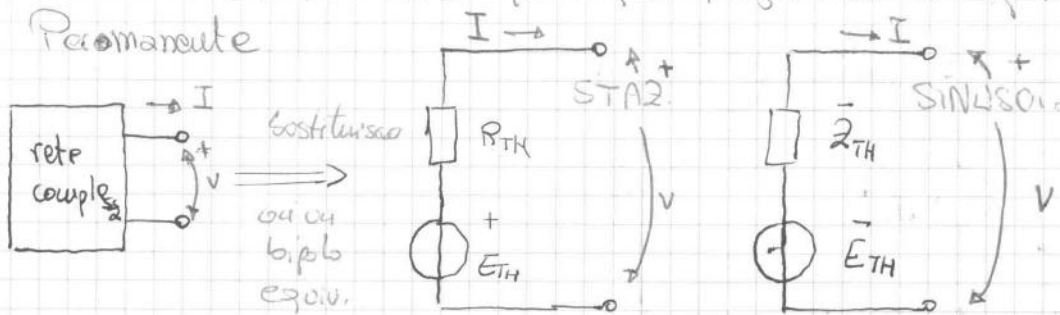
$$V_{AB} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} = -A_4 + A_5$$

resistenze che non contengono generatori ideali...

- ⊕ concorde con A
- ⊖ concorde con B
- ⊖ corrente uscente da A
- ⊕ corrente entrante in A

Teorema di Thevenin (Bernard)

Se avessimo una rete qualunque funzionante in regime Peromaneute

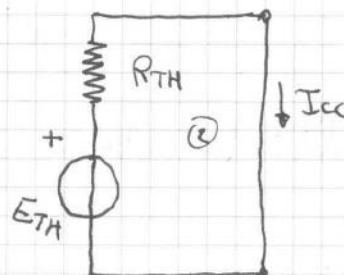
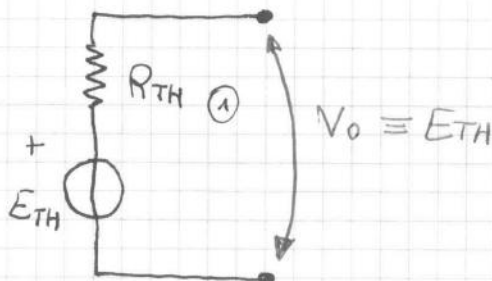


Qualunque rete (complessa sia) può essere sostituita da un circuito equivalente (generatore di tensione reale = bipolo)

I, V devono essere uguali per tutti i circuiti...

Determinazione di E_{TH} , R_{TH} e Z_{TH} , \bar{E}_{TH} :

In regime stazionario:



$$I_{cc} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}$$

$$R_{TH} = \frac{E_{TH}}{I_{cc}}$$

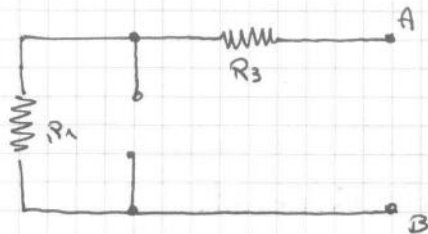
$$R_{TH} = \frac{V_0}{I_{cc}}$$

per E_{TH} , metto il circuito a vuoto (aperto) * per R_{TH} , corto circuito.

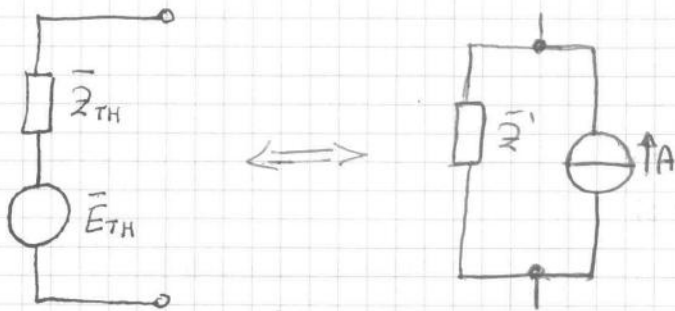
1) Tensione a vuoto ...

2) Caratteristiche del bipolo (R_{TH}) ...

} determino il bipolo di Thevenin...



$R_{TH} = R_1 + R_3 = 50 \Omega$
 Questo metodo vale \Leftrightarrow non contiene generatori pilotati.



$$\bar{A} = \frac{\bar{E}_{TH}}{\bar{Z}_{TH}} = \bar{I}_N$$

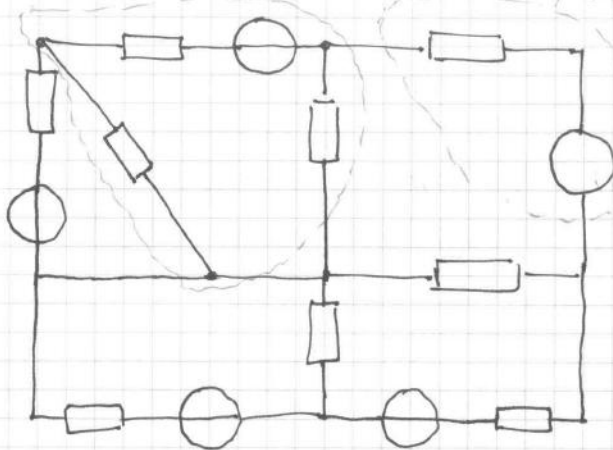
$$\bar{Z}' = \bar{Z}_{TH} = \bar{Z}_N$$

Se uso generatori ideali di tensione uso Theven. Altrimenti uso Norton...

Teorema di Norton:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_{CC} \quad \bar{Z}_N = \bar{Z}_{TH}$$

Esempio: 2° bipolo



Teorema di Thevenin: dividerla rete in n bipoli trasformarli in circuiti equivalenti semplici e poi ricostruirli per avere una rete meno complessa...

Metodo di:

- 1) riduzione ad un'unica impedenza (presenza di un punto nodo).
- 2) Falsa posizione
- 3) Sovrapposizione degli effetti
- 4) Milman
- 5) Thevenin
- 6) Norton

Supponiamo di avere una rete con b bipoli equivale a calcolare $2b$ grandezze (incognite) $\left\{ \begin{array}{l} V_b \\ I_b \end{array} \right.$

- 1) Equazioni costitutive: b eq.

Principio di Kir

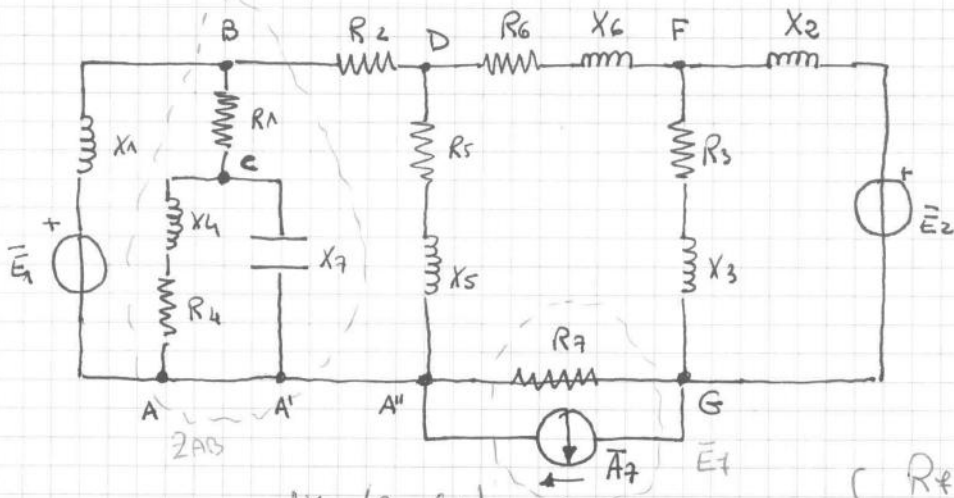
- 1) Equazioni ai nodi
- 2) Equazioni alle maglie

$\left. \begin{matrix} I^\circ \text{ principio} \\ II^\circ \text{ principio} \end{matrix} \right\} \text{ sistema.}$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -E_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 + E_2 = 0 \\ -E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + V_3 = 0 \end{cases}$$

incognite = I_1, I_2, I_3

Passo da un circuito \implies ad un sistema di equazioni...

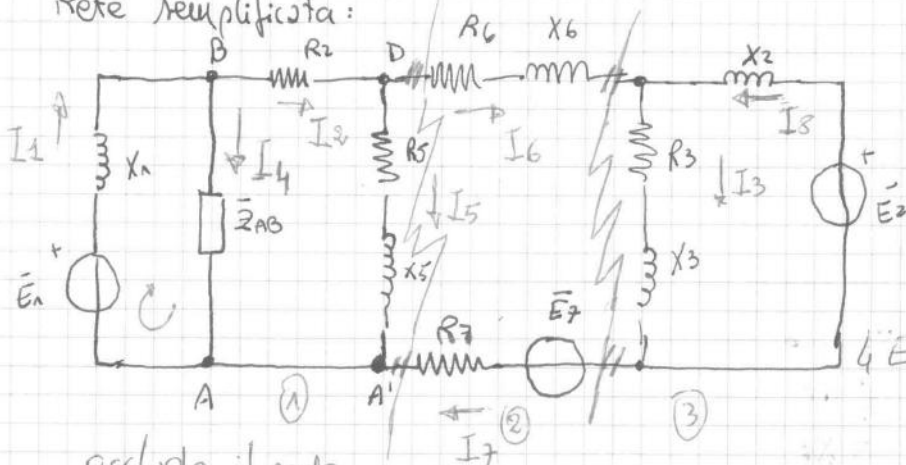


M lati
 M incognite

$$Z_{AB} = R_1 + \frac{-jX_7 \cdot (R_4 + jX_4)}{-jX_7 + R_4 + jX_4}$$

$$\left. \begin{matrix} R_{\bar{e}} \\ \bar{E}_7 = \bar{A}_7 \cdot R_{\bar{e}} \end{matrix} \right\}$$

Rete semplificata:

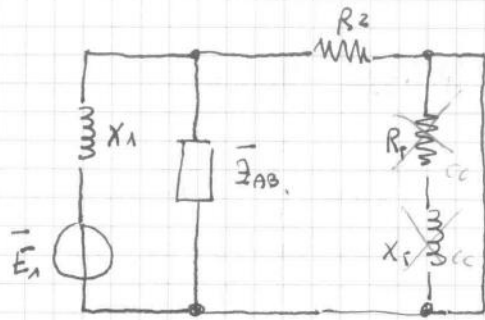


8 lati
 8 eq con 8 incognite
 8 correnti...
 5 nodi
 4 Eq ai nodi

escludo il nodo che contiene + correnti (nodo A) per semplificare?

Eq. di nodi

nodo B: $\bar{I}_1 = \bar{I}_e + \bar{I}_4$



1) I_{cc} secondo milman:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\bar{E}_1}{\frac{1}{jX_1} + \frac{1}{Z_{AB}} + \frac{1}{R_2}}$$

$$I_{cc} = \frac{\bar{V}_{AB}}{R_2}$$

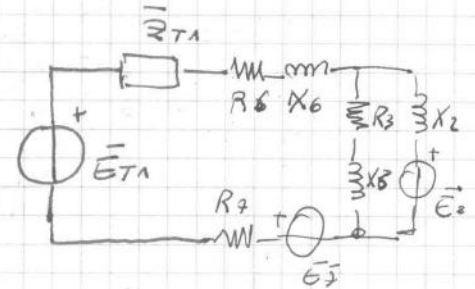
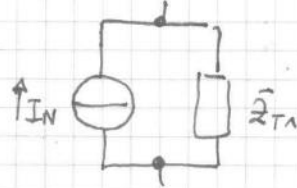
- 2) $Z_{AB} // R_2 \Rightarrow$ in + partitore di tensione ...
 3) $Z_{eq} = jX_1 + Z_{AB} // R_2 \Rightarrow$ in + partitore di corrente su R_2 ...

Circuito equivalente di Norton...

$$\bar{I}_{cc} = \bar{I}_N$$

$$\bar{Z}_{TA} = \bar{Z}_N$$

$$\bar{E}_{TA} = \bar{I}_N \cdot \bar{Z}_{TA}$$

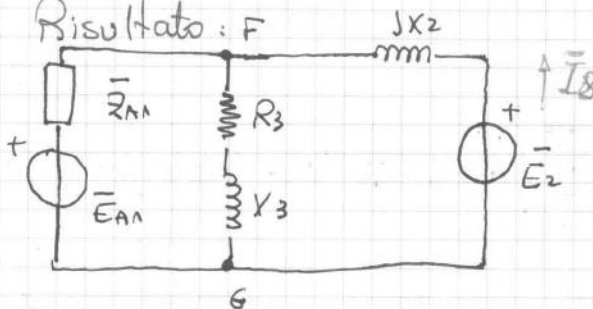


rete con 2 nodi (posso applicare Milman)

$$\bar{E}_{A1} = \bar{E}_{TA} + \bar{E}_2 =$$

$$\bar{Z}_{A1} = R_7 + \bar{Z}_{TA} + R_6 + jX_6$$

Risultato: F



$$\bar{V}_{FG} = \frac{\bar{E}_{A1} + \bar{E}_2}{\frac{1}{Z_{A1}} + \frac{1}{R_3 + jX_3} + \frac{1}{jX_2}}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{FG}}{R_3 + jX_3}$$

Per calcolare \bar{I}_8 applico la legge delle tensioni

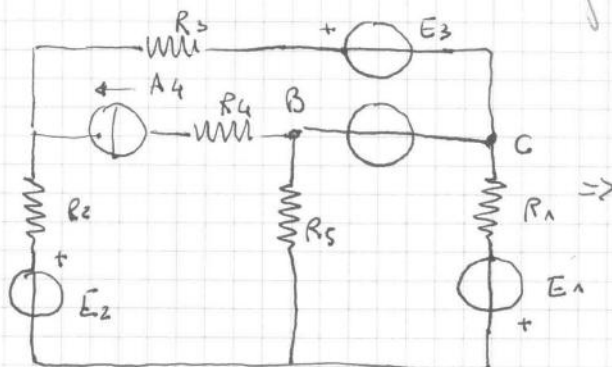
$$\bar{V}_{FG} = \bar{E}_2 - jX_2 \bar{I}_8 \Rightarrow \bar{I}_8 = - \frac{\bar{V}_{FG} - \bar{E}_2}{jX_2}$$

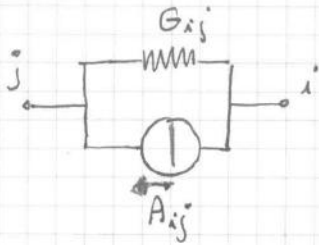
$$\bar{I}_6 + \bar{I}_8 = \bar{I}_3$$

$$\bar{I}_6 = \bar{I}_7$$

Note \bar{I}_6 e \bar{I}_7

Correnti alle maglie:



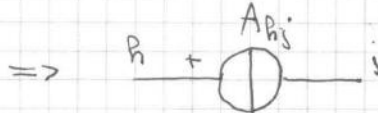
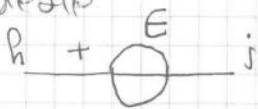


- trasformo il circuito in questo modo
 - escluso un nodo a scelta

$$j) \sum_{k=1}^{ne} +G_{kj} V_j - \sum_{l=1}^{nm} (G_{je}) V_l - \sum_{k=1}^{ne} G_{ks} V_k - \sum_{l=1}^{nu} G_{je} V_l =$$

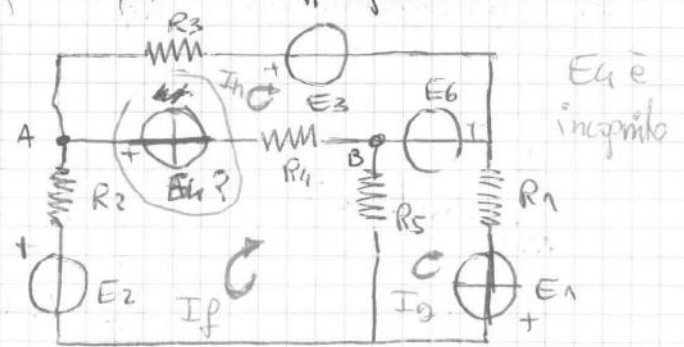
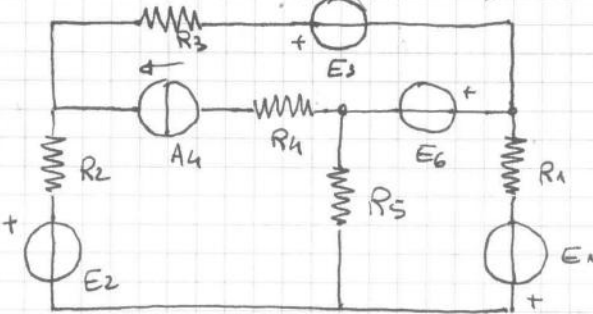
$$= \sum_{k=1}^{ne} A_{kj} - \sum_{l=1}^{nm} A_{jl}$$

Caso di gen. di tensione ideale



A_{hj} è incognita
 quindi si incrementa \rightarrow
 $V_h - V_j = E$

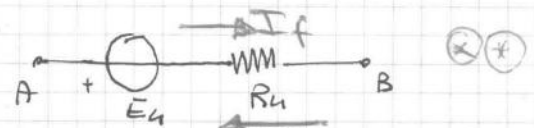
\rightarrow il numero di incognite \rightarrow un Eq in più



$$V_{AB} = E_4 + (I_f - I_h) R_4$$

Tre eq. alle maglie:

- f) $-E_2 + R_2 I_f + E_4 + R_4 I_f - R_4 I_h + R_5 I_f - R_5 I_g$
- g) $R_5 I_g - R_5 I_f - E_6 + R_1 I_g - E_1 = 0$
- h) $R_3 I_h + E_3 + E_6 + R_4 I_h - R_4 I_f - E_4 = 0$
- ** $A_4 = I_h - I_f$

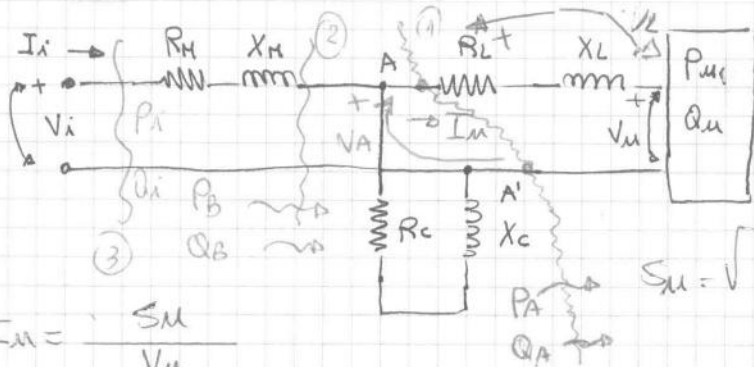


- f) $(R_2 + R_4 + R_5) I_f - R_4 I_h - R_5 I_g = E_2 - E_4$
- g) $(R_5, R_1) I_g - R_5 I_f = E_1 + E_6$
- h) $(R_3 + R_4) I_h - R_4 I_f = E_4 - E_3 - E_6$

Rete planare: r. che può essere disegnata in modo che non ci siano incroci...

- Metodo di risoluzione \Rightarrow

- 1) solvo (serie parallelo)
- 2) posso applicare Millman (2 nodi)?
- 3) " " Thevenin, Norton?



I_i, V_i ?
Tutti gli altri parametri
sono noti

$$S_M = \sqrt{P_M^2 + Q_M^2} = V_M \cdot I_M$$

$$I_M = \frac{S_M}{V_M}$$

$$P_L = R_L \cdot I_M^2$$

$$Q_L = X_L \cdot I_M^2$$

Solo con valori efficaci

Applico Buchero T:

$$\textcircled{1} \quad P_A = P_M + P_L \quad Q_A = Q_M + Q_L$$

$$\Rightarrow S_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = V_A \cdot I_M \Rightarrow V_A = \frac{S}{I_M}$$

$$I_C = \frac{V_A}{\sqrt{R_C^2 + X_C^2}} \Rightarrow P_C = R_C \cdot I_C^2$$

$$Q_C = X_C \cdot I_C^2$$

$$\textcircled{2} \quad P_B = P_M + P_L + P_C = P_A + P_C; \quad Q_B = Q_M + Q_L + Q_C = Q_A + Q_C$$

$$S_B = \sqrt{P_B^2 + Q_B^2} = V_A \cdot I_i$$

$$I_i = \frac{S_B}{V_A} \Rightarrow \begin{cases} P_M = R_M \cdot I_i^2 \\ Q_M = X_M \cdot I_i^2 \end{cases}$$

$$S_M = \sqrt{P_M^2 + Q_M^2} = V_M \cdot I_i \Rightarrow V_M = \frac{S_M}{I_i}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} P_i = P_A + P_B \\ Q_i = Q_M + Q_B \end{cases} \Rightarrow S_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2} = V_i \cdot I_i$$

$$V_i = \frac{S_i}{I_i}$$

Con valori complessi (fasori)

$$\bar{V}_M \Rightarrow \bar{S}_M = P_M + jQ_M$$

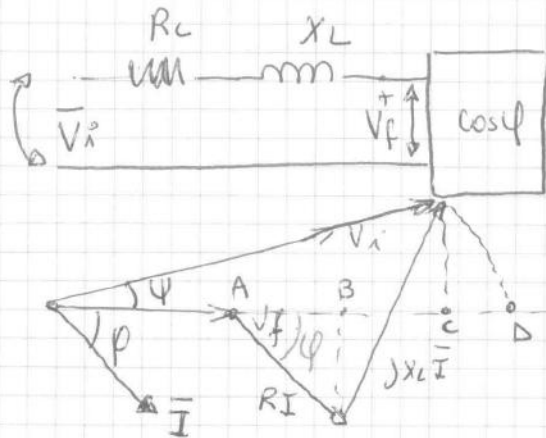
$$\bar{I}_M^* = \bar{S}_M / \bar{V}_M \Rightarrow \bar{I}_M$$

$$\bar{V}_L = (R_L + jX_L) \bar{I}_M$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_L + \bar{V}_M$$

$$\bar{I}_C = \bar{V}_A / (R_C + jX_C) \Rightarrow \bar{I}_i = \bar{I}_M + \bar{I}_C$$

$$\bar{V}_H = (R_H + jX_H) \bar{I}_i \Rightarrow \bar{V}_i = \bar{V}_H + \bar{V}_A$$



$$\Delta v = V_i - V_f$$

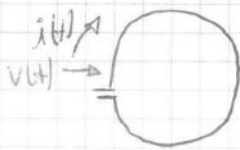
$$\bar{V}_i = \bar{V}_f + R_i \bar{I} + j X_L \bar{I}$$

$$\Delta V = AD \approx AC$$

$\psi =$ piccolo (di solito)

$$AB = RI \cos \psi$$

Spira seccichiosa =



- elettricamente e isolata (non c'è messa a terra)
- Geometria e continua collegata.

il campo magnetico si concentra con
creando delle linee di campo uscenti
// alla normale della superficie generando
il flusso $\phi(t)$.

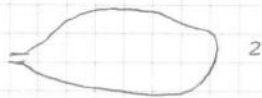
$i(t)$ variabile nel tempo $\Rightarrow \phi(t)$ variabile nel tempo...

$$v(t) = \oplus \frac{d\phi(t)}{dt}$$

convenzione degli utilizzatori

$$\phi(t) = L i(t) \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

L_{11} = flusso generato dalla spira 1
flusso concatenato con la spira 1



$\phi_{21}(t)$ flusso concatenato con la spira 2
è generato da la spira 1.



$$\phi_{21}(t) = L_{21} i_1(t)$$

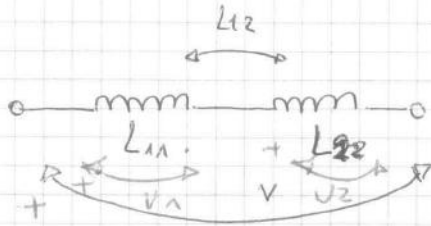
L_{21} = coefficiente di mutua induttanza

$$v_{21} = L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

il coefficiente di autoinduttanza è sempre > 0 L_{11}, L_{22}
" " " mutua induttanza può essere $< 0, > 0$ L_{21}

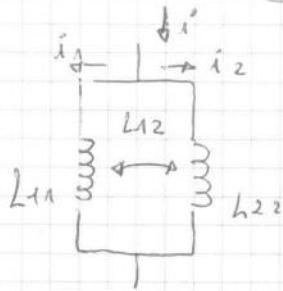
$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega \bar{I}_1 \\ j\omega \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ & L_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_n}{dt} \end{bmatrix}$$



$$V = V_1 + V_2 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

$$V = (L_{11} + L_{22} + 2L_{12}) \frac{di}{dt}$$



$$\begin{bmatrix} -\phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \frac{L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}$$

$$T_{22} = \frac{L_{11}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}$$

$$T_{12} = \frac{-L_{12}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}$$

$$K = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}}} = 1$$

$$i = i_1 + i_2 = T_{11}\phi_1 + T_{12}\phi_1 + T_{12}\phi_2 + T_{22}\phi_1 = (T_{11} + T_{22} + 2T_{12})\phi = T_e\phi$$

$$L_e = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{L_{11} + L_{22} + 2L_{12}}$$

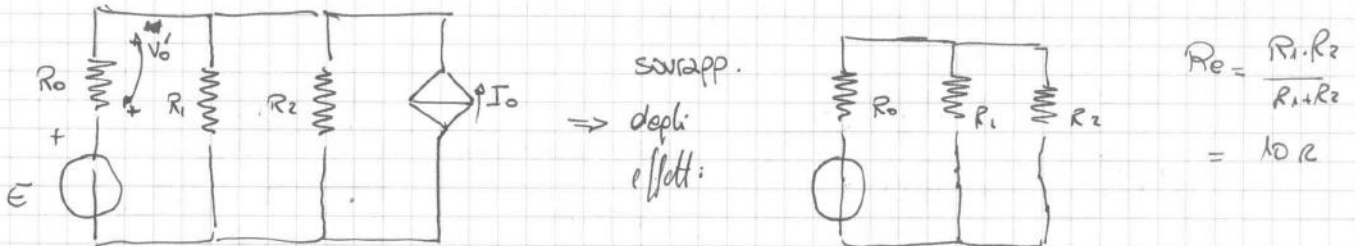
$$\phi = \frac{1}{T_e} i$$

$$P_{I_0} = V_0 I_0 = 30 \cdot 2 = 60 \text{ W}$$

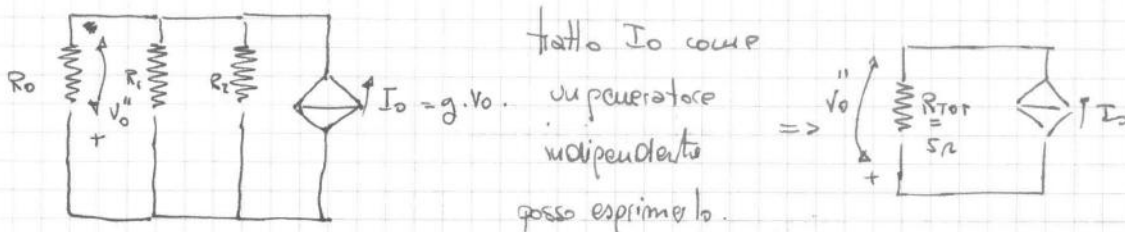
$$I_E = \frac{E}{R_0} =$$

$$P_E = E \cdot I_E = 40 \cdot 1 = 40 \text{ W}$$

Stesso risultato risolto con "il principio della sovrapposizione degli effetti"



$$* V_0' = E \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_e} = 20 \text{ V}$$

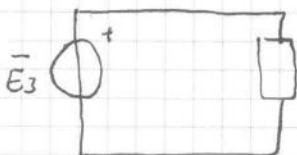
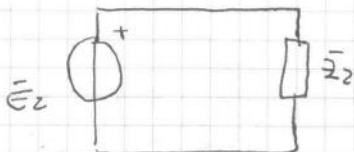
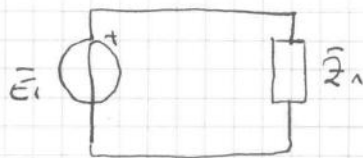


$$V_0'' = -R_{TOT} \cdot I_0 = -5 \cdot g \cdot V_0 = -5 \cdot 0,2 \cdot V_0 = -5 \cdot \frac{1}{5} \cdot V_0 = -V_0$$

$$V_0 = V_0' + V_0'' = 20 - V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{20}{2} = 10 \text{ V}$$

Sistemi polifase

Sistema costituito da più sistemi monofase (un generatore di tensione ideale) in cui viene introdotta volutamente una ~~fase~~ ^{differenza} di fase tra i sistemi con la stessa frequenza...



Sistema trifase molto usato

" esafase.

" dodecafase

} raramente diffuso...

$V_{00} = 0$ anche nel sistema a 4 fili. \Rightarrow nel conduttore neutro non circola corrente.

$$\vec{E}_n = \vec{Z}_n \vec{I}_n = 0$$

$$\vec{I}_n = \frac{\vec{E}_n}{\vec{Z}_n} = \frac{\vec{E}_n}{\vec{Z}_n}$$

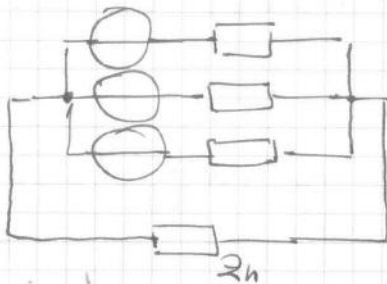
$$\vec{I}_s = \frac{\vec{E}_s}{\vec{Z}_s} = \frac{\vec{E}_s}{\vec{Z}_s}$$

$$\vec{I}_t = \frac{\vec{E}_t}{\vec{Z}_t} = \frac{\vec{E}_t}{\vec{Z}_t}$$

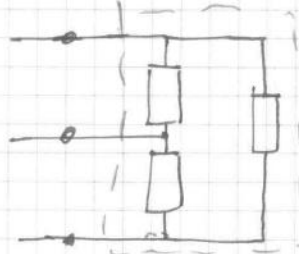
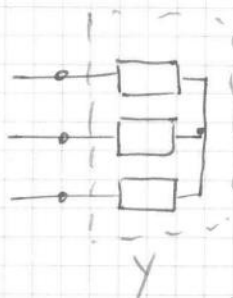
$I_n = I_s = I_t$ Equilibrio...

~~Alcune~~ $\vec{I}_s \vec{I}_t = \pm \frac{2}{3} \pi$ $\vec{E}_s \vec{E}_t = \pm \frac{2}{3} \pi$ $\vec{I}_t \vec{I}_s = \pm \frac{2}{3} \pi$

sistema a 4 fili 3 fase con neutro

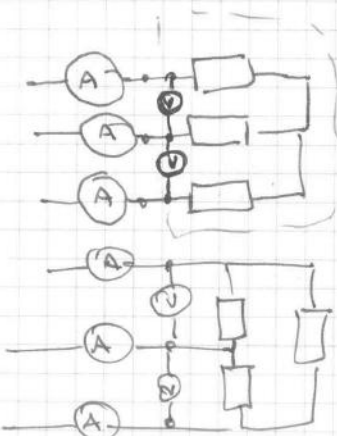


Sistema simmetrico a stella - a triangolo.



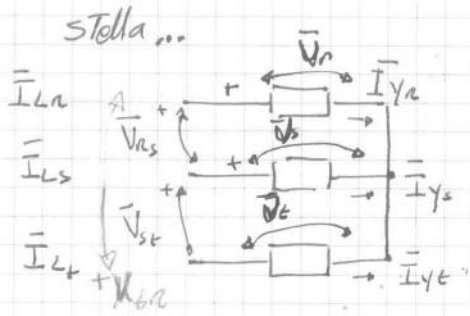
Caratterizzare il sistema: trovare le tensioni e le correnti per grandezze alle singole correnti e le tensioni delle singole impedenze...

Il sistema di solito è all'interno delle carcasse dove è difficile trovare i punti di connessione....



bastano 2 amperometri, la terza corrente la posso calcolare con differenza...

N.B per simmetria le correnti non uguali



legge delle tensioni.

$$\bar{I}_{La} = \bar{I}_{Ya}$$

$$\bar{I}_{Ls} = \bar{I}_{Ys}$$

$$\bar{I}_{Lt} = \bar{I}_{Yt}$$

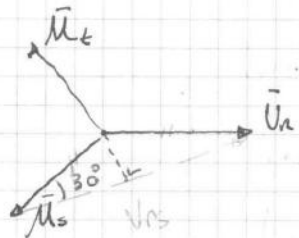
$$\bar{U}_{rs} = \bar{U}_r - \bar{U}_s$$

$$\bar{V}_{st} = \bar{U}_s - \bar{U}_t$$

$$\bar{V}_{tr} = \bar{U}_t - \bar{U}_r$$

$$\bar{U}_n = \bar{U}_s + \bar{U}_t = 0$$

$$|\bar{U}_n| = |\bar{U}_s| = |\bar{U}_t| = U$$



V_{rs} è in anticipo di 30° rispetto a U_n

$$V_{rs} = 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot U_n = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot U = \sqrt{3} U$$

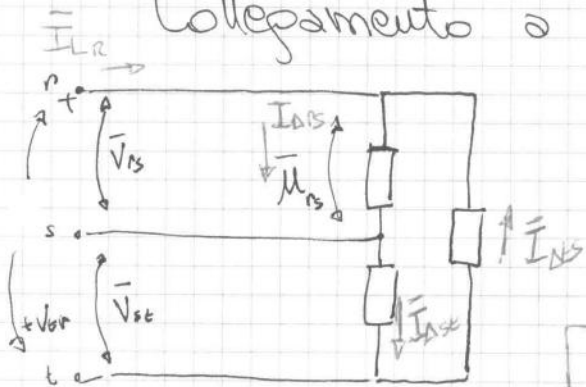
Solo per sistemi simmetrici...

Collegamento a stella:

$$\bar{I}_L = \bar{I}_Y$$

$$V = \sqrt{3} U$$

Collegamento a triangolo:



$$\bar{V}_{rs} = \bar{U}_{rs}$$

$$\bar{V}_{st} = \bar{U}_{st}$$

$$\bar{V}_{tr} = \bar{U}_{tr}$$

$$\bar{I}_L = \sqrt{3} \bar{I}_D$$

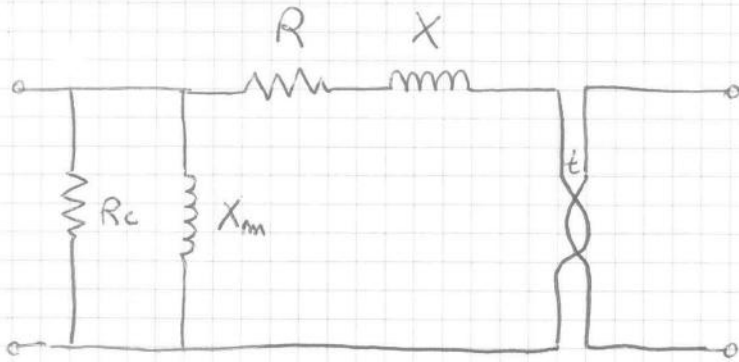
$$\bar{I}_L = \sqrt{3} \bar{I}_D$$

$$V = U$$

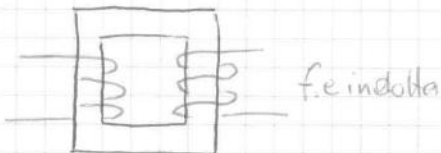
I_L e I_D non hanno la stessa fase (non ci mett. il fasore) ma il valore efficace...

V_L
 I_L
 $\cos \varphi$ φ angolo fra " $U_Y \wedge I_L$ "

Circuito equivalente del trasformatore reale ...



R = resistenza degli avvolgimenti del primario + gli avvolgimenti del secondario riportati al primario
 X = reattanza di dispersione



Le due bobine sono mutuamente indotte
 di coefficiente di accoppiamento $k=1$.
 \Rightarrow tutto il flusso va dal primo avvolg. al secondo avvolgimento ...

X_m = reattanza di magnetizzazione ... (non esiste se materiale idealmente magnetico.)

$$X \ll X_m$$

R_c

- Un materiale ferro-magnetico percorso da corrente genera calore ...
- Un corpo massiccio " " " genera correnti parassite ...

Corpo massiccio non è omogeneo, percorso da un flusso si creano molti di pareti "campi magnetici" tra i domini del corpo che danno luogo ad una ulteriore perdita termica ...

Sistemi simm. ed "Equilibrati":

$$S = 3 E_2 I_2 = \sqrt{3} \frac{V}{\sqrt{3}} I_2$$

$$P = 3 E I \cos \varphi = \sqrt{3} E I \cos \varphi$$

$$Q = 3 E I \sin \varphi = \sqrt{3} E I \sin \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} S = \sqrt{3} V I \\ P = \sqrt{3} E I \cos \varphi \\ Q = \sqrt{3} E I \sin \varphi \end{array} \right\} \varphi = \hat{E}_2 \hat{I}_2$$

• Potenza istantanea ?

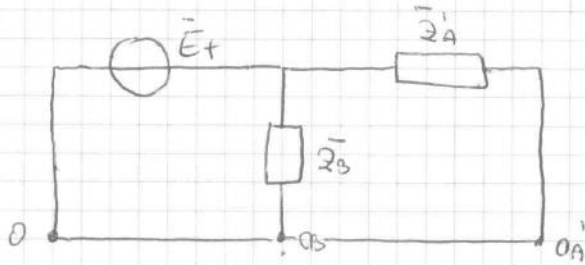
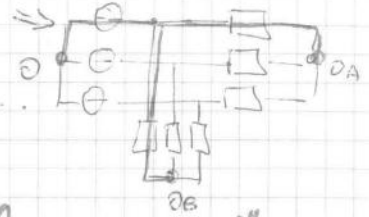
$$\left. \begin{array}{l} e_2 = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \\ e_1 = \sqrt{2} E \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ e_2 = \sqrt{2} E \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \end{array} \right\} \text{terza delle fasi}$$

2) Le grandezze concatenate \Rightarrow Di Fase...

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

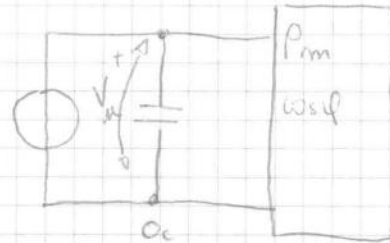
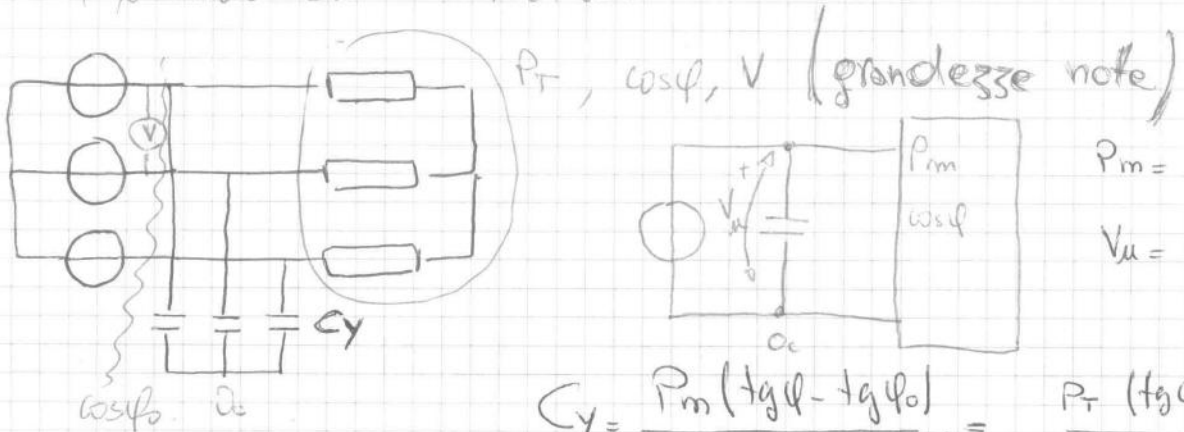
3) Individuare le fase del circuito...

4) Unire in corto circuito i centri stella...



Circuito monofase equivalente...

Oltre al teorema del circuito monofase esiste anche il metodo di Boucherot...



$$P_m = \frac{1}{3} P_T$$

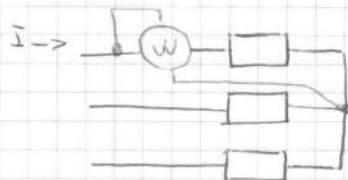
$$V_M = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

$$C_Y = \frac{P_m (\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \phi_0)}{2\pi f V_M^2} = \frac{P_T (\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \phi_0)}{2\pi f V^2}$$

$$X_\Delta = 3 X_Y$$

$$\frac{1}{2\pi f C_\Delta} = \frac{3}{2\pi f C_Y} \Rightarrow C_\Delta = \frac{C_Y}{3}$$

$$C_\Delta = \frac{C_Y}{3}$$

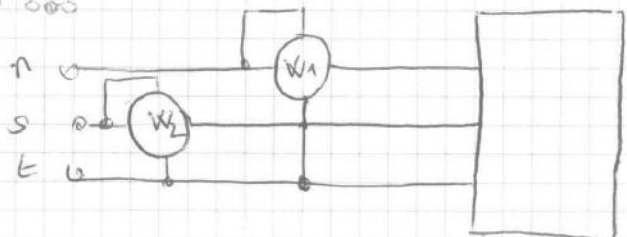


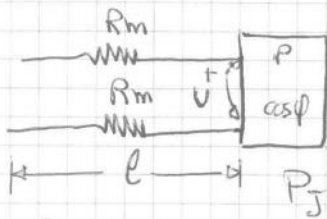
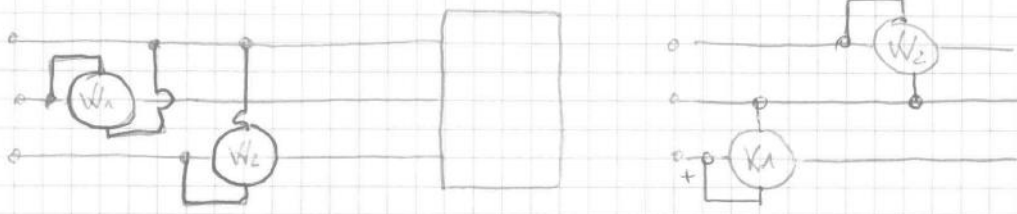
$$P_m = I \cdot E \cos \hat{E} I$$

$$P_T = 3 P_m$$

Normalmente il centro stella non accessibile

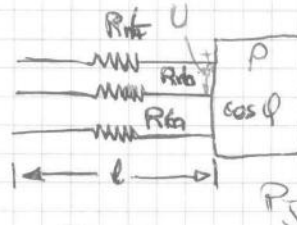
Inserzione ARON...





$$P = UI_m \cos \varphi$$

$$I_m = \frac{P}{U \cos \varphi}$$



$$P = \sqrt{3} U I_t \cos \varphi$$

$$I_t = \frac{P}{\sqrt{3} U \cos \varphi}$$

\$\rho\$ uguale per tutti
stabilire le sezioni
\$S_t, S_m\$.

$$I_t = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

$$I_t < I_m$$

$$P_J = 2 R_m \cdot I_m^2$$

$$R_m = \frac{P_J}{2 I_m^2}$$

$$R_m = \frac{P_J}{2 \left(\frac{P}{U \cos \varphi} \right)^2}$$

$$P_J = 3 R_t \cdot I_t^2 = R_t \cdot I_m^2$$

$$R_t = \frac{P_J}{I_m^2}$$

$$R_t = \frac{P_J}{\left(\frac{P}{U \cos \varphi} \right)^2}$$

$$R_m = \frac{1}{2} R_t$$

$$R_t = 2 R_m$$

$$R_m = \rho \frac{l}{S_m}$$

$$\Rightarrow R_t = \rho \frac{l}{S_t} \Rightarrow$$

$$2 \rho \frac{l}{S_m} = \rho \frac{l}{S_t} = \frac{S_m}{2} = S_t$$

$$\Rightarrow S_m = 2 S_t$$

sezione doppia.

Volture

$$V_m = 2 l \cdot S_m$$

$$V_t = 3 l \cdot S_t$$

$$V_m = 2 \cdot l \cdot 2 S_t = 4 l S_t \Rightarrow 3 l S_t = V_t$$

$$V_m \geq V_t$$

$$V_t = \frac{3}{4} V_m = 0,75 V_m$$

risparmio il 25% di materiale.

Ottengo:

$$\bar{I}_a = \frac{1}{\bar{Z}_a} \cdot \frac{-U_{rs} \bar{Z}_a \bar{Z}_t - (\bar{U}_{cs} + \bar{U}_{st}) \bar{Z}_a \bar{Z}_s}{\bar{Z}_a \bar{Z}_s + \bar{Z}_s \bar{Z}_t + \bar{Z}_t \bar{Z}_a}$$

$I_s, I_t \Rightarrow$ sono analoghi a I_r :

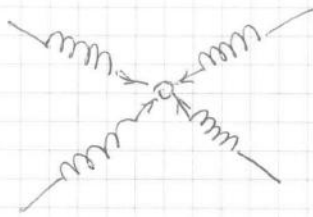
NB: \bar{I}_a , non dipende da $\bar{E}_0 \Rightarrow \forall \bar{E}_0$ scelto, I_a, I_s, I_t sono sempre gli stessi (sono indipendenti da E_0)

Regime transitorio

lega due regimi permanenti in seguito a variazioni che ripercuotono in circuito (variazioni = apertura del circuito, C.C., ecc...)

dopo la variazione non ripassa istantaneamente da un regime all'altro

Variabili di Stato e algebriche $u(t)$



4 correnti \Rightarrow 3 incognite + 1 ricavabile dalle altre 3.

3 di stato } $u(t)$
1 algebrico

$$\left[a_n \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 = b \right]_{(t)}$$

$n =$ numero di variabili di stato ($n \leq 2$)

$u(t)$ tiene presente le condizioni costanti...

Valore solo nell'intervallo in cui si ha la variazione

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

p_1, p_2, \dots, p_n (radici) (complesse in generale)

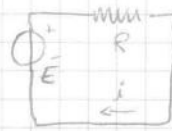
$$P_k = P_{Rk} + j f_{Rk}$$

$$u_k(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}$$

per $t \rightarrow \infty$ $u_k(t) = 0$ (variazioni sparisce)

$\Rightarrow P_{Rk}$ (parte reale della radice deve essere negativa)

$$i_p(t) = \frac{E}{R}$$



regime stazionario
L = c.c.

$$L \frac{di_t}{dt} + R i_t = 0$$

introduciamo p

$$Lp + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L}$$

$$i_t(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t) = i_p(t) + i_t(t) = \frac{E}{R} + K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

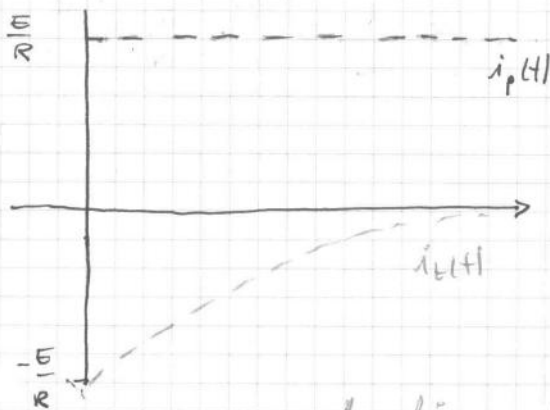
$$i(t_0^-) = i(t_0^+) \quad t_0^- = 0^-, \quad t_0^+ = 0^+$$

$$0 = \frac{E}{R} + K \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$$

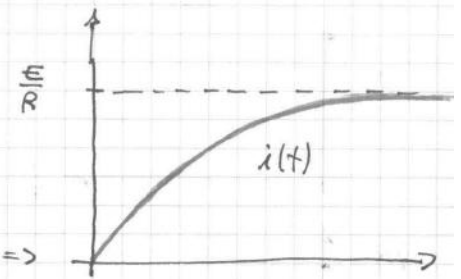
$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = i_p(t) + i_t(t)$$

$$\tau = \frac{1}{R/L} = \frac{L}{R} \quad \Delta t = \frac{5}{6} \frac{L}{R}$$

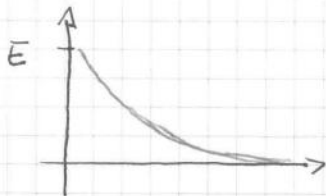
$$\frac{L [R \cdot s]}{R [1]} = [s] = \tau$$



$$\Rightarrow i(t) = i_p(t) + i_t(t) \Rightarrow$$



$$V_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-\frac{R}{L}t}$$

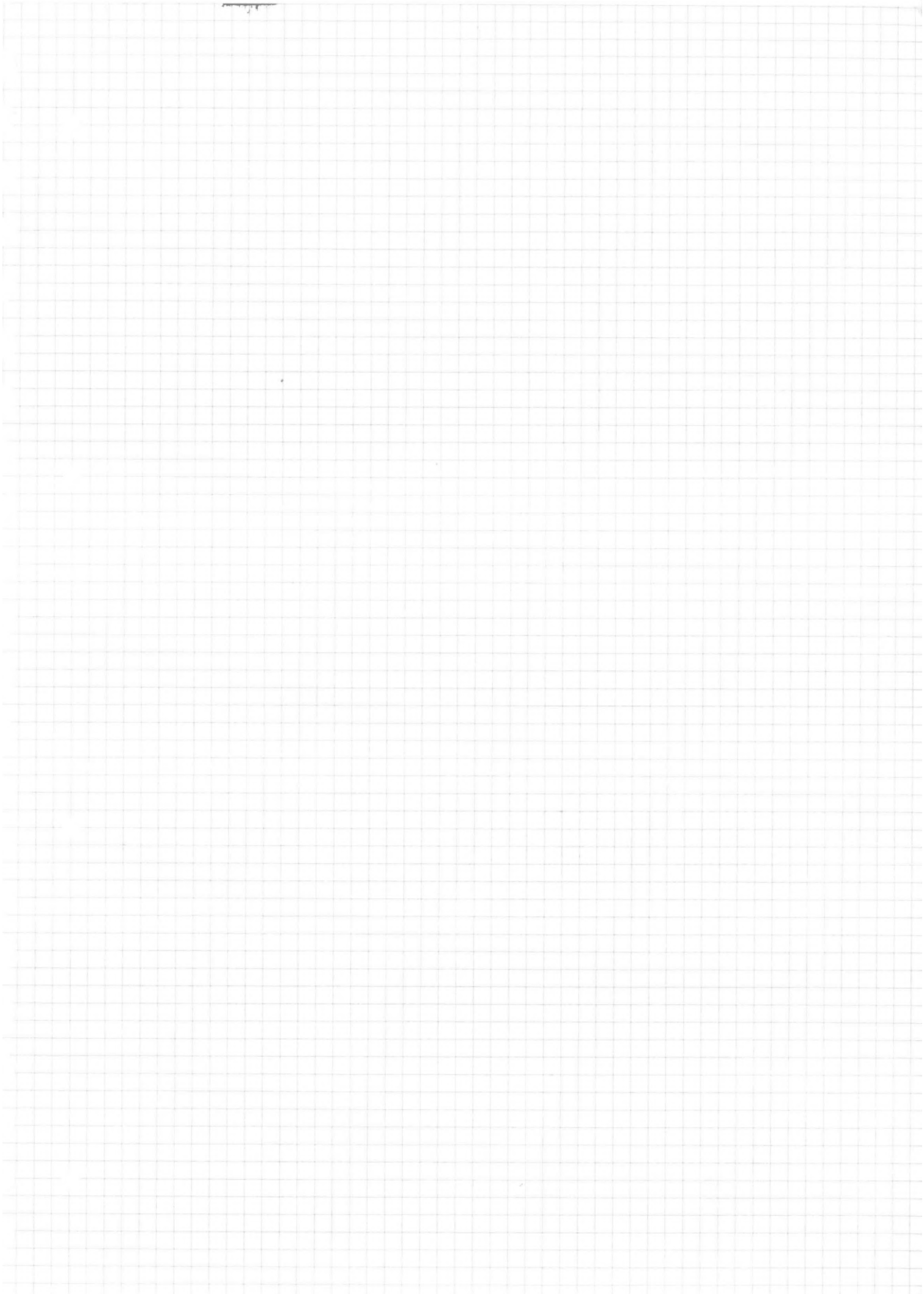


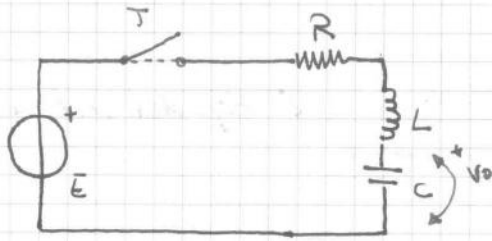
a $t_0 = 0 \quad E = V_L$

in genere $V_L = E$ la tensione del circuito è nulla \Rightarrow in R

non c'è tensione \Rightarrow il non circolo \otimes

\otimes non si ha un brusco circolo di corrente ...





$$v_c(t=0^-) = v_c$$

$$LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + RC \frac{d v_c}{dt} + v_c = E$$

scritta in termini di tensione come variabile di stato...

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{d i}{dt} + i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d i}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\dots} + \frac{R}{2L} + \sqrt{\dots}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$$

Se $\Delta > 0$: due radici distinte...

$$p = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

(p_1, p_2)

p_1 e p_2 sono sicuramente negativi...

$$i = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$

K_1, K_2 sono costanti di integrazione...

Condizioni iniziali:

$$i(t=0^-) = i(t=0^+)$$

$$v_c(t=0^-) = v_c(t=0^+)$$

$T = \text{Open} \dots$ $i(t=0^-) = 0$
 $T = \text{Chiuso} \dots$ $i(t=0^+) = K_1 e^{p_1 \cdot 0} + K_2 e^{p_2 \cdot 0} = K_1 + K_2 = i(t=0^-) = 0$

$\Rightarrow K_1 + K_2 = 0$ 1° ~~equazione~~ ... Equazione del sistema.

1) primo modo: $E - Ri - L \frac{di}{dt} = v_c$

2) secondo modo (fantastico):
 $E = Ri + L \frac{di}{dt} + v_c$ (relazione istantanea, vale per $\forall E$ istante).

$$E = 0^+ \Rightarrow E = Ri(t=0^+) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} + v_c(t=0^+)$$

Per continuità $i(t=0^-) = i(t=0^+) = 0$ * $v_c(t=0^-) = v_c(t=0^+) = V_0$

$$E = 0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} + V_0$$

$\Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{E - V_0}{L}$

* relazione ottenuta per continuità

Se $\Delta = 0$

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 0$$

$$\rho = -\frac{R}{2L}$$

$$i(t) = k_1 e^{\rho t} + k_2 t e^{\rho t}$$

$$i(t=0^-) = 0 = k_1 e^{\rho t} + k_2 \cdot 0 \cdot e^{\rho t} = k_1 e^{\rho t}$$

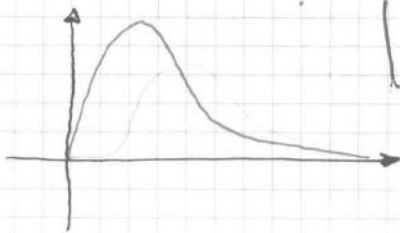
$$i(t=0) = k_1 = 0$$

$$i(t) = k_2 t e^{\rho t} \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = k_2 e^{\rho t} + k_2 t e^{\rho t}$$

$$k_2 = \frac{E - V_0}{L}$$

$$i(t) = \frac{E - V_0}{L} t \cdot e^{-\frac{R}{2L} t}$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$



Transitorio Aperiodico Critico...

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

se $\Delta < 0$

$$\rho = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm j\omega_0$$

$$i(t) = k_1 e^{(-\frac{R}{2L} + j\omega_0)t} + k_2 e^{(-\frac{R}{2L} - j\omega_0)t}$$

$$i(t) = k_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Impongo la continuità ...

$$i(t=0^-) = i(t=0^+) \Rightarrow 0 = k_1 + k_2$$

$$-k_1 = k_2$$

$$i(t) = k_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \begin{pmatrix} e^{j\omega_0 t} & -j\omega_0 t e^{j\omega_0 t} \\ e^{-j\omega_0 t} & -j\omega_0 t e^{-j\omega_0 t} \end{pmatrix}$$

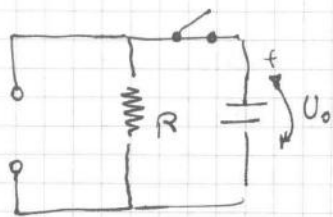
funzione sinusoidale che varia tra 1, -1.

$i(t)$ dipende da $e^{-\frac{R}{2L}t} \Rightarrow$ stimolo da $\tau = \frac{2L}{R}$

$$i(t) = 2j k_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega_0 t)$$

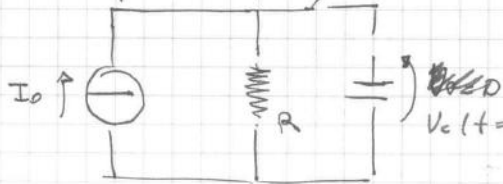
Risposta a impulso zero: Comportamento del circuito in cui i generatori si azzerano + manteniamo le variabili distate al valore iniziale ...

Risposta a impulso zero:



è l'evoluzione della tensione U_0 nel condensatore.
(evoluzione libera)

Risposta allo stato zero

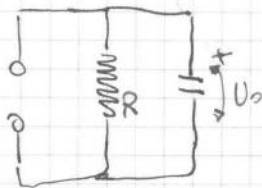


si suppone che la tensione di stato nulla ...
(evoluzione forzata)

$V_C(t=0) = 0$

Sovrapponendo le due risposte otteniamo lo stesso risultato del transitorio di partenza ...

I = impulso K_I



$RC \frac{dV_{CI}}{dt} + V_{CI} = 0$

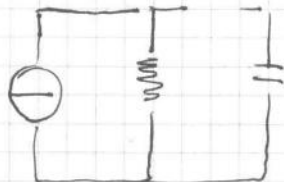
$V_{CI} = K_I e^{-\frac{t}{RC}}$

$V_{CI} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

$I_0 = \frac{V_C}{R} + C \frac{dV_C}{dt}$
 $R \cdot 0 = V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0$

$U_0 = K_I$

S = stato. K_S



$I_0 = \frac{V_{CS}}{R} + C \frac{dV_{CS}}{dt}$

$V_{CSp} = R I_0$
 $V_{CSb} = K_S e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow V_{CS} = R I_0 + K_S e^{-\frac{t}{RC}}$

$V_{CS} = R I_0 + K_S e^{-\frac{t}{RC}}$

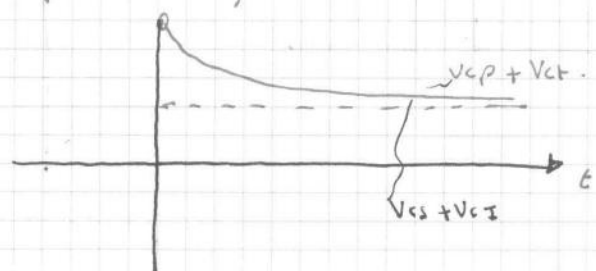
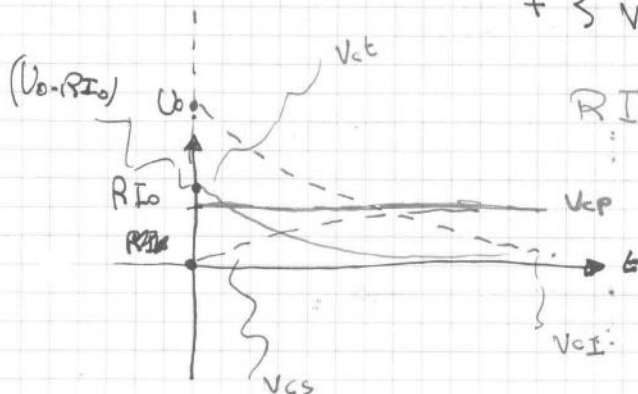
$V_{CS} = 0, t = 0$

$0 = R I_0 + K_S$

$K_S = -R I_0$

$V_{CS} = R I_0 - R I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
 $V_{CI} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

$R I_0 + (U_0 - R I_0) e^{-\frac{t}{RC}}$



è lecito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \delta(t) dt$$

$\delta(t)$ ha valore solo in $t=0$ al di fuori di $t=0$ $\delta(t^*) = 0$
 $\forall t^* \neq t=0$.

$g(t) = f(t=0) = \text{costante}$.

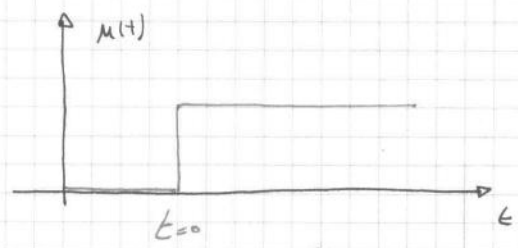
$f(t=0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = f(t=0) \cdot 1 = f(t=0)$.

Si può anche definire $\delta(t-t_0)$

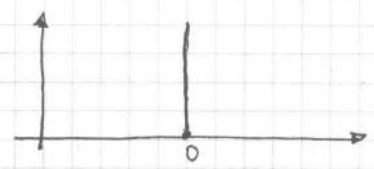
$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \delta(t-t_0) dt = h(t-t_0)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) = f(t=0)$

$h(t) \Rightarrow \delta(t)$
 $u(t) \Rightarrow a(t)$
 $\delta(t) \Rightarrow h(t) = \frac{da(t)}{dt}$

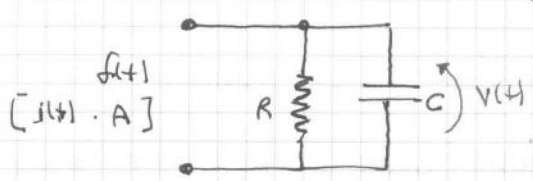


$\delta(t) = \frac{da(t)}{dt}$

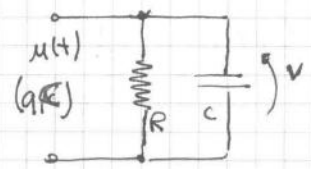


$v(t)$ risposta all'impulso

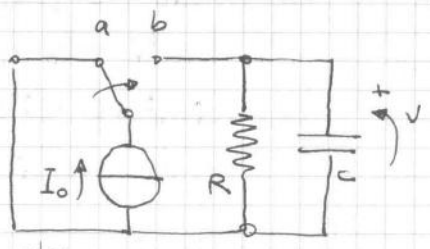
carica, Coulomb...



$h(t) = \frac{da(t)}{dt} \Rightarrow$



Studiare la risposta a gradino come:



$I_0 = i_R + i_C$
 $= \frac{v}{R} + C \cdot \frac{dv}{dt}$

eq. particolare \downarrow
 eq. omog. associata \leftarrow
 $V = V_p + V_h$
 $I_0 = 1$

$V_p = R I_0$
 $V_h = K e^{-t/RC}$
 $V = R I_0 + K e^{-t/RC}$

Posso definire un numero infinito di funzioni impulsive $\delta(t-\tau)$ che mi possono definire la funzione $f(t)$ surrivamente per $\forall t \dots$

$$a = b \frac{df}{dt}$$

$a = \text{moto}$, determino $b \dots$

$$b = \frac{a}{df/dt}$$

$$f(t) \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau = f * h$$

Integrale di convoluzione...

proprietà:

Commutativa: $f * g = g * f$.

$$f * (g+m) = f * g + f * m$$

$$f * (g * m) = (f * g) * m = f * g * m$$

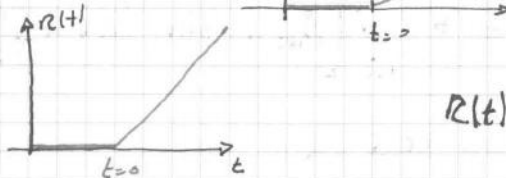
$$d(f * g)/dt = \frac{df}{dt} * g = f * \frac{dg}{dt}$$

funzione a rampa mono unitaria ...

$$L^n u(t) = \begin{cases} t < 0 & 0 \\ t > 0 & t \end{cases}$$

$$n=1$$

$$r(t) = t u(t)$$



$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt$$

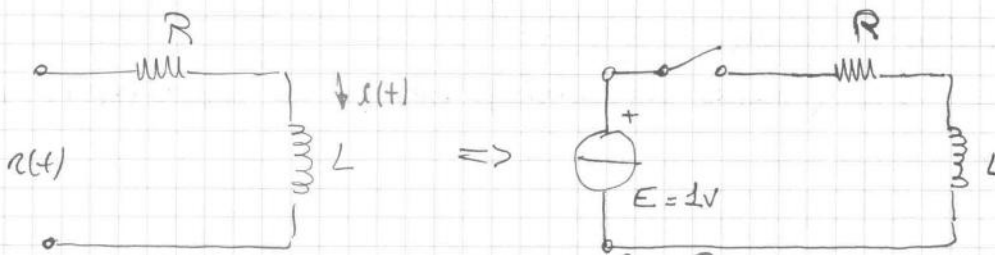
Se esiste una risposta a gradino I anche risposta a rampa.

$$u(t) \Rightarrow a(t)$$

$$r(t) \Rightarrow b(t) = \int a(t) dt$$

$$u \left[\frac{A}{s} \right] \Rightarrow r [A]$$

$$u \left[\frac{V}{s} \right] \Rightarrow r [A]$$



$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$r(t) = \int i(t) dt$$

$$y(t) = f(t + \tau) \quad \forall t \quad f = \frac{1}{T}$$

$$y(t) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [C_i \sin(\omega t + \varphi_i)]$$

$$= C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \sin(i\omega t) + B_i \cos(i\omega t)]$$

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$$

$$\varphi_i = \arctg\left(\frac{B_i}{A_i}\right)$$

$$A_i = C_i \cos \varphi_i$$

$$B_i = C_i \sin \varphi_i$$

La sommatoria viene troncata all'ordine N...

per $N \rightarrow \infty$ la funzione viene RAPPRESENTATA integralmente da $y(t) = f(t + \tau) \forall t$.

per $N \rightarrow$ numero finito, la funzione viene APPROSSIMATA...

$$y(t) = y(-t) \quad \text{funzione pari...}$$

$$\Rightarrow \text{compare solo } B_i \cos(i\omega t) \Rightarrow A_i = 0$$

$$y(t) = -y(-t) \quad \text{funzione dispari}$$

$$\Rightarrow \text{compare solo } A_i \cos(i\omega t) \Rightarrow B_i = 0, C_0 = 0$$

Formula 3

Se $y(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right) \Rightarrow$ Nella serie di Fourier compare solo componenti armoniche dispari

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y(t) dt. \quad (\text{valore medio})$$

$$A_i = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} y(t) \sin(i\omega t) dt$$

$$B_i = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} y(t) \cos(i\omega t) dt.$$

Proiezione geometrica
in senso funzionale...

Pro. funzionale \Rightarrow ~~serie~~ (pro. di funzione in un'altro funzionale)
si ottiene integrandola...

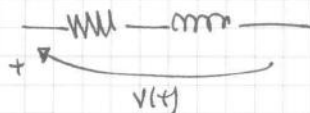
Utilità delle serie di Fourier...

Per una sorgente non sinusoidale, la si può studiare come una funzione costante C_0 sovrapposta a N sinusoidi armoniche con frequenza (multiplo intero della prima)..

Continuazione esercizio:

$R = 10 \Omega$

$L = 50 \text{ mH}$



calcolare $i(t) \dots$

il testo ripropone di fermarsi alla ~~seconda~~ ^{prima} armonica $N=4$.

\Rightarrow studi 5 armonici

1. C_0 : circuito in regime stazionario a corrente continua.
4 funzioni armoniche.

NB: * \bar{E} è una funzione pari * $A_1=0 \Rightarrow$ solo il $\cos(\omega t + \phi)$
* \bar{E} è una funzione positiva \Rightarrow ha un valore medio $\neq 0 \Rightarrow$ ha un valore costante $C_0 \dots$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{3/4T} y(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/4}^{T/4} y(t) dt + \int_{T/4}^{3/4T} y(t) dt \right]$$

$$* C_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \hat{V} \cos(2\pi 50t) dt = \frac{\hat{V}}{2\pi 50} \left[\sin(2\pi 50t) \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{\hat{V}}{\pi} = 31,83V = V_0$$

$$* B_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \hat{V} \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{\hat{V}}{2} = 50V = V_1$$

$$* B_2 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \hat{V} \cos(\omega t) \cdot \cos(2\omega t) dt = \frac{\hat{V}}{\pi} \frac{2}{3} = 24,22V = V_2$$

$$* B_3 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \hat{V} \cos(\omega t) \cdot \cos(3\omega t) dt = 0 = V_3$$

$$* B_4 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \hat{V} \cos(\omega t) \cdot \cos(4\omega t) dt = -\frac{\hat{V}}{\pi} \frac{2}{15} = -4,24V = V_4$$

$$v(t) = C_0 + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) - B_4 \cos(4\omega t)$$

$$C_0 > B_1 > B_2 > B_4$$

$$v(t) = V_0 + \sqrt{2}V_1 \sin(\omega t + \varphi_{v1}) + \sqrt{2}V_2 \sin(2\omega t + \varphi_{v2})$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + \sqrt{2}I_2 \sin(2\omega t + \varphi_{i2})$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) =$$

$$= V_0 I_0 + \sqrt{2}V_0 I_0 \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + \sqrt{2}V_0 I_0 \sin(2\omega t + \varphi_{i2}) + \sqrt{2}V_1 I_0 \sin(\omega t + \varphi_{v1}) + 2V_1 I_1 \sin(\omega t + \varphi_{v1}) \cdot \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + 2V_1 I_2 \sin(\omega t + \varphi_{v1}) \cdot \sin(2\omega t + \varphi_{i2}) + \sqrt{2}V_2 I_0 \sin(2\omega t + \varphi_{v2}) + 2V_2 I_1 \sin(2\omega t + \varphi_{v2}) \cdot \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + 2V_2 I_2 \sin(2\omega t + \varphi_{v2}) \cdot \sin(2\omega t + \varphi_{i2})$$

Nel regime sinusoidale l'unica potenza che aveva senso è la potenza attiva (la potenza che viene scambiata mediamente nel bipolo in un periodo)

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [V_0 I_0 + 2V_1 I_1 \sin(\omega t + \varphi_{v1}) \cdot \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + 2V_2 I_2 \sin(2\omega t + \varphi_{v2}) \cdot \sin(2\omega t + \varphi_{i2})]$$

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos(\varphi_{v1} - \varphi_{i1}) + V_2 I_2 \cos(\varphi_{v2} - \varphi_{i2})$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2$$

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_{v1} - \varphi_{i1} \quad \varphi_2 = \varphi_{v2} - \varphi_{i2}$$

$$\cos 0 = 1$$

P_0 se considero la componente aperiodica

P_1 se con. 1° armonica

P_2 se con. 2° arm.

Come sappiamo la sovrapposizione degli effetti sulle potenze non vale (andamento non lineare) \Rightarrow vale in questo caso: (per la combinazione) i termini misti portano contributi nulli....

$$Q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2$$

\uparrow per definizione (per analogia alla definizione reale di P)

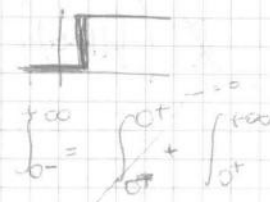
$$S = V \cdot I = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + V_2^2} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}$$

\uparrow per definizione (per analogia alla potenza apparente definita in regime stazionario)

Unità:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \quad G(s) = \mathcal{L}(g(t))$$

$$\text{Se } F(s) = G(s) \Rightarrow f(t) = g(t).$$



— funzione a gradino:

$$u(t) \Rightarrow \mathcal{L}(u(t)) = \int_{0^-}^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} \underbrace{u(t)}_1 e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^+}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(u(t)) \xrightarrow{\text{T.D.L.}} \frac{1}{s} \quad s = \alpha + j\omega.$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

$$= \int_{0^+}^{+\infty} e^{-\alpha t} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt.$$

α deve essere per forza > 0 altrimenti $\mathcal{L}(u(t))$ diverge a $+\infty$

— funzione impulso:

$$\delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}(\delta(t)) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

$\Rightarrow \delta(t)$ ha senso solo per $t=0 \dots$

— $e^{\alpha t}$

$\alpha \neq s$, α complesso

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_{0^+}^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\alpha)t}{1}} dt$$

$$= -\frac{1}{s-\alpha} e^{-\frac{(s-\alpha)t}{1}} \Big|_{0^-}^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{s-\alpha}}$$

$$\cos \beta t = \frac{1}{2} e^{j\beta t} + \frac{1}{2} e^{-j\beta t} \quad \frac{1}{2} (\cos \beta t + j \sin \beta t + \cos \beta t - j \sin \beta t)$$

$$\mathcal{L}(\cos \beta t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{j\beta t}) + \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{-j\beta t})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\beta} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\beta} = \frac{2s}{2(s^2 + \beta^2)} = \boxed{\frac{s}{s^2 + \beta^2}}$$

$$\sin \beta t = \frac{1}{2j} e^{j\beta t} - \frac{1}{2j} e^{-j\beta t} = \frac{1}{2j} (\cos \beta t + j \sin \beta t - \cos \beta t + j \sin \beta t)$$

$$\mathcal{L}(\sin \beta t) = \frac{1}{2j} \frac{1}{s-j\beta} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s+j\beta} = \boxed{\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}}$$

$$f(t)u(t) \rightarrow f(t-t_0)u(t-t_0) \quad \Delta t = t_0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^+ f(t) dt\right) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) e^{-st} dt \quad (\text{integrazione per parti...})$$

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\int_0^+ f(t) dt\right) &= \mathcal{L}(g(t)) = \left[\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\int f(t) dt\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t))$$

funzione a rampa...

$$\mathcal{L}(r(t)) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s^2}$$

$$r(t) = t u(t).$$

$$\mathcal{L}(t u(t)) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(t \cdot e^{-\alpha t}) = \int_0^{+\infty} t e^{-\alpha t} e^{-st} dt. \quad \text{con } \beta = s + \alpha \Rightarrow$$

$$\int(\text{rampa}) = \int_0^{+\infty} t e^{-\beta t} dt \Rightarrow = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

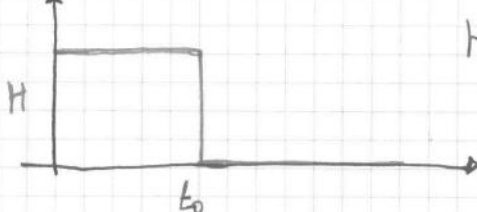
$$\mathcal{L}(t^n e^{-\alpha t}) = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$$

ESEMPIO:

$$\text{con } F(s) = \mathcal{L}(f(t))$$

$$\mathcal{L}(f(t) e^{-\alpha t}) = F(s+\alpha)$$

ESERCIZIO



$$H u(t) - H u(t-t_0)$$