NUMERO : 124

DATA : 21/07/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Tortoreto

MATERIA : Dinamica Sistemi Meccanici, Teoria + Esercizi
Prof. Fasana - Marchesiello

11-10-2010

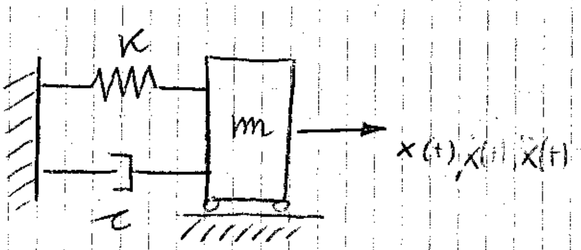
DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

alessandro.fasana@polito.it
011 090 3397

esame: scritto (teoria + esercizi)
orale facoltativo

Libro: Meccanica delle Vibrazioni - CLUT - Fasana - Marchesiello
Dinamica delle Macchine - L&B - Vatta
Il Rotore di Jeffcott - CLUT - Vatta - Vigliani

SISTEMI AD 1 GRADO DI LIBERTÀ



$F_m = kx$

$F_s = c\dot{x}$

- massa m concentrata che accumula energia cinetica
- molla k rigidezza con andamento lineare (Accumula energia)
- smorzatore c costante -> smorzatore viscoso (Dissipa energia)

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ -> Eq 2° ordine, lineare e a coeff costanti

Soluzione -> $x(t) = Ae^{st}$

$\dot{x}(t) = Ase^{st}$

$\ddot{x}(t) = As^2e^{st}$

$\leadsto (ms^2 + cs + k)Ae^{st} = 0$

$\downarrow$

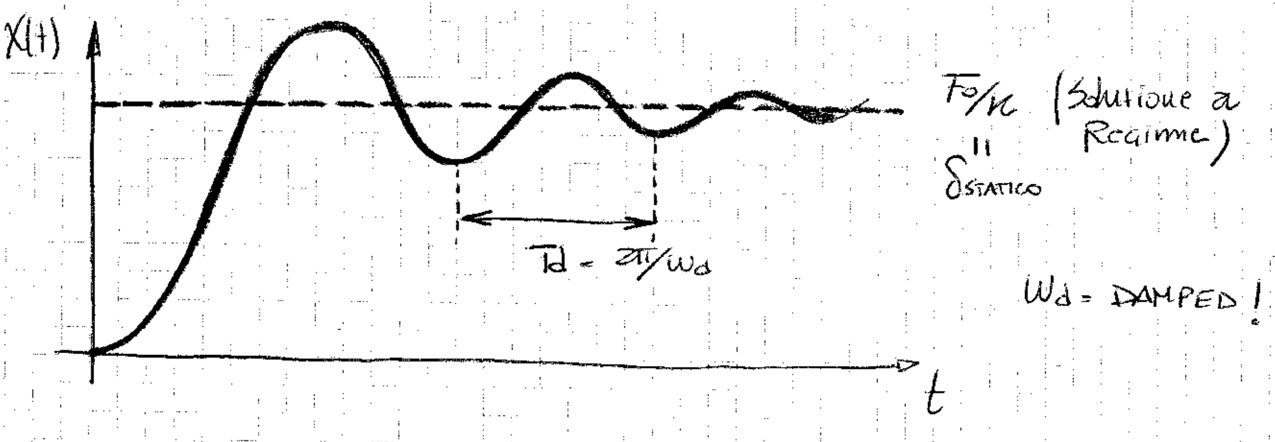
$A = 0$ (Soluzione Banale)

$ms^2 + cs + k = 0$
(POLINOMIO CARATTERISTICO)

$$v_0 = -\zeta\omega_n(a+0) + (0 + b\omega_d) = 0$$

↓

$$\begin{cases} a = -F_0/K \\ b = \dfrac{\zeta a \omega_n}{\omega_d} = -\dfrac{F_0}{K}\zeta\dfrac{\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = -\dfrac{F_0}{K}\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases}$$



SISTEMA FORZATO - FORZANTE PERIODICA

- 1ª CONSIDERAZIONE → SCOMPOSIZIONE FORZANTE PERIODICA IN ARMONICHE CON FOURIER

$$f(t) = f(t + \underbrace{T_0}_{\text{Periodo}})$$

Se la Forza è periodica, è possibile scriverla con la serie di fourier come somma di armoniche

$$f(t) = \underbrace{f_0}_{\text{COST}} + \sum_{K=1}^{\infty}\left[a_K\cos(K\Omega_0 t) + b_K\sin(K\Omega_0 t)\right] \qquad a_K, b_K \in \mathbb{R} \text{ note}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{PULSAZIONE FONDAMENTALE} \qquad \Omega_0 = 2\pi f_0$$

Esempio ω_n, ω_d

$\omega_n = 20$ rad/s $\quad \xi = 4\% \longrightarrow \omega_d = 19{,}98$ rad/s

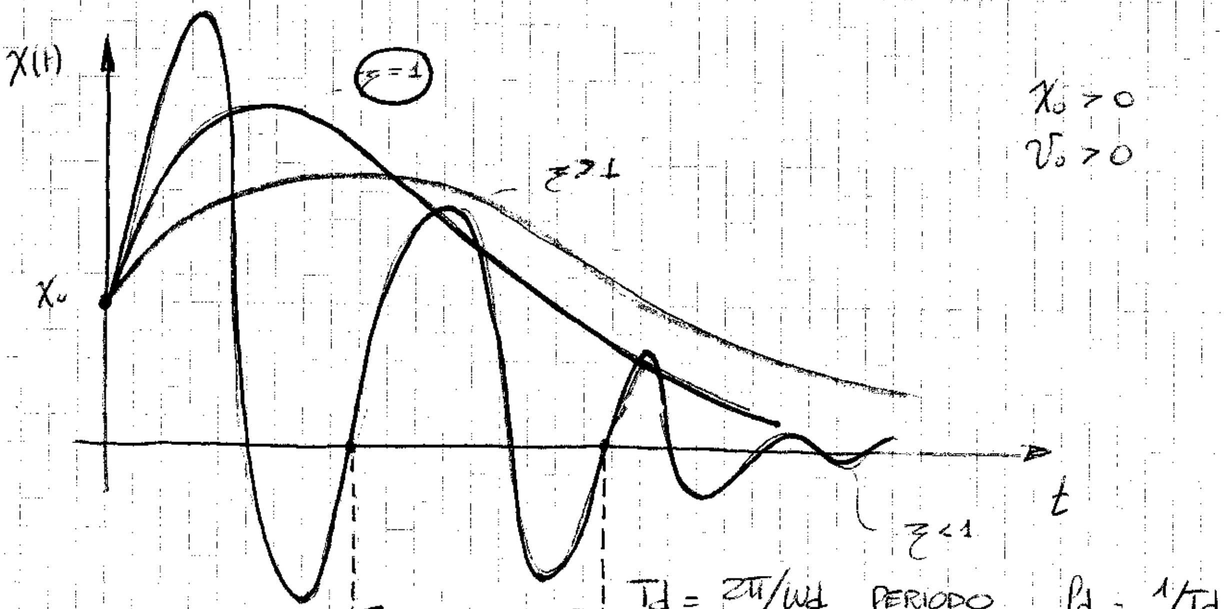
Nel caso di SISTEMA SOTTOSMORZATO la soluzione può essere scritta:

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi) = e^{-\xi \omega_n t}(a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)$$

Fase

$$A(\cos \omega_d t \cdot \cos \varphi - \sin \omega_d t \cdot \sin \varphi) = a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t$$

$$\begin{cases} A \cos \varphi = a \\ -A \sin \varphi = b \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} tg\, \varphi = -b/a \\ A^2 = a^2 + b^2 \end{array}$$



$T_d = 2\pi/\omega_d$ PERIODO $\quad f_d = 1/T_d$

La parte immaginaria influenza l'oscillazione

La parte reale influenza il decadimento

$$X = \frac{F_0}{K - m\Omega^2 + i\Omega c} = A e^{i\varphi} \longrightarrow \varphi = \frac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)} = \frac{-\Omega c}{K - m\Omega^2} \quad \text{(Razionalizzi)}$$

$$\downarrow$$

$$A = |X| = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}}$$

$$x(t) = X e^{i\Omega t} = A e^{i\varphi} e^{i\Omega t} = A e^{i(\Omega t + \varphi)} \longrightarrow$$ SOLUZIONE A REGIME

$\downarrow$

Bisogna aggiungere la soluzione Generale

FORZANTE

- $F_0 \cos \Omega t \longrightarrow x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$
- $F_0 \sin \Omega t \longrightarrow x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi)$

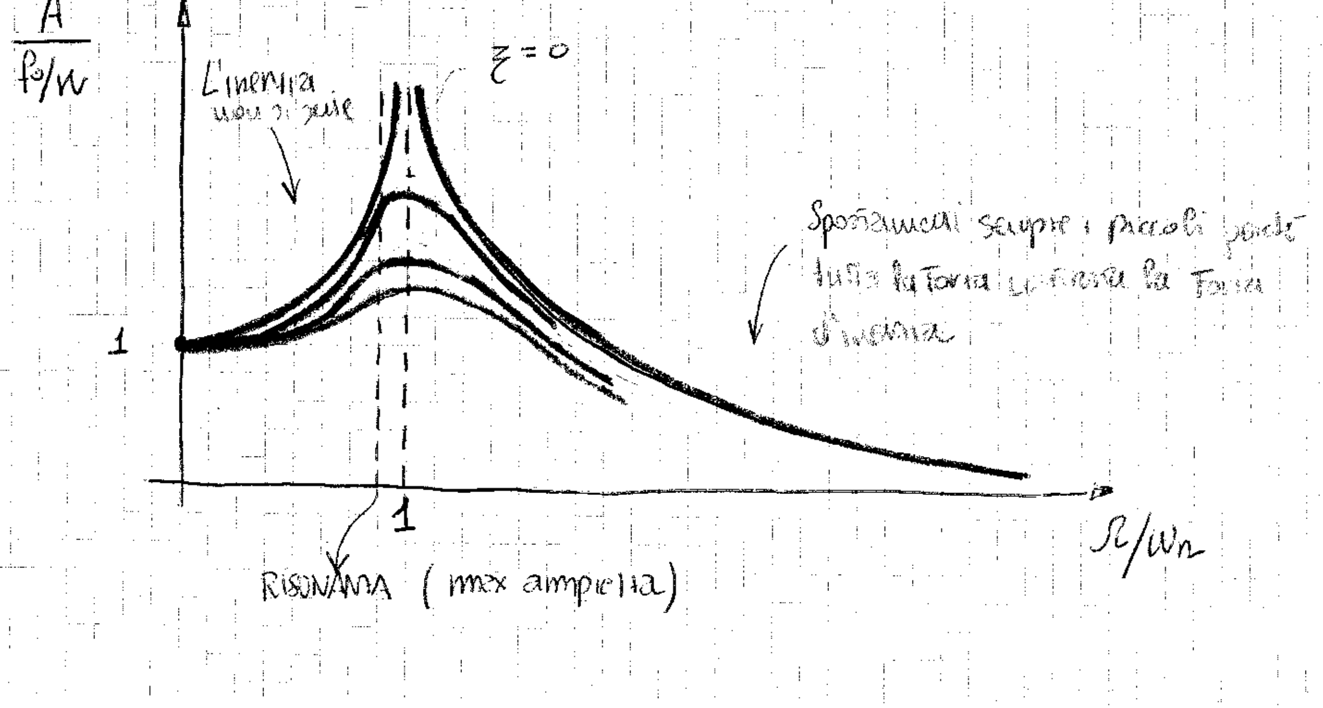
$$\boxed{A = \frac{\overbrace{F_0/K}^{\delta_{\text{STATICO}}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$\downarrow$

Risonanza con smorzamento

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{2\xi\Omega/\omega_n}{1 - \Omega^2/\omega_n^2}}$$



BATTIMENTO E RISONANZA INFINITA

20-10-2010

RISONANZA INFINITA $[\omega \equiv \Omega]$ —> Freq eccitamento sistema

Consideriamo l'equaz moto forzato con smorzamento nullo

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$$

non c'è smorzam. quindi $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_n$

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k-m\omega^2}\cos\omega t$$

$x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$ —> CONDIZIONI INIZIALI

Soluzione periodica ottenuta con $\zeta = 0$ per una forzante cos.

$$\begin{cases} x(0) = a + \dfrac{F_0}{k-m\omega^2} = x_0 \\ \dot{x}(t) = \omega_n(-a\sin\omega_n t + b\cos\omega_n t) - \dfrac{F_0}{k-m\omega^2}\omega \cdot \sin\omega t \\ \dot{x}(0) = b\omega_n = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k-m\omega^2}\right)\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k-\omega^2 m}\cos\omega t$$

↓

Supponiamo che $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 0$

↓

$$x(t) = \frac{F_0}{k-m\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_n t\right)$$ —> Non è un'armonica

Se $\omega \to \omega_n$ ovvero eccitiamo il sistema con le pulsazione naturale

Si verifica una forma di indeterminazione $0/0$

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \frac{F_0(\cos\omega t - \cos\omega_n t)}{k - m\omega^2}$$ —> con de l'Hopital derivate rispetto ad ω $$= \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{F_0(-t\sin\omega t)}{-2m\omega}$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_n} t \sin\omega_n t$$ —> RISONANZA INFINITA (Risultato eccitazione con $\omega = \omega_n$)

Nella realtà c'è sempre uno smorzamento, ma se questo è molto piccolo allora si verifica un amplificazione dell'ampiezza.

PROVARE a fare $f(t) = F_0 \sin \omega_n t$ $(c=0)$

BATTIMENTO

E' un fenomeno che nasce con 2 armoniche con pulsazione vicina e ampiezza paragonabile

$$x(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_n t\right)$$

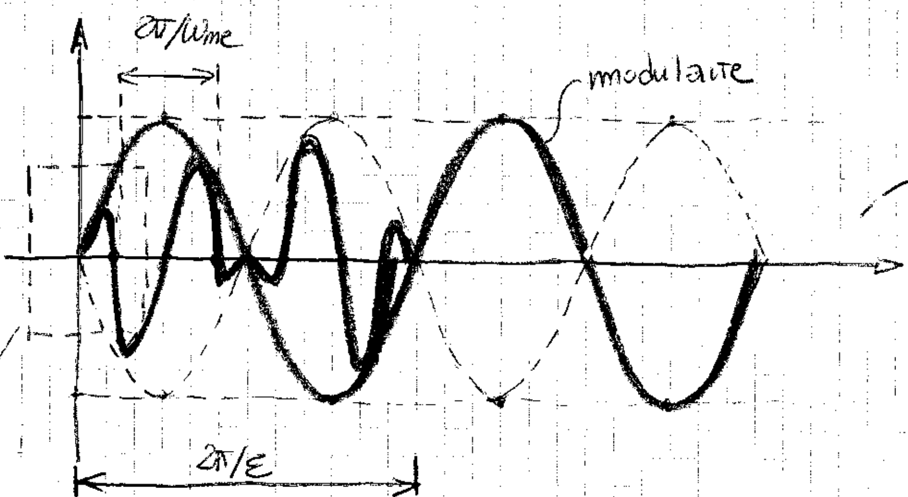
↳ 2 armoniche con stessa ampiezza

$$\cos\omega t - \cos\omega_n t = 2\sin\left(\frac{\omega_n + \omega}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} t\right)$$ Prostaferesi

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_n - \omega}{2} = \varepsilon \qquad \dfrac{\omega_n + \omega}{2} = \omega_{me} \\ k - m\omega^2 = m\left(\dfrac{k}{m} - \omega^2\right) = m\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) = m(\omega_n - \omega)(\omega_n + \omega) \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\, 2\varepsilon \cdot 2\omega_{me}}\, 2\sin(\omega_{me} t)\sin\varepsilon t = \frac{F_0}{2m\omega_{me}\varepsilon}\underbrace{\sin(\omega_{me} t)}_{\text{Portante}}\underbrace{\sin(\varepsilon t)}_{\text{Modulante}}$$

SEGUE



L'ampiezza di oscillazione si riduce periodicamente

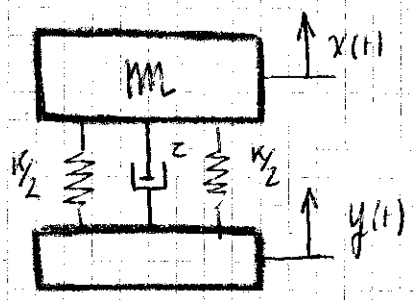
↓

Esempio

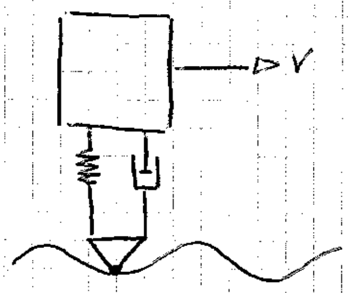
- Aereo
- Corde chitarra

E' il caso di prima al zoomato

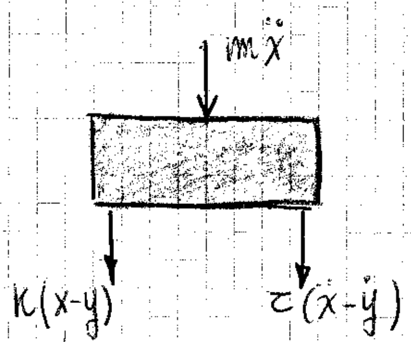
Accelerometro & Sismografo



L'eccitazione del sistema è dovuta ad uno spostamento y e non rispetto ad una Forza



Esempio Automobilistico (Monosospensione)



$\downarrow)\quad m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0$ Forzante contenuta in y e $\dot{y}$

Lavoriamo in coordinate Relative $z = x-y \rightarrow x = z+y$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

"FORZANTE"

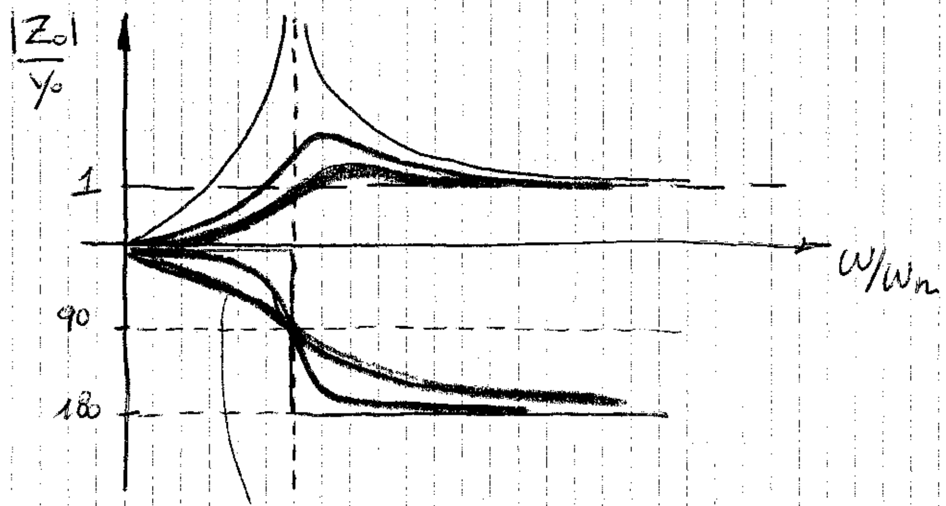
Supponiamo y con andamento Armonico $\rightarrow \boxed{y = Y_0 e^{i\omega t}}$, $Y_0 \in \mathbb{R}$ (Non contiene info sulla fase) ↳ Assumo fase iniziale $= 0$

"Soluzione del tipo"

$$z(t) = Z_0 e^{i\omega t} \qquad Z_0 \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Risultato}$$

$$(k - m\omega^2 + i\omega c) Z_0 = m\omega^2 Y_0$$

$$Z_0 = \frac{m\omega^2 Y_0}{k - m\omega^2 + i\omega c} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 Y_0}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} \Rightarrow |Z_0| = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 Y_0}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



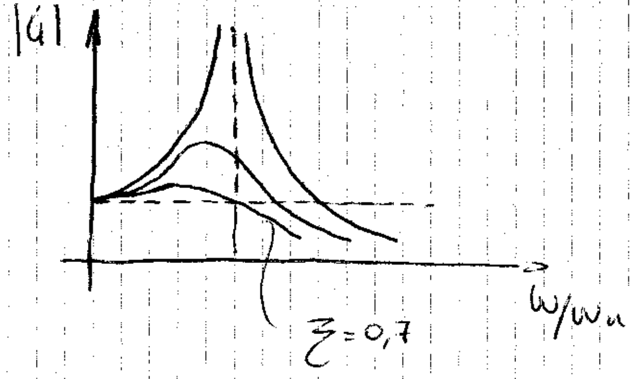
DISTORSIONE DI AMPIEZZA E FASE

AMPIEZZA

Se consideriamo l'Accelerometro, quando la ω non è molto minore di ω_n, commettiamo un'errore sull'ampiezza

$$\frac{Z_0}{Y_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\omega_n^2}}_{} \rightarrow \frac{Z_0}{Y_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot G(i\omega)$$

Fattore di Amplificaz.



Quando $\zeta = 0,7$, la curva è praticamente quasi piatta, e quindi $G(i\omega) \simeq 1$ per un Range ampio di Frequenze

↓

L'accelerometro Lavora bene!

20-10-2010

TRASMISSIBILITÀ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t}$$

$f_V(t) = kx + c\dot{x}$ → FORZA AI VINCOLI (Forza dell'esterno meno l'inerzia)

$f_V(t) = (k + i\Omega c) X e^{i\Omega t}$ (La soluzione è sempre $X \cdot e^{i\Omega t}$)

$$f_V / f(t) = \frac{(k + i\Omega c) X e^{i\Omega t}}{F_0 e^{i\Omega t}} = \text{TRASMISSIBILITÀ}$$ (Uscita/Ingresso)

$$f_V / f(t) = \frac{(k + i\Omega c) \, F_0 / (k - m\Omega^2 + i\Omega c)}{F_0} = \frac{k + i\Omega c}{k - m\Omega^2 + i\Omega c}$$

$$T = f_V / f(t) = \frac{1 + i(2\xi\Omega/\omega_n)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right) + i\left(2\xi \Omega/\omega_n\right)} \qquad \boxed{\frac{\Omega}{\omega_n} = r}$$

TRASMISSIBILITÀ

$$|T| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \text{TRASMISSIBILITÀ (MODULO)} = \frac{f_V}{f(t)}$$

Se la pulsazione è molto veloce (Ω) la forza scaricata a terra è bassa

↓

La forza si trasforma tutta in inerzia

↓

COMPORTAMENTO DA FILTRO MECCANICO

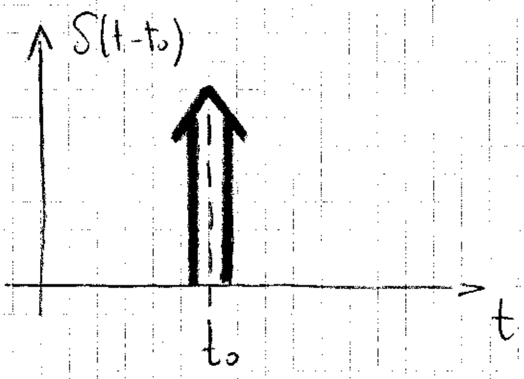
IMPULSO - PER SISTEMI FORZATI da FORZA GENERICA

IMPULSO → δ di DIRAC

$$\delta(t-t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0$$

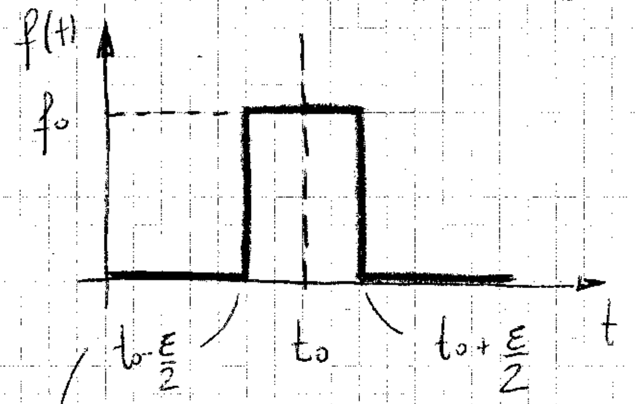
$$\delta(t-t_0) = \infty \quad t = t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1$$



dimensione dipendente da significato fisico di δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$$



$$f_0 \cdot \varepsilon = 1$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ f_0 \to \infty}} f(t) = \delta(t-t_0)$$

Rappresentazione semplificata del concetto di impulso

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 256

$$\lim_{\varepsilon \to 0} m x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \to x(0^+) = 0$$

Al termine dell'impulso la massa è ferma

PER LA VELOCITÀ
(INTEGRIAMO UNA VOLTA)

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\, dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f_0\, dt$$

Integriamo una volta sola

$$m\left(\dot{x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 0\right) + c\left(x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 0\right) + \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} kx\, dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f_0\, dt$$

Impongo il lim $\varepsilon \to 0$

$$m\dot{x}(0^+) + c\,\underbrace{x(0^+)}_{\to 0 \text{ da prima}} + \underbrace{0}_{x \text{ finita}} = \underbrace{1}_{\varepsilon \to 0,\ f_0 \to \infty:\ \text{INTEGRALE} = 1}$$

$\dot{x}(0^+) = 1/m$ → Velocità appena dopo l'impulso

$x(0^+) = 0$; $\dot{x}(0^+) = 1/m$ → La velocità passa istantaneamente da 0 a $1/m$ a causa dell'impulso.

(IP: $x(0^-) = 0$; $\dot{x}(0^-) = 0$)

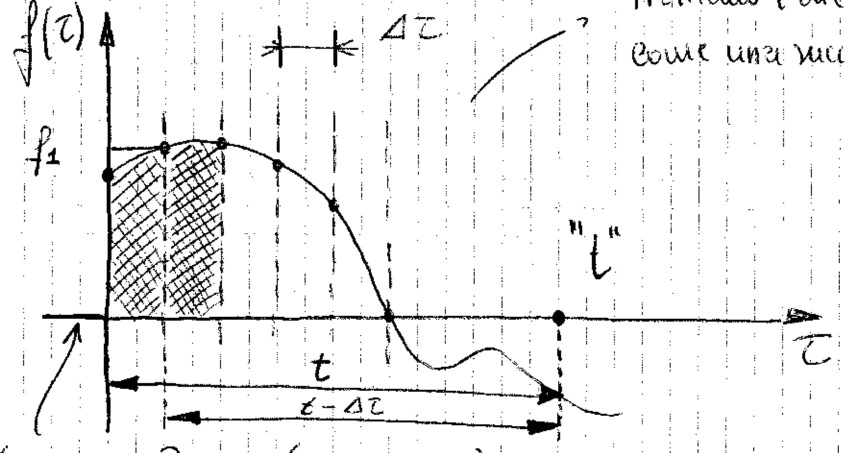
SISTEMA FORZATO - FORZANTE GENERICA

$$m\ddot{x} + z\dot{x} + kx = f(t)$$

$f(t)$ → Forza Generica

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 = 0 \end{cases}$$

Trattiamo l'andamento della Forzante come una successione di impulsi



Sistema a Riposo (Forza nulla)

$f(\tau=0) = f_0 \neq 0$ Forza iniziale non Generalmente Nulla.

- Consideriamo l'istante t ben preciso di osservazione
- Suddividiamo l'asse tempi con intervalli $\Delta\tau$

$$f(\tau_0) = f_0 \qquad f(\Delta\tau) = f_1 \qquad f(2\Delta\tau) = f_2$$

- Consideriamo che inizialmente agisca l'IMPULSO IN ROSSO

$$x_0(t) = \underbrace{f_0 \Delta\tau}\, h(t)$$

AREA → INTENSITÀ DELL'IMPULSO (che non è unitario)

- La Risposta del solo impulso : BLU

$$x_1(t) = f_1 \Delta\tau\, h(t-\Delta\tau)$$

DI CONDIZIONI INIZIALI NON NULLE

$$x(t=0) = x_0 \neq 0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 \neq 0$$

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t h(\gamma) \cdot f(t-\gamma)\, d\gamma}_{\text{RISPOSTA FORZATA}} + \underbrace{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}_{\text{RISPOSTA LIBERA (transitorio)}}$$

SCRITTURA MATRICIALE

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{[m]}_{\text{MATRICE DELLE MASSE}} \{\ddot{x}\} + \underbrace{[c]}_{\text{DAMPING MATRIX}} \{\dot{x}\} + \underbrace{[k]}_{\text{STIFNESS MATRIX}} \{x\} = \{f(t)\}$$

MASS MATRIX

- Si può dimostrare che $[m] = [m]^T$; $[k] = [k]^T$; $[c] = [c]^T$

Non sempre le matrici k e c sono simmetriche (Effetti Giroscopici)

- La matrice delle masse $[m]$ è DEFINITA POSITIVA

$$\{v\}[m]\{v\}^T > 0$$

- La matrice delle rigidezze $[k]$ è DEFINITA SEMIPOSITIVA

$$\{v\}[k]\{v\}^T \geq 0$$

- La matrice degli smorzamenti $[c]$ è PROPORZIONALE

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

Le equazioni sono accoppiate ovvero le variabili sono presenti in altre equazioni, e non è possibile la soluzione separata

$$\left.\begin{aligned} \{x(t)\} &= \{A\} y_0 \cos(\omega t+\varphi) \\ \{\ddot{x}(t)\} &= -\omega^2\{A\} y_0 \cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}\right\}$$ Nell'eq del moto

$$-\omega^2[m]\{A\}\cancel{y_0 \cos(\omega t+\varphi)} + [k]\{A\}\cancel{y_0 \cos(\omega t+\varphi)} = 0$$

$$([K] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\}$$ → • SISTEMA ALGEBRICO

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

• AUTOPROBLEMA

(EIGENVALUE PROBLEM)

$$\downarrow$$

$$[K]\{A\} = \omega^2[m]\{A\}$$

La soluzione fornisce tutti gli AUTOVALORI ω_r^2 $r = 1, \dots, n$
e tutti gli AUTOVETTORI associati agli autovalori $\{\psi_r\}$ $r = 1, \dots, n$

$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \omega_n^2$ → ORDINATI

Le radici positive degli Autovalori sono le PULSAZIONI NATURALI

$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ → PULSAZIONI NATURALI

Gli autovettori sono GLI SPOSTAMENTI dei vari GdL alla frequenza

$\{\psi_r\}$ → FORME MODALI (MODE SHAPE)

$[\omega_r, \{\psi_r\}]$ = MODO

$$m^2\omega^4 - \omega^2(2mk + 2mk) + 4k^2 - k^2 = 0$$

↓ Equazione caratteristica

$$\omega^4 - \frac{4k}{m}\omega^2 + 3\frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\omega_{1/2}^2 = 2\frac{k}{m} \pm \sqrt{4\frac{k^2}{m^2} - 3\frac{k^2}{m^2}} \quad \begin{cases} \omega_1^2 = k/m \\ \omega_2^2 = 3\,k/m \end{cases}$$

↓ Autovalori

Sostituiamo gli autovalori nella matrice

$$\begin{bmatrix} 2k - m\frac{k}{m} & -k \\ -k & 2k - m\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↓ Individua un vettore colonna con gli spostamenti delle varie masse

ψ_{jr} riga "j" colonna "r"

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \text{FORMA MODALE "1"}$$

L, stiamo lavorando alla Frequ. 1

$$\begin{cases} k\psi_{11} - k\psi_{21} = 0 \\ -k\psi_{11} + k\psi_{21} = 0 \end{cases} \qquad \psi_{11} = \psi_{21}$$

Lo spostamento è lo stesso ma non sappiamo l'entità

dipende dal fatto che il sistema di equazioni è omogeneo → gli autovettori sono definiti a meno di una costante

3-11-2011

PRECISAZIONI

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$

$$\{x(t)\} = ?$$

$\downarrow$

$$[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$\downarrow$

Autoproblema $\left([K] - \omega^2[m]\right)\{A\} = \{0\}$

$\downarrow$

AUTOVALORI ω_k^2 e AUTOVETTORI $\{\psi_k\}$

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

È possibile che ci siano degli autovettori nulli ovvero ci sia un moto rigido. (Al max le prime 6 frequenze proprie sono nulle per un corpo nello spazio) $\rightarrow$ $[K]$ è SEMIDEFIN. TA POSITIVA

Generalmente gli Autovettori vengono raggruppati in una matrice

$$[\psi] = \Big[\{\psi_1\}\ \{\psi_2\}\ \dots\Big]_{n \times n} \longrightarrow \text{MATRICE MODALE}$$

$\psi_{jk} \rightarrow$ modo k

$\quad \llcorner \rightarrow$ gdl j

Il principio di ortogonalità vale anche per la matrice delle rigidezze

$$[k]\{\psi_r\} = \omega_r^2 [m]\{\psi_r\}$$

$$\{\psi_s\}^T[k]\{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_s\}^T[m]\{\psi_r\}$$

allora

$r \neq s$ $\quad \{\psi_s\}^T[k]\{\psi_r\} = 0$ (Infatti $\{\psi_s\}^T[m]\{\psi_r\} = 0$)

$r = s$ $\quad \{\psi_r\}^T[k]\{\psi_r\} = k_r = \omega_r^2 m_r$ (Infatti $\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_r\} = m_r$)

RIGIDEZZA MODALE

ORTOGONALITÀ RISPETTO A [K]

$$\omega_r^2 = k_r/m_r$$

La massa modale e la rigidezza modale non hanno ~~unità~~ dimensioni mentre la ω_r sì. (rad/s)

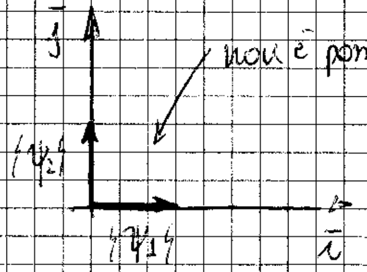
AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Un qualunque vettore $\{v\}$ soluzione può essere scritto come combinazione lineare degli autovettori (essi sono LINEARMENTE INDIPENDENTI)

- Per ASSURDO

se $\{\psi_r\}$ L.D allora $\quad \{v\} = \sum_{r=1}^{n} e_r \{\psi_r\} = \{0\}$

non è possibile sommarli ed ottenere $\{0\}$



dimostrazione:

$$[\psi]^T [k][\psi] = diag(k_R) = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_u \end{bmatrix}$$

$$[\psi]^T [m][\psi] = diag(m_R) = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_u \end{bmatrix}$$

SISTEMA SMORZATO - RISPOSTA LIBERA

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x\} = 0$$

$$\begin{cases} \{x(t=0)\} = \{x_0\} \\ \{\dot{x}(t=0)\} = \{v_0\} \end{cases}$$ $\rightarrow$ calcoliamo la risposta libera date le condizioni iniziali

Applichiamo la trasformazione modale

$$\left.\begin{aligned} \{x(t)\} &= [\psi]\{\eta\} \\ \{\dot{x}(t)\} &= [\psi]\{\dot{\eta}\} \\ \{\ddot{x}(t)\} &= [\psi]\{\ddot{\eta}\} \end{aligned}\right\}$$ $\rightarrow$ nell'espressione di partenza

$$\overbrace{[\psi]^T}^{\text{masse modali diagonale}}\left([m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\psi]\{\eta\}\right) = \{0\}$$

Premoltiplico per $[\psi]^T$ e sapendo che $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

$$\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & m_R & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\{\ddot{\eta}\} + \left(\alpha\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & m_R & \\ & & \ddots\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & k_R & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\right)\{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix}\ddots & & \\ & k_R & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\{\eta\} = \{0\}$$

dato che le matrici sono tutte diagonali, allora le equazioni sono tutte distinte

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 256

RIEPILOGO 9-11-2010

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= \{x_0\} \\ \dot{x}(t=0) &= \{v_0\} \end{aligned}\right\} CI$$

1) $([k] - \omega^2 [m])\{A\} = \{0\} \Rightarrow \omega_r^2, \{\psi_r\}$

2) $\{x\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\eta_r(t) = [\psi]\{\eta(t)\}$

3) $m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \cdot \eta_r = 0 \qquad r = 1, \dots n$

$$\xi_r < 1 \rightarrow \eta_r(t) = e^{-\xi_r \omega_r t}(a_r \cos \omega_{d_r} t + b_r \sin \omega_{d_r} t)$$

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}$$

CALCOLO DELLE COSTANTI a_r e b_r

Per trovare le costanti a_r e b_r converto le CONDIZIONI INIZIALI IN COORDINATE MODALI

$$\begin{cases} \eta_r(t=0) = \eta_{r0} \\ \dot{\eta}_r(t=0) = \dot{\eta}_{r0} \end{cases}$$ CI in coordinate modali

$$\{x(t=0)\} = \{x_0\} = [\psi]\{\eta(t=0)\} = [\psi]\{\eta_0\}$$

$\downarrow$ noto

$$[\psi]^{-1}[\psi]\{\eta_0\} = [\psi]^{-1}\{x_0\} \rightarrow \{\eta_0\} = [\psi]^{-1}\{x_0\}$$

Lo stesso vale per la velocità $\rightarrow \{\dot{\eta}_0\} = [\psi]^{-1}\{v_0\}$

$$\{\eta_0\} = \begin{Bmatrix} \eta_{10} \\ \vdots \\ \eta_{n0} \end{Bmatrix}$$

Calcolo difficile e complesso (Matrice Inversa)

SISTEMA CON FORZANTE - QUALUNQUE

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

Il vettore $f(t)$ contiene le forzanti, ma non è detto che tutte le masse sono sottoposte a forzante.

$$\{x\} = [\Psi]\{\eta\} = \sum_{r=1}^{n} \{\Psi_r\}\eta_r$$

(Proviamo ad usare la seconda notazione)

$$[m]\sum\{\Psi_r\}\ddot{\eta}_r + [c]\sum\{\Psi_r\}\dot{\eta}_r + [k]\sum\{\Psi_r\}\cdot\eta_r = \{f(t)\}$$

$$\{\Psi_s\}^T\left([m]\sum\{\Psi_r\}\ddot{\eta}_r + [c]\sum\{\Psi_r\}\dot{\eta}_r + [k]\sum\{\Psi_r\}\eta_r\right) = \{\Psi_s\}^T\{f(t)\}$$

$$m_r\ddot{\eta}_r + c_r\dot{\eta}_r + k_r\eta_r = \{\Psi_r\}^T\{f(t)\} = Q_r(t)$$

FORZA MODALE ← { Opportuna combinazione delle Forze del sistema

$$m_r\ddot{\eta}_r + c_r\dot{\eta}_r + k_r\eta_r = Q_r(t)$$

Forzante Generica → Con integrale di convoluzione

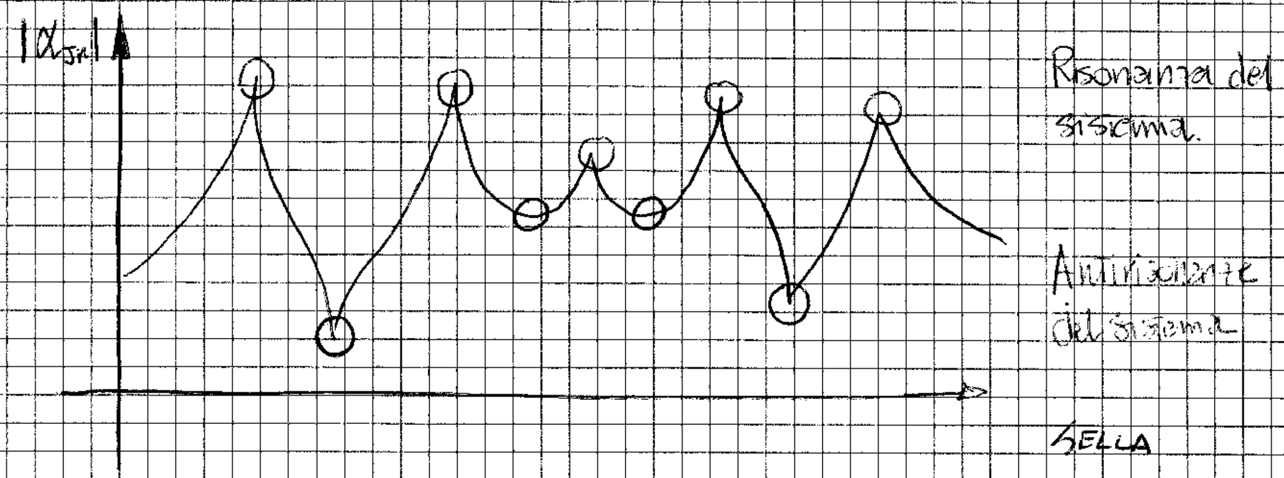
$$\eta_r(t) = \int_0^t Q_r(\tau)\,h_r(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t h_r(\tau)\cdot Q_r(t-\tau)\,d\tau$$

$$h_r(t) = \frac{1}{m_r\omega_{dr}}\,e^{-\xi_r\omega_r t}\cdot\sin\omega_{dr}t$$

Se le condizioni iniziali non sono nulle, bisogna considerare la soluzione precedente (sovrapposizione degli effetti)

$$\alpha_{JK}(\Omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{{}_{JK}A_r}{K_r - M_r\Omega^2 + i\Omega C_r} \Rightarrow$$

La Forma è quella di una Risposta in Frequenza di un Sistema Forzato con massa, smorzamento e Rigidezza modali.



- $[C] = [0] \rightarrow \Omega^2_{RIS} = K_r/M_r$
- $\alpha_{JK} = X_J/F_{K0}$ → Nelle zone di Antirisonanza, il sistema, benché sia eccitato con una Forza, questo si sposta molto poco
- Nei punti di Sella c'è un valore minore dell'ampiezza non minore quanto ai punti di ANTIRISONANZA

$$\begin{cases} x_1 = x_G - l_1\theta \\ x_2 = x_G + l_2\theta \end{cases}$$

$$x_2 - x_1 = (l_1 + l_2)\theta \rightarrow \theta = \frac{x_2 - x_1}{l_1 + l_2}$$

$$x_1 = x_G - l_1\frac{(x_2 - x_1)}{l_1 + l_2}$$

$$x_G = x_1 + \frac{l_1 x_2 - l_1 x_1}{l_1 + l_2} = \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{l_1 + l_2} \qquad l_1 + l_2 = L$$

$$x_G = \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{L}$$ → Sostituisco nelle equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0 \\ I_G\ddot{\theta} + k_2 x_2 l_2 - k_1 x_1 l_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m l_2}{L}\ddot{x}_1 + \frac{m l_1}{L}\ddot{x}_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0 \\ \frac{I_G}{L}\ddot{x}_2 - \frac{I_G}{L}\ddot{x}_1 + k_2 l_2 x_2 - k_1 l_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

Scelte altre 2 variabili

$$\begin{bmatrix} \frac{m l_2}{L} & \frac{m l_1}{L} \\ -\frac{I_G}{L} & \frac{I_G}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 l_1 & k_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con il cambio di variabile non viene conservata la diagonalità di [m] e la simmetria di [k]

Necessarie le eq. Lagrange

$k_1 = 2k$

$k_2 = k$

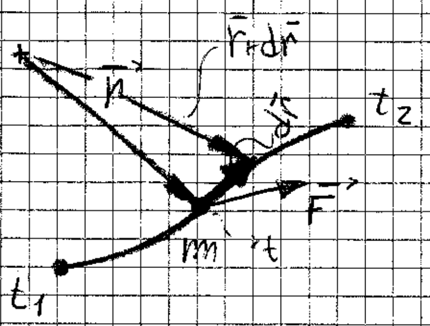
$l_1 = l_2 = l$

$$\rightarrow [m]\{\ddot{\underline{x}}\} + [k]\{\underline{x}\} = \{0\}$$

$$\det([K] - \omega^2[m]) = 0 \rightarrow \underline{\omega_{1,2}^2} \equiv \omega_{1,2}^2$$

Le pulsazioni naturali sono indipendenti dalle variabili scelte, gli autovettori sono diversi! (Autovettore → spostamento delle m)

TRATTAZIONE LAGRANGIANA



Consideriamo una massa che si muove su una curva generica da un istante t_1 a un istante t_2.
All'istante t la massa è sottoposta ad una certa forza risultante $\vec{F}$.
In un istante dt, c'è uno spostamento $d\vec{r}$

$$dW = \text{FUNZIONE LAVORO} \doteq \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ (Non è la variazione di W è la quantità infinitesima)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}}$$

$$d\bar{W} = m\ddot{\vec{r}} \cdot dr = m\frac{d\dot{\vec{r}}}{\cancel{dt}} \cdot \dot{\vec{r}}\,\cancel{dt} \qquad \left(\frac{dr}{dt}dt = \dot{r}\,dt\right)$$

$$d\bar{W} = m\, d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \qquad \left(d(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}\, d\dot{\vec{r}} = 2\, d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right)$$

$$dW = d\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) \Rightarrow dW = dT$$

Lavoro svolto dalla Forza $\vec{F}$ — Variazione dell'energia cinetica

$$T \doteq \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

Dividendo le Forze conservative da quelle Non Conservative

$$F = F_C + F_{NC}$$

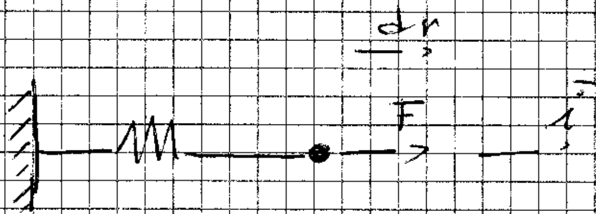
$$\int_{\bar r_1}^{\bar r_2} d\bar W = \int_{\bar r_1}^{\bar r_2} \bar F_C \, d\bar r + \int_{\bar r_1}^{\bar r_2} \bar F_{NC} \cdot d\bar r = T_2 - T_1$$

$$\int_{r_1}^{\bar r_2} \bar F_C \, d\bar r = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

$$\downarrow$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \bar F_{NC} \, d\bar r = \Delta V + \Delta T$$

ESEMPIO



$$\int_{r_1}^{r_f} \bar F d\bar r = \int_{x_1}^{0} F \bar 1 \, dr \bar i = \int_{x_1}^{0} Kx \, dx = -\frac{1}{2} K x_1^2 = V$$

Energia potenziale associata alla molla di rigidezza K.

$$\bar{R}_i = \bar{F}_i + \bar{f}_i$$

$\bar{F}_i$: Forze agenti sul sistema (Attive)

$\bar{f}_i$: Reazioni Vincolari

$$\delta \bar{W} = \sum_1^n \bar{F}_i \, \delta \bar{r}_i + \cancel{\sum_1^n \bar{f}_i \, \delta \bar{r}_i} = 0$$

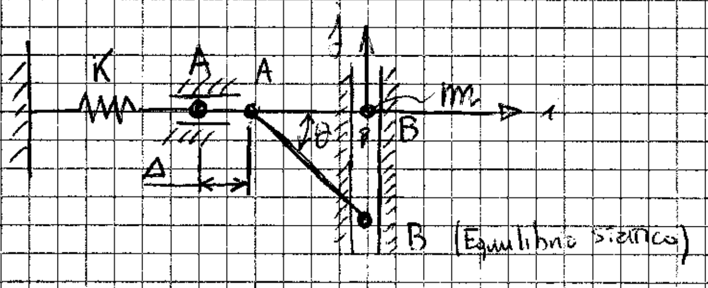
Ipotizziamo che non ci siano Attriti

Dato che lo spostamento virtuale è $\perp$ alle reazioni vincolari (dato che non c'è la componente d'attrito) allora il lavoro virtuale delle forze di reazione è nullo

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \, \delta \bar{r}_i = 0$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

ESEMPIO



$AB = L$

$$\begin{cases} F_1 = -K \cdot \Delta L \, \vec{i} \\ F_2 = -mg \, \vec{j} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -x \, \bar{i} \\ r_2 &= -y \, \bar{j} \end{aligned} \right\}$$ Posizioni occupate dai punti A e B nell'istante generico

$$\Delta = L - L\cos\theta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 256

AGGIUNGIAMO LA PARTE DINAMICA

$$\bar{R}_i = m_i \bar{a}_i = m_i \ddot{\bar{r}}_i$$

Consideriamo che la massa i è sottoposta alla Forza R_i ed è una massa in movimento

$$\underbrace{\bar{R}_i - m_i \cdot \ddot{\bar{r}}_i}_{} = 0$$

F_i^I = FORZA D'INERZIA

$$\bar{R}_i + F_i^I = 0$$

→ Continuo ad applicare il principio dei lavori virtuali considerando in più le Forze d'inerzia

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\bar{F}_i + \bar{F}_i^I\right) \delta \bar{r}_i = 0$$

PRINCIPIO ESTESO DI D'ALAMBERT

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i\right) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

ESEMPIO (PRECEDENTE)

$$r_2 = -L \sin\theta \, \bar{j} \qquad \dot{r}_2 = -L \cos\theta \, \dot{\theta} \, \bar{j}$$

$$\ddot{r}_2 = L \sin\theta \, \dot{\theta}^2 \bar{j} - L \cos\theta \, \ddot{\theta} \, \bar{j}$$

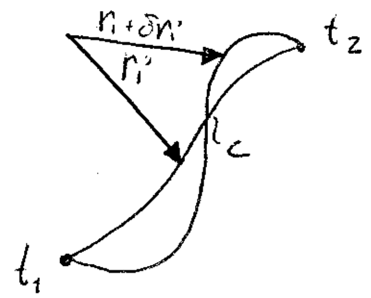
$$\underbrace{-m \ddot{r}_2 \, \delta r_2}_{} = -mL \left(\sin\theta \, \dot{\theta}^2 - \cos\theta \, \ddot{\theta}\right) \bar{j} \cdot \left(-L \cos\theta \, \delta\theta\right) \bar{j}$$

aggiungendo a quello di prima.

22-11-2010

$$\delta L + \delta \bar W_{nc} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\bar r}_i \cdot \delta \bar r_i\right) \qquad L = T - V$$

Integriamo tra 2 istanti generici tali che $\delta r_i(t=t_1) = \delta r_i(t=t_2) = 0$



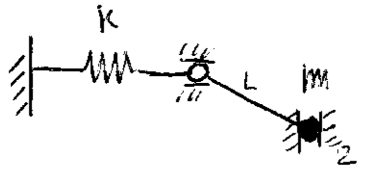
$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc})\, dt = \underbrace{\sum_i m_i \dot r_i \cdot \delta r_i}_{\text{Con l'ipotesi iniziale } = 0} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc})\, dt = 0$$

PRINCIPIO DI HAMILTON ESTESO

Esempio



$$r_2 = -\bar j\, L \sin\theta$$

$$\downarrow$$

$$\dot r_2 = -\bar j\, L \dot\theta \cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m\, \dot r_2 \cdot \dot r_2 = \frac{1}{2} m |\dot r_2|^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot\theta^2 \cos^2\theta$$

$V = -mgL\sin\theta$ (La massa perde quota) $+ \frac{1}{2} K L^2 (1-\cos\theta)^2$ (En pot della molla)

$$\delta T = \frac{1}{\cancel{2}} m L^2 \left(\cancel{2}\cos\theta(-\sin\theta)\cdot \delta\theta\, \dot\theta^2 + \cos^2\theta\, 2\dot\theta \cdot \delta\dot\theta\right)$$

$$\delta V = -mgL\cos\theta\,\delta\theta + \frac{1}{2} K L^2\, 2\,(1-\cos\theta)\cdot(\sin\theta)\cdot\delta\theta$$

Compare $\delta\dot\theta$

$$\downarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-mL^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2 + mgL\cos\theta - KL^2\sin\theta\,(1-\cos\theta)\right)\delta\theta + mL^2\cos^2\theta\,\dot\theta\,\delta\dot\theta\right] dt = 0$$

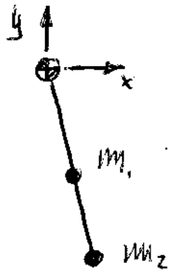
$$\int_{t_1}^{t_2} mL^2\cos^2\theta\,\dot\theta\,\delta\dot\theta\, dt = mL^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2\theta\cdot\dot\theta\;\delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) dt = mL^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2\theta\,\dot\theta\,\frac{d}{dt}\left(\delta\theta\right) dt$$

COORDINATE GENERALIZZATE

Sono le coordinate indipendenti che servono a descrivere in ogni istante di tempo lo stato del sistema

$q_1, q_2, \dots q_n$ → COORDINATE GENERALIZZATE o LAGRANGIANE $q_k = q_k(t)$

N° GRADI DI LIBERTÀ n $\quad n \leq 3N$ → numero masse



$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r_1(x_1, y_1) \\ r_2 &= r_2(x_2, y_2) \end{aligned}\right\} \rightarrow r_1, r_2 = f(\theta) \qquad \begin{aligned} n &= 1 \\ N &= 2 \end{aligned}$$

coordinata generalizzata.

$$\delta W_{NC} = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{\overset{\text{masse}}{N}} \bar{F}_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \dots \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{\underset{\text{dof}}{n}}} \delta q_n \right)$$

$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots q_n)$ coordinate generalizzate usate per descriver la posizione r_i

$$\delta W_{NC} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right)} \delta q_1 + \dots \left(\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_n} \right) \delta q_n$$

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = Q_k = \text{FORZA GENERALIZZATA}$$

(Non è un vettore!)

$$\delta W_{NC} = Q_1 \delta q_1 + \dots Q_n \cdot \delta q_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \delta q_k$$

$$\delta W_{NC} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \delta q_k$$

24-11-2010

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{NC})\, dt = 0$$

$$\delta W_{NC} = \sum_{K=1}^{n} Q_K \cdot \delta q_K$$

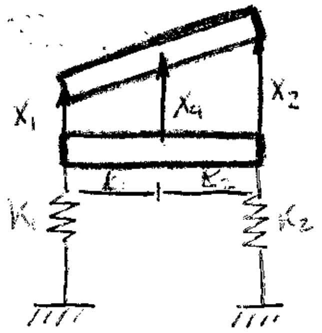
$$T = T(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$$
$$V = V(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$$

Si può dimostrare che si giunge

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial L}{\partial q_K} = Q_K \quad K = 1, \dots n$$

$\longrightarrow$ EQUAZIONI DEL MOTO DI LAGRANGE

ESEMPIO



$$x_G = x_1 + \theta \ell_1$$

$$\theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

Ci sono solo i termini quadratici

$$q_1 \equiv x_1$$
$$q_2 \equiv x_2$$

$$x_G = x_1 + \ell_1\frac{(x_2 - x_1)}{L} = \frac{\ell_1 x_2 - \ell_1 x_1 + x_1 L}{L} = \frac{\ell_1 x_2 + \ell_2 x_1}{L}$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell_2 \dot{x}_1 + \ell_1 \dot{x}_2}{L}\right)^2 + \frac{1}{2} I_G \frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{L^2} \\ V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{L^2}(\ell_2 \dot{x}_1 + \ell_1 \dot{x}_2)\, 2\ell_2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{I_G}{L^2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(-1)\cdot 2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \dfrac{m}{L^2}(\ell_2 \dot{x}_1 + \ell_1 \dot{x}_2)\cdot \ell_1 + \dfrac{I_G}{L^2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

$$M_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$$ → T_2 dipende da questi coeff.

$$M_{12} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} = M_{21}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_2} + \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_2}$$

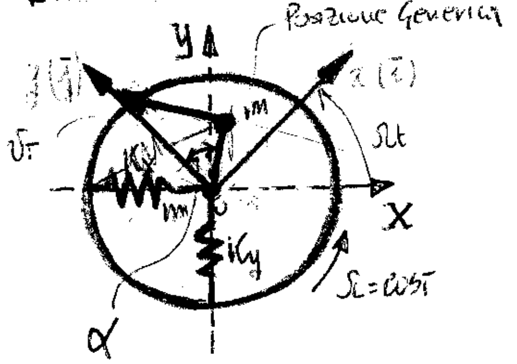
$m_1 \equiv m \qquad m_2 \equiv I_G$

$$\bar{r}_1 = x_G \bar{j} = \frac{\ell_2 x_1 + \ell_1 x_2}{L} \bar{j} \qquad r_2 = \theta = \frac{x_2 - x_1}{L} \bar{j}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{1}{2} m \frac{\ell_2}{L} \bar{j} \cdot \frac{\ell_1}{L} \bar{j} + \frac{1}{2} I_G \left(-\frac{1}{L}\right) \bar{j} \cdot \left(\frac{1}{L}\right) \bar{j} =$$

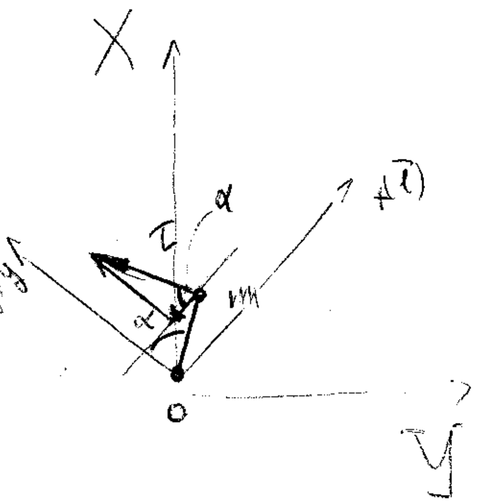
$$M_{12} = M_{21} = \frac{1}{2} \frac{1}{L^2} \left(m \ell_1 \ell_2 - I_G \right)$$

ESEMPIO 2



$x = Om \sin\alpha$

$y = Om \cos\alpha$



Versore tangenziale

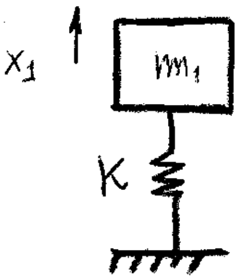
$$\bar{v} = \underset{(rel)}{\bar{v}_R} + \underset{(trasc)}{\bar{v}_T} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + OM\,\Omega\,\bar{\tau} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + OM\left(-\cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j}\right)\Omega$$

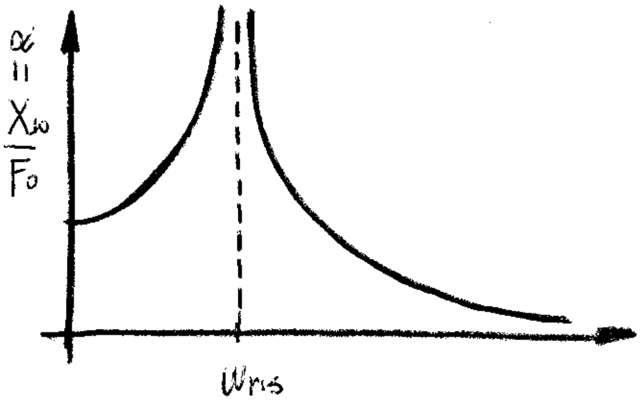
$$= (\dot{x} - \Omega y)\bar{i} + (\dot{y} + \Omega x)\bar{j}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x} - \Omega y)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y} + \Omega x)^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2)$$

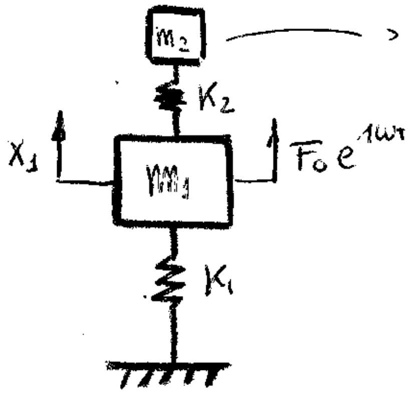
$$\hookrightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}_{T_2} + \underbrace{m\Omega (x\dot{y} - y\dot{x})}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2)}_{T_0}$$

ASSORBITORE DINAMICO





Se ad esempio devo lavorare proprio in corrispondenza della pulsazione di Risonanza, viene inserito un ASSORBITORE DINAMICO



→ Assorbitore dinamico, è un altro sistema massa molla, e viene fatto in modo che ~~...~~ l'antirisonanza del sistema 2-1 vada contro ~~la~~ risonanza del sistema 1

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

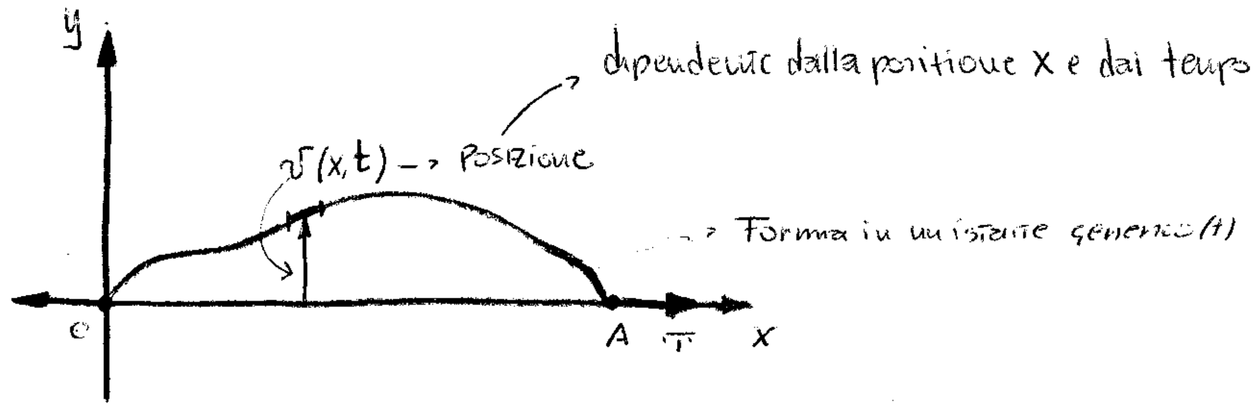
$$\{X\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2-\omega^2 m_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix}}_{[Coeff]} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con KRAMER

$$a = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -K_2 \\ 0 & K_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix}}{\det[Coeff]} \Rightarrow a = \frac{F_0(K_2 - m_2\omega^2)}{(K_1+K_2-\omega^2 m_1)(K_2 - m_2\omega^2) - K_2^2}$$

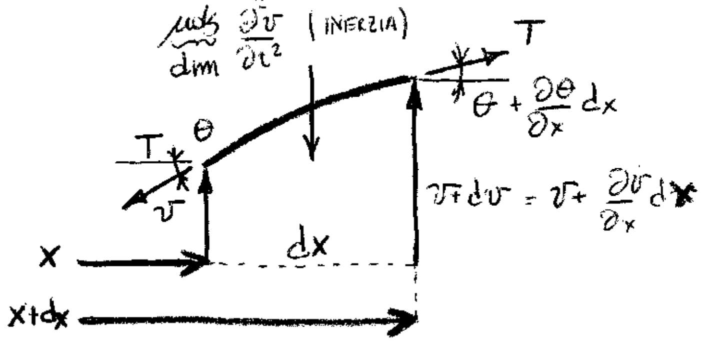
$$b = \frac{F_0 K_2}{(K_1+K_2-\omega^2 m_1)(K_2 - m_2\omega^2) - K_2^2}$$

SISTEMI CONTINUI



Consideriamo una fune tra OA che viene messa in trazione da una sollecitazione T. Il moto può avvenire solo sul piano.

Consideriamo un elementino di fune dx



$\mu = \frac{M}{L}$ = massa x unità di lunghezza

--> consideriamo lo stesso istante di tempo, per questo non c'è $\partial v / \partial t$

Per ipotesi mettiamo che la T rimane costante all'inizio e alla fine perché le SOVRATENSIONI dovute alle deformazioni sono trascurabili rispetto alla forza iniziale di TIRO.

Trascuriamo lo SMORZAMENTO

- $\uparrow \; T \cdot \sin\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) - T \cdot \sin\theta - \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdot ds = 0$ $\quad \begin{cases} \theta \lll 1 \\ ds \simeq dx \\ \sin\theta \simeq \theta \end{cases}$

$$\cancel{T\theta} + T \frac{\partial \theta}{\partial x} \cancel{dx} - \cancel{T\theta} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cancel{dx} = 0$$

- $\mathrm{tg}\,\theta = \partial v / \partial x \;\rightsquigarrow\; \theta \simeq \partial v / \partial x$

$\hookrightarrow \; T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\mu} = \left[\frac{m}{s}\right]^2 \Rightarrow \; c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ Eq. DELLE ONDE

Fissato l'istante di tempo, la deformazione segue un'armonica e lo stesso vale fissando la posizione, nel tempo l'andamento è Armonico

CONDIZIONI AL CONTORNO - BOUNDARY

$v(0,t) = 0$ (VINCOLATO)

$v(L,t) = 0$ (") $\overline{OA} = L$

$(A\cos\omega t + B\sin\omega t)(D+0) = 0 \Rightarrow D = 0$

(") $\left(0 + E\sin\frac{\omega}{c}L\right) = 0$ $E = 0$ (Quiete)

o $\sin\frac{\omega}{c}L = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}L = r\pi$, $r = 1, 2, \ldots$

$$\omega_r = r\pi\frac{c}{L}$$

→ c'è una Famiglia di pulsazioni Naturali

Le frequenze sono numerabili e infinite $r = 1, \ldots$

$$v(x,t) = \underbrace{(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}_{\eta(t)} \cdot \underbrace{\left(D\cos\frac{\omega}{c}x + E\sin\frac{\omega}{c}x\right)}_{\phi(x)}$$

Con $\omega_r = r\pi\frac{c}{L}$ → ω_r^2 → Autovalore

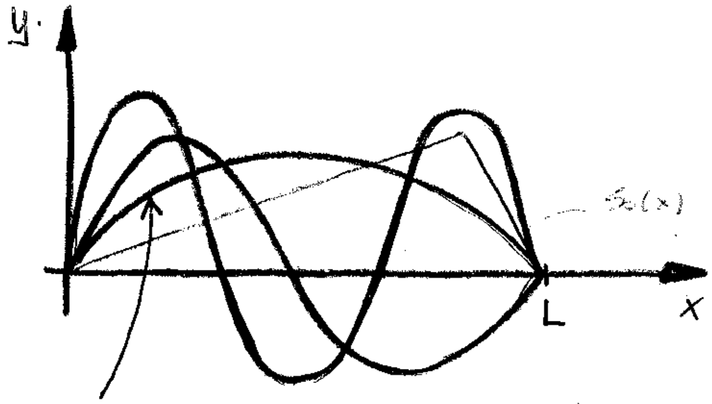
$\varphi_r(x) = \sin\frac{\omega_r}{c}x$ → Autofunzione

$\frac{\omega}{c} = k$ → N° d'onda

$k = \omega/c \to \varphi(x) = \sin kx$ → K svolge la stessa funzione di ω ma nell'ambito dello spazio

$k = 2\pi/\lambda$

→ LUNGHEZZA D'ONDA $= \lambda$



Ad esempio il colpo dato da un martelletto sulla corda

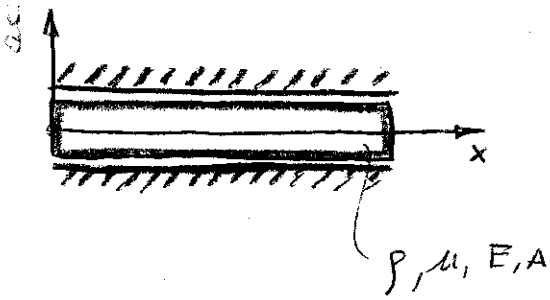
$$\omega_r = r\pi\frac{c}{L}$$

$$\sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right)$$

$r = 1 \rightarrow \omega_r =$ PULSAZIONE PRIMA ARMONICA FONDAMENTALE

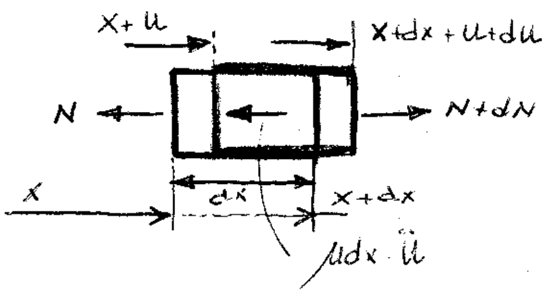
Le armoniche ci sono tutte ma quelle + evidenti sono quelle il cui K è più pesante.

ASTA LIBERA DI MUOVERSI ASSIALMENTE - DEFORMABILE ASSIALMENTE



Consideriamo un corpo che si può deformare solo secondo il suo asse.

Consideriamo un Elementino



- X → Indica dove sto sezionando
- U → Indica di quanto si sposta la sezione considerata.

$$u = u(x,t)$$

2 incognite

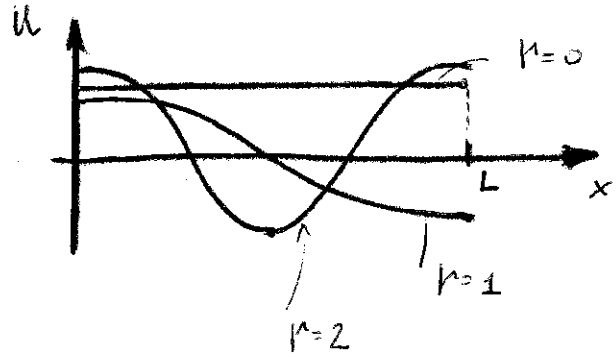
$$N + \frac{\partial N}{\partial x}dx - N - \mu dx\,\ddot{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \mu\,\ddot{u}$$

$$N = A\cdot\sigma = A\cdot\varepsilon\,E$$

L'allungamento è ∂u e la Lunghezza iniziale è ∂x

$$N = A\cdot E\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(x,t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(H_r \cdot \cos\omega_r t + K_r \sin\omega_r t \right) \underbrace{\cos\left(r \cdot \pi \frac{x}{L} \right)}_{\text{AUTOFUNZIONI}}$$



$$K = \omega / c = \frac{r\pi}{L} \qquad \left(\frac{\omega_r L}{c} = \pi \cdot r \right)$$

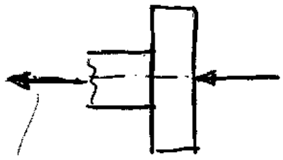
$\Updownarrow$

$K = \frac{2\pi}{\lambda_R}$ => PER DEFINIZIONE

$\downarrow$

$\lambda_R = \frac{2L}{r}$ → $r = 0$, lunghezza d'onda ∞

$r = 1$, lunghezza d'onda doppia della lunghezza



$(I_v \ddot{\theta})_{x=L}$ (Verso deciso dalla rotazione imposta prima

$(M)_{x=L}$ → verso imposto dalla condiz. precedente

$$(M + I_v \ddot{\theta})_{x=L} \qquad \left(G I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} + I_v \ddot{\theta}\right)_{x=L} = 0$$

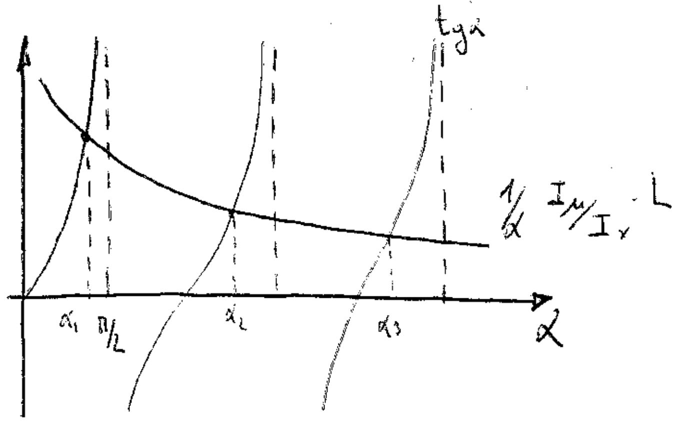
$$\ddot{\theta} = (-\omega^2)(a \cos\omega t + b \sin\omega t)\, e \sin\frac{\omega}{c}L$$

$$G I_p\, e\, \frac{\omega}{c} \cos\frac{\omega}{c} L \,(a \cos\omega t + b \sin\omega t) + I_v \ddot{\theta} = 0$$

$$G I_p\, e\, \frac{\omega}{c} \cos\frac{\omega}{c} L \,(a \cos\omega t + b \sin\omega t) + I_v(-\omega^2)(a \cos\omega t + b \sin\omega t)\, e \sin\frac{\omega}{c} L = 0$$

$$\frac{G I_p \cancel{\omega}}{c\, \omega^{\cancel{2}} I_v} = tg\, \frac{\omega}{c} L \qquad c^2 = G I_p / I_\mu$$

$$tg\, \frac{\omega}{c} L = \frac{c}{\omega L} \, \frac{I_\mu L}{I_v} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega}{c} L \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{\alpha} \, \frac{I_\mu L}{I_v}$$



$$\omega_r = \frac{c}{L} \alpha_r \qquad r = 1, \dots n$$

$$EI\, G \frac{d^4F}{dx^4} + \mu F \frac{d^2G}{dt^2} = 0$$

$$\underbrace{-\frac{\ddot{G}}{G}}_{\text{solo da } t} = \underbrace{EI\frac{F^{iv}}{F}}_{\text{solo da } x} \Rightarrow \text{E' vero solo se} \; = cost = \omega^2$$

$$\ddot{G} + G\omega^2 = 0 \Rightarrow G(t) = G_1 \cos\omega t + G_2 \sin\omega t$$

$$F^{iv} - \frac{\mu\omega^2}{EI} F = 0 \Rightarrow F = F_0 \cdot e^{sx}$$

$$s^4 - \underbrace{\frac{\mu\omega^2}{EI}}_{\beta^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}} = 0 \rightarrow s^4 - \beta^4 = 0 \qquad s^2 = \begin{cases} +\beta^2 \rightarrow \begin{cases} s_1 = \beta \\ s_2 = -\beta \end{cases} \\ -\beta^2 \rightarrow \begin{cases} s_1 = i\beta \\ s_2 = -i\beta \end{cases} \end{cases}$$

$$F(x) = \underbrace{F_1 e^{\beta x} + F_2 e^{-\beta x}}_{f_2 \cosh\beta x + f_2 \sinh\beta x} + \underbrace{F_3 e^{i\beta x} + F_4 e^{-i\beta x}}_{f_3\cos\beta x + f_4 \sin\beta x}$$

$$v(x,t) = \left(G_1 \cos\omega t + G_2 \sin\omega t\right) \cdot F(x) \rightarrow \text{incognite 2 dal tempo e 4 dallo spazio}$$

Condizioni al contorno

- $v(x=0,t) = 0$
- Inoltre l'incastro annulla la rotazione $\frac{\partial v}{\partial x}(x=0,t) = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = -\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$v(x,t) = \underbrace{(a\cos\omega t + b\sin\omega t)}_{\eta(t)}\cdot\underbrace{(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x + c_3\cosh\beta x + c_4\sinh\beta x)}_{\varphi(x)}$$

CC

$$[A]\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Autoproblema}$$

Autovettori

$\llcorner$> Autovalori β_r e $\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}_r$ $r = 1, \dots$

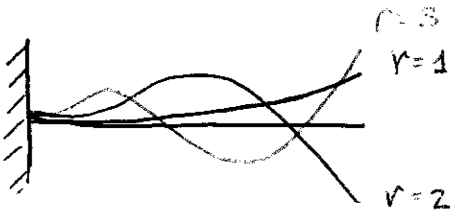
$\downarrow$

Per mensola => $\det(A) = 0$ => $\cos\beta L \cdot \cosh\beta L + 1 = 0$

$\beta_r L$ =	....	....	
r	1	2	......

$$\beta_r^4 = \frac{\mu\,\omega_r^2}{EI} \Rightarrow$$

Ad ogni β_r corrisponde un ω_r e quindi una serie di coefficienti e quindi una certa Forma modale



I punti in cui in un certo modo non c'è spostamento vengono chiamati NODI

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)\cdot\eta_r(t) \rightarrow \text{teoricamente infinita somma}$$

autofunzioni

Pesi

esempio oscillaz. Torsionali

$$\int_0^L \theta_r \mathcal{M}[\theta_s]\, dx = \int_0^L -(I_\mu)\, \theta_r \cdot \theta_s\, dx = \int_0^L (I_\mu)\, \theta_s \cdot \theta_r\, dx$$

esempio oscillaz. flessionali

$$\int_0^L \varphi_s(x) \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2}\right)}_{\text{L'operatore è questo}} dx$$

Per parti → $= \left[\underbrace{\varphi_s}_{\text{in } (x=0)=0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{EI \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2}}_{\text{Mom}}\right)\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2}\right) dx$ $= 0$

Taglio (Nullo in L).

In una trave appoggiata gli spostamenti sono nulli in 0 e L o anche per trave libera il ~~...~~ taglio è nullo in 0, L, allora questa quantità è sempre nulla con l'eccezione di masse concentrate sugli estremi.

di nuovo x parti

Per motivi come precedenti

$$-\int_0^L \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2}\right) dx = +\left[-\underbrace{\frac{\partial \varphi_s}{\partial x}}_{\text{pendenza trave}} \overbrace{EI \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2}}^{\text{Momento fl.}}\right]_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} dx$$

Possiamo cambiare r ed s senza che cambi il risultato della Trave

La SIMMETRIA delle MATRICI nei sistemi discreti corrisponde alla proprietà di OPERATORE AUTOAGGIUNTO

$$\int_D \varphi_s K[\varphi_r]\, dD = \int_D \varphi_s \omega_r^2 M[\varphi_r]\, dD \qquad I$$

$$\int_D \varphi_r K[\varphi_s]\, dD = \int_D \varphi_r \omega_s^2 M[\varphi_s]\, dD \qquad II$$

Sapendo che sono autoaggiunti M e K scambio nella seconda r e s e sottraggo

$$\int_D \varphi_s K[\varphi_r]\, dD = \int_D \varphi_s \omega_s^2 M[\varphi_r]\, dD \qquad II_{mod}$$

Sottraggo

$$0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_D \varphi_r M[\varphi_s]\, dD$$

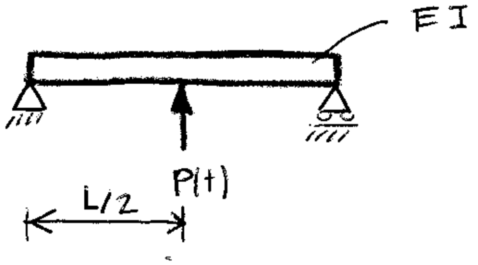
$$\begin{cases} r \neq s & \int_D \varphi_r M[\varphi_s]\, dD = 0 \\ r = s & \int_D \varphi_r M[\varphi_s]\, dD = m_r \rightarrow \text{MASSA MODALE} \end{cases}$$

$$\int_D \varphi_s K[\varphi_r]\, dD = \int_D \varphi_s \omega_s^2 M[\varphi_r]\, dD$$

$$\begin{cases} r \neq s & \int \varphi_r M[\varphi_s]\, dD = 0 \text{ allora } \int \varphi_s K[\varphi_r]\, dD = 0 \\ r = s & \int_D \varphi_r K[\varphi_r]\, dD = K_r = \omega_r^2 m_r = \text{RIGIDEZZA MODALE} \end{cases}$$

$r = 1, \dots \infty \rightarrow$ GdL infiniti. (Continuo)

Esempio SIMPLY SUPPORTED



delta di dirac (Perché il carico è concentrato)

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=P(t)\,\delta\left(x-\frac{L}{2}\right)$$

Soluzione Autoproblema $\qquad \beta_r^4=\frac{\mu\omega_r^2}{EI}$

$$\varphi_r(x)=a_1\cos\beta_r x+a_2\sin\beta_r x+a_3\cosh\beta_r x+a_4\sinh\beta_r x$$

$\downarrow$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Spostamento nullo $x=0,L\ (t) \Rightarrow v(0,t)=v(L,t)=0$

Momento nullo $x=0,L\ (t) \Rightarrow v''(0,t)=v''(L,t)=0$

$\downarrow$

$$\varphi_r(x)=\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right) \qquad \beta_r=r\pi/L$$

$$m_r=\int_{0(D)}^{L}\varphi_r\,M[\varphi_r]\,dD=\int_0^L\varphi_r\,\overset{\Gamma\to\mu}{M}[\varphi_r]\,dx=$$

$$m_r=\int_0^L\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right)\cdot\mu\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right)dx=\mu\int_0^L\sin^2\left(r\pi\frac{x}{L}\right)dx$$

$$\ldots\quad m_r=\mu\cdot L/2$$

$$K_r=\int_D\varphi_r\,K[\varphi_r]\,dD=\int_0^L\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right)EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right)\right)dx$$

$$K_r=EI\int_0^L\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right)\left(\frac{r\pi}{L}\right)^4\sin\left(r\pi\frac{x}{L}\right)dx$$

$$m_r \ddot{\eta}_R + K_r \eta_R = N_r(t) \qquad v(t,x) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r \eta_r$$

Considereremo il carico pari ad una costante

$$\downarrow$$

$$N_r = \text{cost} = P_0 \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)$$

diventa un sistema con forzante a gradino

$$\eta_r = N_r / K_r = \frac{P_0 \sin(r\pi/2)}{EI (r\pi)^4} 2L^3$$

$$\eta_r = \frac{P_0 2L^3}{EI} \frac{\sin(r\pi/2)}{(r\pi)^4} \Rightarrow$$ coordinate modali! Non sono spostamenti fisici

$$v(x,t) = \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \varphi_r \eta_r$$

$$\downarrow$$

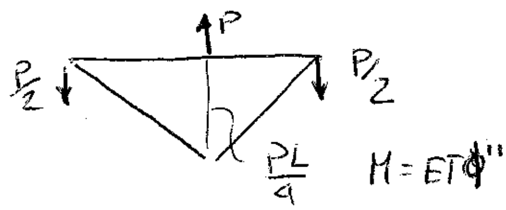
dipende da dove è messo il carico.

$$v(x,t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI} \sum_{r=1,3}^{\infty} \frac{\sin(r\pi/2)}{r^4} \cdot \overbrace{\sin\left(r\pi \frac{x}{L}\right)}^{\varphi_r}$$

$$\downarrow$$

man mano che si va avanti con le prime modali, il contributo diminuisce $\frac{1}{r^4}$ ..

Supponiamo di voler calcolare lo spostamento in mezzeria. Ci siamo ricondotti al caso statico



$$v\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right)$$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \dots\right)}_{\text{Tende a } \frac{1}{48}}$$

$$v\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{P_0L^3}{EI}\frac{1}{48}$$

METODO APPROSSIMATO PER IL CALCOLO DELLE FREQUENZE PROPRIE

Non sempre è possibile calcolare le frequenze proprie sia per casi discreti che continui. Non è quindi possibile risolvere l'equazione.

Consideriamo un sistema senza forzanti e non smorzato

$$\mathcal{M}[\ddot{w}] + K[w] = 0 \implies \text{SISTEMA CONSERVATIVO}$$

$$w(x, y, z, t) = \varphi\,\eta$$

$$\downarrow$$

$$K[\varphi] = \omega^2 \mathcal{M}[\varphi]$$

$$\downarrow$$

Soluzione φ_r, ω_r^2 Allora

$$\int_D \varphi_r K[\varphi_r]\, dD = \omega_r^2 \int \varphi_r \mathcal{M}[\varphi_r]\, dD$$

$$\omega_r^2 = \frac{\int_D \varphi_r K[\varphi_r]\, dD}{\int_D \varphi_r M[\varphi_r]\, dD}$$ -> Figura dell'en cinetica

$$\omega_r^2 = \frac{V_r}{T_r}$$ V_r -> en pot. ; T_r -> en cin.

Supponiamo di non poter calcolare φ_r, e usiamo un altro vettore nel calcolo di ω_r^2

$$\omega^2 = \frac{\int_D u\, K[u]\, dD}{\int_D u\, M[u]\, dD} = R(u)$$ -> QUOZIENTE DI RAYLAIGH.

Riepilogo

$$[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$\{x\} = \{A\} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\{\dot{x}\} = \{A\}\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{A\} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{\{A\}^T [K] \{A\} \ \frac{1}{2}}{\{A\}^T [m] \{A\} \ \frac{1}{2}}$$

En Cinetica

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [m] \{\dot{x}\} = \frac{1}{2} \{A\}^T [m] \{A\} \cdot \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\} \cdot \sin^2(\omega t + \varphi)$$

En. potenziale elastica

Nei sistemi conservativi l'En. potenziale + En cinetica si mantiene costante

$$T + V = cost \rightarrow T_{max} + V_{min} = T_{min} + V_{max}$$

$$V_{min} \rightarrow V = 0 \rightarrow \sin^2(\omega t + \varphi) = 0$$

$$T_{min} \rightarrow T = 0 \rightarrow \cos^2(\omega t + \varphi) = 0$$

$$T_{max} + \cancel{V_{min}} = \cancel{T_{min}} + V_{max} \Rightarrow T_{max} = V_{max}$$

Energia cinetica massima = energia potenziale massima.

$$V_{max} = \omega^2 \tilde{T}_{max}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \underbrace{\mu dx}_{m} \underbrace{\dot{u}^2}_{v^2_{\text{velocità}}}$$

$$u = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) f(x)$$

$$\dot{u} = \left(-(A\sin\omega t)\omega + (B\cos\omega t)\omega\right) f(x)$$

$$T = \frac{1}{2} \mu \omega^2 (-A\sin\omega t + B\cos\omega t)^2 \int_0^L (f(x))^2 dx$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 (A^2 + B^2) \int_0^L (f(x))^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} K x^2 \qquad F = X \cdot K \Rightarrow K = F/X \Rightarrow V = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} F x$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \underbrace{EA \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}_{N} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dx}_{du} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) \frac{df(x)}{dx}$$

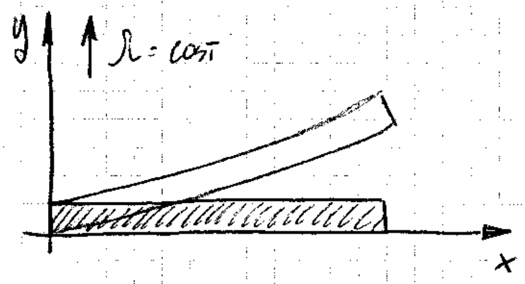
$$V = \frac{1}{2} EA \int_0^L (A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2 \cdot \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 dx$$

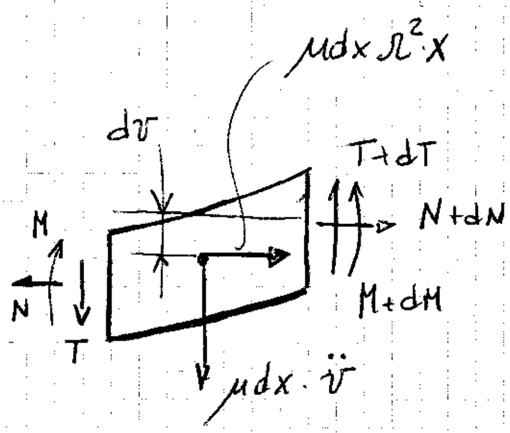
$$V_{max} = \frac{1}{2} EA (A^2 + B^2) \int_0^L \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 dx$$

Cambio di Variabile $\Rightarrow X = x/L \qquad dx = L\,dX$

$$df/dx = df/L\,dX$$

Esempio 2





$$\circlearrowleft \quad \overbrace{\frac{\partial M}{\partial x}dx}^{dM} - N\,dv + T\,dx = 0$$

(Gli altri termini di T si annullano perchè dM · 2° ordine)

$$\uparrow \quad \frac{\partial T}{\partial x}\cancel{dx} - \mu \cancel{dx}\,\ddot{v} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}\cancel{dx} + \mu \cancel{dx}\,\Omega^2 x = 0 \qquad\qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial x}\cancel{dx} - N\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cancel{dx} + T\cancel{dx} = 0 \\ &\frac{\partial T}{\partial x} - \mu\ddot{v} = 0 \\ &\frac{\partial N}{\partial x} + \mu\Omega^2 x = 0 \end{aligned}\right.$$

⊛

$$⊛ \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

(dalla 1ª e 2ª eq.)

estremo dx

$$dN = -\mu\Omega^2 x\,dx \Rightarrow \int_N^0 dN = \int_x^L -\mu\Omega^2 x\,dx$$

$$-N = -\mu\Omega^2\,\frac{L^2 - x^2}{2}$$

$$\Rightarrow N = \mu\Omega^2\,\frac{L^2 - x^2}{2}$$

Approssimazione =>

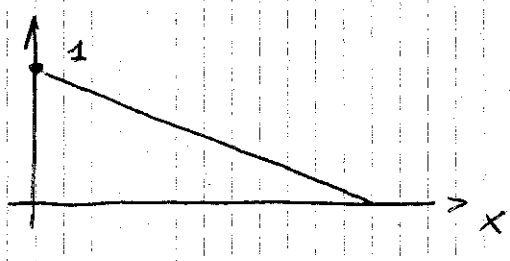
$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

1° tentativo -> $f(x) = x^2$ -> $f'' = 2 = \text{cost}$ ~> Momento costante => NO! su x

con $f(x) = x^2$ -> $W = 20 \frac{EI}{\mu L^4} + \frac{1}{3} \Omega^2$

da confrontare con 12,36

2° tentativo -> $f'' - M$



$f = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ~> $W^2 = 12{,}73 \frac{EI}{\mu L^4} + 1{,}23 \Omega^2$ OK

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 256