NUMERO : 111

DATA : 14/06/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Alessio

MATERIA : Matematica Applicata
Prof. Pandolfi

MATEMATICA APPLICATA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 120

Programma Mat. App. svolto a.a. 2010-11

pg. 1-17; 20-43

1. Modelli matematici. Formulazione del probema stazionario unidimensionale della trasmissione del calore in una barretta di materiale omogeneo per diverse condizioni agli estremi. Richiami sulle equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti. Problemi ai valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie (ODE) lineari a coefficienti variabili. Discussione sull'esistenza e unicità delle soluzioni.
1.1 Applicazioni. Deduzione del modello della corda elastica in diverse configurazioni agli estremi, e del modello della trave soggetta a carico distribuito. Diagrammi di taglio e momento flettente. Deduzione del modello della sezione variabile del pilastro soggetto a carico costante. Caratterizzazione delle soluzioni.

2. Equazioni agli autovalori. Autofunzioni e loro proprietà. Equazioni notevoli (Helmotz, Legendre, Laguerre, Hermite e Bessel).
2.1 Applicazioni. Problemi agli autovalori per l'equazione di Helmotz. Il metodo di Newton (cenni). Frequenze e modi di vibrazione della corda elastica vincolata a due alberi rotanti sincroni con velocità angolare costante. Buckling della colonna soggetta a carico di punta. Carico critico di Eulero.

pg. 46-59

3. Teoria di Sturm-Liouville. Forme autoggiunte e operatori simmetrici. Identità di Lagrange e formula di Green. Teoremi relativi agli operatori simmetrici.
Sistemi di Sturm-Liouville regolari, periodici e singolari. Tutte le dimostrazioni fatte in aula.
3.1 Applicazioni. Deformate trasversali, ad un particolare istante di tempo, della membrana circolare elastica fissa al bordo.

pg. 62-73

4. Metodo dei residui pesati. Tecniche della Collocazione e di Galerkin per problemi ai valori al contorno e per problemi agli autovalori.
4.1 Applicazioni. Impiego delle due tecniche per un problema ai valori al contorno di cui è nota la soluzione esatta e per il problema dellla trave soggetta a carico uniformemente distribuito.
Impiego di tecniche analoghe nel caso di un problema agli autovalori di cui è nota la
la soluzione esatta.

pg. 134-142; 144-152; 164-169; 171-178; 185-187; 189-190; 193-195; 220-223

5. Serie di Fourier di funzioni periodiche con periodo fondamentale e con periodo generico, e di funzioni non periodiche definite su intervalli finiti. Convergenza puntuale e uniforme. Teorema di Riemann (solo enunciato). Sistemi ortonormali, metodo di ortogonalizzazione. Serie generalizzate di Fourier e loro applicazione ai

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 120

16/03/11

Prof Pandolfi

Problemi ai valori al contorno

Problemi < bemposti / malposti

probl bemposte : bisogna aver scritto l'eq. diff (che rappresenta il problema) che può avere una soluz. sottoposta (esistenza) alle condiz. al contorno, se è solo una soluz. vale anche l'unicità. Poi si pone il probl. della stabilità della soluz.

(soluz. stabile → variando di poco le condiz. al contorno, la soluz. si sposta di poco)

qst è importante perché gli strumenti di misuraz. sono tutti affetti da errori

probl. mal posto : se cade 1 delle 3 propr. dei probl. ben posti (o più di 1)

Probl. ai v.c. : - fenomeni stazionari

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 120

Supponiamo che T_1, T_2 siano fisse (probl non stazionario)

eq. differenziale:

$$\begin{cases} y''(x) = -\frac{1}{k} F(x) & 0<x<b \\ y(0) = T_1 \\ y(b) = T_2 \end{cases}$$

MODELLO MATEMATICO

Altri casi possibili:

- isolam. laterale e assenza di sorgenti ($F(x)=0$)

$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(0) = T_1 \\ y(b) = T_2 \end{cases}$$

y è lineare → retta che passa per i punti $(0, T_1)$ e (b, T_2)

- superf laterale non in isolam. termico (supponiamo possa esserci convezione con l'esterno) usando la legge del trasferim. termico

$$F(x) = -h\left[y(x) - T_0\right] \quad h>0 \quad T_0 = \text{temp. ambiente}$$
$$0<x<b$$

se $T_0 >$ temp. barretta $F(x) > 0$

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{h}{k}\left[y(x) - T_0\right] \\ y(0) = T_1 \\ y(b) = T_2 \end{cases}$$

matematicam. il modello si è modificato (è cambiata l'eq. diff.)

- estremi termicam. isolati → T non varia negli estremi

→ $y'(0) = 0$ e/o $y'(b) = 0$

$$\begin{cases} y''(x) = -\frac{1}{k} F(x) & 0<x<b \\ y'(0) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 120

Formulaz. agli operatori

$$M = A_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + A_1(x)\frac{d}{dx} + A_0(x)$$

$M[y] = F(x)$ notaz. agli operatori dell' equaz. ordinaria $\quad x_1 < x < x_2$

applicato a y

$$B_1 = a_{11} + a_{12}\frac{d}{dx} \rightarrow \quad B_2 = a_{21} + a_{22}\frac{d}{dx} \rightarrow \quad (1)\begin{cases} M[y] = F(x) \\ B_1[y] = \alpha \\ B_2[y] = \beta \end{cases}$$

$F(x) = 0 \rightarrow$ probl di tipo omogeneo (2)

condiz. al contorno nulle $\rightarrow$ di tipo omogeneo

sia probl che condiz. al contorno omogenei (3)

$$(2)\begin{cases} M[y] = 0 \\ B_1[y] = \alpha \\ B_2[y] = \beta \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} M[y] = 0 \\ B_1[y] = 0 \\ B_2[y] = 0 \end{cases}$$

C.C. DI TIPO MISTO:

- $a_{11}\, y(x_1) + a_{12}\, y'(x_1) + b_{11}\, y(x_2) + b_{12}\, y'(x_2) = \gamma$
- $a_{21}\, y(x_2) + a_{22}\, y'(x_2) + b_{21}\, y(x_1) + b_{22}\, y'(x_1) = \delta$

Un probl di tipo periodico sarà assoggettato a c.c. di tipo misto, es. $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, ...

Probl. (2)

no termine noto, ~~soggetto~~, struttura lineare

integrale generale di $M[y] = 0$:

y_1, y_2 costituiscono un sistema fondamentale di soluz. nella forma lineare del tipo:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad c_1, c_2 \text{ cost. libere}$$

y_1, y_2 sist. fondam. $\rightarrow$ y_1, y_2 sono soluz. dell' equaz. $(M[y_1] = 0,\ M[y_2] = 0)$ e y_1, y_2 devono essere linearm. indipendenti

5

Probl ①

24/03/11

i.g. $y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$

complementary (soluz. dell'omogenea associata)

y_1, y_2 sist. fondamentale di soluz. dell'omogenea associata.

$B_1[y] = B_1[c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_2)] + B_1[y_p] =$

$= c_1 B_1[y_1] + c_2 B_1[y_2] + B_1[y_p] = \alpha$

$B_2[y] = B_2[c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_2)] + B_2[y_p] =$

$= c_1 B_2[y_1] + c_2 B_2[y_2] + B_2[y_p]$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha - B_1[y_p] & B_1[y_2] \\ \beta - B_2[y_p] & B_2[y_2] \end{vmatrix}}{\Delta} \quad , \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_1[y_1] & \alpha - B_1[y_p] \\ B_2[y_1] & \beta - B_2[y_p] \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Δ
- $\neq 0 \rightarrow$ soluz. unica
- $= 0$
  - num $\neq 0 \rightarrow$ nessuna soluz.
  - num $= 0 \rightarrow$ infinite soluz.

Teorema:

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluz. lin. indip. di $M[y] = 0$
$\Rightarrow$ il probl. non omogeneo ai valori al contorno

$$\begin{cases} M[y] = F(x) & x_1 < x < x_2 \\ B_1[y] = \alpha \\ B_2[y] = \beta \end{cases}$$

- ha soluz. unica $\Leftrightarrow$ $\Delta \neq 0$
- ha ∞ soluz. o non ne ha nessuna se $\Delta = 0$

Ponendo:

$$\begin{cases} c_1 = a+b \\ c_2 = a-b \end{cases} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad \text{(posso farlo senza perdere in generalità)}$$

si ottiene:

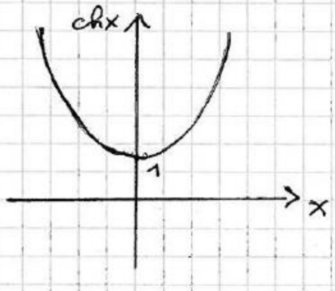
$$y = e^{-\frac{A}{2}x}\left[(a+b)e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} + (a-b)e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}\right] =$$

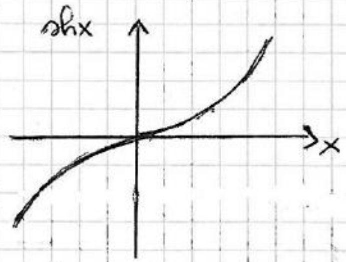
$$= e^{-\frac{A}{2}x}\left[a\left(e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} + e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}\right) + b\left(e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} - e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}\right)\right] =$$

$$= e^{-\frac{A}{2}x}\left[\underbrace{2a}_{C_1}\,\frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} + e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}}{2} + \underbrace{2b}_{C_2}\,\frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} - e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}}{2}\right]$$

Ricordando che

$$\text{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$





possiamo scrivere che: $y = e^{-\frac{A}{2}x}\left[C_1\,\text{ch}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right) + C_2\,\text{sh}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right)\right]$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 \equiv \lambda_2 = -\frac{A}{2} \in \mathbb{R}$

$\Delta = A^2 - 4B = 0 \rightarrow A^2 = 4B$

la soluz. ora sarà: $y(x) = c_1 \underbrace{e^{-\frac{A}{2}x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{x e^{-\frac{A}{2}x}}_{y_2 = x y_1}$

y_1, y_2 sist. fond. di soluz.

$M[y_1] = 0$ era imposto

$M[y_2] = 0$ si può verificare:

$$y_2 = x e^{-\frac{A}{2}x}, \quad y_2' = e^{-\frac{A}{2}x} - \frac{A}{2}x e^{-\frac{A}{2}x}$$

$$y_2'' = -\frac{A}{2}e^{-\frac{A}{2}x} - \frac{A}{2}e^{-\frac{A}{2}x} + \frac{A^2}{4}x e^{-\frac{A}{2}x} = \left(-A + \frac{A^2}{4}x\right)e^{-\frac{A}{2}x}$$

sostituisco $\Rightarrow \dots \Rightarrow 0 = 0$

caso generale $\to$ $A=0$ $B=16$, $\Delta = A^2 - 4B = -64 < 0$

$$y = e^{-\frac{A}{2}x}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right] = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$

c.c. $y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \equiv 4 \to y = 4\cos 4x + c_2 \sin 4x$

$y(\pi) = 4\cos 4\pi + c_2 \sin 4\pi = 4 \equiv -3$ mai!

$\Rightarrow$ il probl. non ammette soluzioni

Esempio di problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 10x = 0 & x(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

eq. caratteristica $\mu^2 - 2\mu + 10 = 0 \to \mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i$

i.g. $x(t) = c_1 e^{(1+3i)t} + c_2 e^{(1-3i)t} = e^t\left[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t\right]$

$x(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \equiv 0 \Rightarrow x(t) = e^t c_2 \sin 3t$

$x'(t) = c_2\left[e^t \sin 3t + e^t 3\cos 3t\right]$

$x'(0) = c_2\left[0 + 3\right] = 3c_2 \equiv 1 \to c_2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}e^t \sin 3t$

Esercizi

(1) $$\begin{cases} y'' + y = 0 & 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i = \pm 1 i$

$y(x) = 1\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right]$

$y(0) = c_1 \equiv 0 \to y(x) = c_2 \sin x$

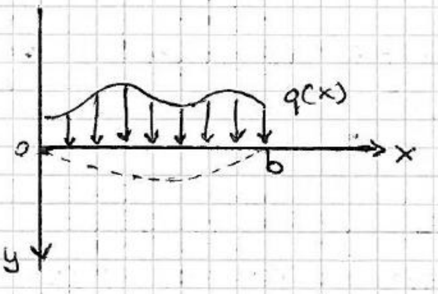
$y(\pi) = c_2 0 \equiv 0 \quad \forall c_2 \to \infty$ soluz.

Controllo con la discussione generale:

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & B_1[y_2] \\ 0 & B_2[y_2] \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 0 \\ 0 & \sin \pi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos \pi & \sin \pi \end{vmatrix}} = \frac{0}{0}$$

Corda elastica tesa

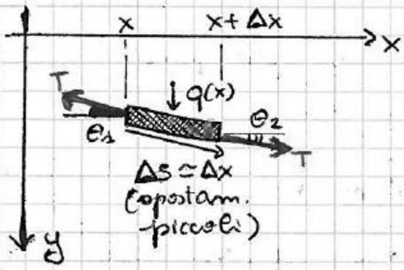


- carico variabile lungo la x
  q(x) = forza per unità di lungh.
- tensione T sufficientem. elevata da consentire che gli spostam. avvengano solo nel piano verticale
- tensione non varia se spostam. sufficientem. piccoli

Modello lineare:

- m = cost (da sezione a sezione)
- corda perfettam. elastica
- T tale che g sia trascurabile
- la posiz. di equilibrio è nel piano verticale ed è un piccolo spostamento dall'asse x.

Consideriamo un tratto infinitesimo di corda elastica e imponiamo che la risultante delle forze sia nulla (condiz. di equilibrio)



- $\Delta s \simeq \Delta x \Rightarrow q(x)\,\Delta s \simeq q(x)\,\Delta x$
- θ_1, θ_2 piccoli $\rightarrow$ possiamo confondere il seno con la tangente:
  $\sin\theta_1 \simeq \tan\theta_1$
  $\sin\theta_2 \simeq \tan\theta_2$

Condiz. di equilibrio
(ci interessano solo le forze lungo y)

in $x \rightarrow -T\sin\theta_1 \simeq -T\tan\theta_1 - T\,y'(x)$

in $x+\Delta x \rightarrow T\sin\theta_2 \simeq T\tan\theta_2 = T\,y'(x+\Delta x)$

$$-T\,y'(x) + T\,y'(x+\Delta x) + q(x)\,\Delta x = 0$$

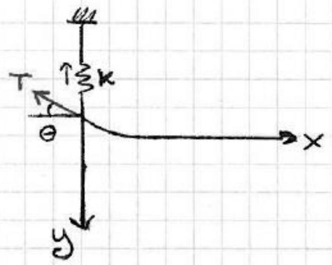
dividendo tutto per $T\Delta x$ si ottiene:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 120

- supporto cedevole

es. in $x=0$

la molla elastica esercita una forza di richiamo proporzionale all'allungamento.



impongo l'equilibrio:

in $x=0 \rightarrow R=0$

$$-T\sin\theta \simeq -T\tan\theta = -T\,y'(0)$$

$$\Rightarrow -T\,y'(0) - k\,y(0) = 0$$

$$\underbrace{K}_{a_{11}}\,y(0) + \underbrace{T}_{a_{12}}\,y'(0) = \underbrace{0}_{\alpha}$$

Problema:

E' data la corda tesa tra 2 supporti fissi sottoposta a carico distribuito costante q_0 per unità di lungh.

$\Rightarrow$ bisogna:

a) dedurre il modello matematico

b) det. la deformata

c) det la tensione T tale che lo spostam. max $\leq k q_0$

a)
$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{q_0}{T} & 0<x\leq\pi \\ y(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$$

b) integrando $\rightarrow$ $y' = -\dfrac{q_0}{T}x + c_1 \rightarrow y = -\dfrac{q_0}{T}\dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$

imponendo le c.c.:

$$y(0) = c_2 \equiv 0 \rightarrow y = -\frac{q_0}{T}\frac{x^2}{2} + c_1 x$$

$$y(\pi) = -\frac{q_0}{T}\frac{\pi^2}{2} + c_1\pi = 0 \rightarrow c_1 = \frac{q_0}{T}\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{q_0}{T}\frac{x^2}{2} + \frac{q_0}{T}\frac{\pi}{2}x = \frac{q_0}{2T}(\pi x - x^2)$$

c) $y' = -\dfrac{q_0}{T}x + \dfrac{q_0}{T}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{q_0}{T}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0$ (cerco dei pti di max)

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{2}\,,\ y''<0 \rightarrow y_{max} = \frac{q_0}{2T}\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{q_0}{T}\cdot\frac{\pi^2}{8}$$

$$M = \frac{EI}{R} = \frac{EI\, y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \simeq EI y''$$

↑ piccolo

$$M'' = \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}[EI y''] = EI y^{IV} = q(x) \rightarrow \boxed{y^{IV} = \frac{1}{EI} q(x)}$$

eq. diff. del 4° ordine lineare

- estremo fisso

es. $x = b \rightarrow \begin{cases} y(b) = 0 & \text{spostam. nullo} \\ y'(b) = 0 & \text{tan orizz.} \end{cases}$

- estremo libero (es. $x=0$)

$$\begin{cases} M = EI y'' = 0 & \text{momento flettente nullo} \\ V = M' = \frac{d}{dx}[EI y''] = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

- appoggio semplice (o estremo incernierato)

$$\begin{cases} y = 0 \\ M = EJ y'' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$$

- estremo scorrevole

$$\begin{cases} y' = 0 \\ V = M' = \frac{d}{dx}[EI y''] = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y''' = 0 \end{cases}$$

Problemi agli autovalori

Un probl. omogeneo può ammettere soluz. non banali

$$\begin{cases} M[y] = 0 & x_1 < x < x_2 \\ B_1[y] = 0 \\ B_2[y] = 0 \end{cases}$$

$$M = A_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + A_1(x)\frac{d}{dx} + A_0(x) = A_2 D^2 + A_1 D + A_0$$

Caso notevole

$$\begin{cases} M[y] + \lambda y = 0 & x_1 < x < x_2 \\ B_1[y] = 0 \\ B_2[y] = 0 \end{cases}$$

Probl. agli autovalori

$y = c_1 y_1(x;\lambda) + c_2 y_2(x;\lambda)$ (y_1, y_2 sist. di soluz.)

$\Delta = \Delta(\lambda) = 0 \rightarrow$ determino le radici di qst'equaz. e ottengo gli autovalori λ

$\lambda \leftrightarrow \phi(x) \neq 0$

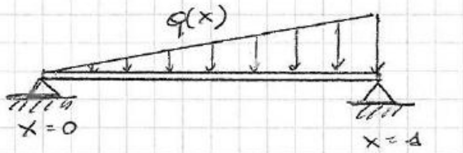
↑ autofunzione

$y(0) = c_1 \equiv 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow y(x) = c_2\, sh(kx)$

$y(1) = c_2\, sh(k) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow$ solut. banale $y(x) = 0$

$\rightarrow sh(k) = 0 \leftrightarrow k = 0$ no! $(k \neq 0)$

es. trave elastica soggetta a carichi distribuiti in diverse condiz. di vincoli.



$q(x) = EIx$

a)
$$\begin{cases} y^{IV} = x & 0<x<1 \\ y(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y(1) = 0 \\ y''(1) = 0 \end{cases} \rightarrow y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{1}{6}\frac{x^4}{4} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{1}{24}\frac{x^5}{5} + \frac{c_1}{2}\frac{x^3}{3} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

$$y(0) = c_4 \equiv 0 \rightarrow y = \frac{1}{120}x^5 + \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3 x$$

$$y''(0) = c_2 \equiv 0 \rightarrow y = \frac{1}{120}x^5 + \frac{c_1}{6}x^3 + c_3 x$$

$$y(1) = \frac{1}{120} + \frac{c_1}{6} + c_3$$

$$y''(1) = \frac{1}{6} + c_1 \equiv 0 \rightarrow c_1 = -\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow y(1) = \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + c_3 \equiv 0 \rightarrow c_3 = \frac{1}{36} - \frac{1}{120} =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{12}\,\frac{7}{30} = \frac{7}{360}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{36}x^3 + \frac{7}{360}x \rightarrow \text{linea elastica}$$

b) diagrammi di

mom. flett. $M(x) = EI y'' = \frac{EI}{6}x(x^2-1)$

taglio $V(x) = M'(x) = \frac{EI}{6}(3x^2 - 1)$

pt di max spostam $\rightarrow y' = 0 = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{360}$

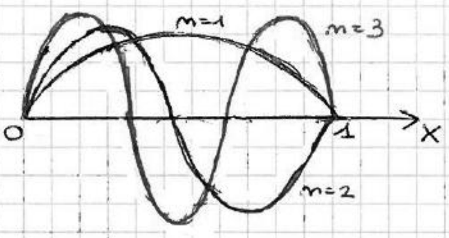
Metodo di Newton per la ricerca degli zeri

(*) p.18 $\quad y_m(x) = \phi_m(x) = \sin m\pi x \rightarrow m$

$\lambda_1 = \pi^2$, $m=1 \leftrightarrow \phi_1 = \sin \pi x \rightarrow$ nessuno zero

$\lambda_2 = 2^2\pi^2$, $m=2 \leftrightarrow \phi_2 = \sin 2\pi x \rightarrow$ 1 zero $x = \frac{1}{2}$

$\lambda_3 = 3^2\pi^2$, $m=3 \leftrightarrow \phi_3 = \sin 3\pi x \rightarrow$ 2 zeri $\rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$



$m=1 \rightarrow T=2 = \frac{2\pi}{\pi}$

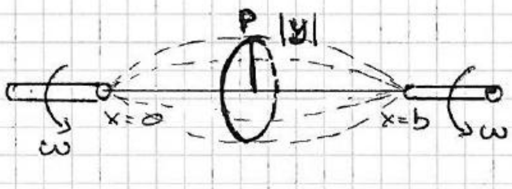
$m=2 \rightarrow T=1 = \frac{2\pi}{2\pi}$

$m=3 \rightarrow T=\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3\pi}$

gli zeri sono i punti di equilibrio

<u>Problema agli autovalori</u>

Corda rotante con estremi vincolati ai centri di 2 alberi rotanti sincroni i cui assi di rotaz. ≡ asse corda tesa.



$\omega = \text{cost}$

corda:

ρ = densità lineare (massa / unità di lungh)

ω = vel ang uniforme

[la rotaz. nella corda genera una FORZA D'INERZIA DISTRIBUITA, diretta trasversalm. alla corda

$$\vec{a}_p = \underbrace{r\dot{\omega}\vec{\tau}}_{=0} + \underbrace{r\omega^2}_{a}\vec{n} = \omega^2|y|\vec{n}$$
]

L'ampiezza della forza d'inerzia per unità di lungh. è:

$$\frac{m}{\ell}a = \rho a = \rho\omega^2|y|$$

e opposta la corda dalla sua posizione di equilibrio

Il problema equivalente è quello della corda elastica (identifichiamo il carico esterno con le forze d'inerzia)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 120

I vel critica:

$\omega_1 \leftrightarrow \phi_1(x)$ che def. la forma del 1° modo (non l'ampiezza però)

- $m=2$, $\lambda_2 = \dfrac{2^2\pi^2}{b^2} \leftrightarrow \phi_2(x) = \sin \dfrac{2\pi}{b} x$

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2}{T} \rightarrow \lambda_2 = \frac{\rho\omega_2^2}{T} = \frac{4\pi^2}{b^2} \rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{b}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

II vel critica:

$\omega_2 \leftrightarrow \phi_2(x)$ che def la forma del 2° modo (non l'ampiezza)

⋮

- $\lambda_m = \dfrac{m^2\pi^2}{b^2} \leftrightarrow \phi_m(x) = \sin \dfrac{m\pi}{b} x$

all'aumentare di m aumenta la vel angolare ed aumenta il n° di zeri ($m-1$ zeri)

17/04/11

Teoria di STURM LIOUVILLE.

- Equaz. diff. autoaggiunte:

l'eq. $A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0(x) + \lambda]y = 0$

può sempre essere trasformata nella forma autoaggiunta:

$$L[y] + \lambda r(x) y = 0$$

L può essere un operatore simmetrico, che ha certe proprietà:

$$L \overset{def}{=} D[p(x)D] + q(x) \qquad p(x), r(x) > 0$$

$$p', q, r \in C^0[I]$$

D ↑ derivata

<u>es.</u>

$$\underset{\underset{A_2}{\uparrow}}{x^2} y'' + \underset{\underset{A_1}{\uparrow}}{x} y' + \lambda y = 0 \quad , \; x > 0$$

$2x = x$? NO → eq. non ancora in forma A.A.

$$p(x) = e^{\int \frac{x}{x^2} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\mu(x) = \frac{p(x)}{A_2(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

⇒ se moltiplico tutta l'eq. per $\frac{1}{x}$ ottengo la forma A.A.:

$$x y'' + y' + \frac{\lambda}{x} y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[x y'\right] + \frac{1}{x} \lambda y = 0$$

• $L[y] + \lambda r(x) y = 0$

con $L \overset{def}{=} \frac{d}{dx}\left[\underset{\underset{x}{\uparrow}}{p(x)} \frac{d}{dx}\right] + \underset{\underset{0}{\uparrow}}{q(x)}$

quindi:

$$\begin{cases} p(x) = x \\ q(x) = 0 \\ r(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Operatore A.A.

$$L = D\left[p(x) D\right] + q(x)$$

si dice simmetrico su $I = [x_1, x_2]$ se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(u L[v] - v L[u]\right) dx = 0 \qquad u, v \in C^2[x_1, x_2]$$

u, v che soddisfano le C.C. associate all'operatore L

<u>es.</u> $L = D^2$, cioè $L = \frac{d}{dx}\left[\underset{\underset{1}{\uparrow}}{p(x)} \frac{d}{dx}\right] + \underset{\underset{0}{\uparrow}}{q(x)}$

$$\begin{cases} L[y] + \lambda r(x) y = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

dim

$$\begin{cases} L[v] = D[p(x)v'] + q(x)v = pv'' + p'v' + qv \\ L[u] = D[p(x)u'] + q(x)u = pu'' + p'u' + qu \end{cases}$$

$$uL[v] - vL[u] = u\,pv'' + u\,p'v' + \cancel{quv} - vpu'' - vp'u' + \cancel{-quv} + u'pv' - u'pv' = \frac{d}{dx}\left[upv' - vpu'\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p(uv' - vu')\right] = \frac{d}{dx}\left[pW\right]$$

Identità Lagrange + formula di Green:

- Lagr. $uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}\left[p\,W(u,v)\right]$
- Green $\int_{x_1}^{x_2} \left(uL[v] - vL[u]\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left[p(x)\,W(u,v)\right]dx =$

$$= \left[p(x)\,W(u,v)\right]_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow \text{operatore simmetrico}$$

es. trovare autov. e autofunz. del probl.:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{eq. caratt.} \to t^2 + \lambda = 0$$

a) $\lambda = 0$

$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$

$y(0) = c_1 = 0 \to y(x) = c_2 x$

$y(1) = c_2 \cdot 1 = 0 \to y(x) = 0$ soluz. banale

b) $\lambda < 0$

$\lambda = -k^2 < 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \operatorname{ch} kx + c_2 \operatorname{sh} kx$

$y(0) = c_1 = 0 \to y(x) = c_2 \operatorname{sh} kx$

$\to y'(x) = c_2 k \operatorname{ch} kx$

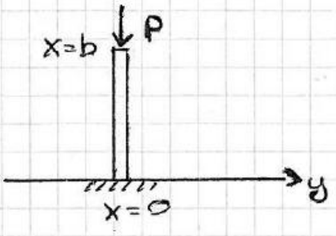
$y(1) + y'(1) = c_2\left[\operatorname{sh} k + k \operatorname{ch} k\right] = 0$ — $c_2 = 0$ soluz. banale; $[\ ] = 0$

$\operatorname{sh} k + k \operatorname{ch} k = 0 \to \operatorname{th} k = -k$

$\Rightarrow k = 0$ impossibile

Buckling

Colonna SOTTILE ($\ell >> d$) caricata assialmente da un carico costante



Determinare i modi di deformaz. laterale della config. di equilibrio $y=0$.

P = carico assiale

$P \sim q(x)$ carico laterale

Peso + carichi della struttura sovrapposti => P forza compressiva => cedimento se P sufficientem. grande.

$$q(x) = -Py'' \longrightarrow y^{(IV)} = \frac{q(x)}{EI} \qquad 0 < x < b$$

con $y^{(IV)} = -\frac{P}{EI} y'' \rightarrow y^{(IV)} + \frac{P}{EI} y'' = 0$

posto $\lambda = \frac{P}{EI} \Rightarrow y^{(IV)} + \lambda y'' = 0 \qquad (\lambda > 0)$

- Determinare i modi di deformaz della colonna di lungh. b, con condiz. di semplice appoggio. Calcolare il max carico tollerabile prima di deformarsi (carico critico / Eulero)

Modello matematico:

$$\begin{cases} y^{(IV)} + \lambda y'' = 0 & 0<x<b \qquad \lambda = \frac{P}{EI} \\ y(0)=0 \quad , \quad y(b)=0 \\ y''(0)=0 \quad , \quad y''(b)=0 \end{cases}$$

- $\lambda = k^2 > 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{P_n}{EI} \rightarrow P_n = EI\,\lambda_n$

$P_1 = EI\,\lambda_1$ carico di Eulero

$y'' = z \Rightarrow y^{IV} = z'' \rightarrow z'' + \lambda z = 0 \rightarrow z'' + k^2 z = 0$

$t^2 + k^2 = 0$

$z = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$t = \pm ik$

Proprietà di un operatore simmetrico L:

$$L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

simm. $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(u L[v] - v L[u]\right) dx = 0$

premessa:

def f e g funz. integrabili su $I = [x_1, x_2]$

I aperto, chiuso, semiaperto (a dx o a sx)

sono ORTOGONALI rispetto a $r(x) > 0$ (funz. peso) se:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, g(x)\, r(x)\, dx = 0$$

es.

$f(x) = \sin 2x$
$g(x) = \cos x$ ort in $I = [-\pi, \pi]$

$$r(x) = 1 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \sin 2x \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{2\cos^3 x}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

es.

$f(x) = 1$
$g(x) = 1 - x$ $I = [0, \infty)$ $r(x) = e^{-x}$

$$\int_0^\infty 1\underbrace{(1-x)}_{\text{fattore finito}} \underbrace{e^{-x}}_{\text{fattore differenziale di cui calcolare la primitiva}} dx \overset{\text{per parti}}{=} \left[-e^{-x}(1-x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(-1)\, dx =$$

$$= 0 + e^0(1-0) + \left[e^{-x}\right]_0^\infty =$$

$$= 1 + \left[e^{-\infty} - e^0\right] = 0$$

Teorema 1

- ipotesi: L operatore A.A., simm. in $I = [x_1, x_2]$ associato all'eq. agli autoval. (autoequazione)

$$L[y] = \lambda + r(x)\, y = 0 \quad , \quad x_1 < x < x_2$$

$\lambda_m \leftrightarrow \phi_m(x)$
$\lambda_k \leftrightarrow \phi_k(x)$ con $\lambda_m \neq \lambda_k$

$L[\phi_k] + \lambda_k \, r(x)\, \phi_k = 0 \qquad L[\overline{\phi_k}] + \overline{\lambda_k}\, r(x)\, \overline{\phi_k} = 0$

$\left[\Rightarrow \overline{\lambda_k} \in \mathbb{C} \text{ con } \lambda_k \neq \overline{\lambda_k} \text{ e } \overline{L} = L \text{ (L ha coeff. reali)} \right]$

L simm, $\lambda_k \neq \overline{\lambda_k} \overset{TH\,1}{\Longrightarrow} \phi_k \perp \overline{\phi_k}$ cioè

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)\, \phi_k \overline{\phi_k}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{r(x)}_{>0} \underbrace{|\phi_m|^2}_{>0} dx = 0$$

$\uparrow$ ASSURDO! (per def di autofunz.)

$\Rightarrow \lambda_k \notin \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_k \in \mathbb{R}$

N.B. TH 2 non assicura l'esistenza degli autovalori

Teorema 3.

Gli autovalori di L simm. formano una successione non limitata superiormente.

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \lambda_{m+1} < \dots$

$\lambda_m \to \infty$ per $m \to \infty$

Teorema 4.

L'operatore L assegnato ad un sistema di SLR è simm

$\uparrow$ Sturm Liouville Regolare

dim.

$u, v \in \mathbb{C}^2[I]$

① $\begin{cases} B_1[u] = 0 \\ B_1[v] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\, u(x_1) + a_{12}\, u'(x_1) = 0 \\ a_{11}\, v(x_1) + a_{12}\, v'(x_1) = 0 \end{cases}$ N.B. a_{11} e a_{12} non contemporaneam. nulli

② $\begin{cases} B_2[u] = 0 \\ B_2[v] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21}\, u(x_2) + a_{22}\, u'(x_2) = 0 \\ a_{21}\, v(x_2) + a_{22}\, v'(x_2) = 0 \end{cases}$ a_{21} e a_{22} non contemp. nulli

① sistema algebrico omogeneo rispetto ad a_{11}, a_{12} $\Rightarrow$ avrò soluz. non banali quind il determ. della matrice dei coeff sarà $= 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u(x_1) & u'(x_1) \\ v(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = 0$$

è il trasposto di $W(u,v)$ ma dal pt di vista del determinante non cambia nt

$\Downarrow$

$\Delta = W(u,v)(x_1) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 120

ϕ_m e ϕ_k sono linearm. dipendenti → sono proporzionali → non sono autofunzioni!
e qst è contro l'ipotesi $\phi_k \neq \phi_m$

14/04/11

Sistemi di Sturm - Liouville periodici

$$\begin{cases} L[y] + \lambda r(x) y = 0 & x_1 < x < x_2 \\ y(x_1) = y(x_2) & \\ y'(x_1) = y'(x_2) & \text{C.C. MISTE} \\ L = \frac{d}{dx}\left[\phi_x \frac{d}{dx}\right] + q(x) & \\ \text{con } p(x_1) = p(x_2) & \end{cases}$$

Teorema 6. (analogo a th. 4)

L'operatore A.A. L associato ad un sistema di S.L. periodico è simmetrico

dim $u, v \in C^2[I]$

ipotesi: $u(x_1) = u(x_2)$ $\quad u'(x_1) = u'(x_2)$

$v(x_1) = v(x_2)$ $\quad v'(x_1) = v'(x_2)$

$p(x_1) = p(x_2)$

dalla def di simmetria:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(uL[v] - vL[u]\right) dx = \left[p(x)\, W(u,v)(x)\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= p(x_2)\, W(u,v)(x_2) - p(x_1)\, W(u,v)(x_1) =$$

$$= p(x_2)\left[\cancel{u(x_2)\, v'(x_2)} - \cancel{u'(x_2)\, v(x_2)} - \cancel{u(x_1)\, v'(x_1)} + \cancel{u'(x_1)\, v(x_1)}\right] = 0 \Rightarrow L \text{ è simmetrico.}$$

Non è più possibile dim in generale che gli autovalori di un sist SL periodico sono semplici, vediamo qst con un controesempio.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 120

2° caso) k = intero, c_2 qualsiasi

$$y(-\pi) - y(\pi) = -2c_2 \sin k\pi = 0 \begin{cases} c_2 \\ k\pi = nK \to k = \text{intero} \end{cases}$$

$$y(\theta) = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta$$

$$y'(\theta) = -c_1 k \sin k\theta + c_2 k \cos k\theta$$

$$y'(-\pi) - y'(\pi) = (c_1 k \sin k\pi + c_2 k \cos k\pi) - (c_1 k \sin k\pi + c_2 k \cos k\pi) =$$

$$= 2kc_1 \sin k\pi = 0 \begin{cases} c_1 = 0 \\ \sin k\pi = 0 \to k \text{ intero} \to c_1 \text{ libero} \end{cases}$$

c_1, c_2 non hanno vincoli

$$y(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

$$\lambda = n^2 > 0 \longleftrightarrow \phi_n(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

Quindi:

$$\lambda_0 = 0 \to \Phi_0(\theta) = 1$$

$$\lambda_n = n^2 \begin{cases} \phi_n(\theta) = A_1 \cos n\theta + A_2 \sin n\theta \\ \varphi_n(\theta) = A_3 \cos n\theta + A_4 \sin n\theta \end{cases} \text{ sono 2 autofunz. indipendenti}$$

se scelgo $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 = A_4 = 1$

$$\lambda_n = n^2 \begin{cases} \phi_n(\theta) = \cos n\theta \\ \varphi_n(\theta) = \sin n\theta \end{cases}$$

con $\varphi_n \perp \phi_n$: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \sin n\theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2n\theta) d\theta = 0$

In generale:

se $\lambda_n \begin{cases} \phi_n \\ \varphi_n \end{cases}$ lin. indip.

posso sempre trovare combinaz. lineari di ϕ_n e φ_n che risultino ortogonali in I

<u>Procedimento di ortogonalizzazione.</u>

probl periodico di S.L.

sia $\lambda_n \begin{cases} \phi_n \\ \varphi_n \end{cases}$ lin. indip. non ortogonali

$\lambda \leq 0 \Rightarrow \nexists$ autov.

$\lambda > 0 \rightarrow \lambda = k^2 > 0 \rightarrow y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \rightarrow y(x) = c_2 \sin kx \\ y'(x) &= k c_2 \cos kx \end{aligned}\right\} \text{finite per } x \to \infty$$

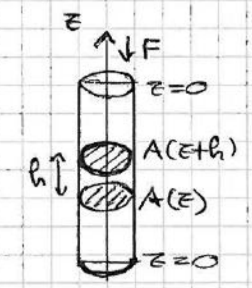
$\lambda = k^2 \in \mathbb{R} \leftrightarrow \phi(x) = \sin kx$

$p(x) = 1$

$\forall x \quad p(x) \neq 0$ per $x \to \infty$

$L = D^2$ non è simm. in qst probl $\Rightarrow$ non si può dire che possa esserlo sempre.

<u>Es di problema</u> ai VC con eq. diff omogenee del 1° ordine



$\rho = \text{cost} = \dfrac{P(z)}{V(z)}$ $\leftarrow$ peso, $\leftarrow$ volume

$z \in [0, \ell]$

$A(z) =$ area a quota z

$P(z) = \rho V(z) \quad , \rho > 0$

$$\sigma(z) = \frac{F + P(z)}{A(z)} : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$\uparrow$ sforzo

σ < σ_M valore limite oltre cui c'è rottura; σ_S sforzo di sicurezza

condizione $\sigma_S \ll \sigma_M$

Probl: det. $A(z)$ in modo che $\forall z$ si abbia

$$\sigma(z) = \sigma_S = \text{cost} \quad , \quad z \in [0, \ell]$$

$$\sigma(z) = \frac{F + P(z)}{A(z)} = \sigma_S \rightarrow A(z)$$

$$\sigma(z+h) = \frac{F + P(z+h)}{A(z+h)} = \sigma_S \rightarrow A(z+h)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 120

20/04/11

Problemi ai v.c. non omogenei

$$(1) \begin{cases} L[y] = f(x) \\ B_1[y] = \alpha \\ B_2[y] = \beta \end{cases} \qquad x_1 < x < x_2 \qquad \begin{cases} L = D[p(x)D] + q(x) & \text{operatore a.a} \\ B_1 = a_{11} + a_{12}D \\ B_2 = a_{21} + a_{22}D \end{cases}$$

Eq. diff. 2° ordine non omogenea e a coeff. variabili, in generale, $f(x)$ non sempre semplice.

- Ci possono essere dei probl. di calcolo anche qnd la soluz. e' nota

solux.
1) esatte (→ no approssimaz)
2) analitiche (→ possono esserci delle approssimaz)
3) numeriche (→ per punti)

I metodi di approssimaz più usati per probl ai v.c. confluiscono in tecniche note come METODO DEI RESIDUI PESATI:

- si seleziona una serie finita di funz. standard (spesso semplici polinomi a coeff. indeterminati)
- la serie finita costituisce una SOLUZ. DI PROVA che
  a) e' 1 soluz. APPROSSIMATA dell' eq. diff. del probl.
  b) soddisfa esattamente le c.c.
  c) corrisponde a rendere minimo l'errore (residuo)

Approssimo la soluz. esatta y del probl (1) con la soluz. lineare di prova ψ:

$$y \simeq \psi = g_0(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j g_j(x)$$

con:
- → c_j cost incognite da determinare
- → $g_j(x)$, $j = 1, \dots N$ l.i. che soddisfano esattam. le c.c. omogenee ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) associate

$$\begin{cases} B_1[g_j] = 0 \\ B_2[g_j] = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots N$$

Se $\psi \equiv y \rightarrow E_N(x) = L[y] - f(x) \quad 0$

Come minimizzo $E_N(x)$?

1) COLLOCAZIONE:

$x_1 < x < x_2$

scelgo N punti $x_j \in]x_1, x_2[\quad , \ j = 1, \dots, N$

x_j si dicono NODI (punti di collocazione)

imponiamo che:

$\boxed{E_N(x_j) = 0} \qquad j = 1, \dots, N$

cioè imponiamo che il residuo sia nullo negli N punti della collocazione distribuiti nell' intervallo (x_1, x_2)

criteri per la scelta dei nodi:
- intuizione (es. equispaziati)
- consideraz. fisiche
- semplicità di calcolo
- condiz. di non annullam. di ogni g_j nei nodi: $g(x_j) \neq 0$

$E_N(x) = L[\psi] - f(x)$

$E_N(x) = L\left[g_0(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j g_j(x)\right] - f(x)$

$E_N(x_i) = L\left[g_0(x_i) + \sum_{j=1}^{N} c_j g_j(x_i)\right] - f(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots N$

questo è un sistema algebrico di 1° grado di N equaz. nelle N incognite $c_1, c_2, \dots c_N$, lo risolvo:

$\psi = g_0(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j g_j(x)$

N.B. la soluz. approssimata ψ dipende dalla scelta dei nodi x_j: per ovviare aumento il numero N dei nodi.

es. ☆
$$\begin{cases} y'' + y = x - 1 \\ y(0) = -1 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad 0 < x < 1 \qquad L = \frac{d}{dx}\left[1 \frac{d}{dx}\right] + 1 \ , \ f(x) = x - 1$$

Scelgo $g_j(x) = x^j(1-x) \qquad j = 1, 2, \dots N \leftarrow$ eq. di prova l. i.

$$\begin{cases} g_j(0) = 0 \\ g_j(1) = 0 \end{cases} \quad \text{per } j = 1, \dots N$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 120

28/04/11

② GALERKIN

S'impone che il residuo $E_N(x)$ sia ortogonale alle funz. $g_k(x)$, $k = 1, \dots N$

$$\int_{x_1}^{x_2} E_N(x)\, g_k(x)\, dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(L[\psi] - f(x)\right) g_k(x)\, dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(L\left[g_0 + \sum_{j=1}^{N} c_j g_j\right] - f(x)\right) g_k(x)\, dx = 0$$

qst è un sist. algebrico in c_j.
per ogni c_j ho N condiz. $(k = 1, \dots N)$

Qnd il sistema è omogeneo $g_0 = 0$

Riassumendo:

errore o residuo:

$$E_N(x) = L[\psi] - f(x) \qquad x_1 < x < x_2$$

i "residui pesati" si basano sulla condizione che:

$$\int_{x_1}^{x_2} E_N(x)\, w_k(x)\, dx = 0 \qquad k = 1, \dots N$$

per certi insiemi di funz. peso $\{ w(x) \}$

1. $w_k = \delta(x - x_k) \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} E_N(x)\, \delta(x - x_k)\, dx = E_N(x_k) = 0$

   $k = 1, \dots N \Rightarrow c_1, \dots c_N \qquad x_k \in \,]x_1, x_2[$

   METODO DI COLLOCAZIONE

2. $w_k = g_k(x)$

   $$\int_{x_1}^{x_2} E_N(x)\, g_k(x)\, dx = 0 \qquad k = 1, \dots N \Rightarrow c_1, \dots c_N$$

   METODO DI GALERKIN

Rappresentazione di funzioni

- funz. periodiche con $T = 2\pi$

  serie di Fourier trigonometriche

  formule di Eulero per i coeff.

- funz. periodiche con $T = 2p$
- funz. non periodiche su I finiti

  serie generalizzate di Fourier (serie di funz. di Fourier)

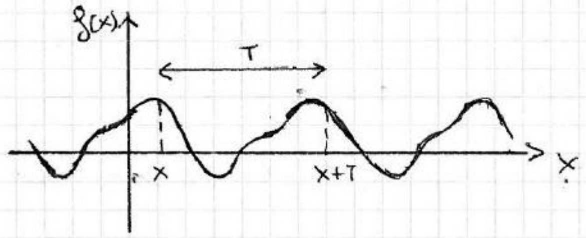
  applicaz. ai probl. ai V.C. non omogenei

- funz. definite su I non finiti

  Integrale di Fourier

  trasformate di Fourier

SERIE DI FOURIER DI FUNZ. PERIODICHE, $T = 2\pi$



$$f(x \pm T) = f(x \pm 2T) = \dots = f(x \pm kT) = \dots = f(x)$$

l'insieme più semplice di funz. periodiche che hanno in comune il periodo $T = 2\pi$ è:

$$\underbrace{1;\ \cos x, \sin x}_{T=2\pi};\ \underbrace{\cos 2x, \sin 2x}_{T=\pi};\ \underbrace{\cos 3x, \sin 3x}_{T=\frac{2}{3}\pi};\ \dots\ \underbrace{\sin mx, \cos mx}_{T=\frac{2}{m}\pi}$$

(1) $$f(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$ a_m, b_m = coeff. di Eulero

procedimento formale: (ipotesi di Σ convergente)

Formule di Eulero:

integro la (1) $\Rightarrow$ $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \overset{\text{th. integraz. per serie}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} A_0\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx}_{=0} + b_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,dx}_{=0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = A_0\, 2\pi \rightarrow \boxed{A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx} \qquad A_0 = \frac{1}{2} a_0$$

a_0 = doppio del valore medio

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 120

es.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad 0 < x < 1$$

$N = 2$

$$\varphi(x) = c_1 \underbrace{x(1-x)}_{g_1(x)} + c_2 \underbrace{x^2(1-x)}_{g_2(x)}$$

$$\varphi' = c_1(1-2x) + c_2(2x - 3x^2)$$

$$\varphi'' = -2c_1 + c_2(2-6x)$$

$L[y] + \lambda y = 0$ con $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$

$$E_2 = L[\varphi] + \Lambda\varphi$$

$$E_2 = \varphi'' + \Lambda\varphi = -2c_1 + c_2(2-6x) + \Lambda\left[c_1(1-x)x + c_2 x^2(1-x)\right]$$

$$E_2 = c_1\left[-2 + \Lambda x - \Lambda x^2\right] + c_2\left[2 - 6x + \Lambda(x^2 - x^3)\right]$$

Collocazione:

$x_1 = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = \dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned} E_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0 &\rightarrow \\ E_2\left(\tfrac{2}{3}\right) = 0 &\rightarrow \end{aligned} \begin{cases} \left[-2 + \Lambda\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)\right]c_1 + \left[2 - 2 + \Lambda\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right)\right]c_2 = 0 \\ \left[-2 + \Lambda\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right)\right]c_1 + \left[2 - 4 + \Lambda\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right)\right]c_2 = 0 \end{cases}$$

sistema algebrico lineare omogeneo

$$(1)\ \begin{cases} \left(2 - \frac{2}{9}\Lambda\right)c_1 - \frac{2}{27}\Lambda c_2 = 0 \\ \left(2 - \frac{2}{9}\Lambda\right)c_1 + \left(2 - \frac{4}{27}\Lambda\right)c_2 = 0 \end{cases}$$

vedo se $\mathrm{Det}(A) = 0 \rightarrow c_1, c_2$ non contemporaneam. nulli

$$\mathrm{Det}\, A(\Lambda) = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 - \frac{2}{9}\Lambda & -\frac{2}{27}\Lambda \\ 2 - \frac{2}{9}\Lambda & 2 - \frac{4}{27}\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(2 - \frac{2}{9}\Lambda\right)\left(2 - \frac{4}{27}\Lambda\right) + \frac{2}{27}\Lambda\left(2 - \frac{2}{9}\Lambda\right) = 0$$

$$\left(2 - \frac{2}{9}\Lambda\right)\left[2 - \frac{4}{27}\Lambda + \frac{2}{27}\Lambda\right] = 0 \quad < \begin{matrix} \Lambda_1 = 9 \\ \Lambda_2 = 27 \end{matrix}$$

Nel sist. (1) pongo $\Lambda_1 = 9$

$$\begin{cases} 0 \cdot c_1 - \frac{2}{3}c_2 = 0 \\ 0 \cdot c_1 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1\ \forall \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dispari}}}{f(x)}\, dx = 0$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dispari}}}{f(x)} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pari}}}{\cos mx}}_{\text{dispari}}\, dx = 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dispari}}}{f(x)} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dispari}}}{\sin mx}}_{\text{pari}}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin mx \, dx = \frac{2k}{\pi} \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_0^{\pi}$$

$$b_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ pari} \\ \frac{2k}{\pi}\left[\frac{1}{m} - \left(-\frac{1}{m}\right)\right] = \frac{4k}{m\pi} & \text{se } m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m-1)x]}{2m-1}$$

Il risultato vale in generale:

1) $f(x) = \overset{\frac{1}{2}a_0}{A_0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx \quad , \quad b_m = 0 \quad$ se $f(x)$ pari

2) $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \quad , \quad a_m = 0 \quad$ se $f(x)$ dispari

1) $a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad , \quad A_0 = \frac{1}{2} a_0$

2) $b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$

CONVERGENZA DELLA SERIE

$$S_N(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{N} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

a) convergenza puntuale:

$\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = f(x)$ per ogni x fissata

(Scelto $\varepsilon > 0$, $\exists M = M(\varepsilon, x)$ $\forall N \geq M \Rightarrow |S_N(x) - f(x)| < \varepsilon$)

b) convergenza uniforme:

$\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = f(x)$ per ogni x

(Scelto $\varepsilon > 0$, $\exists M = M(\varepsilon)$ $\forall N \geq M \Rightarrow |S_N(x) - f(x)| < \varepsilon$)

Si ha conv. uniforme per la serie di F. di f

$\left\langle \begin{array}{l} f(x+2\pi) = f(x) \\ f \text{ regolare a tratti con } f \text{ cont. su ogni intervallo finito} \end{array} \right.$

Se la serie numerica $\Sigma\left(|a_m| + |b_m|\right)$ e' convergente

$\Rightarrow$ la serie di F. converge uniform.

TH. DI RIEMANN:

(basato sulla disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \text{ e' convergente}$$

per f cont. a tratti su $[-\pi, \pi]$

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} b_m = 0$$

Estensioni:

I) $T \neq 2\pi$ cambio di var. indipendente

- $f(x)$ periodica con $T = 2\pi$
- $g(t)$ " con $T = 2p$

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{t}{2p} \to x = \frac{\pi t}{p} \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi t}{p}\right) = g(t)$$

$$f(x) = f(x+2\pi) = f\left(\frac{\pi}{p}t + 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{p}(t+2p)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi}{p}(t+2p)\right) = g(t+2p)$$

$$f\left(\frac{\pi}{p}t\right) = g(t) = g(t+2p) \Rightarrow g \text{ ha periodo } 2p$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{p}t\right) = g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \Sigma\left[a_m \cos\left(m\frac{\pi}{p}t\right) + b_m \sin\left(m\frac{\pi}{p}t\right)\right]$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p} f\left(\frac{\pi}{p}t\right)\cos\left(m\frac{\pi}{p}t\right) \frac{\pi}{p}\,dp \;\; dx$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{p}t \Rightarrow x = \pi \to t = p \\ x = -\frac{\pi}{p}t \Rightarrow x = -\pi \to t = -p \end{array}\right)$$

Nei casi (a) e (b) prolungo f_c ed f_o con legge di periodicità:

in (a) => serie di F di coseni

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x$$

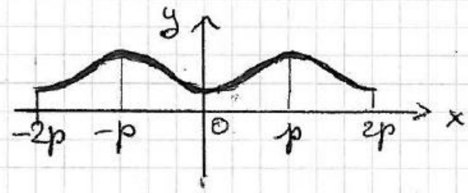
$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x\,dx$$

in (b) => serie di F di seni

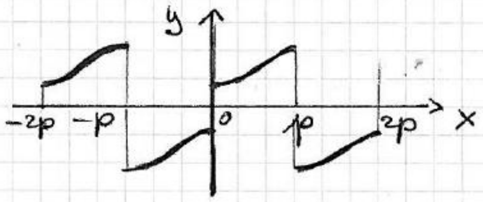
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x\,dx$$

a)



b)



SERIE DI FOURIER GENERALIZZATE (SERIE DI F. DI AUTOFUNZ.)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad x_1 < x < x_2$$

con $\phi_n \in \{ \phi_n(x) \}$ sistema ortogonale

$\{ \phi_n(x) \}$ autofunz. di un sist. di Sturm-Liouville regolare

N.B. (caso particolare)

$\{ \phi_n(x) \}$ autofunz. di un sist. di S.L. periodico

$\Rightarrow \{ \phi_n(x) \} \equiv \{ \sin x \, , \, \cos x \}$

Sist. ortogonale : $\int_{x_1}^{x_2} r(x)\, \phi_n(x)\, \phi_k(x)\, dx = 0 \quad \forall k \neq n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 120

TH. DI CONVERGENZA ANALOGO A QUELLO PER LE SERIE DI F. TRIGONOMETRICHE:

ipotesi:

- $f(x)$ regolare a tratti
- $\{\phi_m\}$ sist. di autofunz. del sist. di S.L.

$$\begin{cases} L[y] + \lambda r(x) y = 0 & x_1 < x < x_2 \\ B_1[y] = 0 \\ B_2[y] = 0 \end{cases}$$

tesi:

$\Rightarrow$ $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(x)$ converge con conv. puntuale ad $f(x)$ in ogni pt in cui f è continua ed in ogni pt in cui c'è discontinuità, la serie generale converge a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

con coeff dati da:

$$c_m = \|\phi_m\|^{-2} \int_{x_1}^{x_2} r(x) f(x) \phi_m(x)\, dx$$

Probl. ai V.C.

$$(1) \begin{cases} L[y] = \overbrace{f(x)}^{\text{data}} & x_1 < x < x_2 \\ B_1[y] = 0 & L = D[p(x) D] + q(x) \\ B_2[y] = 0 \end{cases}$$

Applicaz. del metodo dello sviluppo in serie di autofunz.
Considero il sist. di S.L.R associato:

$$(2) \begin{cases} L[y] + \lambda r(x) y = 0 \\ B_1[y] = 0 \\ B_2[y] = 0 \end{cases} \qquad \phi_m(x) : L[\phi_m] + \lambda_m r \phi_m = 0$$

$$\Rightarrow L[\phi_m] = -\lambda_m r \phi_m \qquad (2')$$

Sia la soluz. del probl (1) data da:

$$(3) \quad \underbrace{y(x)}_{\text{incognita}} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(x), \qquad c_m = \|\phi_m\|^{-2} \int_{x_1}^{x_2} r(x) \underbrace{y(x)}_{\text{incognita}} \phi_m(x)\, dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 120

(2) sist. S.L. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ $\leftarrow L[y] + \lambda r(x) y = 0$, $L[\phi_m] = -\lambda_m \phi_m$

$\lambda_m = m^2 \longleftrightarrow \phi_m = \sin mx$

$\{\phi_m\} = \{\sin mx\}$

$$y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m} \phi_m(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2} \sin mx$$

$$a_m = \frac{1}{\|\phi_m\|^2} \int_0^{\pi} \underbrace{-x}_{f(x)} \underbrace{\sin mx}_{\phi_m(x)}\, dx = \frac{1}{\int_0^{\pi} \sin^2 mx\, dx} \int_0^{\pi} -x \sin mx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{m} \cos mx \cdot x \right]_0^{\pi} - \underbrace{\left[\frac{1}{m^2} \sin mx \right]_0^{\pi}}_{0} \right\} = \frac{2}{\cancel{\pi}} \left\{ \frac{1}{m} (-1)^m \cancel{\pi} \right\}$$

$$\Rightarrow y = -\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{m^2}}_{\lambda_m} \cdot \underbrace{\frac{2}{m} (-1)^m}_{a_m} \underbrace{\sin mx}_{\phi_m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^3} (-1)^{m+1} \sin mx$$

$0 < x < \pi$

Utilizzando 1 funz. di prova e la tecnica di Galerkin, dare un'approssimaz. del carico max P che una colonna lunga b può sostenere

$$\begin{cases} EI y^{(IV)} + P y'' = 0 & 0 < x < b \\ y(0) = y''(0) = 0 \\ y(b) = y''(b) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{P}{EI} \Rightarrow y^{(IV)} + \lambda y'' = 0$$

Con una sola soluz. di prova polinomiale ad un termine, si assume:

$$\psi'' = x(x-b) \qquad \begin{pmatrix} \psi''(0) = 0 \\ \psi''(b) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{b}{6} x^3 + Ax + B = g_1(x)$$

con $\begin{cases} \psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \psi(b) = \frac{b^4}{12} - \frac{b^4}{6} + Ab = 0 \Rightarrow A = \frac{b^3}{12} \end{cases}$

quindi: $\psi(x) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{b}{6} x^3 + \frac{b^3}{12} x = g_1(x)$

$$y^{(IV)} + \lambda y'' = 0$$

$$\psi^{(IV)} + \Lambda \psi'' = 0 \quad \text{con } E_1 = \psi^{(IV)} + \Lambda \psi''$$

$$\Rightarrow E_1(x) = 2 + \Lambda x(x-b)$$

1) condiz. di Cauchy : per $0 < t < +\infty$

$u(x,t)$ la funz. incognita ed eventualm. la sua u_t
$u_t(x,t)$ sono prescritte sul contorno $t=0$ (es. cond iniziali) $u(x,0)$
$u_t(x,0)$

2) condiz. di Dirichlet

$u(x,t)$ la funz. incognita è prescritta in ogni pt del contorno della regione dominio del probl.

3) condiz. di Neumann

$u_n(x,t)$ derivata normale della funz. incognita è prescritta in ogni pt del contorno della regione dominio del probl.

derivata normale della funz. incognita

es.

$u(x,t)$

$u_{xx} = u_{tt} \quad 0<x<p \, , \; t>0$

$u(0,t) = f(t) \, , t>0$, c. di Dirichlet nel pt $x=0$ pt del contorno

$u_x(p,t) = g(t) \, , \; t>0$, c. di Neumann

$u(x,0) = h(x) \, , \; 0<x<p$, c. di Cauchy

$\underbrace{u_t(x,0)}_{u_t(x,\, t=0)} = e(x) \, , \; 0<x<p$, c. di Cauchy (per $t=0$)

la classificaz. di un'equaz. alle der. parz. può variare da pt a pt se i coeff. sono variabili:

es.

$u_{xx} - x u_{yy} + u = 0$

$A u_{xx} + 0 u_{xy} + C u_{yy}$: $\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-x \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 120

$\Rightarrow$ sommando ed imponendo equilibrio:

$$T u_x (x+\Delta x, t) - T u_x (x,t) = \rho \Delta x \, u_{tt} (x,t)$$

$$\frac{\cancel{T}[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)]}{\cancel{T}\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt} (x,t)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho}{T} u_{tt} (x,t$$

$$\Rightarrow u_{xx} (x,t) = \frac{1}{T}\rho \, u_{tt} (x,t)$$

posto $c^2 = \frac{T}{\rho} \to$ $\boxed{u_{xx} = c^{-2} u_{tt}}$ $\leftarrow$ eq. delle deformazioni della corda.

N.B. l'eventuale presenza di forza agente in direz. verticale $F(x,t)$ va sommata al 1° membro

$$u_{xx} = c^{-2} u_{tt} - \frac{1}{T} \underbrace{F(x,t)}_{\text{forza distribuita per unità di lungh.}}$$

EQUAZ. ALLE DER. PARZ. A COEFF COST. DEL TIPO

$u = u(x,y)$

(1) $A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy}$ $\quad$ A, B, C cost

- trasformaz. lineare di coord.

$$* \begin{cases} r = ax + by \\ s = cx + dy \end{cases} \quad u = u(x,y) \to u = u(r,s) \text{ con } *$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dev'essere invertibile però!

$$\begin{cases} u_x = u_r r_x + u_s s_x \\ u_y = u_r r_y + u_s s_y \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} r_x = a & , & r_y = b \\ s_x = c & , & s_y = d \end{matrix}$$

$$\begin{cases} u_x = a u_r + c u_s \\ u_y = b u_r + d u_s \end{cases}$$

$$u_{xx} = (a u_r + c u_s)_x = a (u_r)_x + c (u_s)_x =$$
$$= a (a u_{rr} + c u_{rs}) + c (a u_{sr} + c u_{ss}) =$$
$$= a^2 u_{rr} + ac \, u_{rs} + ac \, u_{sr} + c^2 u_{ss}$$

(4) $u_{rs} = 0 \Rightarrow u(r,s) = F(r) + G(s)$ soluz. generale

$\begin{cases} r = ax + by \\ s = cx + dy \end{cases}$ posto $b = d = 1$, $a = m_1$, $c = m_2$ $\Rightarrow \begin{cases} r = m_1 x + y \\ s = m_2 x + y \end{cases}$

$\Rightarrow$ (5) $u(x,y) = F(m_1 x + y) + G(m_2 x + y)$

es. Piccole deformaz di una corda elastica tesa, assegnati spostam. e velocità iniziali, $-\infty < x < \infty$

$u = u(x,t)$

$\begin{cases} u_{xx} = c^{-2} u_{tt} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ $\leftarrow$ note $\quad c^2 = \frac{T}{\rho}$ $\quad$ C. Cauchy

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$B^2 - 4AC = 0 - 4(1 \cdot (-c^2)) = 4c^2 > 0 \Rightarrow$ eq. iperbolica

leggo: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

da $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$

con $A = 1$, $B = 0$, $C = -c^2$, $\boxed{(*) \quad \begin{matrix} x \to t \\ y \to x \end{matrix}} \Rightarrow Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx}$

$$\begin{matrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & -c^2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} Am^2 & + Bm & + C = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & c^{-2} \end{matrix}$$

$m^2 = c^2 \Rightarrow m_{1,2} = \pm c$

$m_1 = m_2 = c$

Da (5) $u(x,y) = F(m_1 x + y) + G(m_2 x + y)$ per (*)

$u(x,t) = F(m_1 t + x) + G(m_2 t + x)$

$u(x,t) = F(x + ct) + G(x - ct)$

$$F(x+ct) + G(x-ct) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\left(\int_0^x \cdot + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_x^{x+ct} \cdot - \int_0^x \cdot + \int_{x-ct}^x \cdot \right)\right] + k_1 + k_2$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau \right] + \cancel{k_1 + k_2}$$

$$u(x,0) = f(x) + k_1 + k_2 \equiv f(x) \iff k_1 + k_2 = 0$$

soluz. di D'Alembert dell'eq. delle onde

grafici p. 125 (cap. 3)

RAPPRESENTAZIONE DI FOURIER PER LE FUNZ. NON PERIODICHE DEF. SU TUTTO $\mathbb{R}$

Parto dalla rappresentaz. di Fourier per le funz. di periodo $T = 2p$. Posso estenderla ad una funz. per $T \to \infty$

f regolare a tratti:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} + b_n \sin \frac{n\pi}{p} \right)$$

con $a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t) \cos \frac{n\pi}{p} t\, dt$

$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t) \sin \frac{n\pi}{p} t\, dt$

$$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t) \cos\frac{n\pi}{p} t \cos\frac{n\pi}{p} x\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t) \sin\frac{n\pi}{p} t \sin\frac{n\pi}{p} x\, dt \right]$$

quindi:

$$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t) \cos\frac{n\pi}{p}(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt + \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} f(t) \cos\frac{n\pi}{p}(t-x)\,dt$$

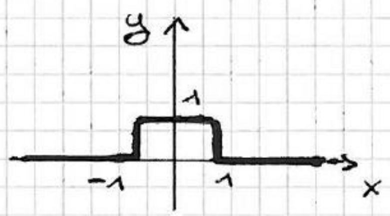
suppongo f assolutam. integrabile

quindi:

$1-|x| \geq 0$ per $x \in [-1, 1]$

$1-|x| < 0$ per $x \in$ esterno a $[-1, 1]$

$\Rightarrow$ funz. heaviside



$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1-|x|) \cos st\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} 1 \cdot \cos st\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin st}{s} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi} \frac{2 \sin s}{s} = \frac{2}{\pi s} \sin s$$

$$B(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(1-|x|)}_{\text{pari}} \underbrace{\sin st\, dt}_{\text{dispari}} = 0$$

quindi : $f(x) = \int_0^{\infty} A(s) \cos sx\, ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} \cos sx\, ds$

l'integrale di F. converge a $f(x)$ in tutti i pt in cui f è continua, converge al valore medio tra lim dx e lim sx dove f è discontinua (salto)

$\boxed{18/05/11}$

$\nabla^2 u + \alpha u = \beta u_{tt} + \gamma u_t - F$ nota u incognita

operatore laplaciano costanti

$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ nelle coord cartesiane ortogonali (x, y, z)

$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$ nelle coord cilindriche (r, θ, z)

$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$ nelle cord. polari (r, θ)

$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \frac{\cotan \phi}{r^2} u_\phi + \frac{1}{u^2 \sin^2 \phi} u_{\theta\theta}$ nelle coord sferiche

Equazione del calore:

$\nabla^2 u = c^{-2} u_t$ $\quad \alpha = 0$, $\beta = 0$ è un' equaz. parabolica

Usiamo ora la legge di Fourier:

$$Q = -K u_x \qquad K>0 \qquad \Rightarrow Q_x = -K u_{xx} = -\rho c u_t + F$$

$$\Rightarrow u_{xx} = \underbrace{\frac{\rho c}{k}}_{a^{-2}} u_t - \frac{F}{k} = a^{-2} u_t - \frac{F}{k}$$

a^2 = diffusività termica

Problema della conduzione del calore in assenza di sorgenti.

$$\nabla^2 u = a^{-2} u_t$$

$$u_{xx} = a^{-2} u_t \qquad 0<x<p \qquad t>0$$

impongo le condiz. al contorno:

$$\begin{cases} B_1[u] = a_{11} u(0,t) + a_{12} u_x(0,t) = \alpha(t) \\ B_2[u] = a_{21} u(p,t) + a_{22} u_x(p,t) = \beta(t) \end{cases}$$

impongo le condizioni iniziali:

$$u(x,0) = \underbrace{f(x)}_{\text{data}} \qquad 0<x<p$$

N.B. mi aspetto una sola condiz. iniziale (c'è solo la derivata prima)

- caso 1: barretta di materiale omogeneo con estremi a temperatura nulla

$$\begin{cases} u_{xx} = a^{-2} u_t & 0<x<p, \; t>0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(p,t) = 0 \end{cases}$$

posso già prevedere che $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$

$\Rightarrow$ Tecnica di Bernoulli / tecnica della separazione delle variabili

assumo $u(x,t) = \underbrace{X(x)}\,\underbrace{W(t)}$.

da determinare!

impongo qst soluz. all' equaz. differenziale $\rightarrow$ devo calcolarmi tutte le derivate

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 120

$$\frac{dw}{dt} + \lambda a^2 w = 0$$

$$\int \frac{dw}{w} = -\lambda a^2 \int dt \rightarrow \log|w| = -\lambda a^2 t + c$$

$$\rightarrow |w| = e^{-\lambda a^2 t + c} = e^c e^{-\lambda a^2 t} \rightarrow w = \pm e^c e^{-\lambda a^2 t}$$

$$\rightarrow w = C e^{-\lambda a^2 t}$$ avrò tnt soluz. qnt sono i valori di λ

$$W_m(t) = C_m\, e^{-\lambda_m a^2 t} \rightarrow W_m(t) = C_m\, e^{-\frac{m^2\pi^2}{p^2} a^2 t}$$

$$_m(x,t) = X_m(x)\, W_m(t) \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

$$u_m(x,t) = C_m \sin \frac{m\pi}{p} x \; e^{-\frac{m^2\pi^2}{p^2} a^2 t}$$

$\downarrow$ verificando le c.c. $\begin{cases} u_m(0,t) = 0 \\ u_m(p,t) = 0 \end{cases}$

$$u_m(x,0) = C_m \sin \frac{m\pi}{p} x \equiv f(x)$$

$\Rightarrow$ Principio di sovrapposizione delle soluzioni / degli effetti

Se $u_m(x,t)$ sono soluz. dell' eq. diff. per $m = 1, 2 \dots$, grazie alla linearità delle equaz., la sommatoria

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t)$$ si dimostra essere soluz. dell' equaz. (sommatoria convergente).

soluzione per ogni insieme di costanti per cui la sommatoria è convergente

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m X_m(x)\, W_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \underbrace{\sin \frac{m\pi}{p} x}_{X_m} \; \underbrace{e^{-\frac{m^2\pi^2}{p^2} a^2 t}}_{W_m} \qquad (*)$$

Impongo la c.i. alla $(*)$:

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi}{p} x = \underbrace{f(x)}_{\text{data}}$$ $\rightarrow f$ è espansa come una serie di Fourier di seni

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)}{2m+1} e^{-a^2(2m+1)^2 t}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos s(t-x)\, dt \right] ds =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[A(s) \cos sx + B(s) \sin sx \right] ds$$

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos st\, dt$$

$$B(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin st\, dt$$

Trasformata integrale di $f(t)$

<u>def</u> $$\underbrace{F(s)}_{\substack{\uparrow \\ \text{trasf. integr.} \\ \text{di } f(t)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{K(s,t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{nucleo della} \\ \text{trasformazione}}} f(t)\, dt$$

$$K(s,t) \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-st} & t \geq 0 \end{cases} \quad F(s) \text{ trasformata di Laplace}$$

$$\left. \begin{aligned} K(s,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist} \\ K(s,t) &= \frac{1}{2\pi} e^{ist} \end{aligned} \right\} F(s) \text{ trasformata di Fourier}$$

Partiamo dalla rappresentazione integrale:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos s(t-x)\, dt \right] ds$$

Esprimo il $\cos(sx)$ come: ↳ vogliamo arrivare alla coppia di Fourier

$$\cos(sx) = \frac{e^{isx} + e^{-isx}}{2}$$

$\Rightarrow$ (1) diventa: (2) $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)} \right] dt\, ds$$

Considero: $[z = t - x]$

(A) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{isz}\, dt\, ds = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{isz}\, dt\, ds}_{\text{I}} + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{isz}\, dt\, ds$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 120

23/05/11

$$\text{②} \begin{cases} u_{xx} = a^{-2} u_t & 0<x<p \\ u(0,t) = T_1 & \\ u(p,t) = T_2 & \Big\} \ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,p) \end{cases}$$

La separaz. delle var. non è immediatam. applicabile a qst caso → la utilizzeremo in un secondo momento.

Mi aspetto che, dopo un tempo suff lungo, la temp. resti costante nel tempo e che, al max, varii da sezione a sezione.
⇒ soluz. stazionaria

$$u(x,t) = X(x)\,W(t)$$
$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)\,W(t) = T_1 \\ u(p,t) &= X(p)\,W(t) = T_2 \end{aligned}\right\} \forall t>0$$

N.B.
$t \to \infty$ $u(x,t) \Rightarrow$ funz. che è stazionaria $S(x)$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = S(x)$$

$$u(x,t) = \underbrace{v(x,t)}_{\text{funz. che rappresenta un transitorio}} + \underbrace{S(x)}_{\text{funz. stazionaria}}$$

con $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} v_t(x,t) = 0 \\ &\lim_{t\to\infty} v_x(x,t) = \lim_{t\to\infty} v_{xx}(x,t) = 0 \end{aligned}\right\} \text{variaz. di } v(x,t)$$

$u_x = v_x + S'$, $u_{xx} = v_{xx} + S''$, $u_t = v_t$

Sostituisco in ②:

$$\text{②'} \begin{cases} v_{xx} + S'' = a^{-2} v_t & 0<x<p \quad t>0 \\ v(0,t) + S(0) = T_1 & \\ v(p,t) + S(p) = T_2 & \Big\} \ t>0 \\ v(x,0) + S(x) = f(x) & 0<x<p \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 120

$$\Rightarrow T_1\left[-\frac{p}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{p}x\right]_0^p + \frac{T_2-T_1}{p}\left\{\left[-\frac{p}{m\pi}x\cos\frac{m\pi}{p}x\right]_0^p + \underbrace{\frac{p}{m\pi}\int_0^p \cos\frac{m\pi}{p}dx}_{=0}\right\} =$$

$$= T_1\frac{p}{m\pi}\left[-\cos m\pi + 1\right] + \frac{T_2-T_1}{\cancel{p}}\left\{-\frac{p}{m\pi}\cancel{p}\cos m\pi\right\} =$$

$$= -\frac{p}{m\pi}\cancel{T_1\cos m\pi} + T_1\frac{p}{m\pi} - \frac{p}{m\pi}T_2\cos m\pi + \frac{p}{m\pi}\cancel{T_1\cos m\pi} =$$

$$= \frac{p}{m\pi}\left[T_1 - T_2\cos m\pi\right] = \frac{p}{m\pi}\left[T_1 - T_2(-1)^m\right]$$

Quindi:

$$C_m = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{m\pi}{p}x\,dx - \frac{2}{m\pi}\left[T_1 - T_2(-1)^m\right]$$

$\boxed{25/05/11}$

Caso 2:

$$\begin{cases} u_{xx} = a^{-2}u_t \\ u(0,t) = T_1 = 10 \\ u(p,t) = T_2 = 30 \end{cases} \qquad 0<p<10$$

$u(x,0) = 0$

$$u(x,t) = \underbrace{v(x,t)}_{\text{transitorio}} + \underbrace{S(x)}_{\text{staz.}} \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = S(x)$$

(a) $S(x)$ $\begin{cases} S'' = 0 \\ S(0) = T_1 = 10 \\ S(p) = T_2 = 30 \end{cases}$ (b) $v(x,t)$ $\begin{cases} v_{xx} = a^{-2}v_t \\ v(0,t) = 0 \\ v(p,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - S(x) \end{cases}$

(a) $\rightarrow S(x) = C_1 + C_2 x$

$S(0) = C_1 = 10 \rightarrow S(x) = 10 + C_2 x$

$S(10) = 10 + C_2 10 = 30 \rightarrow C_2 = 2 \rightarrow S(x) = 10 + 2x$

(b) $\rightarrow v(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\frac{m\pi}{p}x\, e^{-\frac{a^2m^2\pi^2}{p^2}t} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\frac{m\pi}{10}x\, e^{-\frac{a^2m^2\pi^2}{100}t}$

$v(x,0) = \underbrace{f(x)}_{0} - S(x) = -(10+2x)$

$u(x,t) = v(x,t) + S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\frac{m\pi}{10}x\, e^{-\frac{a^2m^2\pi^2}{100}t} + (10+2x)$

$v(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\frac{m\pi}{10} \equiv 0 - (10+2x)$

Problema (2)

$w' + a^2 \lambda w = 0$

$\lambda = 0 \Rightarrow w' = 0 \Rightarrow w(t) = cost = \frac{1}{2} c_0$ scelta arbitraria

$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{p^2} \Longrightarrow w' + a^2 \frac{m^2\pi^2}{p^2} w = 0 \Rightarrow w_m(t) = C_m e^{-\frac{a^2 m^2 \pi^2}{p^2} t}$

Sovrapposiz. degli effetti:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(x) w_m(t) = X_0 w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} X_m w_m =$$

$$= \frac{1}{2} c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos \frac{m\pi}{p} x \, e^{-\frac{a^2 m^2 \pi^2}{p^2} t}$$

soddisfa alle c.c. prescritte e alle c.I.

$$u(x,t) = \underbrace{f(x)}_{\text{data}} = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos \frac{m\pi}{p} x$$

dove $c_m = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{m\pi}{p} x \, dx$, $\frac{1}{2} c_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(x)\, dx$

$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{1}{p} \int_0^p f(x)\, dx$ → a regime la ~~temp.~~ evolve verso la temp. media

Caso 3. $\boxed{26/05/11}$

$$\begin{cases} u_{xx} = a^{-2} u_t & 0<x<p \quad t>0 \\ u(0,t) = 0 & t>0 \\ hu(p,t) + u_x(p,t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

$u(x,0) = f(x)$

$u(x,t) = X(x)\, w(t)$

$u(0,t) = X(0)\, w(t) = 0 \to X(0) = 0$

$h\, u(p,t) + u_x(p,t) = hX(p) w(t) + X'(p)\, w(t) = 0$

$$(1) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ h X(p) + X'(p) = 0 \end{cases} \qquad w' + a^2 \lambda w = 0$$

$\lambda = k^2 > 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$X(0) = c_1 = 0 \to X(x) = c_2 \sin kx$, $X'(x) = c_2 k \cos kx$

$h c_2 \sin kp + c_2 k \cos kp = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 120

Se c'è una sorgente termica → si modifica l'equaz. parabolica del calore.

Caso 5

$$\begin{cases} u_{xx} = a^{-2} u_t - q(x,t) \\ B_1[u] = \alpha(t) \\ B_2[u] = \beta(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Casi particolari sulla forma di q

Caso 6 $q(x,t) = P(x)$ → sorgente non evolutiva (non dipende da t)

$B_1[u] = T_1$

$B_2[u] = T_2$

si pone inoltre

$u(x,t) = v(x,t) + S(x)$

Nel lim per $t \to \infty$:

$$\begin{cases} S'' = -P(x) \\ B_1[S] = T_1 \\ B_2[S] = T_2 \end{cases}$$ → con 2 integraz. succ. trovo $S(x)$

Nel transitorio:

$$\begin{cases} v_{xx} = a^{-2} v_t \\ B_1[v] = 0 \\ B_2[v] = 0 \\ v(x,0) = f(x) - S(x) \end{cases}$$ → trovo $v(x)$

Caso 7:

$$(*) \begin{cases} u_{xx} = a^{-2} u_t - q(x,t) \\ B_1[u] = 0 \\ B_2[u] = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) \phi_n(x)$

coefficienti incogniti da determinare

$$\phi : \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ B_1[X] = 0 \\ B_2[X] = 0 \end{cases}$$

$\phi_n'' + \lambda \phi_n = 0$

$\phi_n'' = -\lambda \phi_n$

$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n(t) \phi_n(x)$

$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) \phi_n''(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 120

Problemi non omogenei con c.c. variabili in t.

$$\begin{cases} u_{xx} = a^{-2} u_t - q(x,t) & 0 < x < p \quad t > 0 \\ u(0,t) = \alpha(t) & t>0 \\ u(p,t) = \beta(t) & \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Cerco

$$u(x,t) = \underbrace{k(x,t)}_{\text{forma opportuna}} + \underbrace{v(x,t)}_{\text{da det.}}$$

$$k(x,t) = \alpha(t) + [\beta(t) - \alpha(t)] \frac{x}{p} \rightarrow k_{xx} = 0$$

$$k: \begin{cases} k(0,t) = \alpha(t) \\ k(p,t) = \beta(t) \end{cases}$$

$$u_{xx} = \underbrace{k_{xx}}_{=0} + v_{xx} = v_{xx}$$

$u_t = k_t + v_t$ $\longrightarrow$ sostituisco nell'equaz.

$$v_{xx} = a^{-2} k_t + a^{-2} v_t - q(x,t) = a^{-2} v_t + \overbrace{a^{-2} k_t - q(x,t)}^{\text{nota}}$$

$$\text{c.c.} \begin{cases} u(0,t) = \underbrace{k(0,t)}_{\alpha(t)} + v(0,t) \equiv \alpha(t) \iff v(0,t) = 0 \\ u(p,t) = \underbrace{k(p,t)}_{\beta(t)} + v(p,t) \equiv \beta(t) \iff v(p,t) = 0 \end{cases}$$

c.I $u(x,0) = k(x,0) + v(x,0) \equiv f \Rightarrow v(x,0) = f(x) - k(x,0)$

quindi:

$$\begin{cases} v_{xx} = a^{-2} v_t + a^{-2} k_t - q(x,t) \\ v(0,t) = 0 \\ v(p,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - k(x,0) \end{cases}$$

det. $v(x,t)$ con il metodo di espansione in serie di autofunz.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)\, \phi_n(x)$$

(v. caso 7)

2) $f(x)$ funz. dispari in $\mathbb{R}$ $[f(-x) = -f(x)]$

$$A(s) = 0 \rightarrow f(x) = \int_0^\infty B(s) \sin sx \, ds$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin sx \int_0^\infty f(t) \sin st \, dt \, ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin sx \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \underbrace{\sin st}_{K(s,t)} \, dt}_{F_s(s)} \, ds$$

def.
$$F_s(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin st \, dt \rightarrow \mathcal{F} \{ f(t) ; s \}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(s) \underbrace{\sin sx}_{K(s,x)} \, ds \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \{ F_s(s) ; x \}$$

$\boxed{01/06/11}$

Pag. 303 - 308

$$\boxed{u_{xx} = c^{-2} u_{tt} - \frac{1}{T} \underbrace{F(x,t)}_{\text{proporzionale alla forza che si considera}}} \longleftarrow \text{vibrazioni}$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

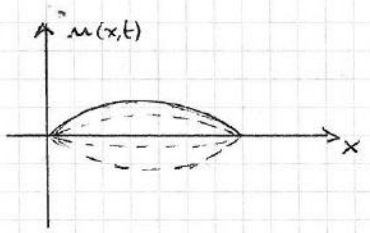
Moti liberi di una corda vibrante:

$$① \begin{cases} u_{xx} = c^{-2} u_{tt} & 0 < x < p \, , t > 0 \\ u(0,t) = 0 & \\ u(p,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$u(x,0) = f(x) \quad 0 < x < p$

$u_t(x,0) = g(x) \quad 0 < x < p$

funz. note



Soluz. per separaz. di variabili $\rightarrow u(x,t) = X(x) W(t)$

$u_x = X' W \qquad u_t = X W'$

$u_{xx} = X'' W \qquad u_{tt} = X W''$

$$\frac{X'' W}{X W} = c^{-2} \frac{X W''}{X W} \Rightarrow \frac{X''}{X} = c^{-2} \frac{W''}{W} = -\lambda$$

(a) $X'' + \lambda X = 0$

(b) $W'' + \lambda c^2 W = 0$

frequenza angolare $\omega_n = \frac{n\pi c}{p}$

ampiezza $R_n \sin \frac{n\pi}{p} x$

Considerazioni:

$n = 1$ $\quad \omega_1$ freq. fondamentale

ω_n n-esima freq. naturale

$$\omega_1 = \frac{\pi}{p} c = \frac{\pi}{p}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad , \quad \omega_1 \uparrow \text{ per } T\uparrow$$

Principio di sovrapposiz. degli effetti:

- $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p} ct + b_n \sin\frac{n\pi}{p} ct\right) \sin\frac{n\pi}{p} x$$

$$\boxed{u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{p} x = f(x)}$$

- $$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n \frac{n\pi}{p} c \sin\frac{n\pi}{p} ct + b_n \frac{n\pi}{p} c \cos\frac{n\pi}{p} ct\right) \sin\frac{n\pi}{p} x$$

$$\boxed{u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{p} c \sin\frac{n\pi}{p} x = g(x)}$$

$f(x)$ e $g(x)$ sono state espanse in serie di Fourier di sen → funz. dispari (con periodicità $T = 2p$)

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \sin\frac{n\pi}{p} x \, dx$$

$$b_n \frac{n\pi}{p} c = \frac{2}{p}\int_0^p g(x) \sin\frac{n\pi}{p} x \, dx$$

$$\rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^p g(x) \sin\frac{n\pi}{p} x \, dx$$

Fino a qui abbiamo visto oscillazioni libere (frequenze proprie) → ora passiamo ad oscillazioni forzate.

probl omogeneo — probl. particolare

$$(A)\begin{cases} u_{xx} = c^{-2} u_{tt} \\ B_1[u] = 0 \\ B_2[u] = 0 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} u_{xx} = c^{-2} u_{tt} - P(x)\sin \omega t \\ B_1[u] = 0 \\ B_2[u] = 0 \end{cases}$$

Il probl. (A) omogeneo si risolve per separaz. di variabili.

$$u_H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n \cos k_n ct + b_n \sin k_n ct)}_{w_n(t)} \underbrace{\phi_n(x)}_{X_n(x)}$$

$\lambda_n \longleftrightarrow \phi_n(x)$

$\frac{n^2\pi^2}{p^2} \longleftrightarrow \sin \frac{n\pi}{p} x$ autofunz. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(p) = 0 \end{cases}$

a_n, b_n da determinarsi poi perché le C.I si riferiscono a

$u(x,t) = u_H(x,t) + u_p(x,t)$

Il probl. (B) si risolve applicando il metodo dei coeff. indeterminati (che è in analogia col metodo delle cost. arbitrarie per il calcolo della soluz. particolare dell' equaz. completa).

Cerco $u_p(x,t) = \underbrace{Y(x)}_{\text{da determ.}} \sin \omega t + \underbrace{Z(x)}_{\text{da determ.}} \cos \omega t$

$(u_p)_x = Y' \sin \omega t + Z' \cos \omega t$

$(u_p)_{xx} = Y'' \sin \omega t + Z'' \cos \omega t$

$(u_p)_t = \omega Y \cos \omega t - \omega Z \sin \omega t$

$(u_p)_{tt} = -\omega^2 Y \sin \omega t - \omega^2 Z \cos \omega t$

Sostituisco in (B):

$$Y'' \sin \omega t + Z'' \cos \omega t = \left[-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y - P(x)\right]\sin \omega t - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Z \cos \omega t$$

uguaglio i coeff. di $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$:

$$\begin{cases} Y'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y = -P(x) \\ Z'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Z = 0 \quad \rightarrow \text{scelgo } Z = 0 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 120