NUMERO : 103

DATA : 03/06/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Ottina

MATERIA : Analisi I
Prof. Camporesi

ANALISI I

ROBERTO CAMPORESI.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 278

PROPOSIZIONE LOGICA

È un enunciato che si può dire se è vera o falsa. perché porta con sé un valore di verità.

1) NEGAZIONE LOGICA $\neg p$

la proposizione logica è vera se p è falsa, ed è falsa se p è vera. Se p = '7 è un numero razionale, allora $\neg p$ = '7 è un numero irrazionale.

2) CONGIUNZIONE LOGICA

la congiunzione logica di due proposizioni $p \wedge q$ è vera se p e q sono entrambe vere, ed è falsa in tutti gli altri casi.

3) DISGIUNZIONE LOGICA

la disgiunzione logica di due proposizioni $p \vee q$ è falsa se p e q sono entrambe falsa ed è vera in tutti gli altri casi.

$p \vee q$ = '7 è un n° razionale o pari', è vera perché p è vera.

4) IMPLICAZIONE LOGICA

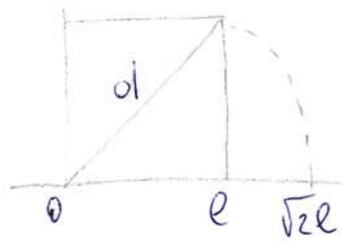
L'implicazione logica $p \Rightarrow q$ è falsa se p è vera e q è falsa, mentre è vera in tutti gli altri casi.

L'implicazione logica esclude che da una premessa vera si possa dedurre una conclusione falsa, mentre non esclude che se la conclusione sia vera anche se la premessa è falsa

/0'

Su una retta, non tutti i numeri sono razionali, definiti da un rapporto

$$\boxed{r = \mp \frac{m}{n}}$$



E significa che non tutte le lunghezze possono essere misurate con multipli e sottomultipli.
La diagonale di un quadrato non è misurabile in proporzione alla lunghezza del lato, ma usiamo il teorema di Pitagora. $d^2 = l^2 + l^2$ $\quad d^2 = 2l^2$
Chiamiamo p il fattore di proporzionalità tra lato e diagonale $d = pl$ che elevando al quadrato si ha $p^2 = 2$ $\quad p = \sqrt{2}$

Se il N° p soddisfa $p^2 = 2$, allora p non è razionale.

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo supponiamo che esistano due numeri naturali m ed n ($\neq 0$) tali che $p = \frac{m}{n}$, e che m e n non abbiano fattori comuni.
Elevando al quadrato $\frac{m^2}{n^2} = 2$ vale a dire $m^2 = 2n^2$
Dunque m^2 è un numero pari e ciò equivale a dire che m è pari e sarà $m = 2k$ per un opportuno naturale k.
Sostituendo $4k^2 = 2n^2$, $n^2 = 2k^2$.
Dunque anche n^2 ed n sono numeri pari.
Siamo giunti all'ipotesi che m ed n siano entrambi pari contro l'ipotesi che e m non abbiano fattori comuni. L'assurdo è aver supposto p razionale.

ANALISI MATEMATICA I

PROF. ROBERTO CAMPORESI

INSIEMI E SIMBOLI LOGICI

L'insieme è un aggregato di elementi

A insieme $\quad a$ elemento

$a \in A \quad \in$ appartiene $\quad \notin$ non appartiene

$:$ tale che, tali che " $|$ "

$A = \{ x : x \text{ verifica le proprietà } P \}$

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ NUMERI NATURALI $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1\}$ NUMERI INTERI $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$ N° RAZIONALI $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R} = \{ x : x \text{ è allineamento decimale qualsiasi} \}$ $\mathbb{R}$
NUMERI REALI

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \}$ N° COMPLESSI $\mathbb{C}$

$i = \sqrt{-1}$ = UNITÀ IMMAGINARIA

$A_n = \{1, 2, 3, \dots n\}$ INSIEME FINITO

SOTTOINSIEME

$A \subseteq B \iff \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B \qquad P \Rightarrow Q$

A è sottoinsieme di B, $\forall a \in A$ e $a \in B$

$P(A_2) : \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$ 4

$P(A_3) : \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$ 8

TEOREMA $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(A_n)$ ha 2^n elementi
Un insieme finito di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

- PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $Q(n)$ una proprietà (proposizione logica, formula, teorema) dipendente dall'indice $n \in \mathbb{N}$. Se

1) $Q(0)$ è vera! CONDIZIONE INIZIALE

2) Fissato $n \in \mathbb{N}$ generico se è vera $Q(n) \Rightarrow$ è vera anche $Q(n+1)$

ex:

$Q(n)$: "$P(A_n)$ ha 2^n elementi"

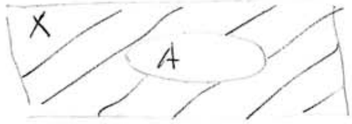
1) $Q(0)$ è vera infatti $P(A_0) = P(\emptyset) = 1 \to 2^0$
anche $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ è vera

2) Riprendiamo l'esempio $P(A_3)$ $n \to n+1$
$P(A_4) = \{1,2,3,4\}$ considera:
a) i "vecchi" sottoinsiemi di A_3 (8)
b) i "nuovi" sottoinsiemi che contengono il "4" aggiungendo a quelli vecchi il "4"
$\emptyset \to \{4\}$ $\{1\} \to \{1,4\}$ ... $8+8=16=2^4$

$n \in \mathbb{N}$ è supposta vera, $Q(n)$ avremo che $Q(n+1)$ sarà anch'essa vera perché i sottoinsiemi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 278

4) COMPLEMENTARE di A in X



$C_X(A) = \{ x \in X : x \notin A)$

$C_X(\emptyset) = (X)$ il complementare di $\emptyset$ e' X (tutto).

- LEGGI DI MORGAN

$C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$

$C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$

LE FUNZIONI

Una funzione o applicazione da A a B (insiemi non vuoti) $f : A \to B$ oppure $A \xrightarrow{f} B$ é una legge che ad ogni elemento fissato di A fa corrispondere 1 e 1 solo elemento di B.
Se $x \in A$, l'elemento $y \in B$ che corrisponde ad x si chiama IMMAGINE di x secondo f e si indica $y = f(x)$.

- A : dominio della funzione
- B : CODOMINIO di f, insieme di arrivo

L'immagine di f e' $\operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f = f(A) = \{ f(x) : x \in A \} = \{ y \in B : \exists\, x \in A : f(x) = y \} \subseteq B$

- FUNZIONE SURIETTIVA

f si dice suriettiva (su B) se $\operatorname{Im} f = B$ e si scrive $f : A \xrightarrow{su} B$. Quindi $y \in B$ é immagine di qualche $x \in A$

ESEMPIO:

$f : Q$ = RETTA EUCLIDEA orientata con unita' di misura fissata.

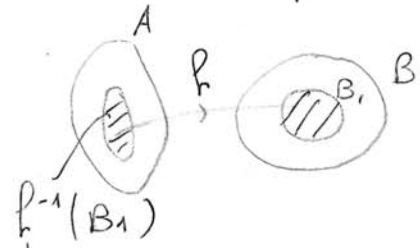
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 278

• LA CONTROIMMAGINE

Data $f: A \to B$ e dato $B_1 \subseteq B$ la controimmagine di B1 secondo f è $f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\}$

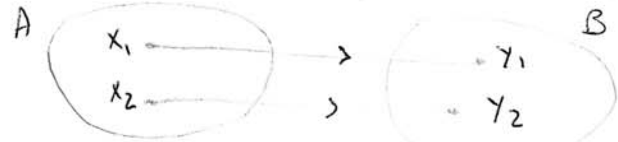
In particolare preso $y \in B$

$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\}$



Ci sono più x che finiscono nello stesso y.

È chiaro che f è 1-1 $\iff \forall y \in \operatorname{Im} f \subseteq B$,
la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$ è un insieme costituito da 1 solo punto x.



Se $f: A \to B$ è sia iniettiva che suriettiva, f si dice **BIUNIVOCA** e $f = A \xrightarrow[su]{1-1} B$

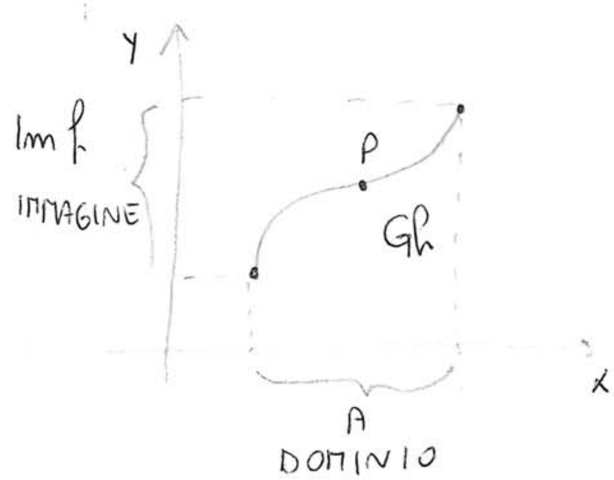
• FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Il grafico della funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'insieme
$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}$

x = VARIABILE INDIPENDENTE

y = VARIABILE DIPENDENTE

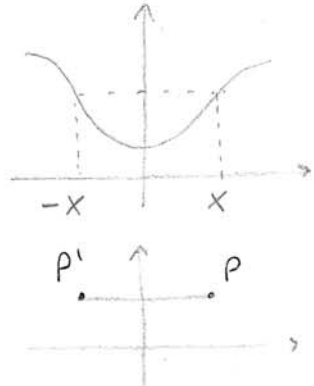
$P = (x, f(x))$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 278

GRAFICI E OPERAZIONI SUI GRAFICI

1) FUNZIONE PARI



$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice PARI se il dominio e il Gf è simmetrico rispetto l'asse y.

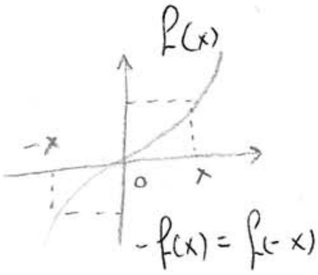
Se $f(-x) = f(x) \ \forall x \in A$

La simmetria dell'asse y è la trasformazione del piano $\mathbb{R}^2$, $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \to (-x, y)$

Questa simmetria opera su una funzione f definendo la nuova funzione $x \to f(-x)$

La funzione è pari se Gf è invariato.

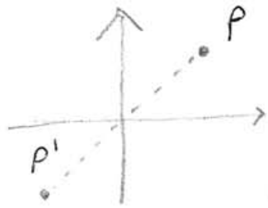
2) FUNZIONE DISPARI



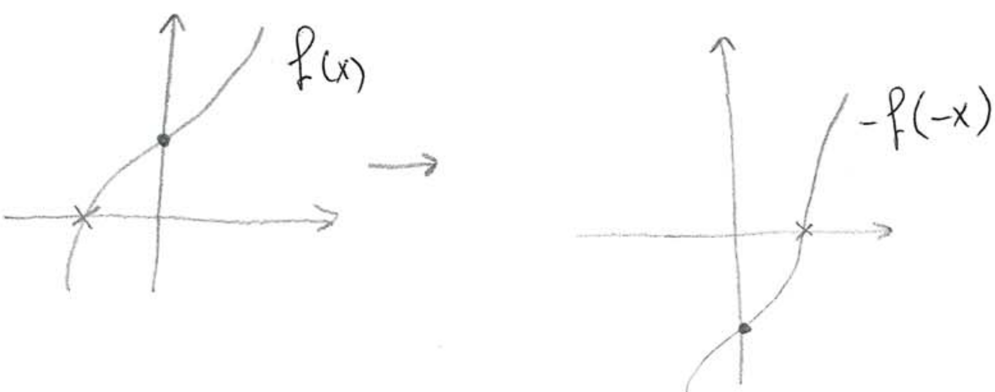
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice DISPARI se $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in A$ dove il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

La simmetria rispetto all'origine

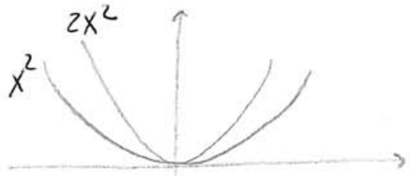
$T: (x, y) \to (-x, -y)$



Applicandola a una $f(x)$ si ottiene $-f(-x)$

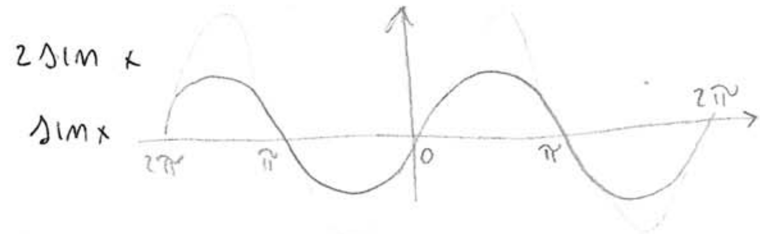


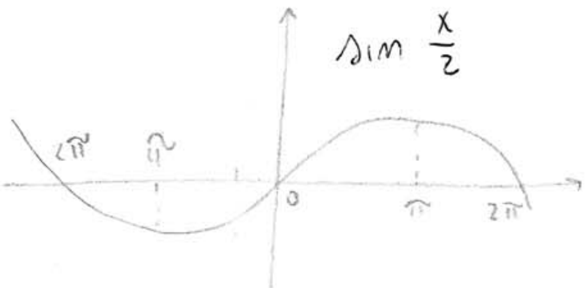
7- DILATAZIONI

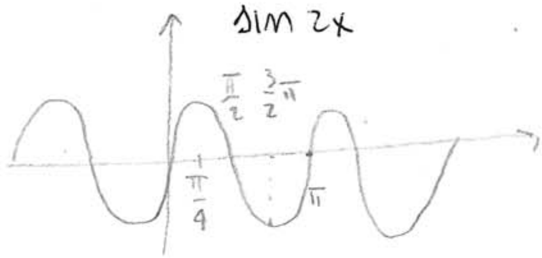


$f(cx)$ (con $c>0$) si dilata se $0<c<1$ ←• •→, si comprime se $c>1$ •→ ←•.

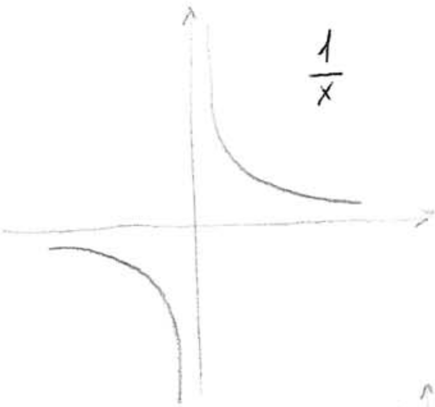
- f SENO DI x

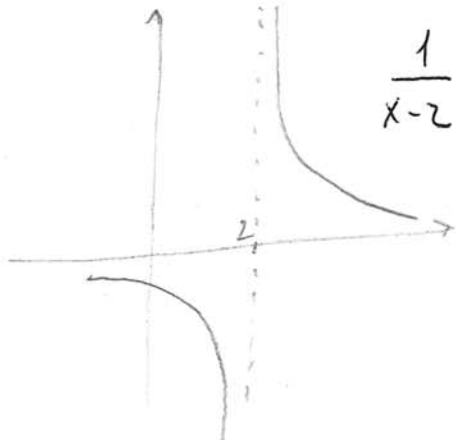


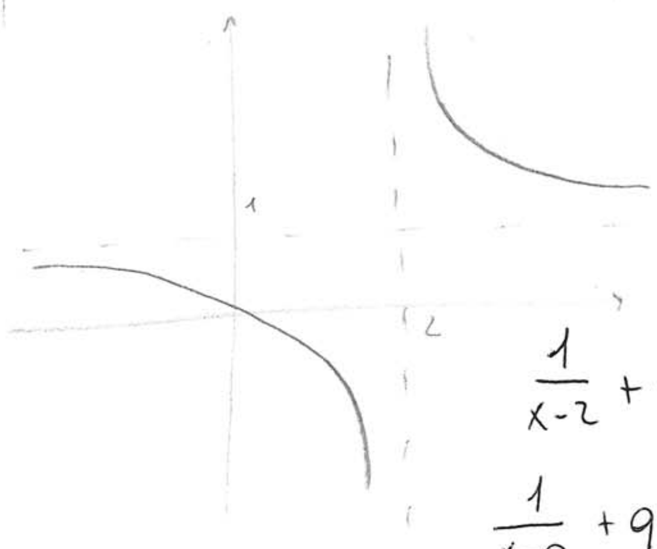




- IPERBOLE FONDAMENTALE $y=\frac{1}{x}$





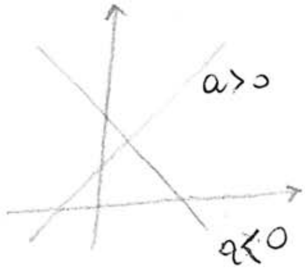


$\frac{1}{x-2}+1$

$\frac{1}{x-p}+q$

GRAFICI DI f ELEMENTARI

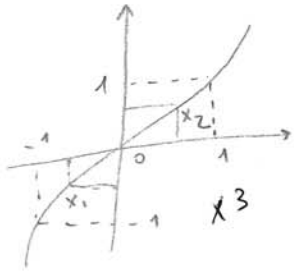
1) LA RETTA



$f(x) = ax+b$ il G_f è una retta obliqua e se $a \neq 0$ è una funzione iniettiva.

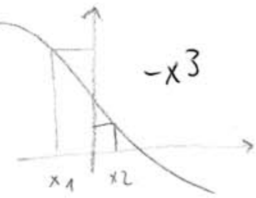
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è 1-1 se $a \neq 0$ $\quad Im f = \mathbb{R}$

2) LA CUBICA



$f(x) = x^3$ è 1-1 $\quad f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

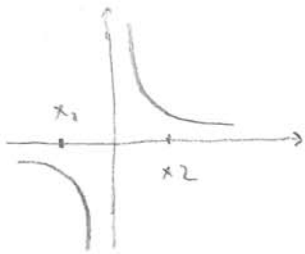
- STRETTAMENTE CRESCENTE
  se $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



- STRETTAMENTE DECRESCENTE
  se $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Se f è strettamente crescente e decrescente allora f è 1-1. Se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

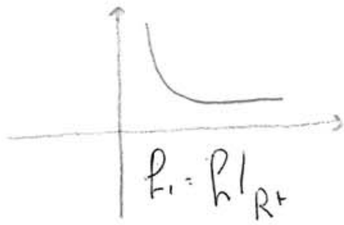
3) L'IPERBOLE



L'iperbole non interseca gli assi e

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$

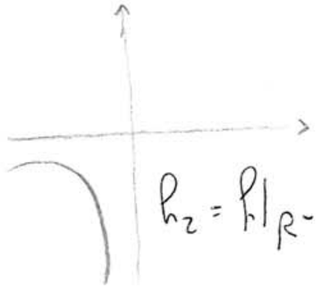
è 1-1 ma non è strettamente decrescente né crescente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



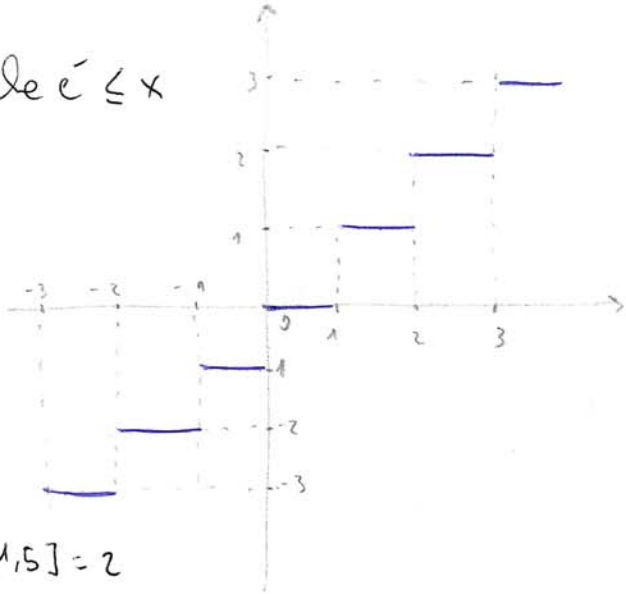
↳ USANDO LE RESTRIZIONI

$f_1 = f|_{R^+}$ e $f_2 = f|_{R^-}$

queste 2 funzioni sono strettamente decrescenti, ma non nel loro insieme.



7) PARTE INTERA DI X



$[x]$: è il più grande N° intero che è $\leq x$

$[n] = n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathrm{Im} f = \mathbb{Z}$

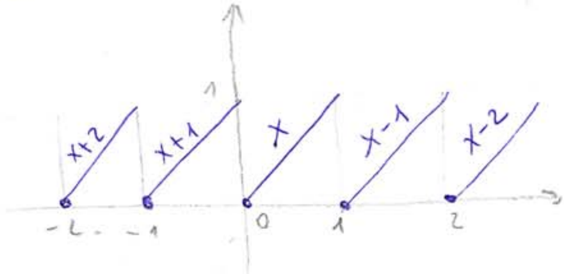
UNIONE DI INFINITI

Insiemi che sono tratti di retta che include un estremo ma esclude l'altro

$[0] = 0 \quad [1] = 1 \quad [-1] = 1$

$[0,5] = 0 \quad [-0,5] = -1 \quad [1,5] = 1 \quad [-1,5] = 2$

8) PARTE MANTISSA DI X (FRAZIONARIA)



$M(x) = x - [x]$

$M(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

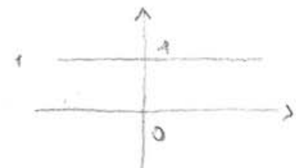
$M(0,5) = 0,5 \qquad 0 < x < 1 \quad M(x) = x$

$M(1,5) = 0,5 \qquad 1 < x < 2 \Rightarrow M_{(x)} = x - 1$

$M(-0,5) = 0,5 \qquad -1 < x < 0 \Rightarrow M_{(x)} = x + 1$

9) FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE INTERO

$f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{Z}$



- $m = 0$ $\quad f(x) = 1 \ \forall x$; funzione costante

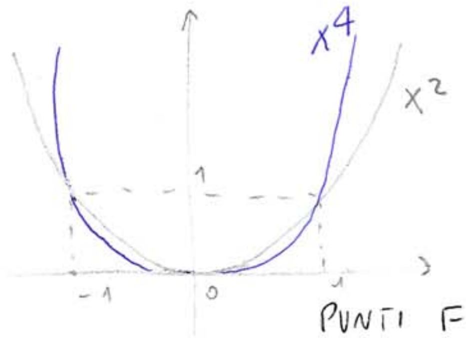
- $m = 1$ $\quad f(x) = x$ retta obliqua

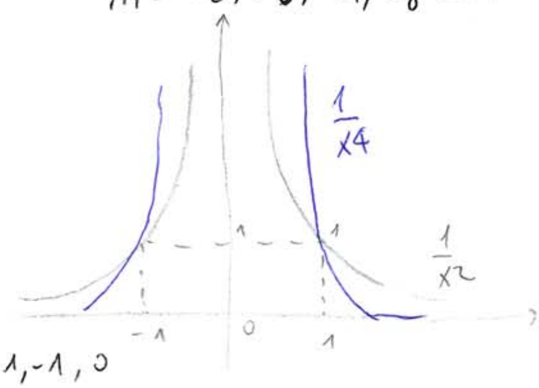
m pari > 0

$m = 2, 4, 6, 8 \ldots$

m pari < 0

$m = -2, -\cancel{6}, -4, -8 \ldots$

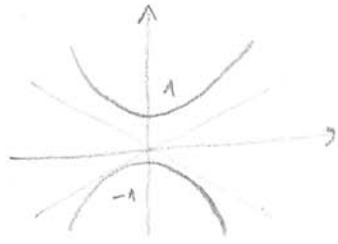




PUNTI FISSI $1, -1, 0$

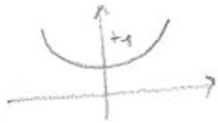
8

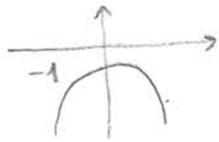
13) IPERBOLE VERTICALE



$G = \{(x,y) : y^2 - x^2 = 1\}$

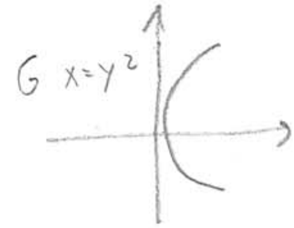
$y = \sqrt{1+x^2}$





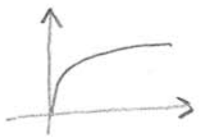
$y = -\sqrt{1+x^2}$

14) PARABOLA ORIZZONTALE

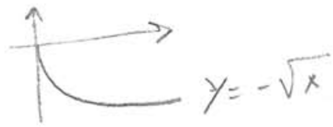


la parabola $G = \{(x,y) : x = y^2\}$
non può definire una funzione,
bisogna vedere le sue due soluzioni.

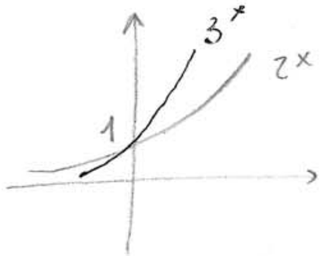
$y = \sqrt{x}$



$y = -\sqrt{x}$

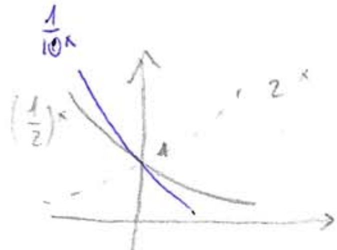


15) ESPONENZIALE



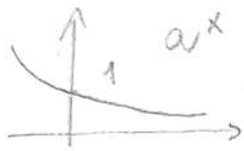
$f(x) = 2^x$ è una funzione esponenziale in base 2 ed f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$

In generale se la $a > 1$



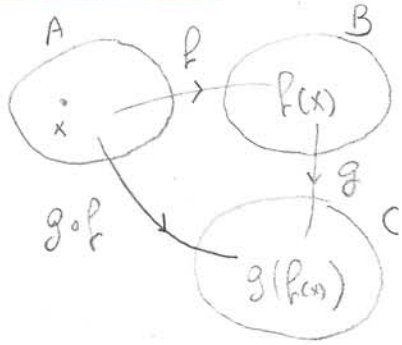
Se $0 < a < 1$
es $a = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$
è simmetrico al $G f_{2^x}$

In genere se $0 < a < 1$ è strettamente decrescente.



$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+$

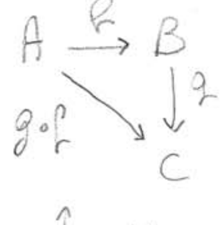
FUNZIONE COMPOSTA



Abbiamo A, B, C non vuoti dove la $f: A \to B$ e $g: B \to C$ possiamo definire

FUNZIONE COMPOSTA $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

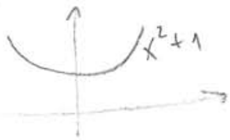
$g \circ f: A \to C$. In generale se $g \circ f \neq f \circ g$ la composizione di funzioni non ha la proprietà



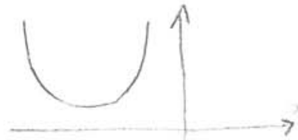
- COMMUTATIVA. ES:

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x+1$ $\quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2)+1 = x^2+1$

$\hookrightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

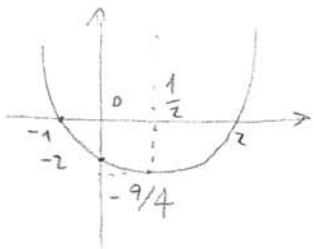


Non si ha la proprietà commutativa



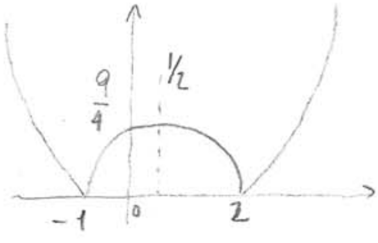
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

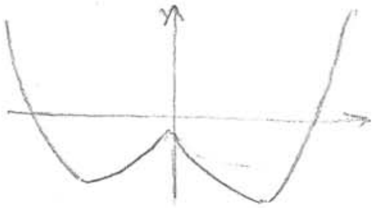
$(g \circ f) \circ h = g \circ (h \circ f) = g \circ f \circ h$



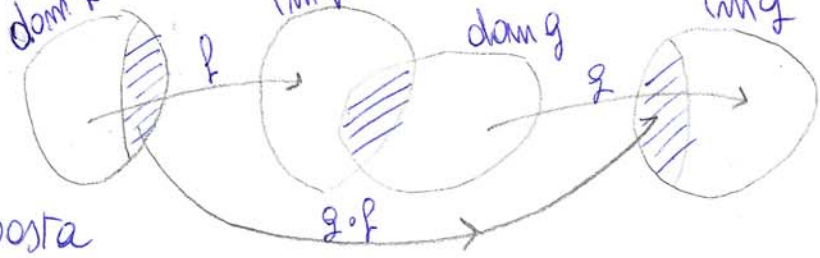
$f(x) = x^2 - x - 2$ $\quad g(x) = |x|$ $\quad f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$\to g \circ f(x) = g(f(x)) = |x^2 - x - 2|$ ⋮ $f \circ g(x) = f(g(x)) = x^2 - |x| - 2$





Se il dom g non interseca im f, allora non è una funzione composta



REGOLA

Se f e g sono funzione monotone, anche $g \circ f$ lo é e vale:

1- $g \circ f$ é crescente se f e g sono crescenti o entrambe decrescenti (anche strettamente se f e g sono strettamente).

2- $g \circ f$ é decrescente se f é crescente e g decrescente, oppure se f é decrescente e g crescente (anche strettamente).

ES: $f(x) = x^5 \quad g(x) = 3x$

$g \circ f = g(f(x)) = 3^{x^5}$ STRETTAMENTE CRESCENTE

$f \circ g = f(g(x)) = (3^x)^5 = 3^{5x}$ STRETTAMENTE DECRESCENTE

FUNZIONE INVERSA

Sia f BIUNIVOCA tra 2 numeri A,B $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$ per ogni $y \in B$, $\exists!$ (1 solo) $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Possiamo allora definire la funzione inversa $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(y) = x$ dove x é l'unico elemento di A tale che $f(x) = y$.

Se f é biunivoca $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$, o anche solo se $f: A \xrightarrow{1-1} B$ si dice che f é invertibile su A.

PROPRIETÀ

1) Se $f: A \to B$ é biunivoca, anche $f^{-1}: B \to A$ lo é e vale

$(f^{-1})^{-1} = f$ INVERSO DELL'INVERSO.

2) Se $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$ e $f^{-1}: B \xrightarrow[su]{1-1} A$

$f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in A$

$f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$

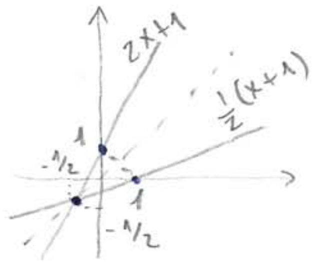
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 278

SIMMETRIE POSSIBILI E NON POSSIBILI

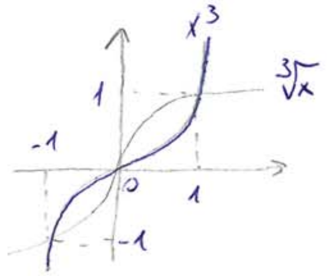
Se $f(x)$ è data da una formula esplicita, per determinare f^{-1} bisogna risolvere l'equazione $f(x)=y$, per x in funzione di y otteniamo $x = f^{-1}(y)$. Ciò non è sempre possibile.

1) $f(x) = x + \log x$ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente perché è la somma di due funzioni strettamente crescenti (è 1-1 e invertibile).
Quindi f è 1-1 $\to$ f invertibile
$f(x)=y \Rightarrow x+\log x = y$ $x = ?$ NO!

2) $f(x) = 2x+1$ $2x+1=y \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$
$f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

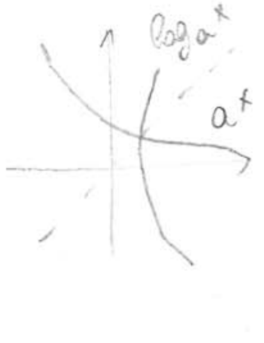


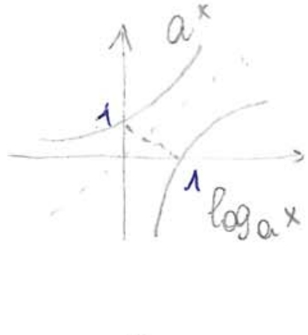
3) $f(x) = x^3$ $x^3 = y$ $x = \sqrt[3]{y}$



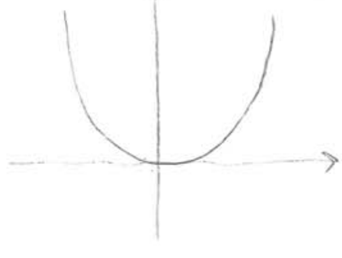
4) $f(x) = a^x$
$a>0$ $a \neq 1$, MOLTO GRANDE

$0<a<1 \Rightarrow$





5) $f(x) = x^2$
Non è 1-1, né invertibile
Bisogna usare delle restrizioni



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 278

4) $\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$

5) $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

$\Sigma = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \dots a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n$

$\Sigma = a_{n+1} - a_1$ IMPORTANTE!

6) TRASLAZIONE DEGLI INDICI

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{n+2} a_{k-2} = \sum_{k=p+1}^{n+p} a_{k-p}$

7) RIFLESSIONE DEGLI INDICI

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$

○ ESEMPI

1) Calcolare la somma dei n° primi interi positivi

$1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k$ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

• DIMOSTRAZIONE DIRETTA PER INDUZIONE

$n=3 \quad 1+2+3 = \frac{3\cdot(3+1)}{2} \quad 6 = \frac{3\cdot(4)}{2} \quad 6=6$

$n=4 \quad 1+3+4+2 = \frac{4(4+1)}{2} \quad 10 = \frac{4\cdot(5)}{2} \quad 10=10$ VERA

• DIMOSTRAZIONE INDIRETTA

1° CASO $\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = \boxed{(n+1)^2 - 1}$

2° CASO $\sum_{k=1}^{n} [k^2 + 2k + 1 - k^2] = (2k+1) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1 =$

$\boxed{2\sum_{k=1}^{n} k + n} \rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} = (n+1)^2 - 1 - n = n^2 + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Confrontando i 2 casi

13

4) SOMMATORIA DI CUBI

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots m^3 = \boxed{\sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}} \quad \forall x \geq 1$$

- DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

$$m = 2 \quad 1 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{4} \quad 9 = \frac{4 \cdot 9}{4} = \quad 9 = 9$$

$$m+1 = 2+1 \quad 1 + 2^3 + 3^3 = \frac{3^2(3+1)^2}{4} \quad 36 = \frac{9 \cdot 16}{4} \quad 36 = 36 \text{ VERA}$$

5) SOMMATORIA DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA

$$x \neq 1 \Rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^m = \boxed{\sum_{k=0}^{m} x^k = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}}$$

- DIMOSTRAZIONE DIRETTA

$$(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{m} x^k = (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^m) =$$
$$= 1 + x + x^2 + \dots + x^m - x - x^2 - x^3 - \dots - x^{m+1} = 1 - x^{m+1}$$

- DIMOSTRAZIONE CON RUFFINI

$\frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$ E' esattamente divisibile

	1 0 0 0 0	-1
1	1 1 1 ... 1	1
	1 1 1 1 ... 1	//

TRIANGOLO DI TARTAGLIA O PASCAL

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

$1 \; . \; - - - - - - - - - - . \; 1$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^n + \dots \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$(a+b)^0 = 1 \qquad (a+b)^1 = a+b \qquad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

• INTERPRETAZIONE INSIEMISTICA DI $n!$, $\binom{n}{k}$

$$A_n = \{1, 2, 3, \dots n\}$$

1) PERMUTAZIONE

Una permutazione di A_n è una disposizione dei numeri $1, 2, \dots n$ in una sequenza ordinata $(a_1, a_2, \dots a_n)$ con $a_j \in A_n$, $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$

n-upla ordinata senza ripetizioni.

ESEMPIO

le permutazioni di $A_3 = \{1,2,3\}$ sono:

$(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (2,1,3), (3,2,1), (1,3,2)$

Sono $6 = 3!$

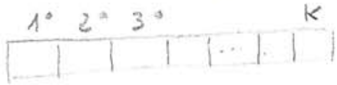
2° TEOREMA

Fissati $m, k \in N^+$ con $0 < k < 1$ vogliamo disporli nella k-upla, consideriamo le disposizioni 1, 2, ... m in sequenza ordinata e senza ripetizioni di k elementi.

$(a_1, a_2, \dots a_k)$ $a_j \in A_m$, $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$

Sia $d_{m,k}$ il numero totale di k-uple formato da A_m.

Vale che $d_{m,k} = \overset{1'}{m}(\overset{2'}{m-1})(\overset{3°}{m-2})\dots(\overset{k}{m-k+1})$ $\boxed{\left(\frac{m!}{(m-k)!}\right) = \binom{m}{k} \cdot k!}$

N° TOTALE DI POSSIBILITÀ 

ESEMPIO

$m = 4$, $k = 3$ $d_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} =$ 24 terne ordinate di numeri 1, 2, 3, 4

Si dimostra che ogni k-upla corrisponde ad una applicazione iniettiva di A_k in A_m cioè

$(a_1, a_2, \dots a_k) \longleftrightarrow f: A_k \xrightarrow{1-1} A_m$

Infine consideriamo i sottoinsiemi di k elementi $(0 \le k \le m)$ contenuti in un insieme di n elementi come A_m.

Sia $C_{m,k}$ il numero totale di sottoinsiemi

ESEMPIO $N = 4$ $k = 2$

$C_{4,2} = \{1,2\}\{1,3\}\{1,4\}\{2,3\}\{2,4\}\{3,4\} = 6$

3° TEOREMA

Interpretazione insiemistica del numero binomiale

$$\boxed{C_{m,k} = \frac{d_{m,k}}{k!} = \binom{m}{k}}$$

Il binomiale $\binom{m}{k}$ è uguale al numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono estrarre da A_m

ESEMPIO: SUPERENALOTTO

$C_{90,60}$ $m = 90$ $k = 6$ ci sono $\binom{90}{6}$ sottoinsiemi di sestine

$$\frac{90!}{6!\,(90-6!)} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84!}{120 \cdot 84!} = \binom{90}{6} = 622'614.600 \text{ POSSIBILITÀ}$$

NUMERI REALI

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$

Ci sono due rappresentazioni, entrambe suggeriscono l'esigenza di applicare il campo dei numeri razionali ad un campo più ampio.

1) RAPPRESENTAZIONE DECIMALE

Per i naturali la notazione posizionale è in base 10.

$327 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

In genere ad ogni frazione $\frac{p}{q}$ si può rappresentare come un allineamento decimale $\frac{p}{q} = a_0, a_1 a_2 \dots$ dove $a_0 \in \mathbb{Z}$ mentre $a_j \in \{0,1,2 \dots 9\}$ dove $j \geq 1$.

Dati $p, q > 0$ l'algoritmo della divisione consente di passare dalla forma $\frac{p}{q}$ all'allineamento decimale $0 \leq r_0 < q$, $0 \leq r_1 < q \dots$

$$\begin{array}{r|l} p & q \\ \hline r_0 & a_0, \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10\, r_0 & q \\ \hline r_1 & a_1 \end{array} \dots$$

Si dimostra che in questo modo si ottiene un allineamento $a_0, a_1 a_2 \dots$ che è periodico cioè, da un certo punto in poi, un blocco finito di cifre decimali, detto il PERIODO, si ripete indefinitivamente.

$\frac{315}{100} = 3,1500.. = 3,15$

Se il periodo è 0, tale periodo non si scrive e l'allineamento è FINITO.

FRAZIONI DECIMALI

Gli allineamenti finiti sono tutti del tipo

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots \frac{a_m}{10^m}$$

PERIODO E ANTIPERIODO

Dato un allineamento decimale finito o infinito si può risolvere alla frazione $\frac{p}{q}$ come mostrano gli esempi

$$a_0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_k}_{\text{ANTIPERIODO}} \underbrace{\overline{a_{k+1} \dots a_{k+m}}}_{\text{PERIODO}}$$

$1,23 = \frac{123}{100}$ $\qquad 0,\bar{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\qquad 1,\bar{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$0,4\overline{32} = \frac{432-4}{990}$ 9x PERIODO 0x ANTIPERIODO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 278

- DIMOSTRAZIONE

Si basa sulla UNICITÀ della fattorizzazione di ogni $m \in N$

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $\quad m = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \ldots \quad n = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \ldots$

$m^2 = 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} \ldots \quad n = 2^{2b_1} \cdot 3^{2b_2} \cdot 5^{2b_3} \ldots$

$m^2 = 2b^2 \Rightarrow 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} = 2^{2b_1+1} \cdot 3^{2b_2} \cdot 5^{2b_3}$

Impossibile perché $2a_1$ pari $\neq 2b_1+1$ dispari

Se $k \in N^+$, allora $\sqrt{k} \notin Q$ a meno che k non sia un quadrato perfetto $k = p^2$ $p \in N^+$.

→ CONCLUSIONE

Sulla retta ci sono "più punti" che i numeri razionali, cioè vale a dire che dopo aver riempito i punti con ascissa razionale, rimangono dei buchi.

→ NUMERO REALE

Definiamo numero reale qualsiasi allineamento decimale con segno, periodico oppure no, ovvero qualsiasi sequenza $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ dove a_0 è intero, $a_0 \in Z$ e $a_j \in \{0, 1 \ldots 9\}$ $\forall j \geq 1$ con la regola del periodo 9.

- NUMERI IRRAZIONALI

Gli elementi di $R \setminus Q$ si chiamano numeri irrazionali, sono gli allineamenti infiniti (con infinite cifre decimali) non periodici. Si è visto che $\sqrt{2} \notin Q$

REGOLA PER GLI ALLINEAMENTI

$\sqrt{2}$: $\quad 1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \Rightarrow 1$ .... $\Rightarrow 1$

$(1,4)^2 = 1,96 \quad (1,5)^2 = 2,25$ .... $\Rightarrow 1,4$

$(1,41)^2 = 1,9891 \quad (1,42)^2 = 2,0194$ .... $\Rightarrow 1,41$

$(1,414)^2 = 1,999396 \quad (1,415)^2 = 2,002225 \Rightarrow 1,414$

....

Questo dimostra che $\sqrt{2} \in R \setminus Q$ NON PERIODICO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 278

Ogni colonna da un certo punto in poi diventa costante (ha una certa cifra che si ripete), il punto può variare da colonna a colonna.

Noto $x = 0,\bar{8}$ e $y = \sqrt{2}$

$x = 0,\bar{8} = 0,888888888\ldots$

$y = \sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

1.
2,2
2,29
2,302
2,3020
2,30309
2,303101
2,3031023

Si stabilizza una cifra per volta.
Definiamo la n-esima cifra decimale di $x+y$ come il valore stabilizzato della n-esima colonna.

REGOLA

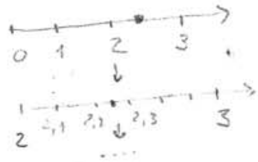
$x^{(n)} + y^{(n)}$ ad ogni cifra aggiungo la cifra di destra

Se la nuova cifra è diversa da 9, tutte le cifre precedenti sono stabilizzate e non cambiano.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DI R

V'è una corrispondenza biunivoca tra R e la retta euclidea (con orientamento ed unità di misura fissato).

1) Ad ogni punto x sulla retta si può associare un numero reale $x \to a_0,a_1a_2$ detto l'ascissa del punto. Procedimento $\sim \sqrt{2}$.

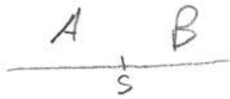


2) Ad ogni allineamento decimale si può associare uno ed un solo punto della retta, la cui ascissa coincide con l'allineamento di partenza.
Per questo si utilizza una proprietà NON ALGEBRICA, il POSTULATO DI CONTINUITÀ della retta

Siano $A, B \subset$ retta tali che

1) $A \cup B =$ retta, $A \cap B = \emptyset$
2) $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$

Esiste un unico punto $S \in$ retta che separa A e B



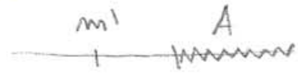
$a \leq s \leq b$
$\forall a \in A \ \forall b \in B$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 278

3) COMPLETEZZA

- $A \subset \mathbb{R}$ si dice superiormente limitato se esiste $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq m \quad \forall a \in A$.
  Tale m, se esiste, si chiama maggiorante di A.

- A è limitato inferiormente se esiste un migliorante di A, cioè $m' \in \mathbb{R}$ $a \geq m' \quad \forall a \in A$



- A è limitato $\Longleftrightarrow$ A limitato sia superiormente che inferiormente $\Longleftrightarrow \exists\, m, m' \in \mathbb{R}$:
  $m' \leq a \leq m \quad \forall a \in A \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \quad |a| \leq c \quad \forall a$

Se esiste un maggiorante m di $A \in A$, allora m è il MASSIMO di A $\quad m = \text{Max}\, A \Longleftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ a \leq m \quad \forall a \in A \end{cases}$

Il MINIMO di A, se esiste, è un minorante m' di $A \in A$

$m' = \min A \Longleftrightarrow \begin{cases} m' \in A \\ a \geq m' \quad \forall a \in A \end{cases}$

Se $\exists\, m = \max A \Rightarrow m$ è il più piccolo dei maggioranti di A. Infatti se l è un maggiorante di A $\quad m \leq l$ perché $m \in A$.
Se $\exists\, m' = \min A \Rightarrow m'$ è il più grande dei minoranti di A.

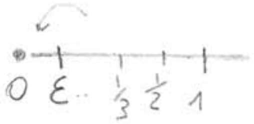
ESEMPI: $\quad A = [0,1] \quad \max A = 1 \quad \min A = 0$

$A = [0,1) \quad \min A = 0 \quad \max A \;\nexists$

$A = (0,1] \quad \max A = 1 \quad \nexists \min A$

$A = (0,1) \quad \nexists \min A \quad \nexists \max A$

$A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$



$\text{Max}\, A = 1$

A si dice ILLIMITATO SUPERIORMENTE se non ha maggioranti $\Rightarrow \{$maggioranti di $A\} = \emptyset$
in tal caso $\nexists$ sup A, per abuso di linguaggio.
$\sup A = +\infty \iff A$ non è limitato superiormente

Analogamente se $\inf A = -\infty \iff A$ non è limitato inferiormente, cioè non ci sono minoranti di A. Es = $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$.

$A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\}$ $\quad 1 = \max A = \sup A \quad 0 = \inf A \nexists \min A$.

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ $\quad \sup A = \sqrt{2} \quad \inf A = -\sqrt{2} \quad \nexists \max A \quad \nexists \min A$.

TEOREMA DELLA COMPLETEZZA DI R

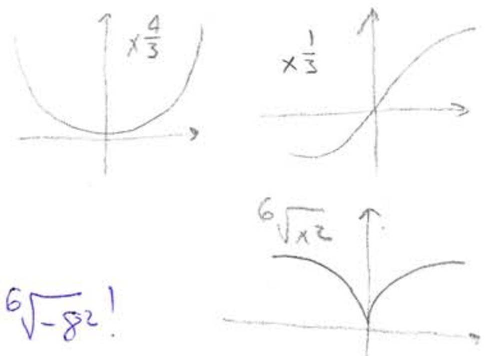
- Ogni sottoinsieme di $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato possiede estremo superiore $\sup A \in \mathbb{R}$.
- Ogni $A' \subset \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato possiede un estremo inferiore $\inf A \in \mathbb{R}$.

Si dice che R è un campo ordinato e completo, Q non lo è. Dal punto di vista geometrico la completezza corrisponde all'assioma di continuità della retta.
Siano A, B e C rette tali che:
1) $A \cup B$ = retta $\quad A \cap B = \emptyset$
2) $a < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$, allora esiste 1 solo elemento separatore.
$S \in$ Retta cioè $a < S \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

$A = \{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \sin n = \sin n' \iff n' - n = 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z} \iff k = 0$ cioè $n' = n$, infatti se $k \neq 0$ $\quad \pi = \frac{n'-n}{2k}$
impossibile perchè $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \quad 1 = \sup A \quad -1 = \inf A$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 278

Per particolari valori di $\alpha \in \mathbb{Q}$ le funzioni x^α si possono estendere a $\mathbb{R}$. $x^{\frac{m}{n}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con n dispari.



Se $x<0$ $\quad x^{\frac{m}{n}} \neq \sqrt[n]{x^m}$

$(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8^{\frac{1}{3}}) = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad$ NON! $\sqrt[6]{-8^2}$!

SUCCESSIONI E LIMITI

Una successione è una funzione $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ o $A \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$

Gli a_n si chiamano termini o elementi della successione (immagini di A).

ESEMPI: $a_n = n^2 = 0, 1, 4, 9 \ldots \qquad a_n = 2^n: 1, 2, 4, 8 \ldots$

$a_n = (-1)^n: 1, -1, 1, -1 \ldots \qquad a_n = \frac{1}{n}: n \geq 1$

$a_n = 10 \ (\forall n)$ SUCCESSIONE COSTANTE

$a_n = \sqrt[n]{2} = (n \geq 2) = \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2} \ldots \qquad a_n = \sqrt[n]{n} \ (n \geq 2) = \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4} \ldots$

Rappresentazione grafica di una successione a_n su $\mathbb{R}^2$.

Oppure possiamo rappresentare a_n su una retta reale.

- SUCCESSIONE PER RICORRENZA

Si assegna una formula ricorsiva più il valore del primo o dei primi 2÷3 termini, si possono determinare ricorsivamente gli a_n

1) SUCCESSIONE DI FIBONACCI

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \ldots$

Relazione con i binomiali del Triangolo di Tartaglia, si ottengono i fibonacci

1
1 — 1 1
1 — 1 2 1
2 — 1 3 3 1
3 — 1 4 6 4 1
5 — 1 5 10 10 5 1
8 — . . . . . .

22

- $a_n = n - 10\sqrt{n}$ è definitivamente positiva (non lo è sempre ma alcuni termini negativi, ad un certo punto n cresce ed è positivo.
- $a_n = \frac{5}{n} - \sqrt{n}$ è definitivamente negativa.
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ non è definitivamente negativa né positiva.

DEFINIZIONE DI LIMITE PER SUCCESSIONI INFINITESIMALI TENDONO A ZERO

Si dice a_n successione infinitesimale o che tende a zero per n che tende a infinito o che che ha limite $n \to +\infty$ $\quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si ha $|a_n| < \varepsilon$ definitivamente. Quindi

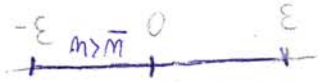
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in N : \forall n, \bar{n} \quad |a_n| < \varepsilon, \ -\varepsilon \leq a_n < \varepsilon$

Sarà $n = \bar{n}(\varepsilon)$, al diminuire di ε, $\bar{n}$ aumenterà

- INTORNO

Sulla retta euclidea ($\mathbb{R}$) $\quad |x - x_0| = d(x, x_0)$ distanza tra x, x_0.

Fissato $a_n \to 0$, abbiamo un intorno qualsiasi di 0, cioè un intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ dove tutti gli a_n cadono in quell'intorno $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a partire da un certo $\bar{n}+1$ in poi.



ESERCIZIO • $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Verifica $\varepsilon > 0 \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Ricordando che per definire un intorno serve questa regola $\boxed{[x] \leq x < [x]+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

basta prendere $\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ o qualunque $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad |a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$ come sopra.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 278

CONTRONOMINALE

Se a_n NON è limitata $\Rightarrow$ a_n non può essere convergente a un certo $\ell \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO

2^n non è limitata $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} 2^n$ non può essere n° $\ell \in \mathbb{R}$

1) $a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$ $\quad a_n = \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2} \dots$

Se $\frac{1}{n} \to 0$ allora forse anche $2^n \to 2^0 = 1$?

Verifica $\varepsilon > 0$ $|\sqrt[n]{2} - 1| < \varepsilon$ $\quad 1 - \varepsilon < 2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$

Sono sempre vere perché $\sqrt[n]{2} > 1$ $\forall n$ $\quad 2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \iff \log_2$

$\frac{1}{n} < \log_2(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$

Al diminuire di $\varepsilon \Rightarrow \bar{n} = \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$ n aumenterà

In modo analogo si verifica che $\forall a > 0$ vale $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

2) Se $a_n = k$ $\forall n$ (successivamente costante) $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = k$

Se $a_n \to \ell$ non è detto che a_n sia uguale a ℓ, ma a qualche valore di n.

ESEMPIO $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ però $a_n \neq 0$ $\forall n$

3) $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari perché } \sin(k\pi) = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se numero dispari } = 1, 5, 9, 13 \dots \\ -\frac{1}{n} & \text{se numero dispari } = 3, 7, 11, 15 \dots \end{cases}$

Si può verificare che $\lim a_n = 0$

4) $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad x = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots > 0$ $\quad a_n = x^{(n)} = b_0, b_1 b_2 \dots b_n$

Si verifica facilmente che $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x$

Infatti $|x^{(n)} - x| < \varepsilon$ $\quad x - x^{(n)} = 0,\underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ VOLTE}} b_{n+1} b_{n+2}$

È evidente che fissato $\varepsilon > 0$ prendendo n abbastanza grande ~~si può~~ si può rendere la differenza $x = x^{(n)}$ minore di ε.

24

- Chiameremo REGOLARI le successioni a_n che hanno limite ($n \to \infty$) finito, oppure $+\infty$ oppure $-\infty$.
- Chiameremo OSCILLANTI o non regolari quelle successioni a_n tali che $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$. $a_n = (-1)^n$, $(-2)^n$, $\sin(\frac{\pi}{2}n)$, $\sin(n)$

TEOREMI SUI LIMITI E CALCOLO DEI LIMITI

- Stabilire a priori l'esistenza ovvero del limite di una a_n,
- Calcolare esplicitamente il valore del limite.

SUCCESSIONE MONOTONA

- Strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$ — $a_n = n^2$
- crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ — $a_n: 1, 1, 2, 2 \ldots$
- Strettamente decrescente $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$ — $a_n = \frac{1}{n}$
- Decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

LIMITI DI SUCCESSIONI MONOTONE

1) Se a_n è crescente e limitata superiormente allora a_n converge a l dove $l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Se a_n è crescente ma non limitata superiormente allora $a_n \to +\infty$. Quindi in ogni caso si ha a_n crescente e regolare

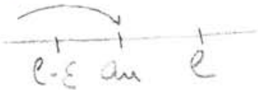
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{se } a_n \text{ è limitata superiormente} \\ +\infty & \text{se } a_n \text{ non è limitata superiormente} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

- 1° CASO a_n crescente e limitata superiormente $\sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, è evidente che $a_n \leq l < l + \varepsilon$ $\forall n$

l è il più piccolo dei maggioranti



$\Rightarrow l - \varepsilon$ non è un maggiorante di $\{a_n\} \Rightarrow \exists$ un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > l - \varepsilon$

Ma a_n crescente $\Rightarrow \forall n > \bar{n} \Rightarrow a_n \geq a_{\bar{n}} > l - \varepsilon$, abbiamo così trovato $\bar{n} \in \mathbb{N}$: $\forall n > \bar{n}$ vale $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

- 2° CASO a_n crescente ma non limitata superiormente $K > 0$

$\exists\, \bar{n}: a_{\bar{n}} > K$ a_n crescente $\Rightarrow n > \bar{n} \Rightarrow a_n \geq a_{\bar{n}} > K$

Abbiamo ottenuto $\forall K > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: n > \bar{n} \Rightarrow a_n > K$

Quante sono le permutazioni di A_n senza punti fissi? $\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right]$

$[[x]]$ è l'intero più vicino a x

$n = 4 \quad \left[\left[\frac{4!}{e}\right]\right] = [[8,829\ldots]] = 9$

Si dimostra che se $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$ allora vale e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)^{3^n} = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{\log n} = e$$

ALGEBRA DEI LIMITI

Se a_n e b_n sono convergenti, $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$ abbiamo i seguenti teoremi:

1) $a_n \mp b_n \to a \pm b \quad \lim_{n\to\infty}(a+b) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b \quad \lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$

3) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$ (se $b \neq 0$ e $b_n \neq 0 \ \forall n$)

4) $a_n^{b_n} \to a^b$ (se $a_n > 0$ e $a > 0 \ \forall n$)

Se a_n e/o b_n divergono a $\pm\infty$ il teorema si può estendere, ma rimangono alcune forme dette INDETERMINATE in cui nulla si può a priori concludere sul valore del limite

FORME DETERMINATE

- Si dimostra che se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to +\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to +\infty$ qualunque sia il valore di a: $a + \infty = +\infty \ \forall a \in \mathbb{R}$
- Si dimostra che se $a_n \to a \neq 0$ e $b_n \to +\infty$

$$\Rightarrow (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$a \cdot +\infty = (+\infty)$ col segno di a ($\mathrm{sgn}\, a$).

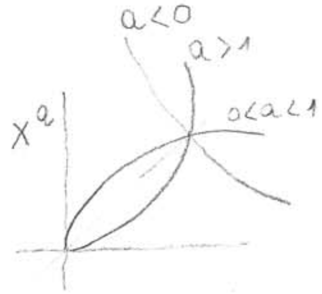
ESEMPI DI CALCOLO DEI LIMITI

1) $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \quad \text{Successione costante} \\ 0 & \text{se } |a|<1 \quad -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a=-1 \quad \nexists \text{ se } a<-1 \end{cases}$

Sia $0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a^n}>1 \quad a^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow a^n \to 0$

In generale se $|a|<1 \quad a\neq 0 \quad |a^n| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Ma se $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$



2) $n^2 = n \cdot n \longrightarrow (+\infty)(+\infty) = +\infty$

Sia $k \in N^+ \quad n^k \to +\infty$

$\frac{1}{n} = 0 \quad \frac{1}{n^k} = \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}}_{k \text{ VOLTE}} \to 0$

Sia n^a dove $a \in R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \\ 1 & \text{se } a=0 \end{cases}$

3) $a_n = n^2 - n^{\frac{3}{2}} \to [+\infty - -\infty]$ F I Forme indeterminate

$a_n = n^2 \cdot \left(1 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0}\right) = +\infty \cdot (1-0) = +\infty \cdot 1 = +\infty$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = [+\infty - \infty] = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = [+\infty - \infty] = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{n}}_{0}}+1\right]} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 278

FORME INDETERMINATE ESPONENZIALI

$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}$ $\boxed{1^{\pm\infty},\ 0^0,\ (+\infty)^0}$

Si calcola prima il limite dell'esponente:

1) $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$ se $a_n \to +\infty$ $\log(a_n) \to +\infty$

2) $\lim_{n\to\infty} \log \frac{1}{n} = -\log n \to -\infty$

Se $a_n \to 0^+$ $\lim_{n\to\infty} \log(a_n) = -\infty$ ovvero $\log(0^+) = -\infty$

3) CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE LOGARITMO:

Se a_n è una successione $a_n > 0$, $a_n \to a > 0$ $\log(a_n) \to \log(a)$

ESEMPIO

$a_n \to 1$ $\log a_n \to \log_1 = 0$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log e = 1}$

Se $a_n \to \pm\infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n \log\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = 1$

$1^{\pm\infty} = e^{+\infty \log 1} = e^{0(+\infty)}$

$0^0 = e^{0 \log(0^+)} = e^{0(-\infty)}$

$(+\infty)^0 = e^{0 \log(+\infty)} = e^{0(+\infty)}$

Risoluzione delle forme indeterminate

Analogamente le forme determinate

$0^{\pm\infty} = e^{+\infty \log(0^+)} = e^{+\infty(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$

$(+\infty)^{-\infty} = e^{-\infty \log(+\infty)} = e^{-\infty(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$

ESEMPI

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} \cdot 5\sqrt{n^n}}{2^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{e^{\sqrt{n}\log 3} \cdot e^{\frac{n}{5}\log n}}{e^{n \log 2}} =$

$= \lim e^{\sqrt{n}\log 3} \cdot e^{\frac{n}{5}\log n} \cdot e^{-n\log 2} =$

$= \lim e^{\sqrt{n}\log 3 + \frac{n}{5}\log n - n\log 2} =$

$= \lim_{n\to\infty} e^{n\left[\frac{1}{5}\log n - \log 2 + \underbrace{\frac{\log 3}{\sqrt{n}}}_{0}\right]} = e^{+\infty\cdot(+\infty)} = +\infty$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

1) Se $a_n \to l > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente
Se $a_n \to l < 0$ allora $a_n < 0$ definitivamente

2) Se $a_n > 0$ ($0 \geq$) e $a_n \to l \Rightarrow l \geq 0$
Se $a_n < 0$ ($0 \leq$) e $a_n \to l \Rightarrow l \leq 0$

DIMOSTRAZIONE

1) $a_n \to l > 0$, fissato $\varepsilon > 0$ allora esiste $\bar{n} : n > \bar{n}$
$\Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, basta prendere $\varepsilon : l - \varepsilon > 0$

ESEMPIO $\varepsilon = \frac{l}{2}$ $\quad 0 < \frac{l}{2} < a_n < \frac{3}{2} l \quad \forall n \; a_n > 0$

2) Se $a_n > 0$ $a_n \to l \Rightarrow l > 0$
Per assurdo se fosse $l < 0$ allora per il punto 1), seconda parte, dovrebbe essere $a_n < 0$ definitivamente. FALSO!
Quindi $a_n > 0$ passo al limite $l \geq 0$; passando al limite una disuguaglianza forte diventa debole.

COROLLARIO: TEOREMA DEL CONFRONTO I

1) Se $a_n > b_n$ ($0 \geq$) $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$ $\quad a \geq b$
2) Se $a_n > b_n$ ($0 \geq$) e se $b_n \to +\infty$ allora anche $a \to +\infty$
Se $a_n > b_n$ ($0 \geq$) e se $a_n \to -\infty$ allora anche $b_n \to -\infty$

ESEMPI

1) $\lim_{n \to \infty} n^2(3 + (-1)^n)$ $\quad 3 + (-1)^n \geq 2 \Rightarrow \overset{\to \infty}{n^2}(3 + (-1)^n) \geq \overset{\to \infty}{2n} \Rightarrow +\infty$

2) $\lim (n + \underbrace{n^2 \sin^2 n}_{\geq 0})$ $\quad n + n^2 \sin^2 n \geq \underset{\to +\infty}{n} \to +\infty$

TEOREMA (del doppio confronto o dei 2 carabinieri)

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$, se $a_n \to l$ e $c_n \to l$ (con $l \in \mathbb{R}$) anche $b_n \to l$

$\boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^5+3n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5} \cdot \sqrt[n]{2+\frac{3}{n^3}}$

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(\sqrt[n]{n})^5}_{\to 1} \underbrace{\left(2+\frac{3}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} = 1$

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \forall a>1, \forall \alpha>0}$ $\quad \frac{a^n}{n^\alpha} = e^{n\log a - \alpha\log n} =$

$e^{n[\log a - \alpha \frac{\log n}{n}]} = e^{+\infty} \to +\infty$ $\quad \left(\frac{\log n}{n} \to 0\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(3/2)^n}{n^{10^9}} = +\infty$ Vince l'esponenziale

CONFRONTO TRA INFINITI

1) ORDINE DI INFINITO

a_n si dice un INFINITO se $a_n \to \pm\infty$
Siano a_n e b_n due infiniti e per confrontarli consideriamo il limite del rapporto $\frac{a_n}{b_n}$ che si presenta nella forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \begin{cases} 0, \text{ CASO 1} \\ k\neq 0, k\in\mathbb{R} \text{ CASO 2} \\ \pm\infty, \text{ CASO 3} \\ \nexists, \text{ CASO 4} \end{cases}$$

1) a_n è un infinito di ordine inferiore a b_n;
2) a_n è un infinito dello stesso ordine di b_n;
3) a_n è un infinito di ordine superiore a b_n;
4) a_n e b_n non confrontabili.

Per misurare l'ordine del caso 2, fissiamo l'infinito campione la successione $b_n = n$ e rapportiamo un infinito arbitrario a_n ad una certa potenza del campione n^α, $\alpha>0$

2) PARTE PRINCIPALE (di a_n rispetto a_n)

Diciamo che a_n è infinito di ordine α rispetto a n (per $n\to\infty$) se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = k \neq 0$ $(k\in\mathbb{R})$ e in tal caso diciamo che kn^α è una parte principale di a_n rispetto a_n.

$e^{3x^4}-1 \sim 3x^4 \quad k=3 \quad \alpha=4$

$a_n = \sqrt{n+1} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}} \sim n^{\frac{1}{2}} \quad \alpha = \frac{1}{2}$

$a_n = \sqrt{3n^2+n} = n\sqrt{3+\frac{1}{n}} \sim \sqrt{3}\, n \quad K=1 \quad \alpha = \sqrt{3}$

"la parte principale di una somma NON è la somma delle parti principali."

ESERCIZIO $a_n = 2n^2+n+7 \quad b_n = 6n+1 \sim 6 \quad a_n + b_n \sim 2n^2$

Problema: quando vi è una cancellazione di parti principali in tutta l'espressione o in alcune parti

$a_n = 2n^2+n+1 \sim 2n^2 \qquad b_n = 3n-2n^2+7 \sim -2n^2$

È sbagliato dire che $a_n+b_n = 2n^2-2n^2 = 0$ NO!

↳ Si studia la funzione per ricavare la vera parte principale.

$a_n+b_n = 2n^2+n+1+3n-2n^2+7 = 4n+8 \sim 4n$

ESERCIZIO

$a_n = \sqrt{n^2+n^{3/2}} - n = [+\infty, -\infty] \qquad \sqrt{n^2+n^{\frac{3}{2}}} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^{1/2}}} \sim n$

perché $\frac{1}{n^{1/2}} \to 0$ quindi $a_n = \sim n-n = 0$ RAZIONALIZZIAMO!

↳ $a_n = \dfrac{n^2+n^{\frac{3}{2}}-n^2}{\sqrt{n^2+n^{3/2}}+n} = \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{n\cdot\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^{1/2}}}\right]} = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}}$

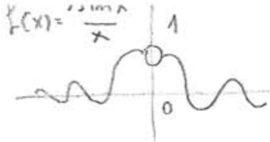
dove $a_n \sim \frac{1}{2}\, n^{\frac{1}{2}} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0 \qquad 0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot n} = \dfrac{1}{n}\cdot\underbrace{\dfrac{2}{n}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\dfrac{3}{n}}_{\leq 1}\cdots\underbrace{\dfrac{n-1}{n}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\dfrac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \dfrac{1}{n} \to 0$

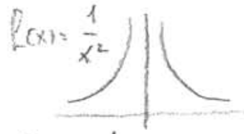
Per induzione si dimostra facilmente, con la formula di STIRLING $n! \geq e^n \cdot e^{-n}$

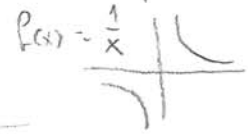
$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, l'esclusione viene portata perché $f(x)$ potrebbe anche non essere definita nel punto x_0 dove si vuole calcolare il limite



Anche se $f(x)$ è definita nel punto x_0, il valore $f(x_0)$ non coincide, in generale, col valore l del limite, perché il limite "segue" il grafico G_f vicino a x_0

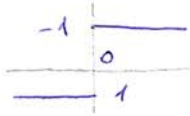




ESEMPI

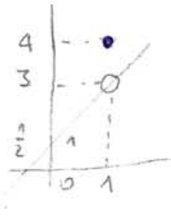
$f(x) = |\operatorname{sgn} x|$

$f(x) = \operatorname{sgn} x$



Qui il $\lim_{x \to 0} f(x)$ sarà $1 \neq f(0) = 0$

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to 1} f(x) = 3 \neq f(1) = 4$



Anche se f è definita in x_0, il valore $f(x_0)$ non deve "intervenire" nella verifica del limite.

DEFINIZIONE DI LIMITE

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ e sia $l \in \mathbb{R}^*$ e sia $f(x)$ una funzione definita almeno in un intorno di x_0, escluso x_0 stesso, si dice che $f(x)$ tende a l, o che ha limite per x che tende a x_0 e si scrive

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{o} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l}$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ intorno U di l, $\exists$ un intorno V di x_0 tale che $\forall x \in V \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, si ha che $f(x) \in U$.

Questa definizione 4 casi possibili in:

1° CASO $\quad x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

2° CASO $\quad x_0 \in \mathbb{R}$, $l = +\infty, -\infty$

3° CASO $\quad x_0 = +\infty, -\infty$, $l \in \mathbb{R}$

4° CASO $\quad x_0 = +\infty, -\infty$ e $l = +\infty, -\infty$

1° CASO $\quad x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

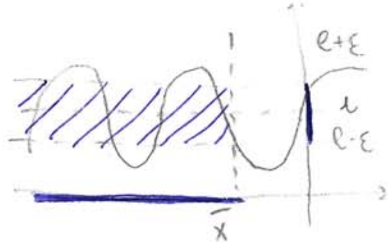
si ha che $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

cioè $\quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 278

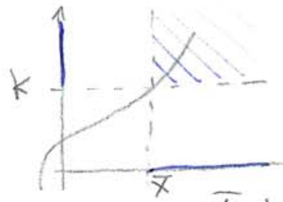
• $x_0 = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$ è analogo
$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : x < \bar{x}$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



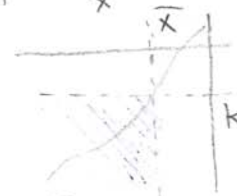
Nel caso $x_0 = -\infty$ diremo che $y = l$ è un asintoto orizzontale sinistro per $f(x)$.

4° CASO

• $x_0 = +\infty$, $l = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K > 0$
$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > K$

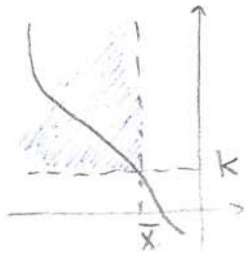


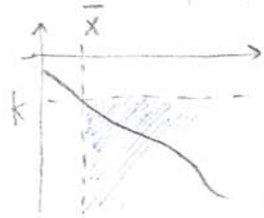
• $x_0 = -\infty$, $l = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K < 0$
$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : x < \bar{x} \Rightarrow f(x) < K$



• $x_0 = -\infty$, $l = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,
$\iff \forall \cancel{K} > 0\ \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : x < \bar{x} \Rightarrow f(x) > K$

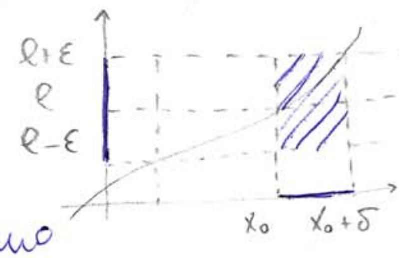
• $x_0 = +\infty$, $l = -\infty$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
$\iff \forall K < 0\ \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : x > \bar{x} \Rightarrow f(x) < K$





LIMITI LATERALI

Di $f(x)$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$
Basta sostituire nella definizione generale "esiste un intorno V di x_0" con "esiste un intorno destro di x_0" oppure "esiste un intorno sinistro di x_0" dove:



1) Un intorno destro di x_0 è un intervallo di x_0 $(x_0, x_0+\delta)$ con $\delta > 0$
2) Un intorno sinistro di x_0 è un intervallo di x_0 $(x_0-\delta, x_0)$ con $\delta < 0$

• VARI CASI

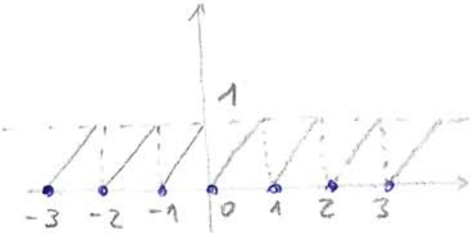
1° CASO: $x_0 \in l$ $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0^+} = f(x) = l \iff \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta$
$|f(x) - l| < \varepsilon$ (funzione distinta da $l - \varepsilon$), è immediato che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

Sono uguali entrambi col valore l.

8) MANTISSA DI X $M(x)$

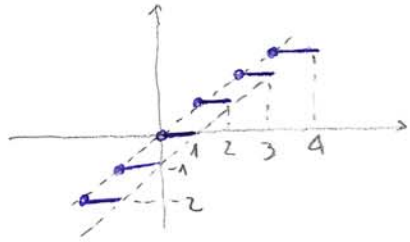
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} M(x)=0 \\ \lim_{x\to 0^-} M(x)=1\end{array}\right] \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} M(x)$$



$x_0 = m \in \mathbb{Z}$ $\lim_{x\to m^+} M(x)=0$ $\lim_{x\to m^-} M(x)=1 \Rightarrow \nexists$ limite

9) PARTE INTERA DI X $[x]$

$x-1 < [x] \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

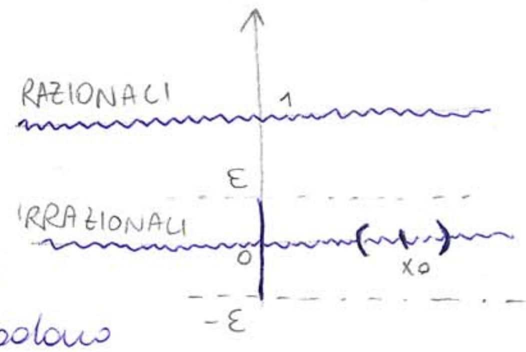


$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} [x]=0 \\ \lim_{x\to 0^-} [x]=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} [x]$$

$\lim_{x\to m^+} [x]=0$ $\lim_{x\to m^-} [x]= m-1 \Rightarrow \nexists$ limite

10) FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$



- Non può essere $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ infatti in ogni intorno di x_0 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ cadono sempre dei razionali $x\in\mathbb{Q} \to f(x)=1$
- Non può essere $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ né $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)=x_0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$

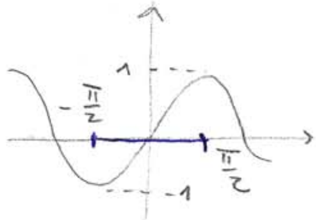
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 278

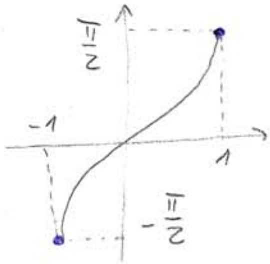
• FUNZIONI ELEMENTARI

1) SENO E ARCOSENO

$$\arcsin x = \left(\sin x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} :$$

$$: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$



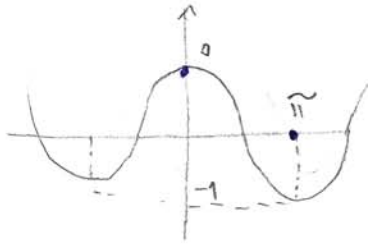


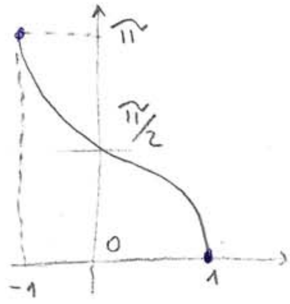
2) SENO E ARCOCOSENO

$$\arccos = \left(\cos x|_{[0,\pi]}\right)^{-1} :$$

$$: [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

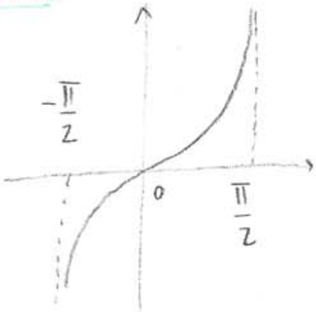


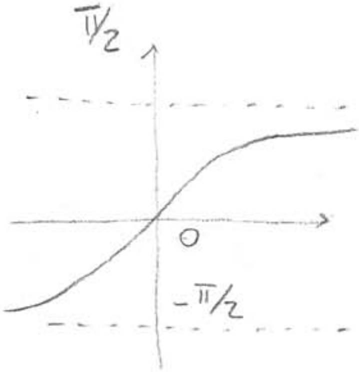


3) ARCOTANGENTE E TANGENTE

$$\arctan x \left(\tan x|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} :$$

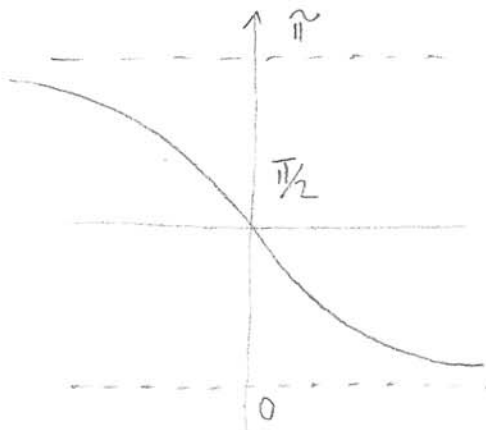
$$: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

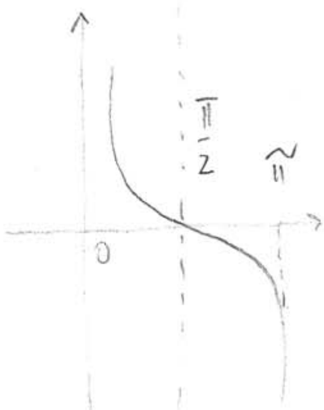




4) COTANGENTE E ARCOCOTANGENTE

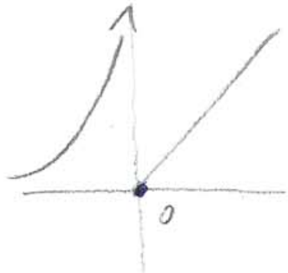
$$\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$





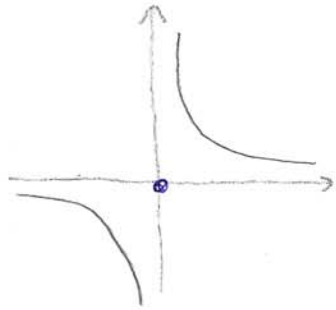
2) DISCONTINUITÀ DI 2ª SPECIE

Tutti gli altri tipi di discontinuità si chiamano di 2ª specie. Esempi



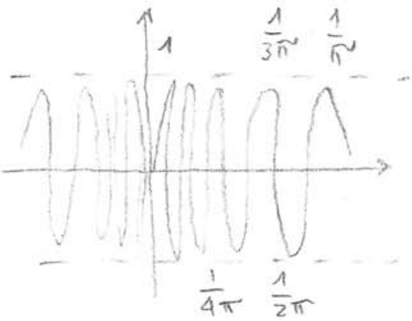
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x<0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ ha una discontinuità di 2ª specie in $x=0$ perché.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$



- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$

Può anche succedere $\nexists \lim_{x \to 0^\pm} f(x)$



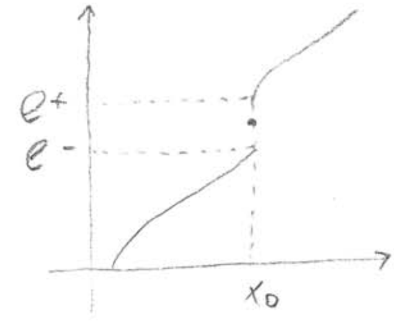
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ discontinuità di 2° specie $x=0$.

$f(x) = 0 \quad \forall x = \frac{1}{n\pi} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

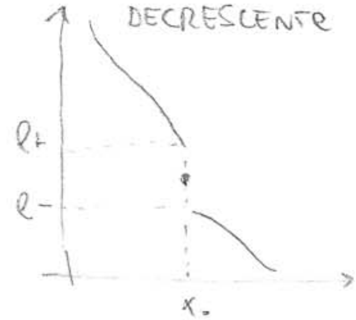
$\nexists \lim_{x \to 0^\pm} \sin\frac{1}{x}$ f oscilla infinite volte in un intorno di $x_0 = 0$

- Infine f = funzione di DIRICHLET ha una discontinuità di 2ª specie in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

• LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE



Sia $f: I \to \mathbb{R}$ monotona crescente nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 interno I. Allora esistono finiti i limiti laterali di $f(x)$ per $x \to x_0^\pm$ e vale:



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x < x_0\} & \text{CRESCENTE} \\ \inf\{f(x) : x < x_0\} & \text{DECRESCENTE} \end{cases}$$

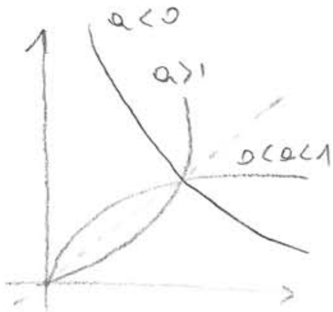
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x > x_0\} & \text{CRESCENTE} \\ \sup\{f(x) : x > x_0\} & \text{DECRESCENTE} \end{cases}$$

36

3- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ $n \in N^+$

4- $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$



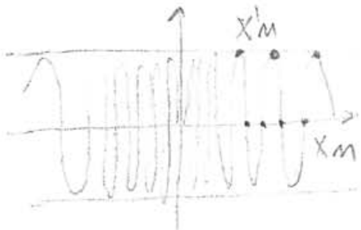
RELAZIONE TRA LIMITI DI FUNZIONI E SUCCESSIONI

Sia $x_0 \in R^*$, $l \in R^*$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall$ successione x_n di punti del dominio di f tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, con $x_n \neq x_0\ \forall n$, si ha che la successione $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Se $x \to x_0^{\pm}$ si ha un analogo enunciato.

Per dimostrare che $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ (né finito, né $+\infty$, né $-\infty$) è sufficiente trovare due successioni x_n, x'_n tali che $x_n \to x_0$, $x'_n \to x_0$ ma $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = l_1$. $\lim_{x\to\infty} f(x'_n) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$

ESEMPIO



$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $\nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ $f(x_n) = \sin n\pi = 0\ \forall n \to 0$

$x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$ $f(x'_n) = 1\ \forall n \to 1$ $1 \neq 0$

TEOREMI

1) UNICITÀ DEL LIMITE

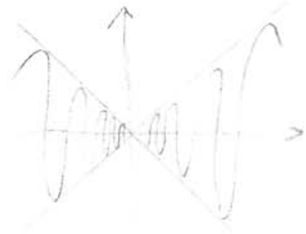
Se $\exists\, l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ $l, x_0 \in R^* \to l$ è unico

2) LIMITATEZZA LOCALE

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in R$, allora $f(x)$ è limitata almeno in un intorno di x_0.

2) $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ LIMITATA

$0 \leq |x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| = 0 \leq |x| |\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$



3) $\lim_{x \to +\infty} x^6 (2 + \cos x) = +\infty$ $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \quad x^6 \leq x^6 (2 + \cos x) \leq 3 x^6 \to +\infty$

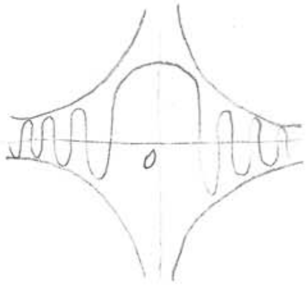
4) $\lim_{x \to +\infty} (x^6 (1 + \cos x)) = \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad 0 \leq \cos x \leq 2 \to \nexists$ limite

$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \quad f(x_n) = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^6 \cdot 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

$x'_n = \pi + 2n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \quad f(x'_n) = 0 \; \forall n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\Rightarrow \nexists$ limite

5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0$ (${\frac{1}{x} \to 0}$, $\operatorname{sen} x$ LIMITATA)



TEOREMI DI ALGEBRA DEI LIMITI

1) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ allora:

- $f(x) \pm g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1 \pm l_2$;
- $c f(x) \longrightarrow c \cdot l_1$, $d\, g(x) \to d\, l_2$
  $c f(x) + d\, g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} c\, l_1 + d\, l_2$;
- $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1 \cdot l_2$;
- $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} = \frac{l_1}{l_2}$ $\quad l_2 \neq 0$ e $g(x) \neq 0$
- $(f(x))^{g(x)} = l_1^{l_2}$ dove $l_1 > 0$ e $f(x) > 0$

2) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nel punto $x_0 \Rightarrow$ anche $f(x) \pm g(x)$, $c f(x)$, $c f(x) + d g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, e $(f(x))^{g(x)}$ sono continue in x_0.

• Se $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ l'unico caso che può presentarsi ancora è quando:

$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x_0) \cdot Q(x_0)$ risolvibile con Ruffini.

$\Rightarrow P(x) = (x-x_0)^p \, \tilde{P}(x_0)$, $Q(x) = (x-x_0)^q \, \tilde{Q}(x_0)$ con $\tilde{P}(x_0) \neq 0$ e $\tilde{Q}(x_0) \neq 0$ faccio il limite semplificando le potenze di $(x-x_0)$.

ESEMPIO

• $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+4x+2x)}{\cancel{x-2}} = 12$$

• $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^3+x^2+12x-12} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-2)}(x^2-3)} = 3$$

3) Regola per calcolare un limite con cui compare una somma di potenze di x:

• Se $x \to +\infty$, si raccoglie la potenza di x con esponente più alto, quindi diminuisca.

• Se $x \to 0$, si raccoglie la potenza di x più basso

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{\pi}+3x+x^{2/3}}{x^2+2x^e+3\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{2/3}\left(1+\cancel{3x^{\frac{1}{3}}}+\cancel{x^{\pi-\frac{2}{3}}}\right)}{x^{1/3}\left(3+\cancel{2x^{e-\frac{1}{3}}}+\cancel{x^{\frac{5}{3}}}\right)} = x^{\frac{1}{3}} = 0$$

4) LIMITI DI FUNZIONI IRRAZIONALI

• Se ci sono radici quadrate si usa $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$

• Se ci sono radici cubiche si usa $(A-B)(A^2+B^2+AB) = A^3-B^3$

ESEMPIO

1- $$\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \frac{x(\cancel{x}+1-\cancel{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{\cancel{x}^{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} = +\infty$$

2- $$\lim_{x \to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+x}\right) = [-\infty+\infty] \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x^2-x}{x-\sqrt{x^2+x}} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \text{con } x \to -\infty \Rightarrow x<0 = |x| = -x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]} = -\frac{1}{2}$$

3- $$\lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{A} - \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{B}\right) = [+\infty-\infty]$$

Moltiplico e divido per A^2+B^2+AB e ottengo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

LIMITI CON ESPONENZIALI

1) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

DIMOSTRAZIONE $\alpha \neq 0$ $\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha = e^\alpha$, se $\alpha = 0$ $e^0 = 1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$

Sapendo che $\log_a t = \frac{\log t}{\log a}$ riprendo il limite $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e$ faccio il logaritmo $\lim_{x\to\pm\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log e = 1$ $\quad \frac{1}{x} = t$ $\quad \begin{matrix} x\to\pm\infty \\ t\to 0\end{matrix}$ $\quad \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$

1° $e^x-1 = t$ $\quad e^x = 1+t$ $\quad x = \log(1+t)$ $\quad \begin{matrix} x\to 0 \\ t\to 0\end{matrix}$ $\quad \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)} = 1$

2° $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ riporta ad e $\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\log a}-1}{x\cdot\log a}\right)\cdot\log a$

$x\log a = t$ $\quad \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{1}\right)\cdot\log a = \log a$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{k}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}}_{1}\right]\alpha\cdot\left(\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{1}\right) = 1\cdot\alpha = \boxed{\alpha}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall\alpha>0$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \forall\alpha,\beta>0$

Dimostrazione fa riferimento alle successioni

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall a>1, \alpha>0$

$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{e^{\alpha\log x}} = e^{x-\alpha\log x} = e^{x\left(1-\alpha\underbrace{\frac{\log x}{x}}_{0}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{+\infty} = +\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 278

EQUIVALENTE

$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

"$f(x)$ è equivalente a $g(x)$ per $x \to x_0$"

ESEMPI

$\sin x \sim x \ (x \to 0) \qquad \sqrt{x} + x \sim \sqrt{x} \ (x \to 0^+), \sim x \ (x \to +\infty)$

$f \sim g \ (x \to x_0) \iff f - g = \underset{x \to x_0}{o}(g) \iff f = g + \underset{x \to x_0}{o}(g)$

ESEMPI DI O-PICCOLO

$x^2 = \underset{x \to x_0}{o}(x) \qquad x = \underset{x \to x_0}{o}(x^2) \qquad x^3 = \underset{x \to +\infty}{o}(2^x) \qquad \log x = \underset{x \to +\infty}{o}(x)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{\underset{x \to x_0}{o}(g(x))}{g(x)} = 0$ in particolare $\underset{x \to x_0}{o}(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ INFINITESIMO

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \ell \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) - \ell = 0 \iff f(x) - \ell = \underset{x \to x_0}{o}(1)$

Quindi $f(x) = \ell + \underset{x \to x_0}{o}(1)$

1) Se $f = \underset{x \to x_0}{o}\, g(x)$ e $f, g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ allora f è un infinitesimo di ordine superiore a g;

2) Se $f = \underset{x \to x_0}{o}\, g(x)$ e $f, g \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$ allora f è un infinito di ordine inferiore a g.

LIMITI FONDAMENTALI CON O-PICCOLO

Gli SVILUPPI ACCORCIATI delle funzioni elementari sono equivalenti ai limiti fondamentali.

1) $\sin x \sim x \ (x \to 0) \iff \sin x = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

2) $\log(1+x) \sim x \ (x \to 0) \iff \log(1+x) = x + \underset{x \to x_0}{o}(x)$

3) $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0) \iff e^x - 1 = x + \underset{x \to 0}{o}(x) = e^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (x \to 0) \iff (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + \underset{x \to 0}{o}(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

5) $\operatorname{tg} x \sim x \ (x \to 0) \iff \operatorname{tg} x = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

6) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \ (x \to 0) \iff 1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2) =$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + \underset{x \to x_0}{o}\, f(x)}{g(x) + \underset{x \to x_0}{o}\, g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(f)}{(f)}}{1 + \frac{o(g)}{(g)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ALGEBRA DEGLI o-PICCOLO (Regole pratiche)

$o(f) = -o(f) = k\,o(f) = o(kf)$ $\qquad o(f) \pm o(f) = o(f)$

$o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ infatti $\dfrac{o(f)\,o(g)}{f \cdot g} = \dfrac{o(f)}{f} \cdot \dfrac{o(g)}{g} \underset{x \to 0}{=} 0 \cdot 0 = 0$

$f\,o(g) = o(f\,g)$ $\qquad \dfrac{o(f)}{g} = o\left(\dfrac{f}{g}\right)$ $\qquad \dfrac{o(f)}{f} = o(1)$

$(o(f))^\alpha = o(f^\alpha)$ $\qquad (f + o(f))^\alpha = f^\alpha + o(f^\alpha)$

$o(o(f)) = o(f)$ $\qquad o(f + o(f)) = o(f)$

$$\frac{o(f + o(f))}{f} = \frac{o(f + o(f))}{f + o(f)} \cdot \frac{o(f) + f}{f} = 0 \cdot 1 = 0$$

Se $x \to 0$ o $x \to +\infty$ si ha:

$o(x) \pm o(x) = o(x)$ $\qquad -o(x) = o(x) = 2\,o(x) = o(2x)$

$\dfrac{o(x)}{x} = o(1)$ $\qquad o(x) \cdot O(x) = o(x^2) = x\,o(x)$

$o(x)\,o(x^2) = o(x^3)$

$(o(x))^2 = o(x^2)$

$(x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$

$o(o(x)) = o(x)$

$o(x + o(x)) = o(x)$

Se $x \to 0$: $\quad x^2 = \underset{x \to 0}{o}(x)$

$x^\alpha = \underset{x \to 0}{o}(x^\beta)$ se $\alpha > \beta$

$o(x) + o(x^2) = o(x)$

$o(x^2) = o(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[27]{x}\left(\sqrt[27]{x+1}-\sqrt[27]{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{27}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cancel{1}+\frac{1}{27}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\cancel{1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{27}+x\, o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{27}$$

9) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\cdot\log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to\infty} e^{3x\log\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{3x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{3+\cancel{o(1)}^{0}} = e^3$$

10) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x^2+x}{x-1}}}{e^x} \quad \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

ERRORE DA NON FARE!

$$\frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} \sim x = 1 \qquad e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \not\sim e^x$$

In generale $f\sim g \not\Rightarrow e^f \sim e^g$

$$x^2+x\ (x\to+\infty) \sim x^2 \qquad e^{x^2+x} = e^{x^2}\cdot e^x \not\sim e^{x^2}$$

È errato scrivere $e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \sim e^x$ e concludere $\lim \frac{e^x}{e^x}=1$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+x}{x-1}-x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\cancel{x^2}+x\cancel{-x^2}+x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$$

$f\sim g \iff f = g+o(g) \qquad e^f = e^{g+o(g)} \not\sim e^g \qquad \lim \dfrac{e^{g+o(g)}}{e^g}$

$\lim \dfrac{e^{g+o(g)}}{e^g}$ non bisogna semplificarli.

$$f(x) = x^2+x \sim x^2\ (x\to+\infty) = x^2+o(x^2)$$

$$e^f = e^{x^2+o(x^2)} \not\sim e^{x^2} \qquad \frac{e^{x^2+o(x^2)}}{e^{x^2}} = e^{o(x^2)}\ {}_{x\to+\infty}$$

Questo quindi non si può concludere a priori.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 278

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{\cos x} - x + x^3}{\log(1-x^3) - \sin(2x)^3}$

Calcolo le pp per $x \to 0$ del numeratore e denominatore.

- $f(x) = x\sqrt{\cos x} - x + x^3 = x\sqrt{\underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}_{t}} - x + x^3$

$= x\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) + o\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right] - x + x^3 =$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o(x)}$ $\quad f(x) = \cancel{x} - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3) \cancel{-x} + x^3 =$

$= \frac{3}{4}x^3 + o(x^3) = \frac{3}{4}x^3$ pp con $\alpha = 3$ e $k = \frac{3}{4}$

- $g(x) = \log(1-x^3) - \sin(2x)^3 = -x^3 + o(x^3) - 2x^3 + o(x^3) =$

$= -3x^3 + o(x^3) \sim -3x^3$ pp con $\alpha = 3$ e $k = -3$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{3}{4}x^3 + o(x^3)}{-3x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(2x+1) - \log 3}{e^{x-1} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad x-1 = t,\ x = 1+t;\ x\to 1\ \ t \to 0$:

$\lim_{t\to 0} \dfrac{\log(2+2t+1) - \log 3}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\log(3+2t) - \log 3}{e^t - 1} =$

$\lim_{t\to 0} \dfrac{\log\left(1 + \frac{2}{3}t\right)}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\frac{2}{3}t + o(t)}{t + o(t)} = \frac{2}{3}$

6) Calcolare le pp per $x \to \frac{\pi}{4}$ di $f(x) = \sin(2x) - 1$

Porre $x - \frac{\pi}{4} = t$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + t$; $x \to \frac{\pi}{4}$, $t \to 0$

$\boxed{pp = k\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^\alpha}$ $\quad \sin(2x) - 1 = \sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right] - 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}\right) - 1 = \cos(2t) - 1$ $\quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x}$

$= \cancel{1} - \frac{1}{2}(2t)^2 + o(t^2) \cancel{-1} = -2t^2 + o(t^2) = -2t^2 =$

$= -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$

$f(x) = (\sin(2x) - 1) \sim -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$ con $\alpha = 2$, $k = -2$

• $f(x) = x + \sin x$ $\quad \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \nexists \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \sin x$ $\nexists$ asintoto obliquo

CALCOLO ASINTOTI OBLIQUI

1) Si va a vedere se f è un infinito $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$

2) Si cerca di vedere se vale la seconda formula e si calcolano i limiti della terza formula

ESEMPI

1) $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$

$f(x) = x + \frac{\pi}{2} + \underset{x\to+\infty}{o}(1) \Rightarrow y = x + \frac{\pi}{2}$ asintoto destro per $f(x)$

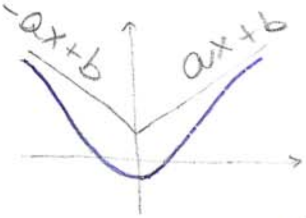
Analogamente $y = x - \frac{\pi}{2}$ asintoto obliquo sinistro per $f(x)$.

2) $f(x) = 1 + \log(1+e^{2x}) = 1 + \log\left[e^{2x}\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right] =$

$= 1 + 2x + \log\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = 2x + 1 + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$ $\qquad (\log 1 = 0)$

$\Rightarrow y = 2x + 1$ Asintoto obliquo destro per $f(x)$.

$\Rightarrow y = 1$ Asintoto obliquo sinistro per $f(x)$.

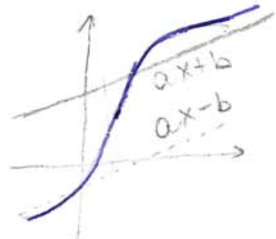


• FUNZIONI PARI

Se $f(-x) = f(x)$ e $(y = ax+b \,,\; y = -ax+b)$

$y = ax+b$ asintoto obliquo destro

$y = -ax+b$ asintoto obliquo sinistro



• FUNZIONE DISPARI

Se $f(-x) = -f(x)$ è una funzione dispari

$y = ax+b$ è asintoto obliquo destro

$y = ax-b$ è asintoto obliquo sinistro

3) DETERMINARE DOMINIO E ASINTOTI:

$f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$ $\qquad x^2 + x \geq 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -1$

$\text{Dom} f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

1- $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x\right)$ $\quad x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$

Sapendo che $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$