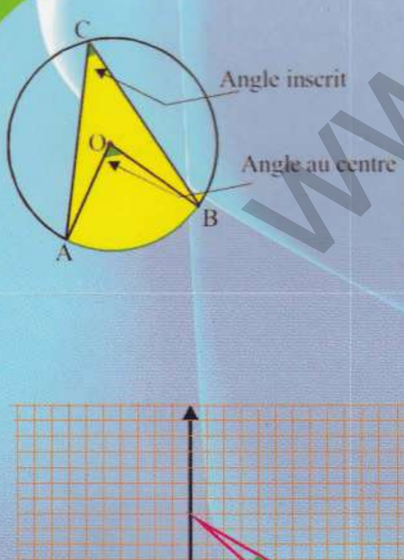
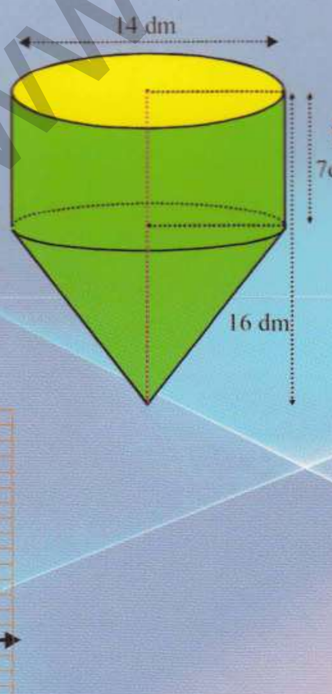
République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Éducation Nationale
Institut Pédagogigue National

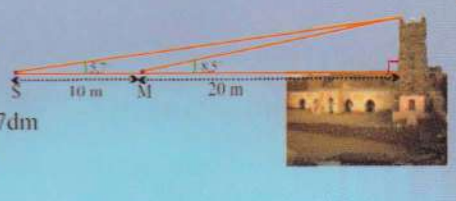
Honneur - Fraternité - Justice

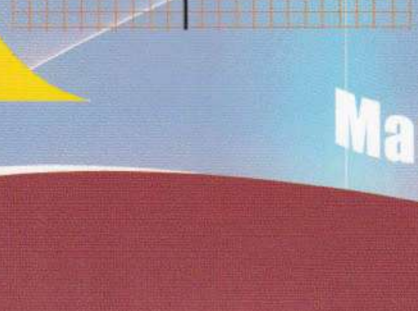
MATHÉMATIQUES

4ème Année Secondaire









Manuel de l'élève

Avant – propos

Chers collègues professeurs,
Chers élèves

Voici le manuel de 4ème AS conçu et élaboré selon l'approche par les compétences et en étroite continuation sur le plan pédagogique et didactique avec les manuels des trois années précédentes.
Nous avons cherché à produire un manuel, qui répond à la fois à un double objectif :

- Fournir un support didactique plus efficace pour les élèves et pour les professeurs.
- Traduire davantage les objectifs de la réforme relative à cette discipline.

Nous avons essayé de mettre en exergue les pratiques de classe en choisissant une structure de chapitre permettant à la fois de confronter les élèves à des situations de la vie de tous les jours et de chercher à trouver les solutions adéquates.
C'est, dans cet esprit, que l'élève apprend dans un premier temps à acquérir les capacités nécessaires et dans un deuxième temps à intégrer ses compétences et les mettre à l'épreuve pour résoudre des situations problèmes.

Dans cet esprit, et pour mieux répondre aux orientations des programmes nationaux, le manuel propose des activités documentaires en rapport avec le chapitre des statistiques pour introduire les concepts de l'éducation en matière de population et de faire passer le message qui en découle.
Les activités documentaires dans d'autres chapitres, visent à mettre en exergue la dimension historique d'une notion ou d'un concept étudié, c'est le cas des équations et de la trigonométrie.

Le plan général du manuel est identique aux précédents, comme l'indique la structure d'un chapitre et les choix pédagogiques opérés.
Le manuel comprend 13 chapitres, 5 modules d'intégration dont le dernier est axé sur l'objectif terminal d'intégration (OTI) et deux sujets d'entraînement au BEPC.

Chaque chapitre est ainsi structuré :

- **''Je me souviens''** : permet un bon démarrage de l'apprentissage en vérifiant les pré-recquis de l'élève.
- **''Je vais plus loin''** : 3 à 5 activités représentant l'enjeu de l'apprentissage visé.
- **''Je retiens''** : récapitulatif donnant l'essentiel des connaissances indispensables.
- **''Je sais faire ''** : items de réinvestissement d'application et de contrôle.
- **''Je m'exerce''** : série d'exercices variés permettant de mettre les capacités de l'élève à l'exercice.

Après chaque trois unités, vous trouverez un module d'intégration, qui propose

- quatre situations d'intégration.
- deux situations d'évaluation.

Le dernier de ces modules propose des situations destinées à l'évaluation de l'objectif terminal d'intégration.

Tout en souhaitant, que ce manuel soit un auxiliaire utile et précieux pour les professeurs enseignant en 4ème AS et aux élèves de cette classe, la section mathématique de l'IPN reste ouverte à toutes remarques ou suggestions de nature à améliorer les prochaines éditions.

Les auteurs

SOMMAIRE

1 Nombres réels1

Je me souviens

1. On donne les nombres suivants : - 4 ; 0 ; 0,0067 ; -3 ; $\frac{2}{3}$; -83,5 ; $\frac{1,1}{0,2}$; π ; $\frac{4}{7}$; 3^2 ; 5

Parmi les nombres ci-dessus donne ceux qui sont :

- des entiers naturels.
- des entiers relatifs.
- des nombres rationnels.

en justifiant vos réponses.

2. Place dans un repère (O ; I) d'unité 1 cm, les points suivants : A(-4) ; B(-2) ; C(-,5) ; D(3) ; E(3,7)

3. Donne des encadrements de $\frac{11}{12}$ au dixième près, au centième près et au millième près.

Je vais plus loin

Activité 1 :

Découverte de nouveaux nombres

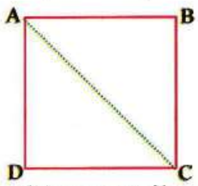
A- Au cours d'une séance de révision, deux élèves de la $4^{ème}$AS donnent les affirmations suivantes :

Saïdou : les nombres entiers sont des décimaux ?

Fatimata : dit que les nombres décimaux sont des nombres rationnels ?

Ces affirmations sont-elles correctes ? si oui justifie-les ?

B- La discussion semble intéressée tous les élèves lorsqu'il s'agit de trouver la diagonale d'un carré de côté 1 (carré ABCD).



1) Calcule l'aire du carré de deux manières :

- utilise l'aire des triangles
- utilise l'aire d'un carré

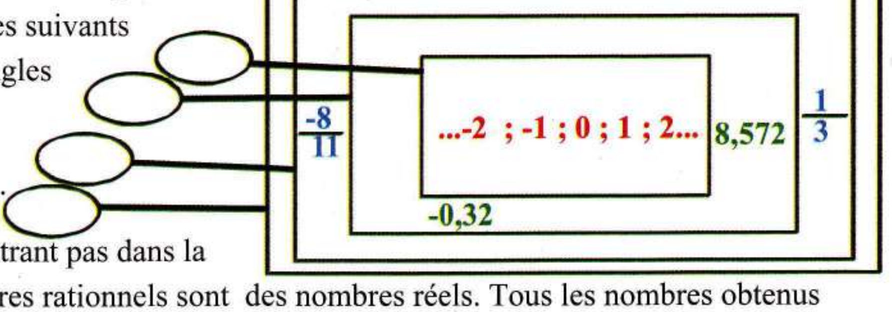
2.) En déduis la longueur de la diagonale. Le nombre obtenu est-il rationnel ?

''le nombre dont le carré est A (A > 0) est appelé racine carrée de A, noté $\sqrt{A}$ ***''***

3) Reproduis et complète le schéma ci-dessous, en donnant pour chaque rectangle le nom de l'ensemble correspondant.

4) Place les nombres suivants dans leurs rectangles convenables :

$\frac{-18}{375}$; $\sqrt{2}$; π ; $\frac{25}{5}$.



Les nombres ne rentrant pas dans la catégorie des nombres rationnels sont des nombres réels. Tous les nombres obtenus dans ce schéma sont appelés des nombres réels notés IR.

5) Range dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\frac{-18}{375}$; $\sqrt{2}$; π ; $\frac{25}{5}$

Activité 2 :

Encadrement

1) Trouve le côté d'un carré d'aire 9. ce nombre est-il un réel ?

2) Trouve la valeur exacte de $\frac{7}{5}$ sous forme décimal

3) Peut-on trouver des valeurs exactes des nombres : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$, si non donne un encadrement de chacun deux par des entiers consécutifs.

4) a) Donne un encadrement de $\frac{4}{7}$ et de $\sqrt{2}$; au dixième près, au centième près et au millième près.

b) Comment appelle-t-on la valeur située à gauche de l'encadrement et celle située à droite de l'encadrement ?

c) Fais dans chacun des cas la différence entre les valeurs trouvées en a).

d) Parmi les valeurs trouvées, laquelle est la plus proche de $\frac{4}{7}$?

Activité 3 :

Intervalles

Lors d'une compétition sportive de saut en longueur, deux élèves sont appelés à vérifier les longueurs de sauts.

Pour que le public puisse voir, ils mettent une planche où sont marquées des distances.

1. Au premiers essais, voici les résultats obtenus en m : 2,85 ; 2,5 ; 2,7 ; 2,9 ; 3 ; 3,4 ; 3,20 ; 3,5 ; 3,8 ; 3,9.

a. Sans utiliser le décamètre, uniquement la planche, donne les résultats des élèves qui ont dépassé 2m sans atteindre 3m.

y a-t-il d'autres possibilités, si oui peut-on les dénombrer ?

b. Trace une droite graduée sur ton cahier, puis colorie en bleu cette partie.

(on prendra] ; [crochets ouverts ou o,) pour indiquer que le nombre n'est pas coloré. On notera les valeurs possibles les réels dépassant 2 sans atteindre 3.

Pour un intervalle noté] 2 ; 3 [(les deux nombres aux bornes sont exclus).

c. Donne les résultats des élèves qui ont sauté 3 m sans atteindre 4 m.

Représente sur un repère d'unité 1 cm pour un mètre, avec une couleur rouge, puis donne l'intervalle correspondant.

(on prendra [ou]) pour indiquer que la partie est colorée ou non.)

d. Que représente les réels x tels que : $x \in]2 ; 3]$; $x \in [2 ; 3]$ sous forme d'un encadrement.

2. Trouve la représentation sur une droite en la coloriant en orange, un réel $x \geq 4$, qui correspond à un saut supérieur ou égal à 4.

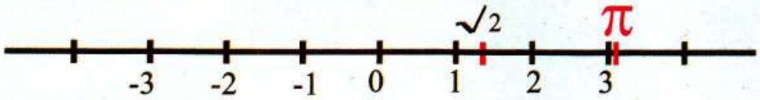
Colorie en vert l'ensemble des points d'abscisse inférieur à 2.

Je retiens

1. Nombre réel

Les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux et les fractions sont des nombres réels.
En plus de ces nombres, il existe d'autres nombres du type: π ; $\sqrt{2}$ …
L'ensemble de tous ces nombres est noté IR.

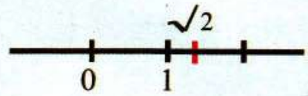
L'ensemble des réels nous permet de nous repérer sur toute une droite graduée.



2. Ordre dans IR.

Ordonner deux nombres réels peut se faire soit :

- en les repérant sur une droite graduée.
  par exemple : $\sqrt{2} > 1$



- en déterminant le signe de leur différence.
  Exemple : 2,74 et 2,23 on a 2,74 – 2,23 = 0,51 (positif), donc 2,74 > 2,23.
- en observant leurs écritures décimales approchées ou non.
  Exemple : $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7} \approx 0,57$ et $\frac{2}{3} \approx 0,66$; donc $\frac{4}{7} < \frac{2}{3}$

3. Encadrement d'un nombre réel

On peut encadrer un nombre réel par :

- **des entiers** :

Exemple : $\frac{4}{7}$ est comprise entre 0 et 1 ; donc $0 < \frac{4}{7} < 1$

$-\frac{4}{7}$ est comprise entre 0 et -1 ; donc $-1 < -\frac{4}{7} < 0$

- **des décimaux**

d'ordre 1 : **Exemple :** $3,1 < \pi < 3,2$.

valeur approchée d'ordre 1 de π par défaut

valeur approchée d'ordre 1 de π par excès

d'ordre 2 **Exemple :** $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

valeur approchée d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ par défaut

valeur approchée d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ par excès

d'ordre 3 **Exemple** : $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$;

donc les deux valeurs donnent un encadrement au millième près de $\sqrt{5}$

4. Arrondi d'un réel

Au lieu d'encadrer un nombre par deux décimaux d'ordre n, on peut seulement écrire une des deux bornes de l'encadrement comme valeur approchée- on dit qu'on a arrondi.
Pour arrondir à l'ordre n, on calcule le $(n + 1)^{ème}$ chiffre après la virgule

- Si ce chiffre est supérieur ou égal à 5, on arrondit en prenant la borne par excès,
- S'il est inférieur à 5, on arrondit en prenant la borne par défaut.

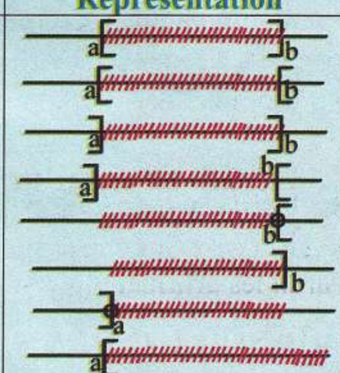
Exemple : $\frac{4}{7}$ a pour arrondi d'ordre 2 le nombre 0,57.

$\frac{4}{7}$ a pour arrondi d'ordre 1 le nombre 0,6

5. Intervalles et encadrement

a , b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

- Les nombres a et b sont les bornes de chacun des intervalles suivants : [a ; b] ; [a ; b[;]a ; b[;]a ; b].
- La différence entre a et b est l'amplitude de ces intervalles.
- A un élément x de ces intervalles, on peut associer un encadrement (voir le tableau) :

Ecriture	Lecture	Encadrement	Représentation
[a ; b]	Intervalle fermé a, b	$a \leq x \leq b$	
[a ; b [	Intervalle fermé en a et ouvert en b.	$a \leq x < b$	
] a ; b]	Intervalle ouvert en a et fermé en b	$a < x \leq b$	
] a ; b [	Intervalle ouvert en a et en b.	$a < x < b$	
] ← ; b [	Intervalle des nombres inférieur strictement à b.	$x < b$	
] ← ; b]	Intervalle des nombres plus petit ou égal à b.	$x \leq b$	
] a ; → [	Intervalle des nombres plus grand que a.	$x > a$	
[a ; → [	Intervalle des nombres plus grand ou égal à a.	$x \geqslant a$	

Je sais faire

1. Identifier un nombre réel

Exercice 1: Parmi les nombres π ; $\frac{10}{3}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{22}{7}$; $\sqrt{3}$; 4 ; $-\pi$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-8}{4}$; 0 ; -4.

- Quels sont ceux qui sont des entiers naturels, des entiers relatifs, des décimaux, des rationnels, des réels.
- Range-les dans l'ordre croissant

2. Encadrer un réel par deux décimaux d'ordre 1 ; 2 ; 3

Exercice 2: Donne un encadrement des nombres réels : $\frac{22}{7}$; $\sqrt{3}$ par deux décimaux d'ordre 1, 2 et 3

a) Donne dans chacun des cas les valeurs approchées.
b) Donne l'arrondi

- d'ordre 3 de $\frac{19}{7}$
- d'ordre 4 de $\frac{3}{11}$
- d'ordre 2 de $\frac{1}{3}$

3. Utiliser des intervalles

Exercice 3 : Sur une droite graduée, colorie les intervalles [-1 ; 2] ; [5 ; →[;]← ; -4]
Parmi les affirmations ci-dessous, quelles sont celles qui sont vraies ?

$4 \in [3\,;5]$; $\frac{2}{3} \in [2\,;3]$; $\pi \in [3{,}14\,;3{,}15]$; $\frac{3}{10} \in]0{,}1\,;0{,}3[$; $\frac{3}{2} \in]-\frac{2}{3}\,;2[$; $-3{,}05 \in [-3{,}005\,;0]$

Associe à chaque élément x d'un intervalle un encadrement :
$x \in [-3\,;-2[$; $x \in]2\,;3]$; $x \in]\leftarrow;5]$; $x \in]0{,}35\,;0{,}37]$.

CORRECTION

1. $4 ; 0$ sont des entiers naturels

$-4 ; \frac{-8}{4} ; 0 ; 4$ sont des entiers relatifs

$-4 ; \frac{-8}{4} ; 0 ; 4 ; \frac{-5}{2}$ sont des décimaux

$\frac{10}{3} ; \frac{22}{7} \; -4 ; \frac{-5}{2} ; \frac{-8}{4} ; 0 ; \frac{12}{14} ; 4$ sont des nombres rationnels

L'ensemble des nombres donnés sont tous des réels.
Ils sont ordonnés comme suit :

$-4 ; -\pi ; \frac{-5}{2} ; \frac{-8}{4} ; 0 ; \frac{12}{14} ; \sqrt{3} ; \frac{22}{7} ; \pi ; \frac{10}{3} ; 4$

2. Encadrement de $\frac{22}{7}$

$3,1 < \frac{22}{7} < 3,2$ ordre 1

$3,14 < \frac{22}{7} < 3,15$ ordre 2

$3,142 < \frac{22}{7} < 3,143$ ordre 3

Valeur approchée :

$\frac{22}{7}$ a pour valeur approchée par défaut 3,1 et par excès 3,2.

$\frac{22}{7}$ a pour valeur approchée par défaut 3,14 et par excès 3,15 au centième près.

$\frac{22}{7}$ a pour valeur approchée par défaut 3,142 et par excès 3, 143 au millième près.

''Les arrondis'' d'ordre 3 de $\frac{19}{7}$ est 2,714 ; d'ordre 4 de $\frac{3}{11}$ est 0,2727 ; d'ordre 2 de $\frac{1}{3}$ est 0,33

3. 1) voici la représentation demandée :

$4 \in [3 ; 5]$ vraie ; $\frac{2}{3} \in [2 ;3]$ faux ;

$\pi \in [3,14 ;3,15]$ vraie ; $\frac{3}{10} \in]0,1 ;0,3[$ faux ;

$\frac{3}{2} \in]\frac{-2}{3} ; 2[$ vraie ; $-3,05 \in [-3,005 ; 0]$ faux.

$x \in [-3 ; -2[$ correspond à $-3 \leq x < -2$,
$x \in]2 ; 3]$ correspond à $2 < x \leq 3$,
$x \in]0,35 ; 0,37]$ correspond à $0,35 < x \leq 0,37$,
$x \in]\leftarrow; 5]$; correspond à $x \leq 5$

Je m'exerce

1. Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes en justifiant si possible.

a) $\frac{-3}{11} = -0{,}27$

b) 0,27 est l'arrondi d'ordre 2 de $\frac{3}{11}$

c) 0,27 est une valeur approchée par défaut de $\frac{3}{2}$

d) 0,272 est l'arrondi d'ordre 3 de $\frac{3}{11}$

e) 0,273 est une valeur approchée par excès de $\frac{3}{11}$.

f) $\pi = \frac{22}{7}$.

g) $]\leftarrow ; 7[$ est l'ensemble des réels strictement inférieur à 7.

2. Range dans l'ordre décroissant

π ; $\frac{10}{3}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{13}{4}$; $1-\pi$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-7}{3}$

3. Compare au nombre $\frac{7}{16}$ chacun des nombres ci-contre : 1 ; $\frac{7}{12}$; $\frac{17}{32}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{17}$.

4. Donne l'arrondi

d'ordre 2 de $\frac{17}{9}$; d'ordre 4 de $\frac{11}{3}$;

d'ordre 1 de $\frac{10}{3}$.

5. a) Cite deux nombres compris entre π et $\frac{22}{7}$.

b) Cite deux nombres compris entre $\frac{-13}{3}$ et $\frac{-108}{25}$.

c) Cite deux nombres compris entre 1 et 2.

6. Donne un encadrement par deux décimaux de $-\frac{21}{13}$ d'amplitude 10^{-2} ; 10^{-1} ; 10^{-3}.

Donne la valeur approchée de $\frac{13}{21}$ par excès au 10^{-2} près.

Donne la valeur approchée de $\frac{13}{7}$ par défaut à 10^{-3} près.

7. Donne l'amplitude dans chacun des intervalles :

$[-3 ; -2]$; $[-31{,}75 ; -30{,}92]$; $[2{,}05 ; 2{,}5[$; $]-\frac{2}{3} ; 2[$; $]0{,}2 ; 0{,}21]$;

8. Trace la droite graduée ci-dessous dans ton cahier.

Place les points suivants A(0,07) ; B(-0,18) ; C(0,13) ; D(-0,05) ; E(0,165) ; F(-0,035)

9. a) Trace une droite d graduée en cm.
b) Hachure l'intervalle $[-2 ; 1]$; l'intervalle $[5 ; \rightarrow[$; l'intervalle $]\leftarrow ; -3]$

10. Sur une droite graduée, hachure ce qui n'est pas l'intervalle $]\leftarrow ; 3]$ et ce qui n'est pas $[-2 ; \rightarrow[$.
Quel intervalle représente la partie non hachurée de la droite ?

11. Donne l'ensemble des nombres réels qui vérifient en même temps
$x \in [-4 ; \rightarrow[$; $x \in]\leftarrow ; 3[$; $x \in [2 ; 5]$.
Donne la solution sous forme d'intervalle puis d'encadrement.

12. On donne $A =]\leftarrow ; -1]$ et $B =]0 ; \rightarrow[$
Ecris deux intervalles dont aucun élément n'appartient ni à A ni à B.
Un élève à trouvé l'intervalle $]-1 ; 0]$ est-ce exact ?

13. Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :
$]-3 ; 1[$; $[-2{,}5 ; 4[$; $[5 ; \rightarrow[$; $]\leftarrow ; -2[$; $[-4 ; -1[$.

14. Ecris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :
$x \leq -2$; $x > 3{,}5$; $-4 < x < 6$; $-2 < x < 2$; $5{,}1 \leq x$.
$x > 1$; $x < \frac{1}{2}$ et $x \geq -2$. $x < -1$; $-7 < x \leq 5$.

15. Traduis à l'aide d'inégalité :
$x \in]0 ; \rightarrow [$; $x \in]-4 ; 5 [$; $x \in]-3,5 ; \rightarrow [$;
$x \in [-10 ; 10]$; $x \in]-2 ; 4 [$; $x \in]3,4 ; 7]$;
$x \in]\leftarrow ; -9]$; $x \in]\leftarrow ; 4,1]$; $x \in]80 ; \rightarrow [$.

16. Donne six nombres de chacun des intervalles :
]-1 ; 2[;] 4,28 ; 4,3] ;]-5,1 ;-5[;]-0,5 ; 0,5[.

17. Encadre $\sqrt{143}$ par deux nombres entiers consécutifs.

18. Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles :
[-2 ; 2] ; [1,7 ; -1,2] ;]-3,13 ; 3,17[;
]-2,134 ; -2,128[.

18. Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles :
[-2 ; 2] ; [1,7 ; -1,2] ;]-3,13 ; 3,17[;
]-2,134 ; -2,128[.

19. Compare les nombres réels suivants :

a) $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{41}$; $\frac{-1}{51}$ et $\frac{-1}{60}$; $\frac{-6,31}{22}$ et $\frac{17}{13}$

b) $\frac{18}{21}$ et $\frac{21}{20}$; $\frac{1993}{1994}$ et $\frac{2001}{2000}$; $\frac{-19}{20}$ et $\frac{-31}{30}$; $\frac{-205}{206}$ et $-\frac{1307}{1306}$.

20. En utilisant la calculatrice, trouve l'encadrement des nombres ci-dessous par deux nombres décimaux d'ordre 2, consécutifs.
$\sqrt{14}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{24}$.

- Donne des valeurs approchée par excès au centième près de $\sqrt{14}$; $\sqrt{17}$.
- Donne des valeurs approchées par défaut au millième près de $\sqrt{19}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{24}$.

2 Nombres réels 2

Je me souviens

1. Encadre un réel par deux décimaux :

- Encadre les réels suivants par deux entiers consécutifs :

$1 + \sqrt{3}$; $\pi - \sqrt{2}$; $2\pi - \sqrt{5}$.

- Encadre les réels donnés ci-dessus par deux décimaux d'ordre 2 ; d'ordre 3 ; d'ordre 4.

2. Reconnaître la valeur absolue d'un décimal.

a) Parmi les nombres décimaux relatifs suivants quels sont les nombres opposés :

$-0,4$; $3,1$; $\frac{20}{5}$; $-3,1$; $2,4$; $4,2$; $-0,5$; $5,0$.

Ces nombres ont même ....

b) Complète : $|-3,2| = \ldots$; $|3,2| = \ldots$

$\left|\frac{-22}{7}\right| = \ldots$; $\left|\frac{9}{5}\right| =$

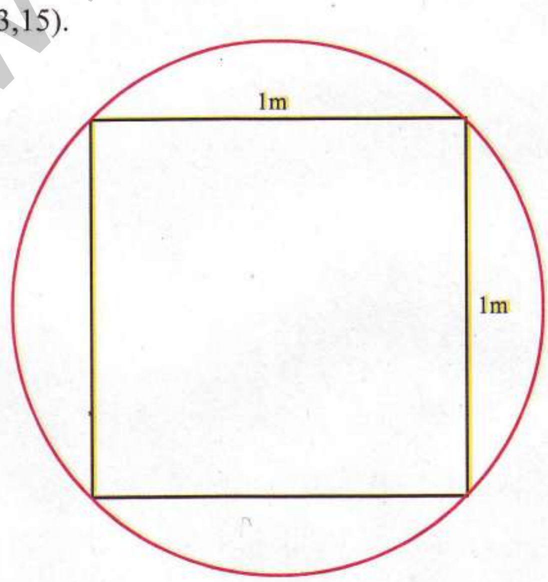
Je vais plus loin

Activité 1 :

Sidi un menuisier métallique prépare deux sortes de grilles pour deux fenêtres différentes. La première a pour dimension 1 m × 1 m ; la deuxième 2 m × 1 m.
Il charge son fils Ali élève de 4ème AS de lui estimer la longueur du métal nécessaire pour construire les diagonales de chacune des deux grilles.
Aide Ali à accomplir cette tâche.
(On donne $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$; $2,23 < \sqrt{5} < 2,42$)

Activité 2 :

Donne un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la longueur d'un cercle circonscrit à un carré de côté 1m.
(On donne $3,14 < \pi < 3,15$).



Activité 3 :

7 petits cubes juxtaposés occupent une longueur de 4m.

a) Calcule le volume d'un petit cube.
b) Calcule sa surface latérale et sa surface totale.

Activité 4 :

Lors d'une séance de mathématiques en $4^{ème}$ AS, le professeur a donné l'expression $|2x+3|$; il a chargé un groupe d'élèves de calculer cette expression pour des réels inférieurs à -1,5 ; un autre groupe de calculer la même expression pour des réels supérieurs à -1,5.

Les travaux des deux groupes sont consignés dans le tableau suivant :

	Groupe 1					**Groupe 2**				
x	-3	-2,5	-2	-1,7	-1,6	-1,4	-1,2	-1	0	1
2x + 3										
$\|2x+3\|$	3					0,2				

a) Complète les calculs

b) Compare les résultats du 1^{er} groupe avec 2x + 3, que remarques-tu ?

c) Compare les résultats du $2^{ème}$ groupe avec 2x + 3, que remarques-tu ?

Je retiens

1. Opérations sur des réels définis par des encadrements

Règles : a, b et x étant des nombres quelconques :

Si $a < x < b$ alors $-b < -x < -a$

a, b et x étant des nombres strictement positifs :

Si $a < x < b$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$.

Calcul d'un encadrement

• **d'une somme** $a < x < b$ $\underline{c < y < d}$ $a + c < x + y < b + d$ • **d'une différence** $a < x < b$ $c < y < d$ d'où $a < x < b$ $\underline{-d < -y < -c}$ $a - d < x - y < b - c$	• **d'un produit** $a < x < b$ $\underline{c < y < d}$ $a c < x . y < bd$ • **d'un quotient** a, b positifs ; c et d strictement positifs $a < x < b$ $c < y < d$ d'où $a < x < b$ $\frac{1}{d} < \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$ ---------------- $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$

2. Puissance relative d'un réel.

Exemples :

- $(\frac{4}{7})^3 = \frac{64}{343}$
- $(\frac{2}{3})^{-4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$
- $(\sqrt{5})^4 = \sqrt{625} = 25$
- $(\pi)^{-5} = \frac{1}{\pi^5}$ (on utilise la touche x^y de la calculatrice)

3. Ecrire une expression sans valeur absolue :

L'expression $|ax + b|$ s'écrit

- $ax + b$; pour $x > \frac{-b}{a}$; $a > 0$
- $-(ax + b)$; pour $x < \frac{-b}{a}$; $a > 0$
- $(ax + b)$; pour $x < \frac{-b}{a}$; $a < 0$
- $-(ax + b)$; pour $x > \frac{-b}{a}$; $a < 0$

Je sais faire

1. Trouver un encadrement d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Exercice 1: x et y sont des réels tels que : $-0,2 < x < 1,3$; $-2,1 < y < 2,5$

Donne un encadrement des nombres suivants :

1) $x + y$ 2) $x - y$ 3) $x.y$ 4) $\frac{x}{y}$

5) $3x - 2y$ 6) $2x + 3y$ 7) $6xy$ 8) $\frac{2x}{3y}$

2. Calculer la puissance entière relative d'un réel

Exercice 2: Calcule :

a) $(\sqrt{2})^9 =$

b) $(\sqrt{7})^{-3} =$

c) $(\frac{\pi}{5})^4 =$

d) $(\sqrt{11}\pi)^{-5}$

3. Ecrire sans valeur absolue des expressions

Exercice 3 : Ecris sans valeur absolue les expressions :

a) $|5x - 2|$

b) $|-3x + 7|$

c) $|-2x - 5|$

d) $|7x + 3|$

Table des carrés des nombres de 0 à 100

nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré
1	1	11	121	21	441	31	961	41	1681
2	4	12	144	22	484	32	1024	42	1764
3	9	13	169	23	529	33	1089	43	1849
4	16	14	196	24	576	34	1156	44	1936
5	25	15	225	25	625	35	1225	45	2025
6	36	16	256	26	676	36	1296	46	2116
7	49	17	289	27	729	37	1369	47	2209
8	64	18	324	28	784	38	1444	48	2304
9	81	19	361	29	841	39	1521	49	2401
10	100	20	400	30	900	40	1600	50	2500

nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré
51	2601	61	3721	71	5041	81	6561	91	8281
52	2704	62	3844	72	5184	82	6724	92	8464
53	2809	63	3969	73	5329	83	6889	93	8649
54	2916	64	4096	74	5476	84	7056	94	8836
55	3025	65	4225	75	5625	85	7225	95	9025
56	3136	66	4356	76	5776	86	7396	96	9216
57	3249	67	4489	77	5929	87	7569	97	9409
58	3364	68	4624	78	6084	88	7744	98	9604
59	3481	69	4761	79	6241	89	7921	99	9801
60	3600	70	4900	80	6400	90	8100	100	10000

CORRECTION

1. 1) $-2,3 < x + y < 3,8$; 2) $-2,7 < x - y < 0,8$; 3) $4,2 < xy < 3,25$; 4) $\frac{2}{25} < \frac{x}{y} < \frac{13}{21}$;

5) $-4,4 < 3x - 2y < 8,1$; 6) $-5,9 < 2x + 3y < 10,1$; 7) $2,52 < 6xy < 19,5$;
8) on distingue deux cas :

- $-0,2 < x < 1,3$ et $-2,1 < y < 0$

$\Rightarrow -0,4 < 2x < 2,6$ et $-6,3 < 3y < 0$, d'où $\frac{1}{3y} < \frac{-1}{6,3}$, d'où $\frac{2x}{3y} < \frac{-2,6}{6,3}$; $\frac{-0,4}{6,3} < \frac{2x}{3y}$

donc $\frac{-0,4}{6,3} < \frac{2x}{3y} < \frac{-2,6}{6,3} \rightarrow 1$

- $-0,2 < x < 1,3$ et $0 < y < 2,5$

$\Rightarrow -0,4 < 2x < 2,6$ et $0 < 3y < 7,5$; d'où $\frac{1}{7,5} < \frac{1}{3y}$; $\frac{-0,4}{7,5} < \frac{2x}{3y}$; $\frac{2x}{3y} < \frac{2,6}{7,5}$

donc $\frac{-0,4}{7,5} < \frac{2x}{3y} < \frac{2,6}{7,5} \rightarrow 2$.

De 1 et 2 $\frac{-4}{75} < \frac{2x}{3y} < \frac{4}{63}$

2. a) $(\sqrt{2})^9 = \sqrt{512} = 16\sqrt{2}$; b) $(\sqrt{7})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt{7})^3} = \frac{1}{\sqrt{343}}$; c) $(\frac{\pi}{\sqrt{5}})^4 = \frac{\pi^4}{(\sqrt{5})^4} = \frac{\pi^4}{5^2}$

d) $(\sqrt{11}\pi)^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{11}\,\pi)^5} = \frac{1}{\pi^5\sqrt{161051}}$

3.

$|5x - 2|$
- $5x - 2$ pour $x > \frac{2}{5}$
- $2 - 5x$ pour $x < \frac{2}{5}$

$|-3x + 7|$
- $-3x + 7$ pour $x < \frac{7}{3}$
- $3x - 7$ pour $x > \frac{7}{3}$

$|-2 - 5x|$
- $-2 - 5x$ pour $x < \frac{-2}{5}$
- $2 + 5x$ pour $x > \frac{-2}{5}$

$|7x + 3|$
- $7x + 3$ pour $x > \frac{-3}{7}$
- $-7x - 3$ pour $x < \frac{-3}{7}$

Je m'exerce

Intervalles

1. Représente sur un même axe les intervalles $[-4\,;-2]$, $[-3\,;0]$ et $[-\sqrt{8};\sqrt{5}]$.
Hachure la partie commune à ces trois intervalles.

2. Ecris sou forme d'intervalles les ensembles de nombres qui vérifient les inégalités suivantes :
$-7 \leq x \leq \sqrt{5}$; $-2 < x \leq \sqrt{8}$; $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$, $0 < x < 3$.
Donne les amplitudes de ces intervalles.

3. Traduis par une double inégalité chacune des relations d'appartenance suivantes :
$x \in [-4\,;-1]$, $[\sqrt{3}\,;2[$, $x \in]-3\,;\frac{5}{\sqrt{2}}-2]$,
$x \in [0\,;1[$, $x \in [-3\,;0[$.

4. Détermine le milieu des intervalles :
$[-5\,;1]$, $[-\frac{3}{2}\,;\frac{7}{2}[$, $]\sqrt{2}\,;\sqrt{5}\,]$; $]\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Comparer des inverses, des carrés et des racines carrés.

5. Calcule $(5\sqrt{3})^2$ et 10^2. Compare ensuite $5\sqrt{3}$ et 10, puis $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3}}$.

6. Compare $(2\sqrt{3})^2$ et $(3\sqrt{2})^2$. Compare ensuite $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$, puis $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

7. On a $2 < \sqrt{5} < 3$. Montre que $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$.
Trouve deux entiers consécutifs a et b tels que :
$a < \frac{1}{\sqrt{5}-1} < b$.

Encadrer une somme et une différence

8. $\sqrt{80} + \sqrt{30}$; $\sqrt{80} - \sqrt{30}$.

Encadrer un produit et un quotient

9. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{35} \times \sqrt{82}$; $(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})$.

10. Valeur absolue d'un nombre réel.
Quels sont les nombres qui ont respectivement 2 ; 5 ; $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{8}$ pour valeur absolue?

11. Calcule $1 + |-3|$; $5 - |-4|$; $|-3| - |-2|$;
$3 - \frac{1}{|-5|}$; $|-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + 3|$.

12. Trouve un nombre x tel que : $|x| - 3 = 5$.

Exercices de recherches et problèmes

13. L'aire d'un disque de rayon R est égale à $32{,}36\ m^2$. On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
Donne un encadrement de R avec 4 chiffres décimaux, en utilisant la table des carrés.
Déduis-en un encadrement de R avec deux chiffres décimaux.

14. On veut construire un réservoir cylindrique de 2 250 litres de capacité et de 75 cm de hauteur. On appelle r le rayon du réservoir.
Donne un encadrement de r^2.
A l'aide de la table des carrés, déduis-en la valeur de r à 1 cm près. On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

15. Donne un encadrement de $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 5\sqrt{2}$

Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

16. Soit $x = \sqrt{37+12\sqrt{7}}$ et $y = \sqrt{37-12\sqrt{7}}$.
Calcule $(3+2\sqrt{7})^2$ et $(3-2\sqrt{7})^2$, puis simplifie x et y. Calcule x + y et x - y.
Calcule des valeurs approchées de x + y et de x – y avec deux décimales sachant que :
$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$.

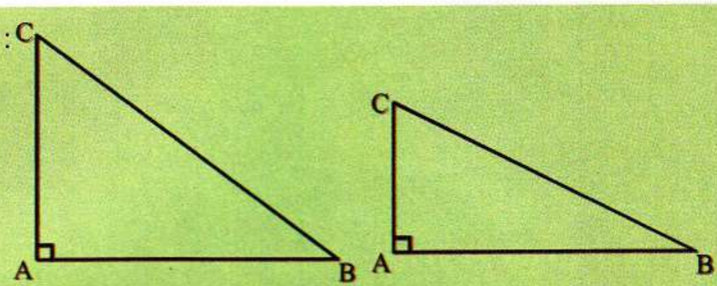
3 Radicaux

Je me souviens

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :
AB = 4cm ; AC = 3 cm.

- Calcule l'aire de ce triangle.
- Trouve la mesure du côté BC.

- Reprends le même travail avec les mesures : AB = 8 cm et AC = 6 cm.

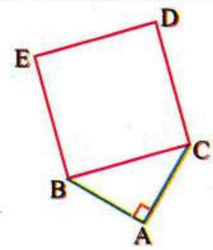


Je vais plus loin

Activité 1 :

Je sais construire un carré dont l'aire est 4 cm ; 9 cm ; 25 cm …
Mon frère étant élève en $5^{ème}$ année sait construire un carré dont l'aire est n'importe quel nombre réel positif.
A titre d'exemple il m'a proposé la démarche suivante afin de construire un carré dont l'aire est 2 cm^2 :

- Construis un triangle ABC rectangle isocèle en A, de côté 1 cm, puis le carré BCDE de côté [BC] extérieur au triangle ABC.
- Démontre que l'aire du carré BCDE est égale à 2 cm^2. Tire une conclusion.



Activité 2 :

Lors d'un exercice fait en classe, trois élèves cherchent à déterminer le côté d'un carré dont l'aire est donnée. A la place de ces élèves fais le travail.

Diallo	Sidi	Aicha
$x^2 = 16$ • Complète : $4^2 = \ldots$ et $(-4)^2 = \ldots$ • Combien de nombres positifs ont 16 pour carré ? • Combien de nombres négatifs ont 16 pour carré ? • Quels sont les nombres dont le carré est égal à 16? • En déduis le côté du carré d'aire 16 cm^2.	$x^2 = 3$ • Complète : $(\sqrt{3})^2 = \ldots$ et $(-\sqrt{3})^2 = \ldots$ • Combien de nombres positifs ont 3 pour carré ? • Combien de nombres négatifs ont 3 pour carré ? • Quels sont les nombres dont le carré est égal à 3? • En déduis le côté du carré d'aire 3 cm^2.	$x^2 = -3$ Existe-t-il des nombres dont le carré est -3 ? y a-t-il des solutions de l'équation $x^2 = -3$ Résous l'équation $x^2 = 0$.
On écrit $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$		

Activité 3 :

Produit de racines carrées

Sans calculatrice, calcule :

- $\sqrt{9\times4}$ et $\sqrt{9}\times\sqrt{4}$
- $\sqrt{25\times4}$ et $\sqrt{25}\times\sqrt{4}$
- $\sqrt{16\times9}$ et $\sqrt{16}\times\sqrt{9}$
- Quel résultat peux-tu en déduire ?
- Un élève a calculé l'expression
  $\sqrt{6}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$, trouve le résultat attendu ?
- Recopie et complète le calcul suivant : $(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2 = \ldots^2 \times \ldots^2 = \ldots\times\ldots =$
  Ce calcul permet- il d'affirmer que $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$?
- On veut démontrer que l'égalité $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est vraie pour tous les nombres réels positifs a et b.
  Recopie la démonstration en la complétant ?
  Calculons le carré de $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$:
  $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2$
  D'après la définition de la racine carrée :
  $(\sqrt{a})^2 = \ldots$ et $(\sqrt{b})^2 = \ldots$
  On reporte ces valeurs dans l'égalité précédente :
  $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 = \ldots$
  Ainsi, le nombre $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est le produit de deux nombres positifs ; il est donc, … et son carré est égal à ….On en déduit que : ….= ….

Activité 4 :

Propriétés

Quotient de racines carrées

Démontre que : $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a>$; $b>0$

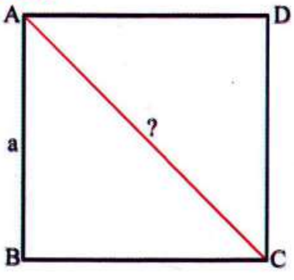
Somme et différence

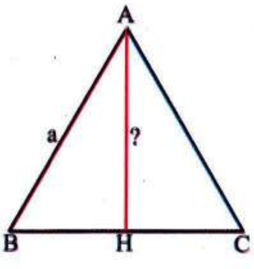
Compare $\sqrt{16+9}$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $\sqrt{169-25}$ et $\sqrt{169}$ - $\sqrt{25}$

Application des règles de calcul en géométrie

a) Diagonale d'un carré

ABCD étant un carré de côté a,
exprime AC^2 en fonction de a,
en déduis AC en fonction de a.





b) Hauteur d'un triangle équilatéral

ABC étant un triangle équilatéral de côté a, on appelle H le pied de la hauteur issue de A.

- Quelle est la nature du triangle AHB ? Que représente H pour le segment [BC] ?
- En appliquant la propriété de Pythagore, exprime AH^2 en fonction de a.
- En déduis l'expression de AH en fonction de a.

Je retiens

1. Racine carrée d'un nombre positif

a étant un nombre positif ($a \geq 0$), la racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$ (se lit racine carrée de a ou radical de a).

Résultat : D'après la définition :

- La racine carrée de a est le nombre positif $\sqrt{a} \geq 0$
- Le carré de $\sqrt{a}$ est égal à : a ; $(\sqrt{a})^2 = a$, si $a > 0$
- $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si a est strictement négatif.

Attention : *Il ne faut pas confondre les deux questions suivantes :*

- *Quelle est la racine carrée de 9 ? (ou $\sqrt{9}$?)*
  Réponse $\sqrt{9} = 3$
- *Trouve les réels dont le carré est égal à 9 ?*
  (ou résoudre dans IR l'équation $x^2 = 9$)
  Réponse il y a deux nombres réels dont le carré est égal à 9, c'est 3 et -3

Remarque : $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$.

❖ Tout nombre réel positif a un radical, ce radical peut prendre l'une des formes suivantes :

▪ Un décimal ▪ Un rationnel ▪ Ni décimal, ni rationnel, la calculatrice donne une valeur approchée comme dans l'exemple ci-contre.	Exemples	▪ $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0,64} = 0,8$ ▪ $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ ▪ $\sqrt{2} \approx 1,414213562$

2. Equation $x^2 = a$

a) Cas où $a > 0$

Cherchons les solutions de l'équation $x^2 = 2$.

Comme $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les deux nombres dont le carrée est égal à 2, donc l'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

b) Cas où $a = 0$

Recherchons les solutions de l'équation $x^2 = 0$.

Comme 0 est le seul nombre dont le carré est 0, donc l'équation $x^2 = 0$ a une seule solution qui est 0.

c) Cas où $a < 0$

Recherchons les solutions de l'équation $x^2 = -5$.

Comme le carré d'un nombre x est un nombre positif, donc l'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solutions.

3. Calcul avec les radicaux

Produit	Quotient
La racine carrée du produit de deux nombres positif est égale au produit des racines carrées de ces deux nombres. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$ **Exemple :** $\sqrt{9 \times 36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$ $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2}$	La racine carrée du quotient de deux nombres positif est égale au quotient des racines carrées de ces deux nombres : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour tout $a \geq 0$ et $b > 0$ **Exemple :** $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$

Remarque : on peut aussi appliquer des égalités pour:

- Transformer un produit de racines carrées en racine carrée d'un produit.
- Transformer un quotient de racines carrées en racine carrée d'un quotient.
- Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre.

Exemples : $\sqrt{2}\times\sqrt{50}=\sqrt{2\times 50}=\sqrt{100}=10$; $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$;

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Attention : pour tous les nombres a et b non nuls : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Exemples :

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\approx 3{,}065$; $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$ donc $\sqrt{9+4}\neq\sqrt{9}+\sqrt{4}$

$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}\approx 2{,}231$; $\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$ donc $\sqrt{9-4}\neq\sqrt{9}-\sqrt{4}$

Je sais faire

1. Trouver le radical d'un carré parfait

Exercice 1: donne le radical de chacun des nombres suivants : 16 ; 49 ; 64 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{9}{81}$; 100 ; 0,25 ; 3^{2006}

2. Appliquer les propriétés des radicaux

Exercice 2: Ecris le plus simplement possible les expressions suivantes :

$\sqrt{6^2}$; $\sqrt{(-7)^4}$; $\sqrt{16\times 25}$; $\sqrt{36\times 64}$

Exercice 3: Ecris plus simplement : $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$; $\sqrt{7}\times\sqrt{7}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{12,5}$; $\sqrt{7,2}\times\sqrt{5}$

Exercice 4 : Ecris plus simplement chacune des écritures : $\sqrt{\frac{9}{100}}$; $\sqrt{\frac{81}{36}}$; $\sqrt{\frac{144}{625}}$; $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

3. Ecrire un radical sous la forme b$\sqrt{a}$

Exercice 5 :a) Ecris les nombres $\sqrt{18}$ et $\sqrt{8}$ sous la forme a$\sqrt{b}$ avec a et b entiers.

b) Simplifie l'écriture de l'expression : $5\sqrt{18}-7\sqrt{8}-3\sqrt{2}$

4. Trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a n'est pas un carré parfait

Exercice 6 : Donne une valeur approchée de $\sqrt{3}$, puis calcule une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Rendre un dénominateur rationnel

Exercice 7 : Ecris le quotient $\frac{7}{\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur.

6. Calculer et simplifier des expressions contenant des radicaux

Exercice 8 :a) Donne l'écriture la plus simple possible du nombre $(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2$.

b) Développe l'expression $\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})$, puis écris-le résultat sous la forme la plus simple possible.

CORRECTION

1. le tableau suivant donne les radicaux des nombres donnés :

Nombre	16	49	64	100	0,25	3^{2006}	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{81}$
Radical	4	7	8	10	0,50	3^{1003}	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{9}$

2. Ecriture simplifiée demandée:

$\sqrt{6^2}=6$; $\sqrt{(-7)^4}=|-7|^2=7^2$;

$\sqrt{16\times 25}=\sqrt{16}\times\sqrt{25}=4\times 5=20$;

$\sqrt{36\times 64}=\sqrt{36}\times\sqrt{64}=6\times 8=48$

3. Ecriture simplifiée demandée:

$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$; $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6$;

$\sqrt{7}\times\sqrt{7}=\sqrt{7\times 7}=\sqrt{49}=7$; $\sqrt{2}\times\sqrt{12{,}5}=\sqrt{2\times 12{,}5}=\sqrt{25}=5$;

$\sqrt{7{,}2}\times\sqrt{5}=\sqrt{7{,}2\times 5}=\sqrt{36}=6$

4. Ecriture simplifiée demandée:

$\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}$; $\sqrt{\frac{81}{36}}=\frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{6^2}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$;

$\sqrt{\frac{144}{625}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{625}}=\frac{12}{25}$; $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{25}{5}}=\sqrt{5}$;

$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{147}{3}}=\sqrt{49}=7$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$

5. a) Ecriture demandée:

$\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$;

$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

b) On simplifie l'expression en utilisant les écritures précédentes :

$5\sqrt{18}-7\sqrt{8}-3\sqrt{2}=5\times 3\sqrt{2}-7\times 2\times\sqrt{2}-3\sqrt{2}=$

$15\sqrt{2}-14\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(15-14-3)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

6. Je sais que : $(1{,}7)^2=2{,}89$ et que $(1{,}8)^2=3{,}24$.

C'est- à- dire que : $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$

Donc, je peux prendre 1,7 comme valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$. J'écris donc, $\sqrt{3}\approx 1{,}7$.

- $\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\frac{1}{1{,}7}$; $\frac{1}{1{,}7}=\frac{10}{17}$.

$\frac{10}{17}\approx 0{,}6$. On peut remarquer que : $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; comme $\sqrt{3}\approx 1{,}7$; donc $\frac{\sqrt{3}}{3}\approx\frac{1{,}7}{3}\approx 0{,}6$

7. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$, on a : $\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

8. a)L'écriture simplifiée :

$$(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=(\frac{2\sqrt{3}}{3})(\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{4\times(\sqrt{3})^2}{3\times3}=\frac{4\times3}{3\times3}=\frac{4}{3}$$

b) L'expression simplifiée : $\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})=5\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=5\sqrt{6}-3$

Je m'exerce

Définition de la racine carrée

1. Réponds par vrai ou faux en justifiant :

a) $\sqrt{36}$ peut être égal à -6

b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$

c) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

d) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 6$

e) $\sqrt{2006}$ est compris entre 44 et 45

f) $\sqrt{(\pi - 4)^2} = \pi - 4$

g) Il existe un nombre réel a tel que $\sqrt{a} = a$

h) La moitié de $\sqrt{18}$ est $\sqrt{9}$

i) Le triple de $\sqrt{5}$ est $\sqrt{15}$

j) Le produit de 7 par $\sqrt{3}$ est $\sqrt{147}$

k) La somme de $\sqrt{7}$ et de $\sqrt{9}$ est $\sqrt{16}$

l) 5 est le carré de ($\sqrt{2} + \sqrt{3}$)

m) L'inverse de $2\sqrt{3}$ est $\frac{\sqrt{3}}{6}$

2. Quelle est la racine carrée de chacun nombres suivants :
49 ; 64 ; 25 ; 9 ; 144 ; 100 ; 121 ; 81 ; 10 000 ; 10^{16}

3. Recopie et complète :

$4^2 = \dots$	$(-4)^2 = \dots$	$\sqrt{16} = \dots$
$2,3^2 = \dots$	$(-2,3)^2 = \dots$	$\sqrt{5,29} = \dots$
$0,5^2 = \dots$	$(-0,5)^2 = \dots$	$\sqrt{0,25} = \dots$
$90^2 = \dots$	$(-90)^2 = \dots$	$\sqrt{8100} = \dots$

4. Recopie et complète :

a. $12^2 = \dots$ $\quad\sqrt{\dots} = 12$

b. $13^2 = \dots$ $\quad\sqrt{\dots} = 13$

c. $0,6^2 = \dots$ $\quad\sqrt{\dots} = 0,6$

d. $1,3^2 = \dots$ $\quad\sqrt{\dots} = 1,3$

5. Recopie et complète :

a. $(\frac{2}{3})^2 = \dots$ $\quad\sqrt{\frac{4}{9}} = \dots$

b. $(\frac{5}{7})^2 = \dots$ $\quad\sqrt{\quad} = \frac{5}{7}$

6. Recopie et complète :

a. $(10^3)^2 = \dots$ $\quad\sqrt{10^6} = \dots$

b. $(10^4)^2 = \dots$ $\quad\sqrt{10^8} = \dots$

7. Recopie et complète :

a. $10^4 = (10^{\cdots})^2$ $\quad\sqrt{10^4} = \dots$

b. $10^6 = (10^{\cdots})^2$ $\quad\sqrt{10^6} = \dots$

c. $10^{14} = (10^{\cdots})^2$ $\quad\sqrt{10^{14}} = \dots$

8. Calcule : $\sqrt{10^8}$; $\sqrt{10^{12}}$; $\sqrt{10^{22}}$; $\sqrt{10^{38}}$

9. Calcule : $\sqrt{10^{-20}}$; $\sqrt{10^{-12}}$; $\sqrt{10^{-8}}$; $\sqrt{10^{-14}}$.

10. Calcule :

a. $\sqrt{0,49}$; $\sqrt{2500}$; $\sqrt{0,81}$

b. $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{9}{49}}$

c. $\sqrt{10^{12}}$; $\sqrt{10^{-32}}$; $\sqrt{10^{10}}$

11. Compare $\sqrt{(-5)^2}$ et $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{7^2}$ et $-\sqrt{7^2}$

12. Comment choisir x pour que $\sqrt{x-3}$ ait du sens.

13. Parmi les écritures suivantes, quelles sont celles qui ont du sens ?

$\sqrt{-16};\sqrt{(-4)^2};-\sqrt{-100};-\sqrt{16};(\sqrt{-3})^2;-(\sqrt{3})^2;$

$\sqrt{(-3)^2};\sqrt{-(3)^2};$

Opérations et racines carrées

14. Ecris plus simplement :

a. $\sqrt{4\times 64};\sqrt{9\times 16};\sqrt{16\times 49};\sqrt{25\times 121};\sqrt{2}\times\sqrt{32}$;
$\sqrt{2}\times\sqrt{72};\sqrt{3}\times\sqrt{27};\sqrt{23}\times\sqrt{23};\sqrt{4}\times\sqrt{6,25}$

b. $2\sqrt{7}\times 5\sqrt{28};\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{81}{7}}$

c. $\sqrt{80}\times\sqrt{20};\sqrt{45}\times\sqrt{60}\times\sqrt{12}$

15. a et b sont des nombres entiers naturels.
Ecris plus simplement.

a. $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{\frac{49}{81}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{32}{50}}$

b. $\sqrt{\frac{12}{27}}$; $\sqrt{\frac{5}{36}}$; $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}$; $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$; $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{80}}$

c. $5\times\sqrt{\frac{5}{49}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{100}{147}}$; $\sqrt{\frac{49\times16}{25}}$

16. Donne l'écriture la plus simple possible des nombres suivants :
$A = 4(\sqrt{5})^2 - 8$; $B = 1,5(\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{3})^2 + 7$.

17. Calcule la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent :
a) 7 cm et 3 cm ; b) 5,7 cm et 2,5 cm.
On donnera la valeur exacte puis l'arrondi au centième de centimètre.

18. Calcule l'aire d'un disque dont l'aire est égale à celle d'un triangle de base 2,6 cm de hauteur associée 5,2 cm.

Calcul avec les radicaux

19. a) Mets les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un nombre décimal.
$A = 3\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2}$; $B = 0,7\sqrt{2} + 1,8\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$C = 8 \times 4,5\sqrt{2}$; $D = 7\sqrt{2}\times 1,2 - 4\sqrt{2}$
b) avec la calculatrice, trouve les arrondis au millième des nombres A, B, C et D.

20. a) Développe les expressions suivantes en écrivant le résultat le plus simplement possible.
$A = \frac{1}{3}(4,5 - 18\sqrt{3})$; $B = 2\sqrt{3}(5 - 4\sqrt{3})$
b) Avec la calculatrice, trouve les arrondis au dix millième (10^{-4}) des nombres A et B.

21. ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. Le point I est le milieu de la base [BC].
AI = 5 cm ; BC = 4 cm.
Calcule le périmètre P de ce triangle. On donnera la valeur exacte, puis son arrondi à 10^{-2} centimètre.

22. L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que $AB = 7 - \sqrt{5}$; $BC = 7 + \sqrt{5}$ et $AC = 6\sqrt{3}$
Le triangle ABC est-il rectangle ?

23. Développe les expressions suivantes et écris les résultats sous la forme la plus simple possible.

a. $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; $\sqrt{5}(2-\sqrt{5})$.
b. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-5)$; $3\sqrt{2}(\sqrt{2}+4)$
c. $7\sqrt{5}(2\sqrt{5}+1)$; $\sqrt{3}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$

Ecriture d'un quotient sans radical au dénominateur

24. Ecris les nombres suivant sans le symbole $\sqrt{\ }$ au dénominateur :

$\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$; $\frac{-2}{-1-\sqrt{5}}$

$\frac{3}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{5-\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; $\frac{-3}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

$\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}-\sqrt{11}}$; $\frac{\sqrt{2}-5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

25. Rends rationnel le dénominateur des rapports suivants :

a. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{3}-2}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}$

b. $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$; $\frac{7\sqrt{2}-3}{4-\sqrt{2}}+\frac{3-7\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

26. Prouve que : $\frac{3\sqrt{2}+12}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

Equation $x^2 = a$

27. Résous les équations suivantes :
a) $x^2 = 4$; b) $x^2 = 0$
c) $x^2 = 1$; d) $x^2 = 16$
e) $x^2 = 10$; f) $x^2 = 0,7$
g) $x^2 = -3$; h) $x^2 = 1,5$

28. Vrai ou faux?

a. L'équation $x^2 = \pi - 3$ a deux solutions
b. L'équation $x^2 = 3 - \pi$ a deux solutions
c. L'équation $x^2 + 25 = 0$ a deux solutions
d. L'équation $x^2 - 25 = 0$ a deux solutions
e. L'équation $x^2 + \sqrt{36} = 6$ n'a pas de solutions

29. En géométrie

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la perpendiculaire en O à l'axe x'Ox, on a placé un point A tel que OA = 2.
Le cercle de centre A de rayon 3 coupe l'axe en

deux points B et B'.
Montre que les abscisses des points B et B' sont les solutions de l'équation $x^2 = 5$.

Approfondissement

30. On note a le nombre réel $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Montre que $a^2 = a + 1$ et $\frac{1}{a} = a - 1$

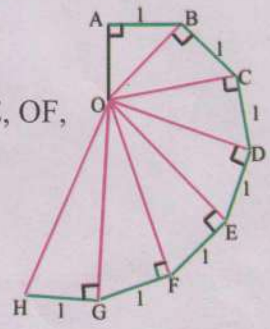
31. Montre qu'un rectangle MNOP tel que :
$MN = \sqrt{63} - \sqrt{28}$ et $NO = \sqrt{252} - \sqrt{175}$ est un carré et que son aire est un entier.
Calcule son périmètre.

32. Deux cercles concentriques ont pour rayons $r = 1$ et $r' = 8$.
Calcule l'aire de la couronne formée par ces deux cercles. Mets le résultat sous la forme $a\sqrt{b}\,\pi$ avec a et b entiers.

33. Sans calculatrice, calcule :

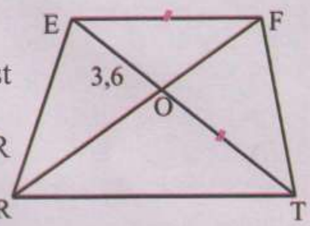
$$\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}$$

34. Reproduis la figure ci-contre à l'échelle 5.



a. Calcule les valeurs exactes de OB, OC, OD, OE, OF, OG et OH.
b. Mesure ces longueurs sur la figure et en déduis des valeurs approchées de $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}$.
c. Compare les résultats du b. aux résultats fournis par une calculatrice.

35. Avec Thalès
La figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur représente un trapèze EFTR de bases [EF] et [TR].



EO = 3,6 cm ; RT = 10 cm. EF = OT = a ;
Calcule a.

Module d'intégration 1

Chapitres 1 2 3

Chapitres / Compétences : 1.1 ; 2.1 ; 3 .1

Avec tout ce que tu as appris, et en particulier dans les trois premiers chapitres, tu peux résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, dont voici quelques situations problèmes.

Situation 1

Lecture de l'énoncé

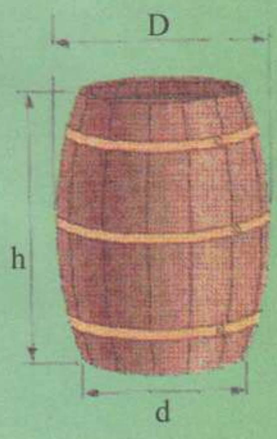
Une unité de production laitière fait la collecte journalière de 1800 ℓ de lait en collaboration avec des fournisseurs différents.
Pour ce travail elle dispose de tonneaux dont la forme est donnée par le dessin ci-contre.
Le responsable technique de l'unité dispose de deux formules théoriques pour calculer approximativement le volume d'un tonneau.

$\mathscr{V} = \frac{\pi h}{16}(2D + d)^2$; $\mathscr{V} = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2)$

Il affirme que 8 tonneaux suffisent pour faire cette opération et que ces tonneaux peuvent être transporté dans un camion à benne dont les dimensions sont :

$\ell = 1{,}95$ m ; $\mathscr{L} = 2{,}6$ m .

Justifie les propos du responsable en utilisant les deux formules proposées
On donne d = 50 cm ; D = 65 cm ; h = 80 cm.



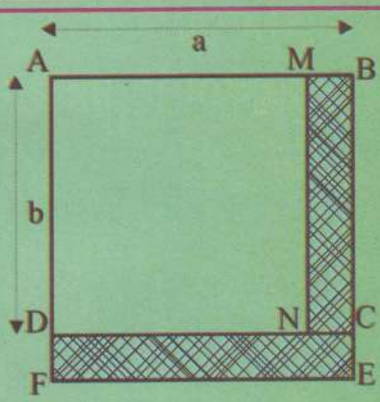
situation2

Vraisemblance des résultats

Sur la figure ci-contre, ABEF et AMND sont des carrés.
On pose : AB = a et AD = b.

1. Exprime en fonction de a et b :
- la longueur MB,
- le périmètre du rectangle ABCD,
- l'aire du carré ABEF,
- l'aire de la surface hachurée,
- le périmètre de la surface hachurée,

2. Calcule les valeurs numériques des expressions a – b ; 2(a + b) ; a^2 ; b^2 ; (a + b)(a – b) dans chacun des cas suivants :
- $a = \frac{5}{4}$; $b = \frac{7}{10}$;
- $a = \sqrt{45}\ \frac{5}{4}$; $b = 2\sqrt{5} - 1$;



3. Sachant que $b = 12\sqrt{2}$, déterminer la valeur de a pour que l'aire du carré AMND soit égale à la moitié de l'aire du carré ABEF.

Situation3

Choix des outils

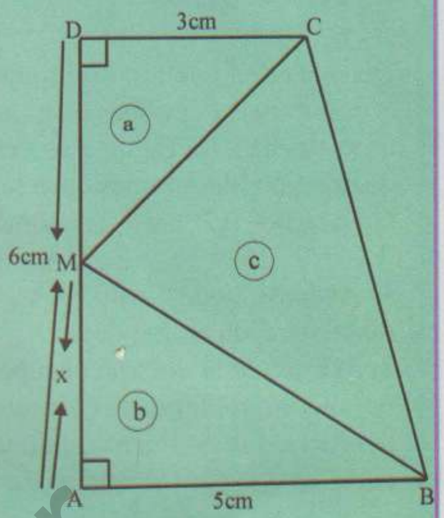
Problème de partage :

Un père a décidé de partager son terrain pour en donner deux parcelles à ces deux enfants.

(Voir dessin fait à l'échelle $\frac{1}{1000}$ sur la figure ci-contre)

Pour ce faire, il a trois choix.

- Premier choix donner la parcelle ⓐ au premier, la parcelle ⓑ au second en gardant pour lui la parcelle ⓒ ;
- Deuxième choix distribuer tout son terrain en donnant les parcelles ⓐ et ⓑ au premier ; la parcelle ⓒ au second,
- Troisième choix garder pour lui la parcelle ⓒ de façon à ce que le triangle MBC soit rectangle en C ;
  donner la parcelle ⓐ au premier et la parcelle ⓑ au second.



❖ Trouve la valeur de x pour laquelle le partage est équitable pour chaque choix.
❖ Trouve la valeur approchée de l'aire et du périmètre dans chacuns des choix.

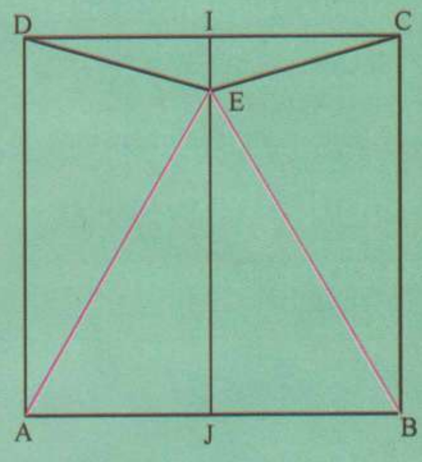
Situation4

Apprentissage du raisonnement

Lors d'une séance sur le calcul des radicaux, le professeur a voulu calculer la valeur exacte de tan(15°).

(Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle = $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$).

Pour ce faire, il a proposé le carré ci-contre, avec les données suivantes :
AB = 10cm ; ABE est équilatéral ; I milieu de [CD] ;
J milieu de [AB].



Il a demandé de répondre aux questions suivantes :

1) Calcule les longueurs exactes de EI et EJ.
2) Détermine les mesures exactes des angles :
   $D\hat{A}E$; $A\hat{D}E$ puis $E\hat{D}I$.
3) En déduis la valeur exacte de tan(15°)
   (Compare avec la valeur approchée donnée par les tableaux ou la calculatrice.).

Entraînement à l'évaluation

Situation a

Dans le cristal de fer les atomes se trouvent aux sommets des cubes et en leur centre (voir dessin). La figure 2 représente la disposition des atomes dans le plan ABCD.

On a AB = 0,29nm (nanomètre)

BC = 0,41nm (nanomètre)

1) Avec ce modèle calcule AC puis le diamètre d'un atome de fer.

2) a) Calcule le volume occupé par les atomes de fer dans chaque cube.

b) Quel est le pourcentage du volume du cube occupé par les atomes de fer.

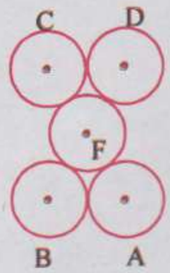


Fig.2

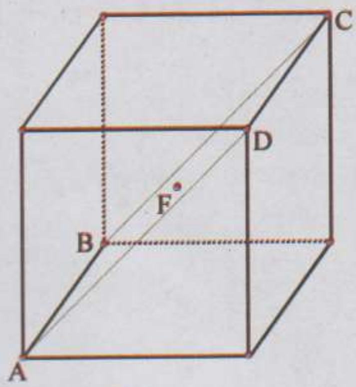


Fig.1

Situation b

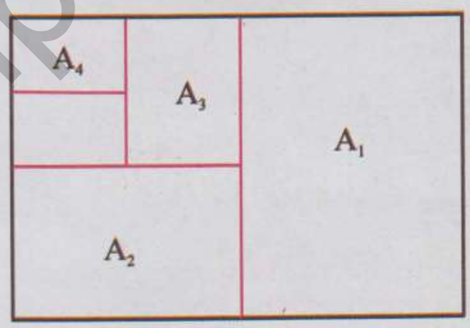
La grande feuille ci-contre A_0 a pour aire $1m^2$.

A_1 est la moitié de A_0.

- A_2 est la moitié de A_1.
- A_3 est la moitié de A_2.
- A_4 est la moitié de A_3.

(ces feuilles ont été obtenues par pliages successifs comme sur la figure)

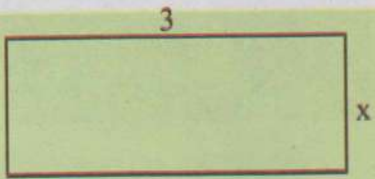
Quelles sont les dimensions de la feuille A_4 ?



5 Calcul littéral

Je me souviens

1.) Exprime le périmètre du rectangle ci-contre :
a) Sous forme d'une somme de quatre termes.
b) Sous forme d'une somme de deux termes.
c) Sous forme d'un produit.



2.) Ecris les sommes algébriques suivantes sans parenthèse.
a) $3 + (x + 2) - (3x - 4)$
b) $-4 - (-2x + 3) + (2x - 1)$.

3.) Développe les produits suivants
a) $2(x - 3)$
b) $5(-2x + 4)$
c) $-3(2x - 5)$
d) $(x - 2)(x - 4)$
e) $(x + 3)(x + 5)$
f) $(x - 4)(x + 7)$

4.) Factorise les expressions suivantes en produits de sommes algébriques:
a) $3x + 27$
b) $x^2 - 5$
c) $4x^2 - 4x$

5.) Réduis les sommes algébriques (en effectuant les calculs possibles et en regroupant les termes en x)
a) $2 - 5x + 8 + 3x$
b) $-x + 3 - 4x + 5$
c) $\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{3}x + 3$
d) $12,5x - 3 - 8x - 7,2$

Je vais plus loin

Activité 1 : *Carré d'une somme*

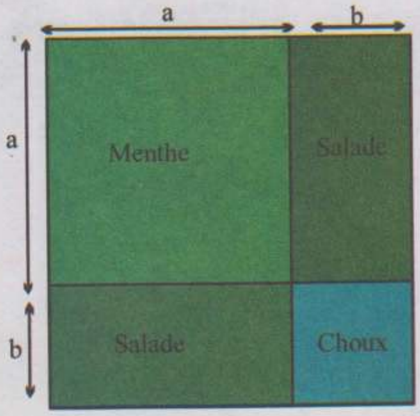
Pour comprendre un phénomène curieux qu'Issa et Moustapha ont constaté :

1. Calcule les expressions suivantes :
- $(3 + 5)^2 - (3^2 + 5^2)$
- $(2 + 4)^2 - (2^2 + 4^2)$
- $[4 + (-3)]^2 - [4^2 + (-3)^2]$

Puis compare les résultats au produit respectif 3×5 ; 2×4 et $(4 \times (-3))$.

2. Développe le carré de la somme de deux nombres a , b puis réduis l'expression obtenue :
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$.
Trouve le lien entre le résultat obtenu et le résultat observé plus haut.

3. Un jardinier a sa pépinière sous forme d'un carré de côté a + b qu'il divise sous la forme ci-dessous pour y cultiver quatre variétés.
- Aide le jardinier à calculer l'aire de sa pépinière de deux façons différentes.

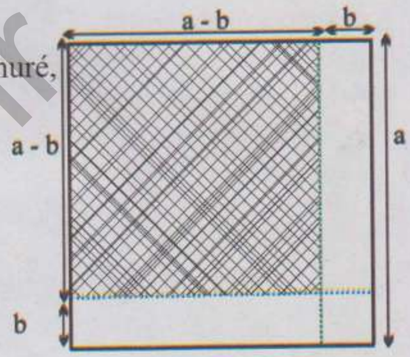


4. En te basant sur la formule ainsi obtenue, calcule à la main les carrés suivants : 11^2 ; 13^2 ; 22^2 (pour cela écris d'abord 11 ; 13 ; 22 sous la forme a + b.
5. Développe le carré de (5x + 3) en utilisant la formule directement.

Activité 2 :

Carré d'une différence

1) Calcule de deux façons différentes l'aire du carré hachuré, en déduis le développement de $(a - b)^2$
2) Utilise l'identité trouvée, et développe le carré de (5x – 3).
3) Développe les expressions suivantes $(x - 5)^2$; $(2x - 5)^2$



Activité 3 :

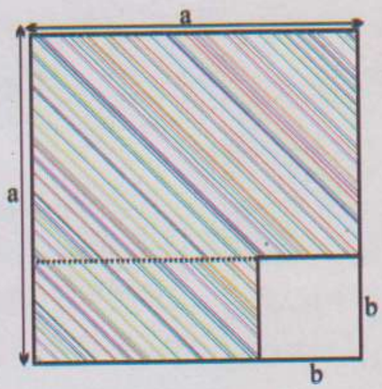
Produit de (a + b)(a – b)

a) Calcule :
- (5 + 2)(5 – 2) et $5^2 - 2^2$
- (7 + 4)(7 – 4) et $7^2 - 4^2$

Qu'observes-tu ?

b) Démontre les égalités observées en a) qui peuvent se généraliser.

c) Un éleveur a un terrain carré de côté a, sur ce terrain il doit construire un grand hangard de forme carré de côté b. Retrouve l'identité trouvée en b) en ressemblant les deux parties de la figure hachurée (correspondant à la culture de forages).



d) Calcule à la main les produits 21×19 ; 32×28 ; (utilise l'identité trouvée en b), (décompose $21 \times 19 = (20 + 1)(20 - 1)$).

e) Développe les produits suivants : (5x + 3)(5x -3) ; (x + 3)(x – 3) ; (2x – 5)(2x + 5).

Activité 4 :

Factorisation

1) Les expressions suivantes sont des sommes ou des différences de produits qui ont des facteurs communs.

Retrouve le facteur commun, dans chaque expression, puis factorise.

$A = 5x(3x + 1) + 5x(x - 1)$; $B = (x - 3)(2x + 1) + (x - 3)(4x)$;

$C = (x - 2)(3x + 4) + (x - 5)(x - 2)$

2) Dans un cube de bois d'arête a, on a découpé un cylindre de rayon $\frac{a}{3}$, d'axe parallèle à une arête.

- Détermine le volume du solide obtenu.
- Ecris ce volume sous la forme factorisée.

3) Factorisation avec les identités remarquables :

- En appliquant les identités remarquables, transforme les expressions suivantes de façon à calculer mentalement :

$2000^2 - 1999^2$; $9992 + 2 \times 999 + 1$; $501^2 - 2(501) + 1$

- Parmi les expressions suivantes laquelle est l'expression factorisée de $9x^2 - 25$

$(9x - 5)(x + 5)$	$(9x - 5)(9x + 5)$	$(4,5x - 5)(4,5x + 5)$
$(3x - 5)(3x + 5)$	$(3x - 25)(3x + 1)$	$(9x - 25)(x - 1)$

Complète les égalités

$x^2 - 4x + 4 = (x - \ldots)^2$	$x^2 + 2x + 1 = (x + \ldots)^2$
$x^2 + 6x + \ldots = (x + 3)^2$	$x^2 - 2x + \ldots = (x - 1)2$
$4x^2 + 20x + \ldots = (2x + \ldots)^2$	$x^2 - 12x + \ldots = (x - \ldots)^2$

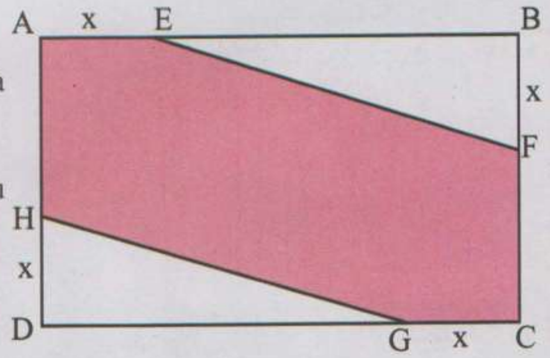
Activité 5 :

Polynômes et rationnels

Un maçon veut faire un devis pour embellir de la face principale d'une maison.

Pour cela l'architecte lui présente le plan suivant dont les dimensions rectangulaire ABCD, sont : AB = 10 cm, BC = 6 cm.

Pour mieux évaluer, il place les points EFGH sur ces côtés comme le montre la figure ci-contre.



a) Exprime en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle EBF, puis l'aire $\mathcal{B}$ de la surface colorée.

b) Donne l'expression de $\mathcal{B}$ sous la forme développée et réduite. Calcule $\mathcal{B}$ pour $x = \frac{3}{2}$.

c) Pour quelle valeur de x a-t-on $\mathcal{B} = 35cm^2$?

Je retiens

1. Calcul littéral

Pour transformer des expressions littérales on peut utiliser les règles suivantes :
Suppressions de parenthèses dans une somme algébrique :

$a + (b + c) = a + b + c$ $\quad$ $a - (b + c) = a - b - c$

$a + (b - c) = a + b - c$ $\quad$ $a - (b - c) = a - b + c$

Exemples : $4 + (2x - 3) = 4 + 2x - 3$; $5 - (2x^2 - 6) = 5 - 2x^2 + 6$

2. Développement

a) Transformation de produit en somme

$k(a + b) = ka + kb.$ $\quad$ $(a + b)k = ak + bk.$

$k(a - b) = ka - kb.$ $\quad$ $(a - b)k = ak - bk.$

b) Développement du produit de deux sommes algébriques

$(a + b)(c + d) = a \times (c + d) + b \times (c + d)$

$= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

c) Factorisation

$ka + kb = k(a + b)$ $\quad$ $ak + bk = (a + b)k$

$ka - kb = k(a - b)$ $\quad$ $ak - bk = (a - b)k$

3. Identités remarquables

Les égalités ci-dessous sont vraies pour tous nombres réels a, b on les appelle les identités remarquables.

Carré d'une somme ⟹ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Carré d'une différence ⟹ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Produit (a + b)(a - b) ⟹ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

La dernière identité est aussi appelée différence de deux carrés.

Applications

On peut utiliser les identités remarquables pour factoriser ou développer.

Développement	Exemples
▪ du carré d'une somme : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(x + 3)^2 = x^2 + 2x3 + 3^2$ $= x^2 + 6x + 9$ $(4x + 1)^2 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2$ $= 16x^2 + 8x + 1$	▪ $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$ $= x^2 - 6x + 9$ ▪ $(4x - 1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2$ $= 16x^2 - 8x + 1$
▪ du carré d'une différence $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ▪ du produit $(a + b)(a - b)$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	▪ $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$ ▪ $(4x + 5)(4x - 5) = (4x)^2 - 5^2$ $= 16x^2 - 25$

4. Factorisation

a) Une expression de la forme $a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2.(2x) \times 3 + 3^2$

$= (2x + 3)^2$

b) Une expression de la forme $a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2.(2x) \times 3 + 3^2$

$= (2x - 3)^2$

c) Différence de deux carrés $a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$.

5. Polynôme

Exemples de polynômes

$P(x) = 3x + 5$ est un polynôme de degré 1 (car l'exposant de x est 1)

$P(x) = 7x^2 + 3x + 5$ est un polynôme de degré 2 (car l'exposant de x le plus grand est 2)

$P(x) = (4x - 3)(x + 7)$ est un polynôme de degré 2 (après le développement)

6. Développement et factorisation de polynômes

a) Développement de polynôme Q(x)

$Q(x) = 3x(x + 3) - (x + 3)^2$

$Q(x) = 3x^2 + 9x - (x^2 + 6x + 9) = 3x^2 + 9x - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - x^2 + 9x - 6x - 9 = 2x^2 + 3x - 9$.

b) **Factorisation du polynôme Q(x)**

On remarque que $(x + 3)$ est un facteur commun.

$3x(x + 3) - (x + 3)^2 = (x + 3)[3x - (x + 3)] = (x + 3)(2x - 3)$.

7. Exemples de fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes :

$K(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4}$ cette fraction existe si le dénominateur est différent de 0 ($x \neq -4$).

K(x) existe pour tous les réels sauf -4.

$L(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2 - 9}$; L(x) existe si $x^2 - 9 \neq 0$.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} ; \ x = 3 \text{ ou } x = -3$$

L(x) existe pour tous réels sauf -3 et 3.

Je sais faire

1. Développer et réduire une expression

Exercice 1: Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = (x-4)(3x+2)$; $B = (2x-3)^2$; $C = (4x+5)^2$; $D = (4x-3)^2 - (2x+3)(x-2)$

2. Factoriser des expressions

Exercice 2: Factorise les expressions suivantes :

$A = 25x^2 + 15x$; $B = (3x+5)(2x+1) - (3x+5)(5x+3)$; $C = (x-3)^2 + (2x-1)(x-3)$

$D = (2x-3)^2 - 16$; $E = 16x^2 - 24x + 9$

3. Développer, ordonner et réduire des polynômes

Exercice 4: On donne un polynôme $P(x) = (3x-5)^2 - (x+2)^2$.

a) Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

b) Mets $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

c) Calcule $P(-\frac{1}{2})$; $P(0)$.

CORRECTION

1. Je développe, puis je réduis

- $A = (x-4)(3x+2) = 3x^2 + 2x - 12x - 8$
  $= 3x^2 - 10x - 8$

- $B = (2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$
  $= 4x^2 - 12x + 9$

- $C = (4x+5)^2 = (4x)^2 + 2.4x.5 + 5^2$
  $= 16x^2 + 40x + 25$

- $D = (4x-3)^2 - (2x+3)(x-2)$
  $= 16x^2 - 24x + 9 - (2x^2 - 4x + 3x - 6)$
  $= 16x^2 - 24x + 9 - 2x^2 + 4x - 3x + 6$
  $= 14x^2 - 23x + 15$

2. a) Je développe, puis je réduis et ordonne P(x)

$P(x) = (3x-5)^2 - (x+2)^2$
$= (3x)^2 - 2.3x.5 + 5^2 - x^2 - 4x - 4$
$= 9x^2 - 30x + 25 - x^2 - 4x - 4$
$= 8x^2 - 34x + 21$

b) Je mets P (x) en produit de facteurs

$P(x) = (3x-5)^2 - (x+2)^2$
$= ((3x - 5 - (x+2))((3x - 5 + (x+2))$
$= (2x-7)(4x-3)$

c) Je calcule

$P(\frac{-1}{2}) = 8(\frac{-1}{2})^2 - 34 \times (\frac{-1}{2}) + 21$

$= 8(\frac{1}{4}) + 34 \times \frac{1}{2} + 21$

$= 2 + 17 + 21 = 40.$

$P(0)- = 8(0)^2 - 34 \times (0) + 21 = 21$

3. Je factorise les expressions comme suit :

- $A = 25x^2 + 15x = 5x(5x+3).$
- $B = (3x+5)(2x+1) - (3x+5)(5x+3)$
  $= (3x+5)[(2x+1) - (5x+3)]$
  $= (3x+5)[2x + 1 - 5x - 3]$
  $= (3x+5)[-3x - 2].$
- $C = (x-3)^2 + (2x-1)(x-3)$
  $= (x-3)(x-3) + (2x-1)(x-3)$
  $= (x-3)[x - 3 + 2x - 1]$
  $= (x-3)(3x-4).$
- $D = (2x-3)^2 - 16$
  $= (2x-3)^2 - 4^2$
  $= (2x - 3 - 4)(2x - 3 + 4)$
  $= (2x-7)(2x+1)$
- $E = 16x^2 - 24x + 9$
  $= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$
  $= (4x-3)^2$

Je m'exerce

Expressions littérales

1. Ecris les expressions suivantes sans parenthèses, puis effectue les calculs possibles.

a) -3,2 + (x - 4,5) b) 2 + (-x - 11,8) c) 7,5 - (x -3)	d) 3 - (-3 + x) e) 25+ (2x - 3)-(-x + 9) f) (x – 3 + y) – 5 + (x - 4y +7) -2

2. Donne le nom de la technique qui consiste à remplacer : l'expression ab + ac par a(b + c).
L'expression a(b + c) par l'expression ab + ac.

3. Recopie et complète :
Soit $A = -5x + 3$; $B = -5(x + 3)$
Calcule A et B pour $x = 0$; pour $x = -3$.
Développe B, peux-tu trouver une valeur de x pour A = B ?

4. Complète de façon à obtenir un résultat sans parenthèses :

$(3x)^2 = \dots$; $(-5x)^2 = \dots$; $(\frac{2}{3}x)^2 = \dots$; $(\frac{-2}{5})^2 = \dots$

5. x est un nombre non nul.
Simplifie l'écriture des expressions suivantes :
a. x^2x^3 ; $2x^3.3x$; $4x^2.0,3x$
b. $-5x^2.(2x)^3$; $(-3x)^2.5x$; $(-2x)^2.(3x)^2$
c. $\frac{4x^3}{2x}$; $\frac{15x}{3x^4}$; $\frac{(2x^2)^3}{4x^5}$

Développement

6. Développe les expressions suivantes :

a. $2(5x – 7)$
b. $-3(2x + 5)$
c. $-5(-4x + 3)$
d. $x (2x + 3)$
e. $6x (3x - \frac{1}{2})$
f. $\frac{3}{5} (20x - \frac{5}{3})$

7. Développe et réduis les expressions :
a) $3 – 3(0,5x + 21)$ c) $3(-2x + 5) -2(4x + 3)$
b) $5x – 3(-2x + 5)$ d) $12 – 13(-x + 3) -11(x – 2)$

8. Développe et réduis

a) $(x + 2)(x + 3)$ f) $(\frac{1}{2}x – 3)(x + \frac{2}{3})$

b) $(2x + 3)(x + 4)$ g) $(\frac{3}{5}x – 1)(\frac{1}{3}x + 15)$

c) $(-4x + 3)(x + 2)$ h) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$

d) $(7x + 3)(5x + 2)$ i) $(x - \frac{5}{3})(x - \frac{1}{15})$

e) $(-3x + 2)(-2x -7)$ j) $(-x - \frac{1}{2})(-2x - \frac{3}{5})$

9. Développe et réduis
a. $-2 + (2x – 7)(4 - 3x)$
b. $5 - (4x + 2)(-2x + 1)$
c. $3x -1 + (2x - 3)(3x + 2)$
d. $2x^2 - (-5x + 2)(x -3$

10. Développe et réduis
a. $2(3x – 5) – (5x – 3)(-2x + 1)$
b. $3x - 5(2x + 1) + (3x – 4)(7x + 2)$
c. $(3x – 2)(-x + 4)- (-x - 1)(-2x + 3)$
d. $2x - 4(x + 2) (-4x + 1)$
e. $(-\frac{1}{2}x + 3) –3 (x – 1)(\frac{1}{2} x - 3)$

11. l'unité de longueur est le mètre

Exprime l'aire de la partie hachurée en fonction de a.
1. En calculant la somme de deux aires.
2. En calculant la différence de deux aires.
Développe et réduis les deux résultats obtenus pour vérifier qu'elles sont identiques.

12. Recopie et complète les développements
a. $(3x + 4)^2 = 9x^2 + 2\dots + 16$
b. $(2x + 3)^2 = (\ )^2 +2(\ ) + (\ )^2$
c. $(4x + \dots)^2 = 16x^2 + 20x + 25$
d. $(2x - 3)^2 = (\ )^2 -2(\ ) + (\ )^2$
e. $(7x - \dots)^2 = 49x^2 -\dots + 4^2$
f. $(2x + 3)(2x – 3) = (\ )^2 - (\ )^2$
g. $(\dots - 6)^2 = 25x^2 - \dots + \dots$
h. $(3x + \dots)(3x - \dots) = \dots - 25$

13. Le développement de l'expression $(3x + 4)^2$ est-il une des expressions suivantes ?
Si oui, laquelle? Justifie ta réponse.
$6x^2 + 8$; $6x^2 + 24x + 8$; $3x^2 + 24x + 16$;

$9x^2 + 24x + 16$; $9x^2 + 16$; $9x^2 + 12x + 16$.

14. Développe les expressions suivantes :
a. $(x + 1)^2$; $(5x + 2)^2$; $(3 + 2x)^2$;
b. $(x - 3)^2$; $(5 - 41)^2$; $(2x - 3)^2$;
c. $(3a + b)^2$; $(a - 2b)^2$; $(a2 - 3)^2$;
d. $(-10x + 3)^2$; $(-2x - 1)^2$; $(-3x + 2)(-3x + 2)$
e. $(\frac{1}{2}x + 1)^2$; $(\frac{3}{2}x - 7)^2$; $(\frac{4x}{3} - \frac{1}{2})(\frac{4x}{3} - \frac{1}{2})^2$
f. $(\frac{1}{4}x - 3)(\frac{1}{4}x + 3)$; $(\frac{4x}{3} - \frac{1}{2})(\frac{4x}{3} + \frac{1}{2})$
g. $(3x - 2)(3x + 2)$

15. a) Parmi les expressions
$2 - x$; $x - 2$; $-2 + x$; $-x + 2$.
Lesquelles sont égales ?
Lesquelles sont opposées ?
b) Compare $(x - 2)^2$ et $(-x + 2)^2$
c) Compare $(2 - x)(2 + x)$ et $(x - 2)(2 + x)$
d) Prouve que le produit $(2 - x)(-2 + x)$ est négatif.

16. a) En remarquant que $101 = 100 + 1$ et $99 = 100 - 1$ applique les identités remarquables pour calculer 101^2 ; 99^2 ; 101×99.
b) En suivant la même méthode, calcule
512 ; 982 ; 104×96.

17. $A = (5\sqrt{3} - 1)^2$

Ecris A sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

Factorisation

18. Mets en facteurs, dans chacun des cas :
a) $5x + 25$ b) $-12x + 18$ c) $12x^2 - 16$
d) $-9x + 3$ e) $4x + 6$ f) $2x^2 - 4x3 - 8x^2$
g) $4\pi x - 6\pi x^2$ h) $\frac{a^2}{3} - 5a$

19. Factorise les expression suivantes:
a. $(2x - 3)(x + 2) - 5(2x - 3)$
b. $(3x - 2)4x + 3x - 2$
c. $(4x - 3)(2x - 3) - (4x - 3)$
d. $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$
e. $(3x - 2)^2 -4 (3x - 2)$
f. $(3 - 4x)(2x -3) - 3(2x - 3)^2$

20. Recopie et complète les factorisations
a) $x^2 - 4 = (\ldots)^2 - (\ldots)^2 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$
b) $4x^2 - 9 = (\ldots)^2 - (\ldots)^2 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$
c) $\frac{1}{4}x^2 - 9 = (\ldots)^2 - (\ldots)^2 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$
d) $16 - x^2 = [\ldots]^2 - [\ldots]^2 = [\ldots + \ldots][\ldots - \ldots]$

21. Factorise les expressions suivantes :
a) $16x^2 - 25$ b) $121x^2 - 9$
c) $9 - 4y^2$ d) $25a^2 - 1$
e) $1 - \frac{x^2}{16}$ f) $\frac{4}{9} - x^2$
g) $(x - 1)^2 - 9$ h) $16 - (2x + 3)^2$
i) $x^2 - (3x + 2)^2$ j) $4x^2 - (x + 5)^2$
k) $(2x - 3)^2 - (x - 1)^2$ l) $(5x + 1)^2 - (x - 1)^2$
m) $(3 - 2x)^2 - (7x + 3)^2$ n) $9(x + 1) -25(x - 2)^2$

22. Calcule les différences de carrés en appliquant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
a) $27^2 - 3^2$ b) $98^2 - 2^2$ c) $999^2 - 1$
d) $85^2 - 15^2$ e) $58^2 - 57^2$

23. Recopie et complète
a) $4x^2 + 4x + 1 = (..)^2 + 2 \times \ldots \times \ldots + (\ldots)^2 = (\ldots)^2$
b) $4x^2 - 12x + 9 = (..)^2 - 2 \times \ldots \times \ldots + (\ldots)^2$

24. Ecris les expressions suivantes sous forme de carrés.
$A = 16x2 + 8x + 1$ $B = 25x2 -30x + 9$
$C = 9x2 -12x + 4$ $D = 81 -36x + 4x2$
$E = \frac{1}{4}x2 + x + 1$ $F = 9x2 - 3x + \frac{1}{4}$
$G = 0{,}25x2 + 2x + 4$ $H = x2 -1{,}2x + 0{,}36$
$I = x2 + 2\sqrt{3}x + 3$ $J = x2 -2\sqrt{5}x + 5$

25. Factorisation en plusieurs étapes.
On donne $A = 4x^2 - 28x + 49 -3(2x - 7)$
a) Vérifie que $4x^2 - 28x + 49$ est le développement d'un carré.
b) Factorise A.

26. Transforme les expressions de façon à faire apparaître un facteur commun, puis factorise.
a.) $25x^2 - 81 + (2 - x)(5x + 9)$
b.) $(x^2 - 25) -x (x + 5)$
c.) $25x^2 - 10x + 1 + (5x - 1)(x - 3)$
d.) $(x^2 + 2x + 1)\ 25) -2x -2$
e.) $(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 + (3x + 2)(x - 5)$

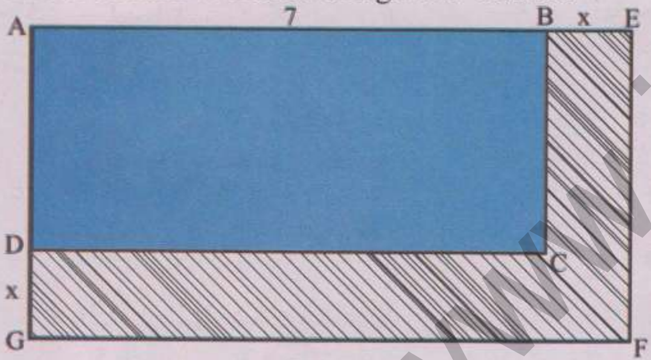
Equation du type A.B = 0

27. A) Résous les équations suivantes :
a.) $(x + 2)(x - 4) = 0$

b.) $(-x - 3)(2x - 5) = 0$
c.) $2x(3x - 5) = 0$
d.) $(x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{3}) = 0$
e.) $(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4})(\frac{3}{5} - 2) = 0$
f.) $(2x - 3\sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{6}) = 0$

B) Résous en se ramenant à une équation produit
a.) $4x^2 - 2x = 0$
b.) $(3x - 5)2 - (3x - 5) = 0$
c.) $(2x + 3)(x - 1) + 5(2x + 3) = 0$
d.) $(5x + 7)(2x + 3) + (5x + 7)2 = 0$
e.) $4x^2 - 9 = 0$
f.) $2x^2 - 9 = 0$
g.) $(x + 1)2 - 9 = 0$
h.) $4x^2 - 25 + (2x - 5)(x + 3) = 0$.

28. Pour ajuster le salon de Mamadou de forme rectangulaire ABCD tel que AB = 7m et AD = 3m, on augmente la longueur et la largeur de ce rectangle de x mètres, on obtient un nouveau salon AEFG comme le montre la figure ci-dessous



a. Exprime en fonction de x, le périmètre $\mathscr{P}$ et l'aire $\mathscr{A}$ de la surface augmentée.
b. Calcule la valeur de x pour laquelle $\mathscr{P}$ est égal à 22m.
Calcule $\mathscr{A}$ pour cette valeur.

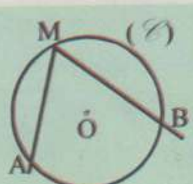
29. ABCD étant un carré de côté 10 cm, on place un point E sur le segment [AD] et un point F sur la demi-droite [AB), ED = x.

a) Faire un dessin à l'échelle $\frac{1}{2}$.
b) Exprime AE et AF en fonction de x.
c) Exprime EF en fonction de x.
d) Calcule EF pour x = 0 et pour x = 10.
e) Interprète géométriquement les résultats
f) Calcule EF pour $x = 2\sqrt{7}$.

30. Le bon choix
On considère l'expression
$A = (4x - 5)^2 - (3x - 1)(4x - 5)$.
a) Développe et réduis A.
b) Factorise l'expression A
c) Développe l'expression factorisée du b. Vérifie que le résultat est celui de a.
d) Calcule A pour les valeurs suivantes de x
$0 ; 1 ; \frac{5}{4} ; 4 ; \frac{1}{3} ; 10^4$.
Dans chaque cas, choisi l'écriture de A qui vous apparaît la mieux adaptée au calcul.

6 Angles

Je me souviens



1) Angle inscrit

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O.

A , B et M sont trois points du cercle $\mathscr{C}$.

- L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle ….. dans le cercle $\mathscr{C}$.
- Dans chacun des cas suivants, dis si l'angle tracé est un angle inscrit dans le cercle.

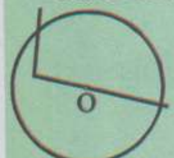


Fig.1

Fig.2

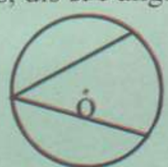


Fig.3

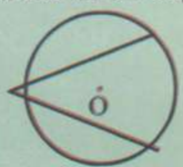


Fig.4

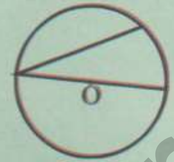
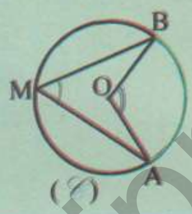


Fig.5

2) Arc intercepté par un angle inscrit

Sur la figure donne :

- l'arc qui intercepte l'angle $\widehat{AMB}$
- l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



Je vais plus loin

Activité 1 :

Angle inscrit dans un cercle

1) **Cas d'un angle aigu**

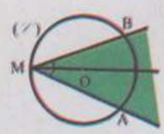
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O. A, B et M sont trois points de $\mathscr{C}$.

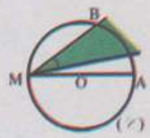
a) Sur la figure ci-contre, [AM] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

- Justifie que $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

(Tu pourras utiliser le triangle isocèle MOB)

b) Dans les deux cas ci-contre,

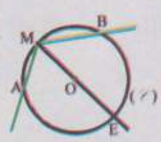




- Justifie que $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

2) **Cas d'un angle obtus**

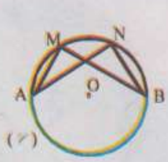
$\widehat{AMB}$ est un angle obtus inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. [EM] est un diamètre de $\mathscr{C}$.



- Justifie que : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}(\widehat{AOE} + \widehat{EOB})$.
- Justifie que $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

Activité 2 :

Angles inscrits interceptant le même arc



Dans chacun des cas ci-contre, $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ deux angles inscrits qui interceptent le même arc. Justifie que : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

Activité 3 :

Angles inscrits et configurations du plan

1) **Polygone régulier**

ABCDE est un pentagone régulier.

- Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACE}$;

(Tu peux calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOE}$.)

- Quelle est la mesure de chacun des angles aux sommets de ce pentagone?
- D'une façon générale, on considère un polygone régulier ayant n côtés (n entier naturel supérieur ou égal à 3).
  Exprime en fonction de n les mesures de chacun de ses angles.

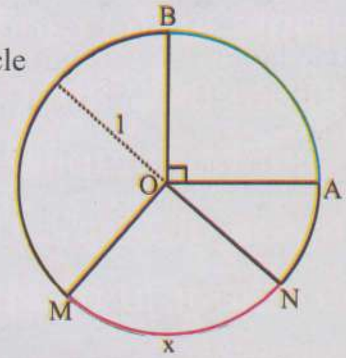
2) **Quadrilatère inscriptible dans un cercle**

A, B, M et N sont des points d'un cercle $\mathscr{C}(O\ ;\ r)$ tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit aigu et l'angle $\widehat{ANB}$ soit obtus.

- Exprime les mesures de $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ en fonction de la mesure de $\widehat{AOB}$.
- Justifie que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.
- Démontre de même que les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{MBN}$ sont supplémentaires.

Activité 4 :

Mesure des angles en radian



Dans le plan, une unité étant choisie, on considère un cercle de centre O et de rayon 1.

Trouve le périmètre de ce cercle, la longueur du demi-cercle et celle du quart de ce cercle.

On définit ainsi une nouvelle unité de mesure des angles appelée le radian (le quart de cercle étant un arc intercepté par l'angle droit et le demi-cercle intercepté par l'angle plat…)

Dans cette unité l'arc de cercle et l'angle au centre qui l'intercepte $\widehat{MON}$ *sont mesurés par le même nombre.*

a) Trouve approximativement ce nombre pour l'angle $\widehat{MON}$.

b) Complète le tableau suivant :

Mesure en degré	180	90	60	45	30	0	x
Mesure en radian	π						y

c) Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

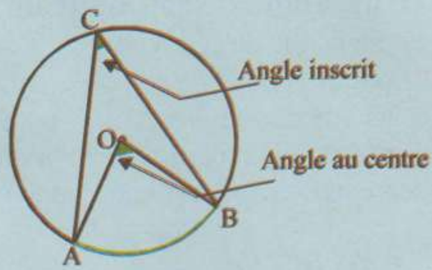
d) Trouve la relation qui permet de calculer x en fonction de y ou y en fonction de x.

e) Donne une conclusion

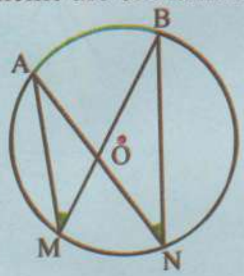
Je retiens

1. Angle inscrit dans un cercle

L'angle $\widehat{BCA}$ dont le sommet C est sur un cercle et les côtés [BC] et [AC] sont deux cordes de ce cercle est un angle inscrit dans ce cercle.
Un angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc

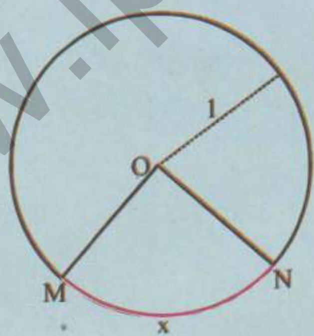


2. Angles interceptés par le même arc

Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.	Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.
	
$\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$. Donc $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ ont même mesure	Longueur de $\overset{\frown}{AB}$ = longueur de $\overset{\frown}{CD}$ Donc $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CND}$ ont même mesure

3. Mesure d'un angle en radian

La mesure en radian d'un angle $\widehat{MON}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1 (appelé cercle unité).



4. Mesure en radian et mesure en degré

Dans le cercle unité π radian correspond à 180°, cette correspondance permet de convertir les degrés en radian et réciproquement.
Le tableau de proportionnalité suivant illustre cette correspondance.

Mesure en degré	180	90	60	45	30	0	x
Mesure en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{180}\times x$

Exemple : la mesure y, en radian, d'un angle de 76 degrés est calculé par la formule :

$y = \frac{\pi}{180}\times 76$, d'où $y = \frac{19\pi}{45}$

La mesure x, en degré, d'un angle de 1,24 radian est calculée par la formule $x = \frac{180}{\pi}\times 1{,}24$,

d'où $x \approx 71°$

Je sais faire

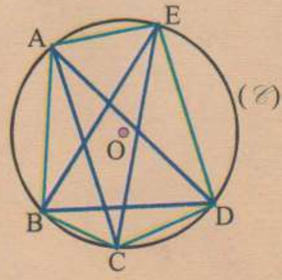
1. Reconnaître un angle inscrit dans un cercle

Exercice 1: $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O.

A ; B ; C ; D et E sont des points de ce cercle.

a) Cite les angles inscrits de sommet A.

b) Cite les angles inscrits ayant pour sommet un point autre que A et qui interceptent le même arc qu'un angle inscrit de sommet A.

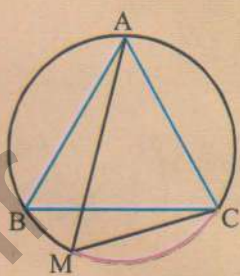


2. Donner la mesure d'angles interceptés par le même arc

Exercice 2: Soit ABC un triangle équilatéral, et soit M, un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle circonscrit à ABC.

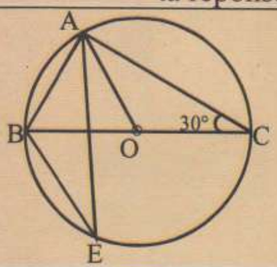
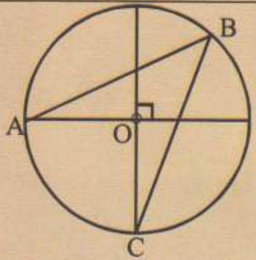
Quelles sont les mesures des angles :

$\widehat{AMB}$; $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$.



3. Mesurer des angles en utilisant le radian

Exercice 3: Parmi les propositions suivantes mets une croix au dessous de celle qui est vraie, puis justifie ta réponse.

	$O\hat{A}B = 60°$	$A\hat{E}B = 30°$	$A\hat{B}E = 90°$	$B\hat{A}C = 90°$	$A\hat{O}B = 60°$
 L'angle $A\hat{B}C$ mesure	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	75°	45°

4. Convertir des mesures d'angles données en degré en radian et vice versa

Exercice 2: a) donne les mesures des angles suivants en radian 50° ; 120° ; 150° ; 270°.

b) donne les mesures des angles suivants en degré $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{3}$; 2π.

CORRECTION

1. a) Les angles inscrits de sommet A, sont :

$\widehat{BAD}$; $\widehat{BAC}$; $\widehat{BAE}$.

c) Voici les angles inscrits ayant un autre sommet que A et interceptant le même arc :

- $\widehat{BAC}$; $\widehat{BEC}$; $\widehat{BDC}$.
- $\widehat{CAD}$; $\widehat{CED}$; $\widehat{CBD}$
- $\widehat{BAD}$; $\widehat{BED}$.

2. a) l'angle $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, donc ils ont même mesure : $\widehat{AMB} = 60°$.

b) De même $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$, donc ils ont même mesure :
$\widehat{AMC} = 60°$.

c) Le même raisonnement donne : $\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{AMC} = 60° + 60° = 120°$

3. Voici les réponses dans le tableau

	$\widehat{OAB} = 60°$ Car : $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 60°$ (angle inscrit de sommet C) d'une part, d'autre part OAB est isocèle en O, d'où $\widehat{OAB} = 60°$	$\widehat{AEB} = 30°$ $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ACB}$ sont interceptés par le même arc $\overset{\frown}{AB}$, donc ils ont même mesure qui est 30°.	$\widehat{ABE} = 90°$	$\widehat{BAC} = 90°$ ABC est un triangle inscrit dans un cercle dont le côté [BC] est un diamètre de ce cercle. Donc ce triangle est rectangle en A.	$\widehat{AOB} = 60°$ Angle inscrit au centre est le double de l'angle inscrit dans le cercle ayant même arc $\overset{\frown}{AB}$
L'angle $\widehat{ABC}$ mesure	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$ $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ $= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$	75°	45° $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ $\frac{1}{2} \times 90° = 45°$

4. On donne les conversions demandées dans les deux tableaux suivants :

Degré	50°	120°	150°	270°
Radian	$\frac{\pi}{180} \times 50 = \frac{5\pi}{18}$ radian	$\frac{\pi}{180} \times 120 = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{180} \times 150 = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180} \times 270 = \frac{3\pi}{2}$

Radian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π
Degré	$\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{12} = 15°$	$\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{5} = 36°$	$\frac{180}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120°$	$\frac{180}{\pi} \times 2\pi = 360°$

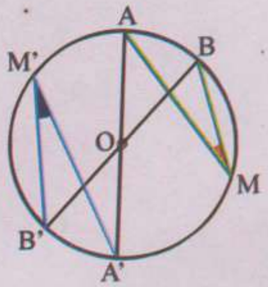
Je m'exerce

Angles inscrits

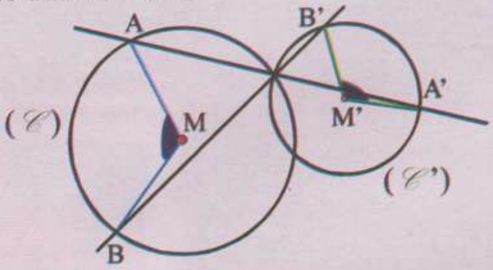
1. Dans les deux cas, prouve que:

$\widehat{AMB} = \widehat{A'M'B'}$

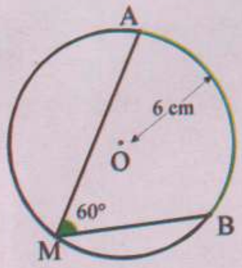
Cas 1 : O est le centre du cercle.

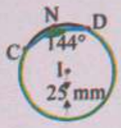


Cas 2 : M et M' sont les centres des cercles.



2. Prouve que les deux arcs de cercle verts ont la même longueur.





3. a) Trace un triangle équilatéral LMN, puis son cercle circonscrit de centre O.

Soit R un point du petit arc $\overset{\frown}{LM}$ de ce cercle.

Quelles sont les mesures, en degré, des angles $\widehat{LRM}$; $\widehat{LRN}$ et $\widehat{MRN}$?

Que peut-on en déduire pour la demi-droite [RN) ?

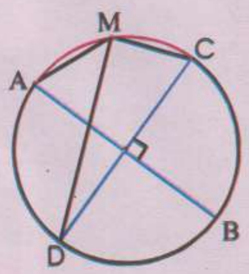
b) Trace un triangle ABC tel que :

AB = 5 cm ; BC = 6 cm et AC = 7 cm.

Soit O le centre de son cercle circonscrit.

Cite trois paires d'angles dont l'un est le double de l'autre.

4. Soit (AB) et (CD) deux diamètres perpendiculaires d'un cercle, et soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.



Quelles sont les mesures des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMD}$, $\widehat{DMC}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{AMC}$?

5. On considère un triangle ABC ayant trois angles aigus et son cercle circonscrit de centre O.

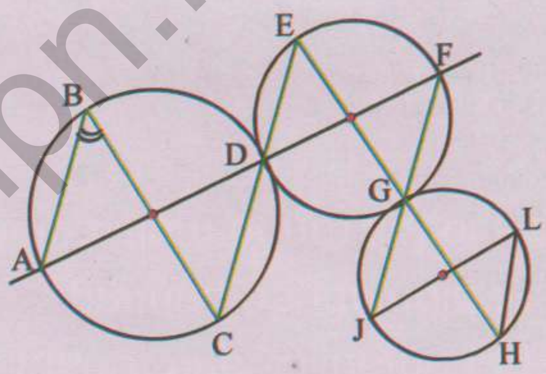
Compare les mesures respectives des angles $\widehat{AOB}$; $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ avec celles de $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBA}$.

6. Soit un triangle ABC rectangle en A. On désigne par I le milieu de l'hypoténuse.

a) En considérant le cercle circonscrit au triangle ABC, Démontre que : $\widehat{AIC} = 2 \times \widehat{ABC}$.

b) Quelle autre relation de ce genre peut-on démontrer ?

7. Que peut-on dire des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{HLJ}$? Pourquoi ?



8. 𝒞 est un cercle de centre O et de diamètre [AB]. C est un point de 𝒞 distinct de A et B.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe 𝒞 en D.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ recoupe 𝒞 en F.

Compare les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DAB}$.

Démontre que le triangle BDC est isocèle.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DBF}$?

Démontre que les droites (DO) et (FO) sont perpendiculaires.

9. On donne un cercle 𝒞 de centre O.

A et B sont deux points de ce cercle qui ne sont pas diamétralement opposés.

a) Place trois points M_1 ; M_2 et M_3 tels que les angles $\widehat{AM_1B}$; $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{AM_3B}$ soient des angles aigus inscrits dans le cercle 𝒞.

Où se trouvent tous les points M du plan tels que

$\widehat{AMB}$ soit un angle aigu inscrit dans $\mathscr{C}$?
b) Place trois points N_1 ; N_2 et N_3 tels que les angles $\widehat{AN_1B}; \widehat{AN_2B}$ et $\widehat{AN_3B}$ soient des angles obtus inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$.
Où se trouvent tous les points N du plan tels que $\widehat{ANB}$ soit un angle obtus inscrit dans $\mathscr{C}$.

10. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, [AB] une corde ne passant pas par O et E un point de l'arc $\overset{\smile}{AB}$.
La bissectrice de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ coupe l'arc $\overset{\frown}{AB}$ au point F.
Compare les mesures de $\widehat{AOF}$ et $\widehat{AEB}$.

11. ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O tel que : $\widehat{AOF} = 30°$ et $\widehat{CAB} = 45°$
Calcule la mesure de chacun des angles :
$\widehat{DOB}$; $\widehat{BOC}$; $\widehat{ODA}$; $\widehat{DAO}$; $\widehat{OCB}$ et $\widehat{OBC}$.

12. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont deux cercles de centre O, de rayons respectifs r et r' (r < r').
A et B sont deux points de $\mathscr{C}$ non diamétralement opposés.
[AO) coupe $\mathscr{C}$' au point A' et [BO) coupe $\mathscr{C}$' au point B.
M est un point de $\overset{\frown}{AB}$ et N un point de $\overset{\smile}{A'B'}$
Démontre que : $\widehat{AMB} = \widehat{A'NB'}$.

13. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O.
ABC est un triangle isocèle en A et inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$. (d) et (l) sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
(d) et (l) recoupent $\mathscr{C}$ respectivement aux points M et N. Démontre que : $\widehat{ANC} = \widehat{AMB}$.

14. On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. ABC est un triangle inscrit dans ce cercle tel que :
$\widehat{ABC} = 85°$ et $\widehat{BCA} = 50°$.
Fais une esquisse
Calcule la mesure de $\widehat{BOC}$ et détermine la nature du triangle BOC.
Donne un programme de construction du triangle ABC.

15. [AB] est un diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$.
La médiatrice de [AB] coupe le cercle $\mathscr{C}$ aux points I et J.
P est un point de l'arc $\overset{\frown}{AJ}$, distinct de A et de J.
Le point M est le projeté orthogonal de A sur (PI).
Démontre que le triangle AMP est isocèle.

16. ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ au point A'.
[A'B'] est la corde de $\mathscr{C}$ telle que (A'B') est parallèle à (AB).
Démontre que (B'C)//(AA').

17. Les polygones suivants sont des polygones réguliers inscrits dans un cercle.
Complète le tableau ci-dessous :

Polygone	Angle au Centre en radian	Angle au sommet en °
Pentagone		
Hexagone		
Octogone		
Ennéagone		
dodécagone		

18. ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.
[AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$ et [AH] est une hauteur du triangle ABC.
La bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en E.
Compare les angles des triangles AHC et ABD.
Démontre que (AE) est la bissectrice de $\widehat{DAH}$.

19. [AC] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.
[AB] est une corde de $\mathscr{C}$ telle que : AB = r.
La médiatrice de [AB] coupe l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en J.
Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère ACBJ.

Approfondissement

20. ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$
[AA'] est un diamètre de $\mathscr{C}$ et [AH] une hauteur du triangle ABC.
Démontre que : AB × AC = AH × AA'.

21. ABC est un triangle dont les trois angles sont aigus ; H est l'orthocentre de ce triangle. $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit à ABC.
Les droites (AH) ; (BH) et (CH) recoupent $\mathscr{C}$ respectivement aux points M, N et P.

a) Démontre que : $A\hat{B}N = P\hat{C}A$.

b) Justifie que (AM) est la bissectrice de $P\hat{M}N$.

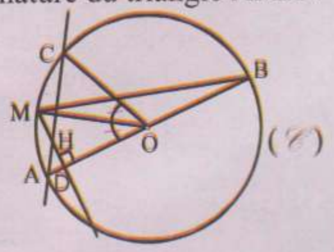
22. [AB] est un diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. C est un point de ce cercle tel que $A\hat{O}C$ soit un angle aigu.

(OM) est la bissectrice de l'angle $A\hat{O}C$ et M est un point de $\overset{\frown}{AC}$.

Le point D est le projeté orthogonal de M sur (AB).

La droite (AC) coupe (MD) en H.

Quelle est la nature du triangle AMH ?



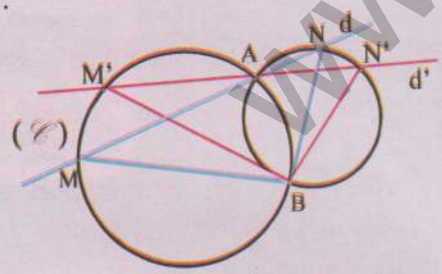
23. Trace un cercle et un triangle ABC dont les sommets appartiennent à ce cercle.

La bissectrice de $B\hat{A}C$ coupe l'arc $\overset{\frown}{BC}$ en I.

Démontre que le triangle BIC est isocèle en I.

Que dites- vous du triangle BIC dans le cas où ABC est rectangle.

24. Deux cercles sont sécants en A et B. Une droite (d) passant par A coupe ces cercles en M et N. Une autre droite (d') passant par A coupe ces cercles en M' et N'.



Démontre que les angles $M\hat{B}N$ et $M'\hat{B}N'$ ont même mesure.

25. [AB] est un diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

C est un point de ce cercle. La tangente en C au cercle $\mathscr{C}$ coupe (AB) en M.

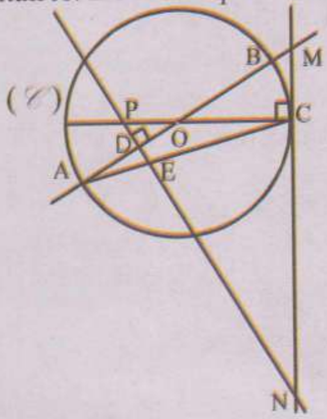
D est un point de (OA) et la droite perpendiculaire à (AB) passant par D coupe (AC) en E, (CM) en N et (OC) en P.

Dans le cas de la figure ci-contre :

a) Démontre que : $C\hat{O}B = C\hat{N}P$.

Justifie que : $C\hat{A}B = \frac{1}{2}C\hat{N}P$.

b) Démontre que les angles $C\hat{N}D$ et $D\hat{O}C$ sont supplémentaires. De même pour $D\hat{E}C$ et $D\hat{B}C$.



26. ABC est un triangle. [AI], [BJ] et [CK] sont les trois hauteurs et H l'orthocentre de ce triangle.

Justifie que les points H, I, C et J appartiennent à un même cercle ainsi que les points H, I, B et K.

Démontre que (AI) est la bissectrice de $J\hat{I}K$.

Justifie que H est le centre du cercle inscrit dans le triangle IJK.

27. [PQ] est un diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ de rayon r. A et B sont deux points de $\mathscr{C}$, H est le projeté orthogonal de P sur (AB).

Démontre que : $PA \times PB = 2r \times PH$.

28. ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.

Démontre que le produit de la distance de E à (AB) et de la distance de E à (CD) est égal au produit de la distance de E à (BC) et de la distance de E à (AD).

29. ABCDE est un pentagone régulier de côté a inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.

Les droites (AB) et (CD) se coupent au point I.

On pose AC = d.

a) Calcule la mesure de chacun des angles du triangle BIC et donne la nature du triangle BIC.

b) Démontre que le quadrilatère EBIC est un losange. Justifie que : IB = IC = d.

c) Démontre que : $\frac{ID}{IC} = \frac{AD}{BC}$.

Justifie que : $a^2 + ad = d^2$

7 Système d'équations et d'inéquations

Je me souviens

- On donne la fonction $x \longmapsto 2x + 1$ (appelée fonction affine).
- Que représente graphiquement cette fonction ?. Ecris l'équation correspondante.
- Choisis deux points A, B et un repère, puis écris l'équation correspondante.
- On désigne par A l'expression : $2x + y - 6$.
- Donne deux couples tels que $A > 0$
- Donne deux couples tels que $A = 0$
- Donne deux couples tels que $A < 0$
- Que représentent les couples de nombres pour lesquels A est nul?
- Que représentent les couples de nombres pour lesquels A est positif?
- Que représentent les couples de nombres pour lesquels A est négatif?

Je vais plus loin

Activité 1 :

Résolution par substitution

Dans un super marché du quartier, Doudou, un employé a livré des bouteilles de jus de mangue à 120 UM l'une et des bouteilles de jus de pomme à130 UM l'une.

Le patron lui demande combien il a livré de bouteilles de chaque variété.

Doudou se souvient seulement qu'il a livré en tout 9 bouteilles et que le client devait payer1130 UM.

- Aide Doudou à répondre aux questions suivantes :

Soit x le nombre de bouteilles de jus de mangue.

Soit y le nombre de bouteilles de jus pomme.

a) Traduis la phrase « Doudou a livré en tout 9 bouteille par une relation entre x et y.

b) Traduis la phrase « le client devait 1130 UM par une relation entre x et y.

c) Traduis l'énoncé du problème par un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} .... + ... = 9 & \rightarrow 1 \\ .... + ... = 1130 & \rightarrow 2 \end{cases}$$

Pour $x = 6$ et $y = 3$, l'équation (1) est elle vérifiée ? l'équation 2 est elle vérifiée.

d) Doudou livre-t-il 6 bouteilles de jus de mangue et 3 bouteilles de jus de pomme?

e) Essaie d'autres valeurs pour trouver la solution.

f) Exprime y en fonction de x à l'aide de l'équation (1).

Exprime y par l'expression trouvée dans l'équation (2), puis résous l'équation obtenue.

g) Calcule la valeur de y.

h) Complète le texte suivant : d'après les calculs effectués, si le couple (x ; y) est solution du système, alors x = … et y = …..

Vérifie que le couple (x ; y) trouvé est solution du système.

i) Donne la réponse à la question posée par le patron de Doudou.

Cette démarche est appelée méthode par substitution.

Activité 2 :

Résolution par combinaison

Faisant ensemble leurs courses au marché pour les préparatifs de la fête de Tabaski, Hafsatou et Khadija, ont acheté les mêmes boucles d'oreilles et barrettes.

Hafsatou a pris 4 paires de boucles d'oreilles et 3 barrettes, elle a payé 2 300 UM.

Khadija a pris 2 paires de boucles d'oreilles et 5 barrettes, elle a payé 1 500 UM.

Aide les filles à trouver, le prix d'une paire de boucles d'oreilles et celui d'une barrette. Pour cela, répond aux questions suivantes :

a) Soit x le prix d'une paire de boucles d'oreilles

Soit y le prix d'une paire de barrettes.

Ecris le système dont (x ; y) est solution de : $\begin{cases} .... + ... = 2300 & \rightarrow 1 \\ .... + ... = 1500 & \rightarrow 2 \end{cases}$

b) Ecris l'équation (2') obtenue en multipliant les deux membres de l'équation (2) par (-2).

c) Additionne membre à membre les équations (1) et (2') ; on obtient une nouvelle équation. Qu'observes-tu ? Calcule y.

d) Ecris l'équation (1') obtenue en multipliant les deux membres de l'équation (1) par (5) et (2'') obtenue en multipliant les deux membres de l'équation 2 par -3.

Donne sou forme : $\begin{cases} .... + ... = 2300 \times 5 & \rightarrow (1') \\ .... + ... = 1500 \times (-3) & \rightarrow (2'') \end{cases}$

En additionnant membre à membre ces deux équations, calcule x.

e) Vérifie que le couple (x ; y) est solution du système puis rédige la réponse à la question posée.

Activité 3 :

Interprétation graphique

On veut déterminer graphiquement toutes les façons à obtenir une somme de 150UM avec seulement des pièces de 20 UM et de 10UM.

On note x le nombre de pièces de 20 UM et y le nombre de pièces de 10 UM.

a) Traduis la somme totale de 150 UM par une relation de la forme y = ax + b.

b) Trace dans un repère (prendre pour unité de longueur 0,5 cm et si possible utilise le papier millimétré) la droite d'équation y = ax + b trouvée dans a).

c) Donne les points de la droite qui représente les couples (x ; y) solution du problème posé. Marque ces points en couleur de votre choix.

d) Donne toutes les façons à obtenir 150 UM avec des pièces de 20 UM et 10 UM.

e) On veut déterminer graphiquement toutes les façons d'obtenir une somme de 150 UM avec les seules pièces de 20UM et 10 UM et une somme de 21 UM avec les seuls pièces de 1 UM et 5 UM.

- Donne le système correspondant à ces données.
- Ecris les deux équations du système sous la forme y = ax + b.
  On obtient deux équations de droites d_1 et d_2.
- Dans le même repère du plan ; trace les deux droites d_1 et d_2 , elle sont sécantes en A ; lis les coordonnés de A sur le graphique.
- Que représentent les coordonnées de A pour le système ?
  y a-t-il plusieurs solutions ? Vérifie par le calcul la solution lue sur le graphique.

Activité 4 : ***Résolution de système d'inéquations***

Pour offrir des cadeaux à ses six camarades, Dahaba veut acheter des crayons à 50 UM, le crayon et des cahiers à 80 UM, le cahier.

Il a en tout 500 UM, et il veut offrir au moins un objet à chacun.

Quelles sont toutes les solutions possibles ?

Pour cela réponds aux questions suivantes:

a) Traduis les données de l'énoncé sous forme de système d'inéquations.

b) Dans un repère du plan, trace la droite d_1 d'équation $y = \frac{-5}{8}x + \frac{50}{8}$ et détermine le demi- plan (P_1) formé par $50x + 80y < 500$.

c) Trace la droite d_2 d'équation $y = -x + 6$ et détermine le demi-plan (P_2) formé par $x + y > 6$.

d) Détermine l'intersection des deux demi-plans (P_1) et (P_2) à l'exclusion des droites d_1 et d_2.

e) Quelles sont toutes les solutions possibles ?

Je retiens

1. Equation du 1^er^ degré à deux inconnues

Une équation du 1er degré à deux inconnues x et y est une équation de la forme **ax + by = c** ou a ; b ; c sont des réels ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) les solutions sont tous les couples (x ; y) pour lesquels l'égalité ax + by = c est vérifiée.

Exemple : $3x + 2y = 5$ est une équation du 1er degré à 2 inconnues x et y.

- Si $x = 1$ et $y = 1$ on a : $3 \times 1 + 2 \times 1 = 5$.
  Le couple (1 ; 1) est solution de l'équation $3x + 2y = 5$.
- Si $x = 1$ et $y = 3$ on a : $3 \times 1 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$ $(9 \neq 5)$.

Donc le couple (1 ; 3) n'est pas solution de l'équation $3x + 2y = 5$.

Géométriquement les couples solutions sont les coordonnées (x ; y) des points M de la droite (d) d'équation $3x + 2y = 5$ ou $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$.

2. Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

Un regroupement de deux équations du 1er degré à deux inconnues telle que :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ S'appelle un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues.

Un couple de solutions d'un système vérifie en même temps les deux équations de ce système.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 5y = 4 & \rightarrow 1 \\ x - 2y = -7 & \rightarrow 2 \end{cases}$

Pour $x = -3$ et $y = 2$ on a (1) $2 \times (-3) + 5 \times 2 = -6 + 10 = 4$

(2) $-3 - 2 \times 2 = -3 - 4 = -7$

Le couple (-3 ; 2) est solution des deux équations, il est donc solution du système.

Résoudre un système c'est trouver toutes les solutions.

3. Méthode de résolution

a) Méthode par substitution

On exprime l'une des inconnues, en fonction de l'autre à l'aide de l'une des deux équations.

On reporte cette expression dans l'autre équation ; on résout l'équation à une seule inconnue ainsi obtenue, puis on calcule la valeur de l'autre inconnue.

Enfin, on vérifie que le couple de solution vérifie bien le système.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 5y = 4 & \rightarrow 1 \\ x - 2y = -7 & \rightarrow 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 5y = 4 & \rightarrow 1 \\ x = -7 + 2y & \rightarrow 2 \end{cases}$

On remplace x dans (1), on obtient :

$2(-7 + 2y) + 5y = 4 \rightarrow -14 + 4y + 5y = 4 \rightarrow 9y = 18 \rightarrow y = 2$

On calcule x :

$x = -7 + 2 \times 2 = -7 + 4 = -3$

Donc (-3 ; 2) est la solution du système.

b) Méthode par combinaison

On choisit un nombre de façon à ce que les termes en x (respectivement en y) s'annulent en additionnant membre à membre les deux équations, puis on calcule x (respectivement y).

On vérifie que le couple est bien solution.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 5y = 4 & \rightarrow 1 \\ x - 2y = -7 & \rightarrow 2 \end{cases}$

Calcul de x, on multiplie les deux membres de l'équation (2) par (-2), le système devient :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4 & (1) \\ -2x + 4y = 14 & (2) \end{cases}$$

On additionne membre à membre les équations, puis on calcule y.

$0x + 9y = 18 \rightarrow y = 2$

Calcul de x : on multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2, ceux de l'équation 2 par 5,

le système devient : $\begin{cases} 4x + 10y = 4 \\ 5x - 10y = -35 \end{cases}$

On additionne membre à membre

$$9x + 0y = -27 \rightarrow x = \frac{-27}{9} = -3$$

Vérification pour x = -3 et y = 2.

(1) $2(-3) + 5 \times 2 = -6 + 10 = 4$ donc (1) est vérifiée.

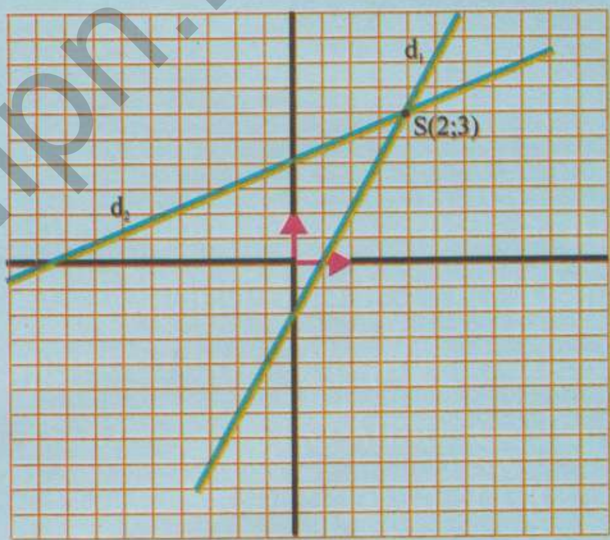
(2) $-3 - 2 \times 2 = -3 - 4 = -7$ donc (2) est vérifiée.

D'où (-3 ; 2) est solution du système.

c) Résolution graphique

Dans la solution graphique, on associe aux deux équations du système deux équations de droites. Les coordonnées des points d'intersections de ces deux droites, s'ils existent constituent alors la solution du système.

Exemple : $\begin{cases} 2x - y = 1 \quad ; \quad d_1 \text{ d'équation } y = 2x - 1 \\ -x + 2y = 4 \quad ; \quad d_2 \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$



Après la construction graphique, les coordonnés (2 ; 3) du point S sont les solutions du système.

Remarque : la résolution graphique, qui est souvent approximative permet cependant de contrôler les résultats obtenus par le calcul, d'anticiper l'existence ou non de solution du système.

4. Système d'inéquations du 1^er^ degré à deux inconnues

Résolution graphique du système $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x - 2y > -4 \end{cases}$

Résoudre ce système, c'est chercher graphiquement toutes les solutions communes aux deux inéquations

Le système peut s'écrire : $\begin{cases} y > 2x - 1 \\ y < \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

On trace les deux droites Δ : d'équation $y = 2x - 1$ et Δ' d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$.

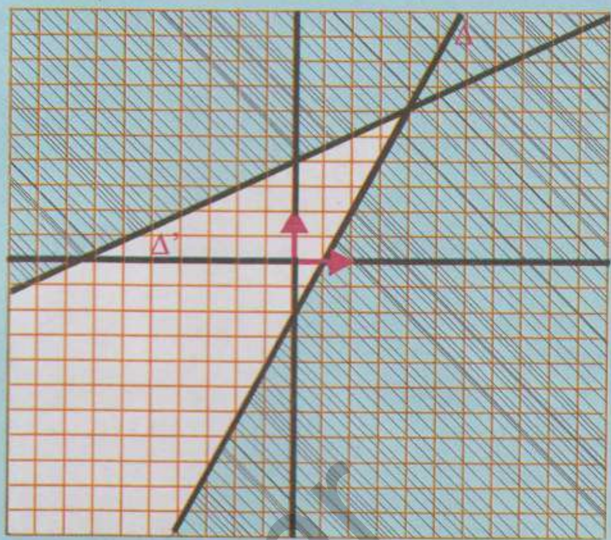
Pour chacune des inéquations on détermine les demi-plans qui correspondent aux solutions.
L'intersection des demi plans représente graphiquement l'ensemble des solutions du système des inéquations.

- Δ : $2x - 1$

$x = 0$; $y = -1$;
$x = 1$; $y = 1$;
$O(0 ;0)$; $2 \times 0 - 1 < 1$;
O est solution de l'inéquation $2x - y < 1$ (1)

- Δ' : $y = \frac{1}{2}x + 2$

$x = 0$; $y = 2$;
$x = 2$; $y = 3$
Pour l'inéquation : $x - 2y > -4$;
$0 - 0 > -4$
donc O est solution de l'inéquation (2).



La partie non hachurée est l'ensemble des solutions du système.
Les solutions graphiques du système correspondent à tous les points communs aux deux demi-plans (région non hachurée).

Je sais faire

1. Résoudre un système par substitution

Exercice 1: Résous le système $\begin{cases} x - y = 4 & \to (1) \\ 2x - 3y = 4 & \to (2) \end{cases}$ par la méthode de substitution

2. Résoudre un système par combinaison

Exercice 2: Résous le système $\begin{cases} 5x + 4y = 4 & \to (1) \\ -3x + y = -16 & \to (2) \end{cases}$

3. Résoudre graphiquement un système

Exercice 3: Interprète graphiquement le système $\begin{cases} 2x + y = 4 & \to (1) \\ -4x + 5y = 10 & \to (2) \end{cases}$

4. Résoudre un système d'inéquations du premier degré

Exercice 4: Moussa veut constituer un petit élevage, pour cela, il veut acheter plus de 8 poulets et canards ; (plus d'une volaille de chaque sorte) ; mais sa dépense doit être inférieure à 18 000 UM.

1) Sachant qu'un poulet coûte 1 500UM et un canard coûte 2 250UM.
   Quelles sont toutes les possibilités d'achat pour Moussa ?
2) Quel est le nombre minimal de poulets que Moussa peut acheter ?
3) Quelles sont les possibilités d'achat si Moussa veut acquérir plus de 3 canards ?

CORRECTION

1. Si (x ; y) sont les solutions du système, d'après (1) $x = y + 4$ (1')
On remplace dans (2), on obtient :
$2(y + 4) - 3y = -4$
$2y + 8 - 3y = -4$
$-y = -12$
$y = 12$
On remplace y dans (1') on obtient $x = 12 + 4 = 16$.
Donc le couple (16 ; 12) est la solution unique du système.

2. $\begin{cases} 5x + 4y = 5 & \to (1) \\ -3x + 8y = -16 & \to (2) \end{cases}$ on multiplie les deux membres de l'équation (1) par - 2

$\begin{cases} -10x - 8y = -10 & \to (1) \\ -3x + 8y = -16 & \to (2) \end{cases}$ on additionne membre à membre; puis on calcule x

$-13x = -26 \longrightarrow x = \dfrac{-26}{-13} = 2$

On multiplie les 2 membres de l'équation (1) par 3.
On multiplie les 2 membres de l'équation (2) par 5.

$\begin{cases} 15x + 12y = 15 \\ -15x + 40y = -80 \end{cases}$ On additionne membre à membre; puis on calcule y

$52y = -65 \longrightarrow y = \dfrac{-65}{52}$; donc le couple $(2 ; \dfrac{-65}{52})$ est la solution du système.

3. $\begin{cases} 2x + y = 4 & \to (1) \\ -4x + 5y = 10 & \to (2) \end{cases}$

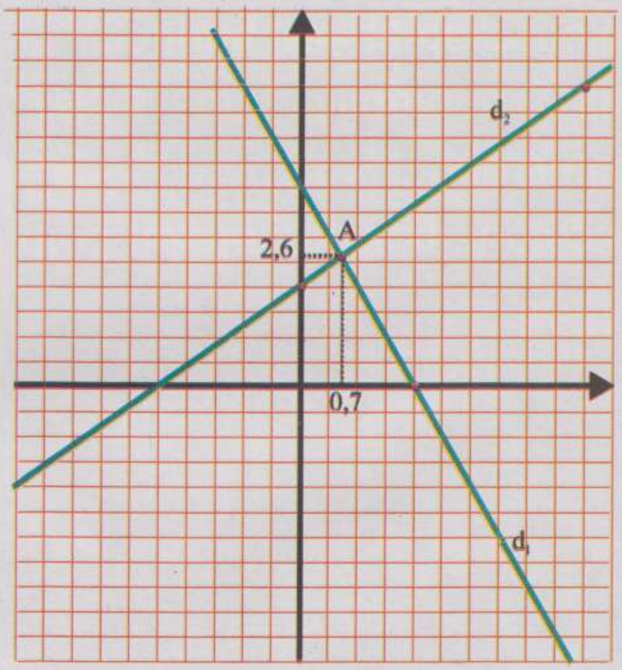
(1) $2x + y = 4 \longrightarrow y = -2x + 4$
les solutions de l'équation (1) sont représentées par la droite (d_1) d'équation $y = -2x + 4$.

(2) $-4x + 5y = 10 \longrightarrow y = \dfrac{4x}{5} + \dfrac{10}{5}$ $(y = \dfrac{4}{5}x + 2)$

les solutions de l'équation (2)sont représentées par la droite (d_2) d'équation : $y = \dfrac{4}{5}x + 2$.

Tracé de d_1 ; on choisit :
$x = 0 ; y = 4$
$x = 2 ; y = 0$

Tracé de d_2 ; on choisit
$x = 0 ; y = 2$
$x = \dfrac{-5}{2} ; y = 0$



d_1 et d_2 sont sécants en A ; le système a donc une seule solution ; le couple des coordonnées de A.
$x \approx 0,7$ et $y \approx 2,6$. La solution lue est une valeur approchée, par le calcul on trouve le couple solution exacte $x = \dfrac{5}{7}$ et $y = \dfrac{18}{7}$.

4. Choix de l'inconnue $\begin{cases} \text{x le nombre de poulets achetés (x entier plus grand que 1)} \\ \text{y le nombre de canards achetés (y entier plus grand que 1)} \end{cases}$

Mise en équation le nombre de volaille est plus grand que 8 : $x + y > 8$
le prix d'achat des volailles est plus petit que 18 000 UM. $1\,500x + 2\,250y < 18\,000$.

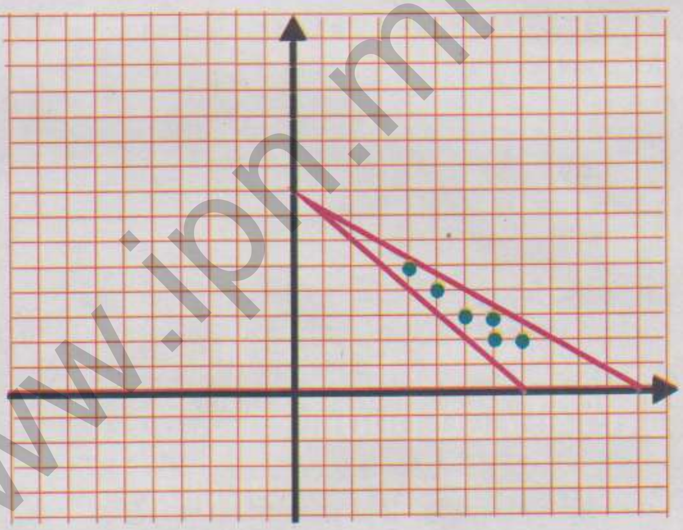
d'où le système : $\begin{cases} x + y > 8 \\ 1500x + 2250y < 1800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > 8 \\ 2x + 3y < 24 \end{cases}$

1) Les couples sont (4 ;5) , (5 ;4) , (6 ;3) , (7 ;3) , (7 ;2) , (8 ;2).
2) Moussa peut acheter au minimum 4 poulets.
3) Moussa a 2 possibilités pour acheter plus de 3 canards :
   4 canards et 5 poulets ou 5 canards et 4 poulets.

Résolution graphique

Possibilités :

- 4 poulets et 5 canards → 17 250 UM.
- 5 poulets et 4 canards →16 500 UM.
- 6 poulets et 3 canards →15 750 UM.
- 7 poulets et 3 canards →15 000 UM.
- 7 poulets et 2 canards → 17 250 UM.
- 8 poulets et 2 canards →16 500 UM.



Activité documentaire

La naissance de l'Algèbre

Au $IV^{ème}$ siècle, à Bagdad, le mathématicien **AL Khawarizmi(750- 850)** adresse au calife un fameux traité de Mathématique :
« L'abrégé du calcul par **AL- Jabr** et AL- Muqabala ».
Avec cet ouvrage, Al Khawarizmi peut être considéré comme le fondateur de l'algèbre[1], la science du calcul.
Il y décrit deux règles, **Al-Jabr** et **Al-Muqabala**, qui permettent de ramener certaines équations du premier ou du second degré à des équations de base pour lesquelles des algorithmes. de calcul était connus.

1. Le mot algèbre est une déformation du mot arabe Al- Jabr.
2. Le mot algorithme qui désigne un procédé de calcul est une déformation du nom de Al Khwarizmi.

La règle AL_Jabr Consiste à se débarrasser des termes à soustraire en ajoutant des termes égaux dans les deux membres de l'équation.

Par exemple :

$x^2 - 10x + 95 = x^2 + 5$

$x^2 - 10x + 10x + 95 = x^2 + 10x + 5$ **AL-Jabr**

$x^2 + 95 = x^2 + 10x + 5$

On se débarrasse du terme -10x en ajoutant + 10x dans les deux membres de l'équation et on simplifie.

La règle AL-Muqabal Consiste à se débarrasser des termes à soustraire en ajoutant des termes égaux dans les deux membres de l'équation.

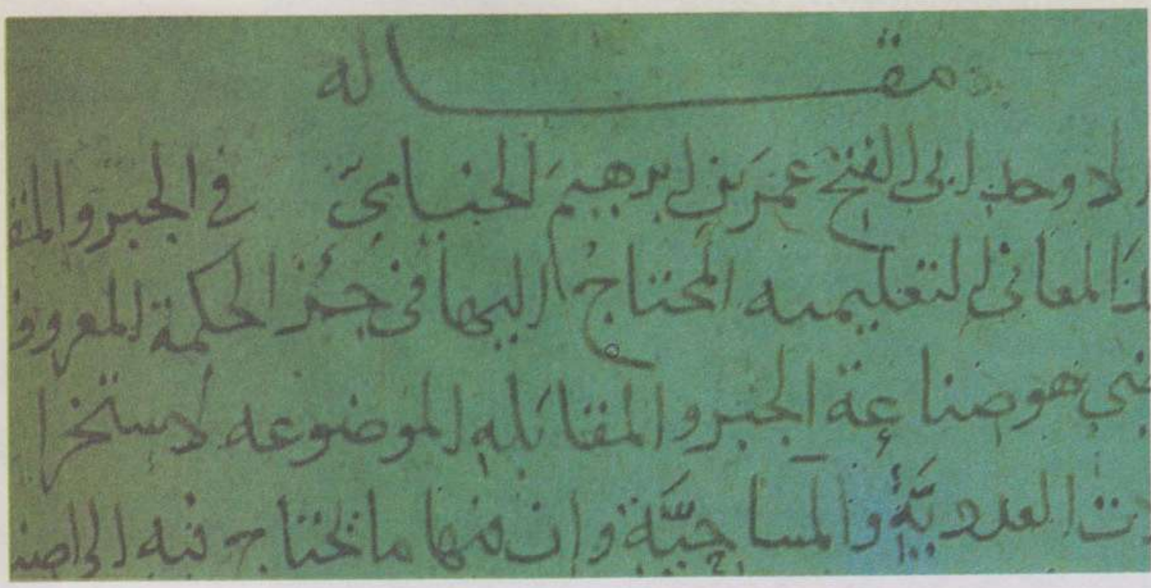
Avec l'équation trouvée ci-dessus, cela donnerait :

$x^2 + 95 = x^2 + 10x + 5$ **AL-Muqabala**

$90 = 10\,x$

On obtient une équation simple dont la solution est trouvée en posant la division.

On se débarrasse des termes égaux dans les deux membres de l'équation, ici : x^2 et 5.



مقاله
...لد وحيد ابى الفتح عمر بن ابرهيم الخيامى فى الجبر والمقـ...
...ذ المعانى لتعليمه المحتاج اليها فى جزء الحكمة المعروف...
...نى هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعة لاستخرا...
...ت العددية والمساحية وان فيها ما يحتاج فيه الى اصنا...

Démonstrations de problèmes d'Al-Jabr et d' Al-Muqabala par le poète et mathématicien Omar Khayam, XII^e siècle.

Je m'exerce

1. Parmi les couples (7 ; 0), (0 ; -10,5), (3 ; 1), (5 ;2), lequel est solution du système :
$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 5x-2y=21 \end{cases}$$

2. Parmi les couples ($\frac{17}{2}$;0), (7 ;2), (-2 ;7), lequel est solution du système ?
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=\frac{17}{3} \\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{59}{6} \end{cases}$$

3. Propose un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y qui a pour solution : x = 2 ; y = 5.

4. a) Dresse la liste des couples d'entiers naturels x, y tels que x + y = 7. Calcule dans chaque cas la valeur de l'expression 3x –y :
(x ;y) $\longmapsto$ 3x –y ;
(0 ;7) $\longmapsto$ -7 ;
(.. ;..) $\longmapsto$ .... ;

b) en déduis la solution du système $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-y=13 \end{cases}$

où x et y désignent des nombres entiers naturels.

Résolution graphique

5. Résous les systèmes suivants par la méthode de substitution :

a) $\begin{cases} y=x+1 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=-1 \\ 4x-3y=-7 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-5y=-8 \end{cases}$

6. Résous par substitution les systèmes :

a) $\begin{cases} y=1{,}2x \\ 6{,}4x-3{,}5y=18{,}7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u=2\sqrt{3} \\ 3u+5v=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2a-b=4 \\ 3a+5b=0 \end{cases}$

7. Résous les systèmes suivants par la méthode de combinaison.

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-5y=5 \\ -3x+y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 10x-3y=24 \\ 4x+5y=22 \end{cases}$

8. Résous le système suivant par combinaison après avoir simplifié les équations :

a) $\begin{cases} 3x+8y=120 \\ 25x-100y=250 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{18}y=\sqrt{50} \\ \sqrt{12}x+\sqrt{27}y=-4\sqrt{3} \end{cases}$

9. Résous les systèmes suivants selon la méthode de votre choix :

a) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 5x-2y=-6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y=2{,}7x+10{,}4 \\ y=1{,}5x-5{,}2 \end{cases}$

10. Sans résoudre les systèmes vérifie que les systèmes suivants ont même solution.

a) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 3x+6y=12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2(x+y)-3y=4 \\ 3(x+y)+3y=12 \end{cases}$

11. Transforme les équations du système suivant de façon à obtenir des équations à coefficients entiers, puis résous ce système.
$$\begin{cases} \frac{x}{3}x-\frac{5y}{12}=-2 \\ \frac{2x}{7}+\frac{y}{14}y=3 \end{cases}$$

12. a) Résous le système :
$$\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 5x+4y=-1 \end{cases}$$
b) en déduis la solution du système :
$$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 4x+5y=-1 \end{cases}$$

13. a) Résous le système :
$$\begin{cases} x+y=23 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$
b) Peut-on trouver deux nombres entiers dont la somme est 23 et tels que le triple de l'un est égal au double de l'autre.

14. Résous les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x+1 = y-5 \\ 2y-3 = x+2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x-5) = 2y+7 \\ 8x+4 = -3(y-6) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x+5y-2 = 5x+8y-6 \\ 3y+2x-9 = 3x+y-8 \end{cases}$

Indication : remettre les équations sous la forme : ax +by = c.

15. Résous le système

$\begin{cases} x-\sqrt{2}\,y+ \;\; = 0 \\ 3\sqrt{2}x + 2y = 24 \end{cases}$

16. 1) Deux nombres A et B ont pour somme 37. Pour différence 5 et A est plus grand que B. Calcule ces deux nombres.
2) Deux nombres C et D vérifient les équations suivantes : $C + D = 35$; $C^2 - D^2 = 185$.
a) Après avoir factorisé $C^2 - D^2$; Calcule $C - D$.
b) En déduis les nombres C et D.

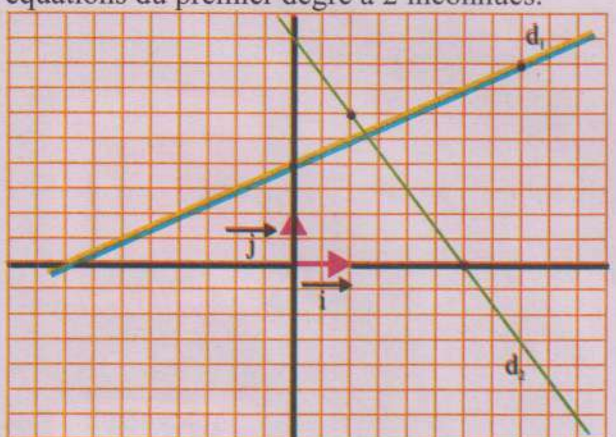
17. Dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} y = 2x-5 \\ 2y = -3x+10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x+4 \\ y = 2x+12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+2y = -6 \\ 2x-y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+y = 15 \\ 2x-y = 0 \end{cases}$

1. Interprète graphiquement le système proposé, justifie l'unicité de la solution.
2. Résous algébriquement le système
3. Compare la solution exacte obtenue par le calcul à la solution déterminée graphiquement.

18. La figure ci-dessous correspond à l'interprétation graphique d'un système (S) de deux équations du premier degré à 2 inconnues.



a) En utilisant ce graphique donne approximativement la solution de ce système.
b) Trouve les équations du système sachant que d_1 passe par les points A(0 ;2) et B(4 ;4) et que d_2 passe par les points E(3 ;0) et F(1 ;3).
c) Résous le système par le calcul.

19. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{50}{37}x - 450 = y \rightarrow 1 \\ 12{,}5x - 320 = y \rightarrow 2 \end{cases}$$

a) Sur une feuille de papier millimétré, trace un repère du plan en choisissant
   - Sur l'axe des abscisses 1cm pour 10unités
   - Sur l'axe des ordonnés 1cm pour 100 unités

Trace la droite d_1 qui représente les solutions de l'équation (1) en plaçant les abscisses 0 ; 37 ; 74.
Trace la droite d_2 qui représente les solutions de l'équation (2) en plaçant les points 0 ; 20 et 40.
b) Détermine graphiquement une estimation de la solution du système.
c) A l'aide de la calculatrice, trouve une solution approchée par le calcul.

20. a) interprète graphiquement le système

$\begin{cases} 7x-3{,}5y = 10{,}5 \\ 4x-2y = 5 \end{cases}$

b) ce système a-t-il une solution ?

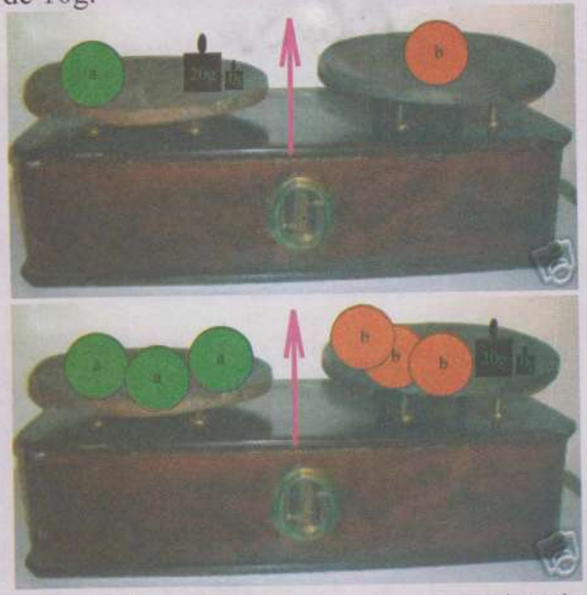
Mise en équation

21. Les logos placés les uns aux dessous des autres, 22 boites de hauteur 7 cm ou 11 cm forment une pile de 2,06m.
Calcule le nombre de boîtes de chaque sorte.

22. La somme de deux nombres entiers a et b est égale à 125. dans la division euclidienne de a par b, le quotient est 7 et le reste13.
a) Traduis, ces deux informations par deux systèmes d'équations d'inconnues a et b.
b) Trouve les deux nombres et vérifie en posant la division.

23. Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 7030 UM.
Un canard et un poulet valent ensemble 2070 UM.
Détermine le prix d'un poulet et celui d'un canard.

24. Deux schémas représentent deux équilibres d'une même balance sur les plateaux de laquelle se trouvent des pommes de masse a (en g) et des oranges de masse b (en g) et des masses de 20g et de 10g.



a) Ecris deux équations qui correspondent à ces deux équilibres. Justifie brièvement.
b) Résous ce système

$$\begin{cases} -a + b = 30 \\ 3a - 2b = 30 \end{cases}$$

afin de déterminer la masse d'une pomme et celle d'une orange.

25. Enfin Physique & chimie

Une masse de $25cm^3$ d'un alliage or- argent est égale à 442,5g.

- la masse $1cm^3$ d'or est égale à 19,5g
- la masse $1cm^3$ d'argent est égale à 10,5g.

On désigne par x le volume de l'or et y le volume d'argent qui composent cet alliage (ces volumes sont exprimées en cm^3)

a) Calcule x et y.
b) En déduis la masse de l'or et celle de l'argent.
c) Donne le pourcentage d'or dans l'alliage
  - En volume
  - En masse

26. Chameaux ou dromadaires

Dans une caravane, il y a des chameaux et des dromadaires.
Si on triplait le nombre de chameaux
Si on doublait le nombre de dromadaire,
Il y aurait 172 bosses.
Trouve le nombre de chameaux et le nombre de dromadaires de cette caravane.

27. « Si on fait passer **…** élèves de $4^{ème}$ AS1 en $4^{ème}$AS2, les deux classes auront le même effectif. Si on fait passer… élèves de $4^{ème}$ AS2 en $4^{ème}$ AS1 Il y aura … fois plus d'élèves de $4^{ème}$ AS1 qu'en $4^{ème}$ AS2. »
Voici une mise en équation de la situation décrite ci-dessus :
Soit x le nombre d'élèves de $4^{ème}$ AS1
Soit y le nombre d'élèves de $4^{ème}$ AS2

$$\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ x + 6 = -2(y - 6) \end{cases}$$

a) Observe cette mise en équation, puis complète la description de la situation en reportant les nombres qui manquent.
b) Détermine le nombre d'élèves de chaque classe.

28. Un grand père dit à son petit fils, aujourd'hui ; mon âge est le triple du tien et quand tu auras mon âge nous aurons ensemble 128 ans.
Quel est l'âge du patriarche?

29. Deux cyclistes tournent à vitesse constante sur la piste circulaire d'un vélodrome.
Quand ils roulent en sens inverse, ils se croisent toutes les 10 secondes.
Quand ils roulent dans le même sens, l'un dépasse l'autre toutes les 170 secondes.
La longueur de la piste est égale à 170 m.
Trouve la vitesse de chaque cycliste.

30. Système d'inéquations

Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} y > 2 \\ x > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < x + 1 \\ 2y > -x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y < x \\ x > -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x > 1 \\ y > x \\ y < 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ x + y + 4 > 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ x + 2y < -2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x + y - 15 < 0 \\ 5x + 7y - 35 < 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + y - 5 < 0 \\ -3x - 5y + 15 > 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y < -2x + 6 \end{cases}$ j) $\begin{cases} y < 3 \\ x > -2 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$

Module d'intégration 2

Chapitres 5 6 7

Chapitres / Compétences : 5.1 ; 6.2. ; 7. 1

Avec tout ce que tu as appris, et en particulier dans les trois derniers chapitres, tu peux résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, dont voici quelques situations- problèmes.

Situation 1

Lecture de l'énoncé

Dans une revue scientifique, Oumar, élève en 4ème AS a remarqué la situation suivante :
Le carré ci-contre (carré.1) est un carré magique c'est -à- dire que la somme des nombres en ligne, en colonne et en diagonale est la même, soit S cette somme.
Aide Oumar à :
1) Exprime S en fonction de x et y, puis complète toutes les cases du carré.
2) Le carré ci-contre (carré.2) est construit sur le même modèle que le carré précédent.
Calcule la somme de ce carré magique, puis complète ce carré.

$x - 2$	$x + 2$		$x + 2$
$y - 2$	$x + 3$	$x + 4$	
$x + 5$	$y - 6$	$x + 8$	
	x		

Carré. 1

		0	
	7		

Carré. 2

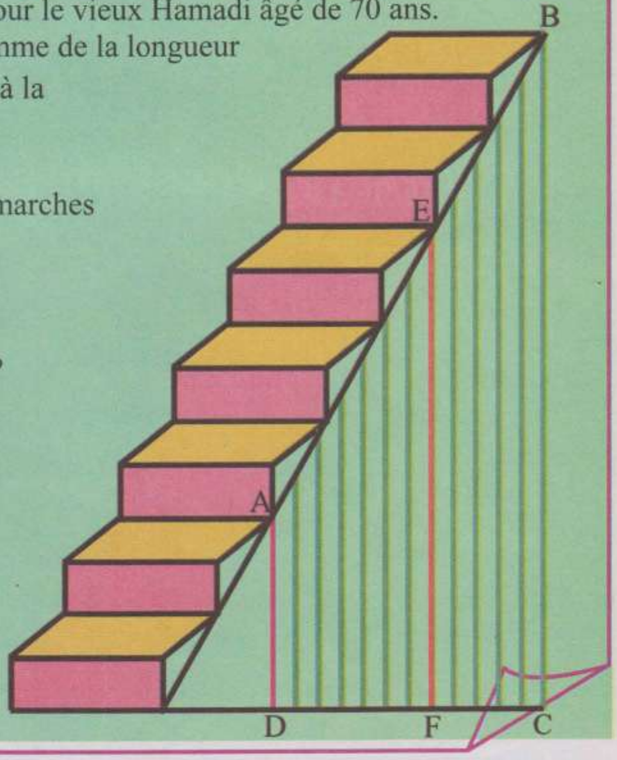
Situation 2

Vraisemblance des résultats

Lors d'un voyage de son maître, un jeune apprenti, maçon, est confronté à la situation suivante : Tracer les lignes directrices pour la construction d'un escalier pour le vieux Hamadi âgé de 70 ans.
Les dimensions d'un escalier sont idéales, lorsque la somme de la longueur d'une marche ℓ et du double de sa hauteur $2x$ est égale à la longueur moyenne d'un pas : 63 cm.
Aide-le à :

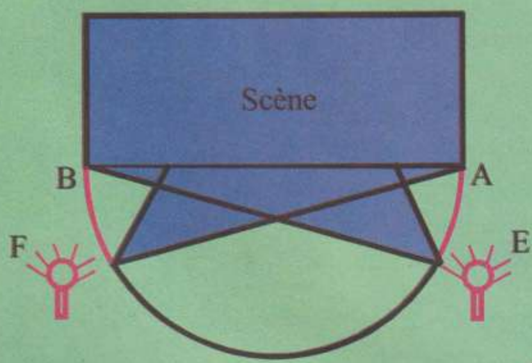
a) Exprimer en fonction de x (en cm) la longueur ℓ des marches d'un tel escalier.
b) Trouver ℓ pour $x = 15$ cm.
c) Trouver x pour $\ell = 40$ cm.
d) Entre quelles valeurs possibles sont comprises x et ℓ ?

Il veut aussi mettre une grille au bas de l'escalier pour l'enclos des moutons.
On donne AD = 0,30 m ; BC = 1,2 m.
Les barres verticales perpendiculaires au bord [DC] sont régulièrement espacées.
Aide-le à trouver la longueur de la base [EF] (avec un dessin sur papier)
Indication *trace la parallèle à (DC) passant par A.*



Situation 3 — Choix des outils

On désigne par [AB] le bord de la scène d'un théatre situé du côte des spéctateurs.
La longueur de [AB] est 10 m.
Un élécticien veut éclairer la scène de ce théatre par deux projecteurs positionnés en E et F sur un demic-cercle de diamètre [AB], de telle façon que les longueurs de chacun des arcs $\overset{\frown}{AE}$ et $\overset{\frown}{BF}$ soient égales à 3,14 m.
Aide l'éléctricien à déterminer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EF}$, puis de donner l'angle au centre interceptant cet arc.



Situation 4 — Apprentissage du raisonnement

La commune de notre département veut se connecter à l'Iternet, l'agence commerciale de Mauritel lui propose le choix entre deux tarifs mensuels :

- Un forfait de 1500 UM et 200 UM par heure de connexion

ou bien

- Un forfait de 1300 UM et 200 UM par heure de connexion.

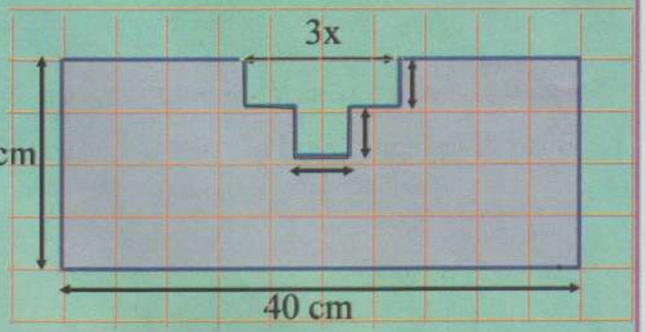
On désigne par x (en heures) la durée mensuelle des connexions.
Aide cette commune à

a) Exprimer les sommes mensuelles à payer.
b) Illustrer graphiquement cette situation.
c) Comparer les deux tarifs pour une période située entre 0 à 5heures.

Entraînement à l'évaluation

Situation a

Une pièce métallique a la forme d'un prisme droit dont les arêtes latérales ont pour longueur l = 250 cm. L'une des bases est représentée par la figure ci-contre



a) Exprime en fonction de x l'aire de bases B et le volume V de cette pièce.
b) Calcule le volume V pour x = 5 cm ; pour x = 2,5 cm et pour $x = \frac{9}{5}$ cm.

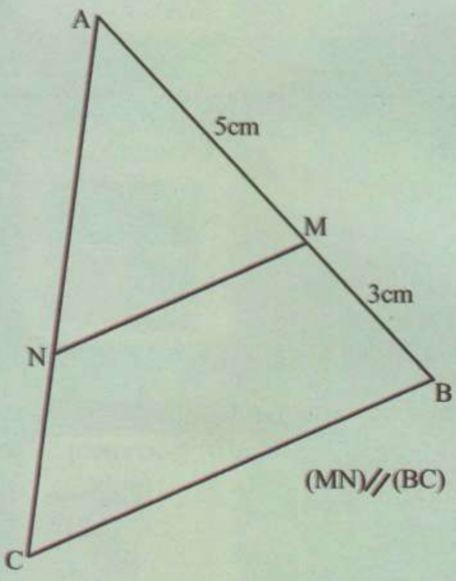
Situation b

A l'occasion de la fête de l'union du Maghreb Arabe (UMA) Mohamed et Diallo étant deux élèves de $4^{ème}$ AS, sont chargés entre autres de reproduire le drapeau tunisien sur des feuilles format A3. Après concertation les deux élèves sont arrivés à construire la figure ci-contre. Reproduis cette figure.
Le croissant étant construit, explique la méthode de Construction de l'étoile avec précision.
Calcule la longueur de l'arc intérieur du croissant, sachant que la distance OA = 7 cm.

9 Propriété de Thalès

Je me souviens

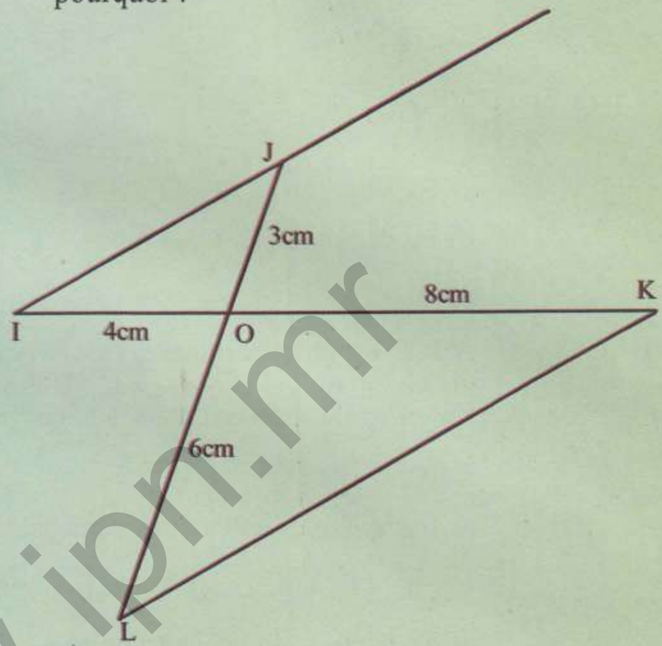
1. Observe la figure et complète-la :



$$\frac{AM}{AB} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...} = \frac{5}{...}$$

$$\frac{AC}{AN} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...} = \frac{...}{5}$$

2. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles parallèles pourquoi ?



Je vais plus loin

Activité 1 :

ABC est un triangle ;

a) Construis les points M et N tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) Compare les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$

c) Complète : $\overrightarrow{MN} = ... \times \overrightarrow{BC}$

Activité 2 :

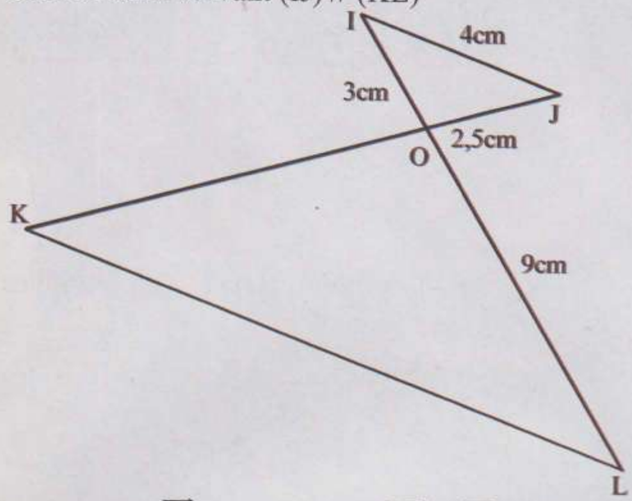
ABC est un triangle tel que AB = 6cm ; AC = 8cm ; BC = 10cm.
I est un point de la demi-droite [AB) tel que AI = 9 cm.
J est un point de la demi-droite [AC) tel que (IJ) // (BC).

a) Ecris $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduis $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Activité 3 :

Sur le dessin suivant (IJ) // (KL)



a) Exprime $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OL}$; $\overrightarrow{OJ}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

b) En déduis $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Activité 4 :

ABCD est un quadrilatère, I est le point de concours des diagonales de ce quadrilatère.

Les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont respectivement 3 cm ; 4 cm ; 7,5 cm ; 10 cm.

a) Complète avec le nombre qui convient :

$\overrightarrow{IC} = \ldots \times \overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{ID} = \ldots \times \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{CD} = \ldots \times \overrightarrow{AB}$.

b) En déduis que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

Je retiens

1. Propriété de Thalès énoncée avec les vecteurs

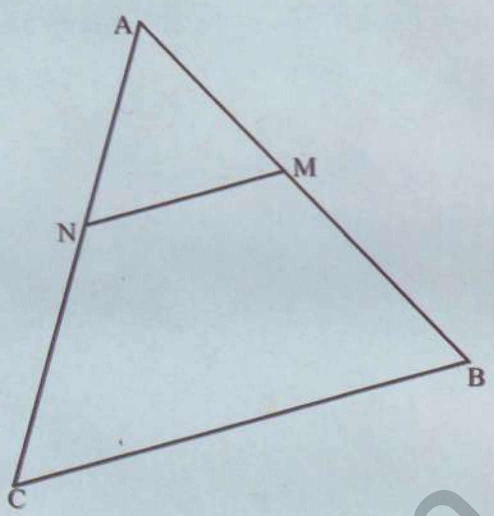
ABC un triangle ; M et N deux points du plan.

Si $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ (Propriété directe deThalès)

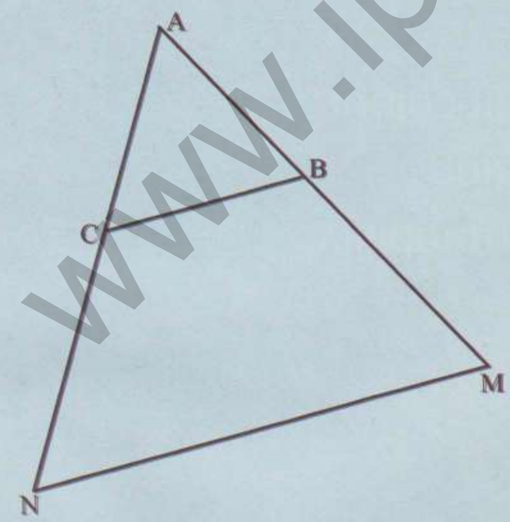
Si $\overrightarrow{AM} = k'\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k'\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k'\overrightarrow{BC}$ (Propriété réciproque de Thalès)

On peut distinguer trois cas possibles :

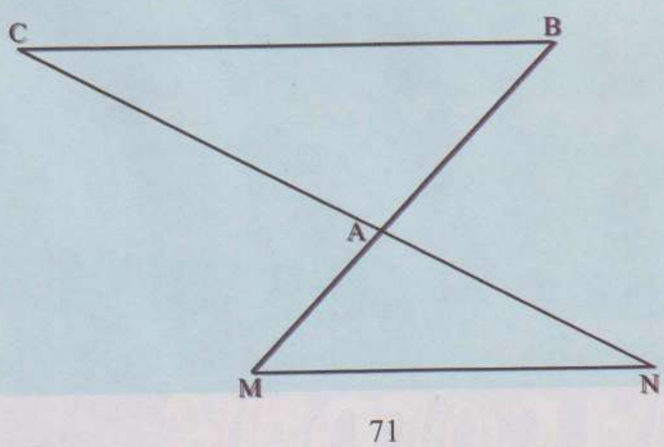
a) **$0 < k < 1$**



b) **$k > 1$**



c) **$k < 0$**



Je sais faire

1. Construire des points à l'aide d'une égalité vectorielle

Exercice 1: ABC est un triangle.

a) Place les points M sur (AB) et N sur (AC) tels que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

b) Complète : $\overrightarrow{AM} = ... \times \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = ... \times \overrightarrow{AC}$

2. Utiliser la propriété réciproque de Thalès et la colinéarité de vecteurs

Exercice 2: Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ on donne les points :
A(0 ;-2), B(4 ;0), C(6 ;7), D(-2 ;3), I(2 ;1).

a) Calcule les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{ID}$.

b) Sans calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ montre que ces deux vecteurs sont colinéaires.

c) Complète : $\overrightarrow{CD} = ... \times \overrightarrow{AB}$

Exercice 3: ABC est un triangle :

a) Construis les points E et F tels que :

$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

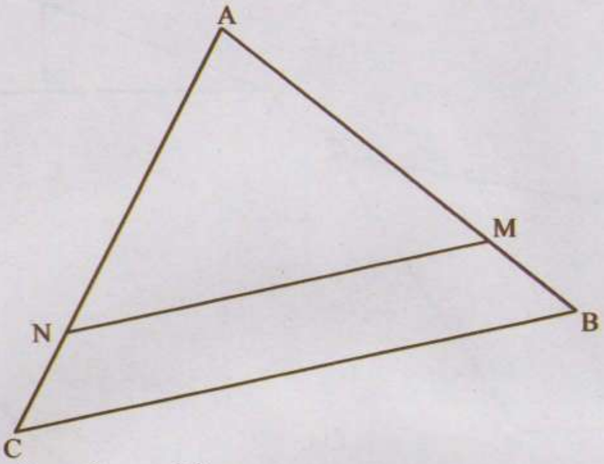
b) Cite sur la figure trois couples de vecteurs colinéaires.

c) Ecris la propriété de Thalès relative à cette configuration.

CORRECTION

1. M est sur (AB) ; N est sur (AC)

$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow (MN) // (BC) \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



2. $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} 0-2 \\ -2-1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 7-1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que : $\overrightarrow{IC} = -2 \times \overrightarrow{IA}$
$\overrightarrow{ID} = -2 \times \overrightarrow{IB}$

d'où $\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow (CD)//(AB)$;

$\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB} = \frac{CD}{AB} = -2 \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -2 \times \overrightarrow{AB}$.

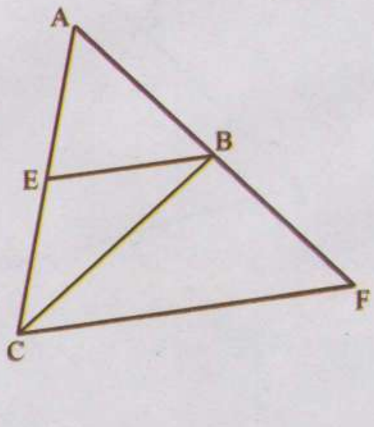
Pour vérifier on peut calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

3. a) Construction

b) $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
$\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
$\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires ; en effet E est le milieu de [AC] ; B est le milieu de [AF].

c) $(EB)//(CF) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AF} = \frac{EB}{CF}$

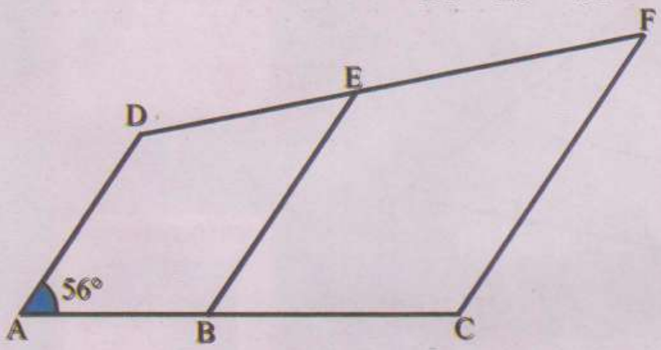
Ou encore $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AF} = \frac{EB}{CF}$



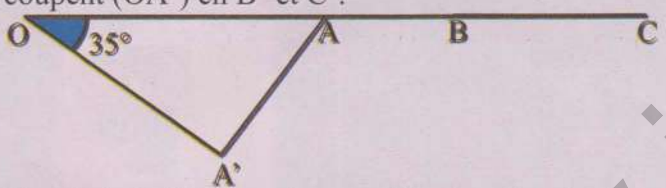
Je m'exerce

Projection d'une division régulière

1. Sur la figure ci-dessous, [AD], [BE] et [CF] sont parallèles.
AB = 2,7 cm et BC = 3,6 cm.
Construis la figure, puis calcule $\frac{DE}{DF}$, $\frac{DF}{EF}$ et $\frac{EF}{DF}$



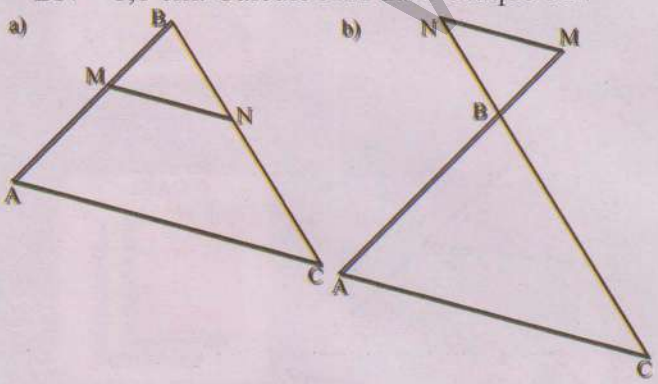
2. Sur la figure qui suit, OA = 4,2 cm, , AB = 1,8 cm, BC = 2,7 cm et OA' = 3,3 cm. Les parallèles à (AA') qui passent respectivement par B et C coupent (OA') en B' et C'.



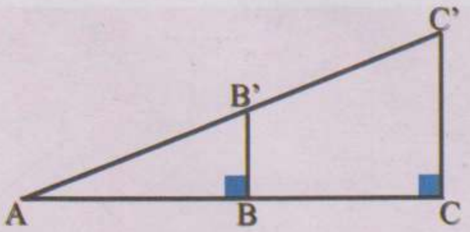
Construis la figure en la complétant, puis calcule OB' et OC'.

Théorème de Thalès : cas du triangle

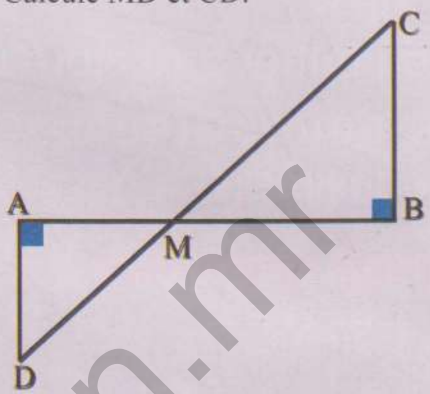
3. Dans chacune des figures ci-dessous, (MN) est parallèle à (AC), AB = 3,6 cm, BC = 4,5 cm et BN = 1,8 cm. Calcule AM dans chaque cas.



4. Sur la figure ci-contre AB = 3cm, BC = 2,4 cm et AC' = 6 cm.
Calcule AB' et B'C'.



5. Sur la figure ci-dessous: AB = 5 cm, MB = 3 cm et MC = 4 cm.
Calcule MD et CD.



Construction d'une quatrième proportionnelle

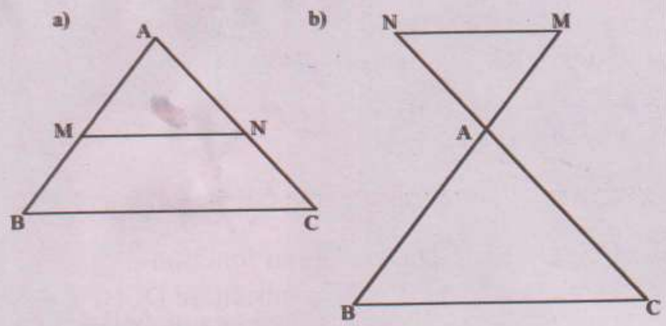
6. Construis avec la règle et le compas un segment de longueur d telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dans chacun des cas suivants :
a) a = 4 cm ; b = 5 cm ; c = 3 cm
b) a = 3,5 cm ; b = 4,2 cm ; c = 2,5 cm
c) a = 5 cm ; b = 2 cm ; c = 3,5 cm

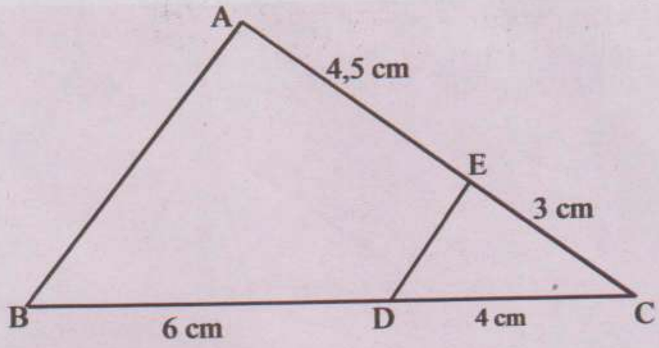
Partager un segment dans un rapport donné

7. Marque deux points A et B sur une droite (d). avec la règle non graduée et le compas, construis, un point C intérieur au segment [AB] tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{5}$.

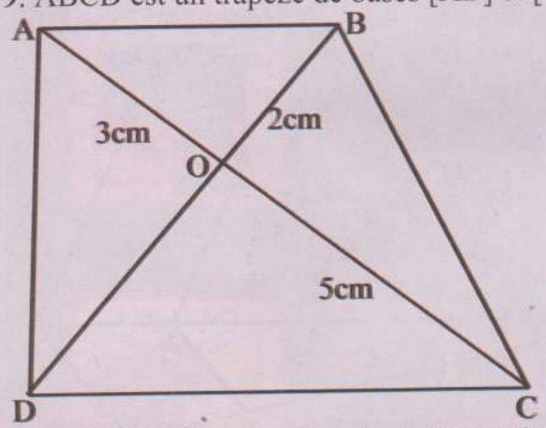
Triangles homothétiques

8. Dans chacune de ces deux figures, AB = 4,5 cm , AC = 5 cm, BC = 6 cm et AM = 2,5 cm.
(MN) est parallèle à (BC).
Calcule AN et MN dans chaque cas.





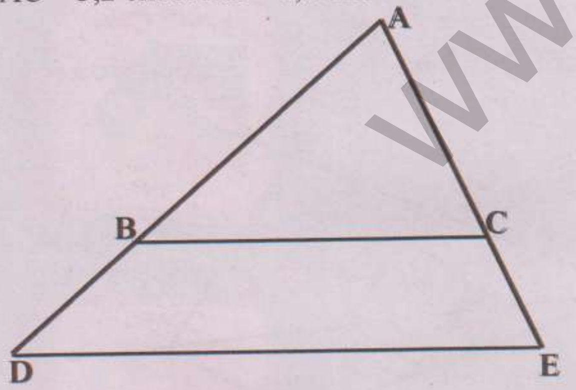
9. ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].



Reproduis la figure, puis calcule OD et CD.

La réciproque du théorème de Thalès

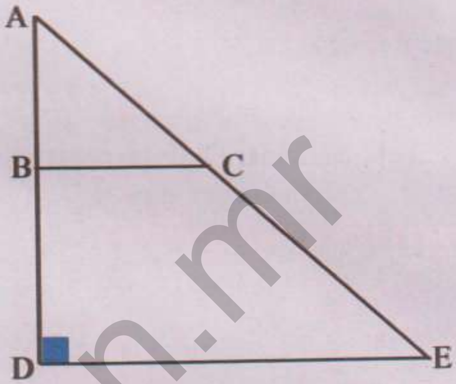
10. Sur cette figure, AB = 4,4 cm ; AD = 6,6 cm ; AC = 3,2 cm et AE = 4,8 cm.



Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

11. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

12. Sur la figure qui suit , AB = 2 cm, BD = 2,6 cm, AC = 3 cm et CE = 3,9 cm.



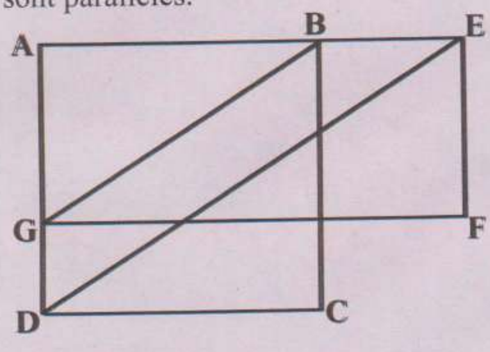
Démontre que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Exercices de recherches et problèmes

13. Dans un triangle ABC, M est le milieu de [BC]. La parallèle à [BC] qui passe par B' coupe (AM) en M' et (AC) en C'. Démontre que $\frac{B'M'}{BM} = \frac{M'C'}{MC}$.

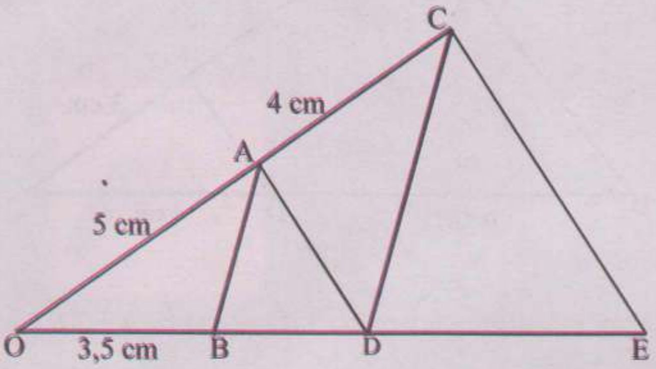
Déduis-en que M'est le milieu de [B'C'].

14. ABCD et AEFG sont deux rectangles. A, B et E sont alignés ; A, G et D sont alignés ;(BG) et (ED) sont parallèles.



Fais cette figure, puis démontre que les deux rectangles ont la même aire.

15. Sur la figure qui suit, (AB) et (CD) sont parallèles, (AD) et (CE) le sont aussi.



Calcule les longueurs BD et DE.

16. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. La parallèle à (AC) qui passe par G coupe (AB) en B'. La parallèle à (BC) qui passe par G coupe (AB) en A'. Démontre que $AA' = \frac{2}{3} AB$ et $BB' = \frac{2}{3} AB$. Déduis-en que AB' = B'A' = A'B.

17. Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe (BC) en I et la parallèle à (AB) qui passe par C en D. Démontre que la triangle ACD est isocèle en C puis démontre que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

18. ABCD est un parallélogramme tel que AB = 6,3 cm et AD = 5,1 cm. F est le point de [AB] tel que AF = 2,1 cm. Les droites (AD) et (FC) se coupent en E. Calcule AE et DE.

19. ABCD est un parallélogramme.
Une droite passant par D coupe les droites (AB), (BC) et (AC) respectivement en M, N et I.

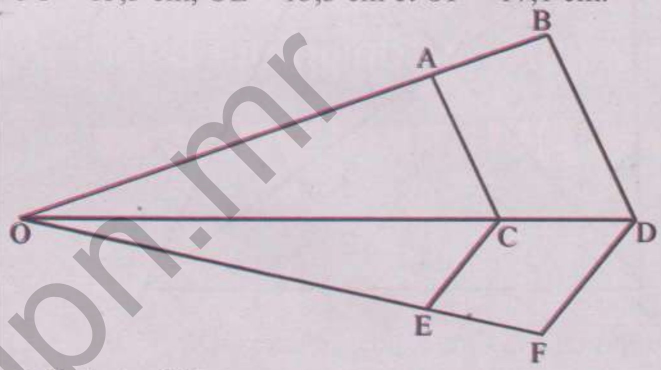
a) Compare les nombres $\frac{IM}{ID}$; $\frac{IA}{IC}$ et $\frac{ID}{IN}$.

b) Démontre que : $ID^2 = IM \times IN$.

20. Dans un triangle ABC, AB = 8 cm et AC = 10 cm. D est le point de [AC] tel que AD = 6 cm. La parallèle à (AB) qui passe par D coupe (BC) en E. La parallèle à (BC) qui passe par D
Coupe (AB) en F.
On pose BC = a.

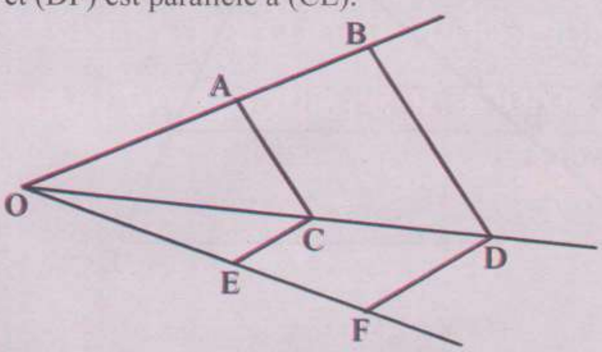
a) Calcule DE et montre que $CE = \frac{2}{5} a$.
b) Calcule BF. Exprime BE en fonction de a.
c) Quelle est la nature du quadrilatère DEBF ? Quelles valeur doit-on donner à a si on veut que DEBF soit un rectangle ?

21. Sur la figure qui suit, les droites (AC) et (BD) sont parallèles. On a OA = 14 cm, OB = 18 cm, OC = 15,3 cm, OE = 13,3 cm et OF = 17,1 cm.



a) Calcule OD.
b) Les droites (EC) et (DF) sont-elles parallèles? Justifie ta réponse.

22. Sur la figure qui suit, (AC) est parallèle à (BD) et (DF) est parallèle à (CE).

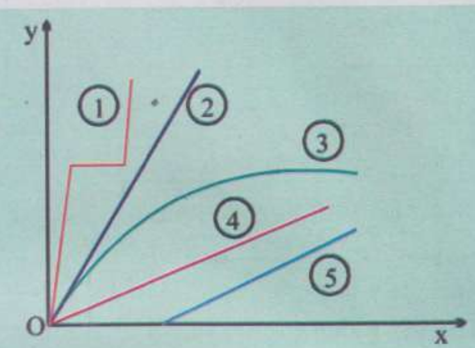


Les droites (AE) et (BF) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

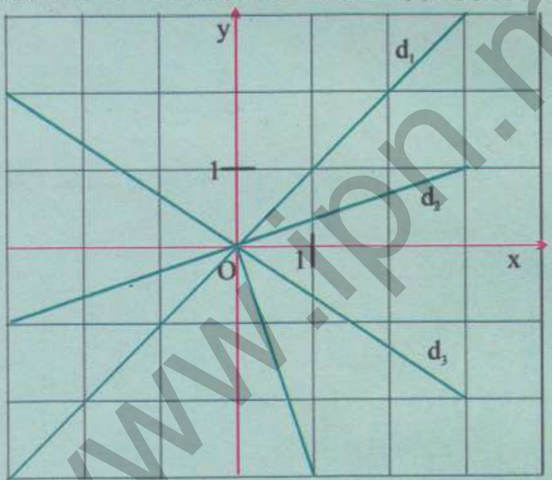
10 Fonctions affines 1

Je me souviens

1. Sur les cinq graphiques ci-contre, quelles sont ceux qui traduisent le même type de fonctions ?
De quel type de fonctions parle-t-on ?



2. a) Donne les coefficients directeurs de chacune des droite d_1 ; d_2 ; d_3 ; et d_4.



b) Ecris les expressions algébriques des fonctions f_1 ; f_2 ; f_3 et f_4 représentées respectivement par les droites d_1 ; d_2 ; d_3 ; et d_4.

Je vais plus loin

Activité 1 : Voici une facture de la consommation en électricité.

a) Quel est le montant hors taxe de la facture pour une consommation de 200 KWh ? 400 KWh ? 563 KWh ?

b) Combien de KWh a-t-on consommé si le montant hors taxe de la facture s'élève à 3000 UM ? à 6000 UM ? à 1500UM ?

c) On désigne par x le nombre de KWh consommés.
Exprime le procédé de calcul qui permet de trouver le prix total H.T en fonction de x.

Facture d'électricité

abonnement prix H.T	consommation en KWh	prix unitaire H.T	total H.T abon. + consom.
1182		60	
	200	→	...
	400	→	...
	563	→	...
	...	→	3000
	...	→	6000
	...	→	1500
	x	→	...

Activité 2 :

La guétna

On peut acheter des dattes en les cueillant à la palmeraie.

Elle coûtent 800 UM le kilogramme et le panier de cueillette coûte 75 UM.

a) Recopie et complète le tableau de calcul du prix total dans le cas où le client prend un seul panier.

Poids des dattes en (kg)	1	0,5	1,5	2	2,5
Prix des dattes en (UM)	800				
Prix du panier (UM)	75				
Prix total					

b) Parmi les fonctions suivantes, laquelle correspond au calcul du prix total ?

$x \longmapsto 800x$; $x \longmapsto 800x + 75$; $x \longmapsto (800 + 75)x$

On appelle f la fonction telle que : $x \longmapsto 800x + 75$.

x_1 et x_2 étant deux nombres quelconques, montre qu'il existe une relation simple entre $f(x_2) - f(x_1)$ et $x_2 - x_1$

c) Sidi cueille x_1 kg de dattes et Oumar x_2 kg.

Le palmier dit « Mr. Oumar vous avez cueilli 0,7 kg de plus que Mr. Sidi ».

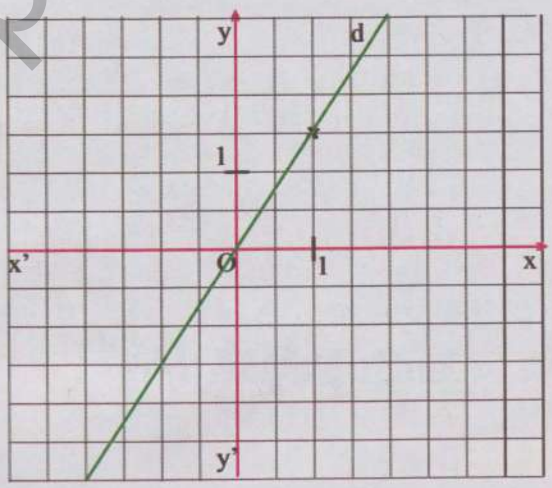
En utilisant le calcul du b, dis combien Oumar a dépensé de plus que Sidi.

Activité 3 :

Représentation graphique

On considère la fonction affine f telle que : $x \longmapsto 1{,}5x - 2$

Trace un repère d'origine O et trace la droite d qui représente la fonction linéaire g telle que $x \longmapsto 1{,}5x$.



Place les points O' ; A ; A' ; B et B' tels que : $O'(0 ; f(0))$; $A(1 ; g(1))$; $A'(1 ; f(1))$; $B(3 ; g(3))$; $B'(3 ; f(3))$.

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OO'}$; $\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BB'}$. Qu'observe-t-on ?

Prouve que $M'(x ; f(x))$ est l'image du point $M(x ; g(x))$ par la translation de vecteur $\vec{v}(0 ; -2)$.

En déduis que la représentation graphique de f est une droite.

Définis cette droite avec précision.

Activité 4 :

Masse idéale

La masse idéale (kg) d'un individu est donnée en fonction de sa taille t(cm) par les expressions suivantes pour $100 \leq t \leq 220$:

$H(t) = (t - 100) - (\frac{t - 150}{4})$ pour un homme.

et $F(t) = (t - 100) - (\frac{t - 150}{2})$ pour une femme.

1. Montre que H et F sont des fonctions affines.
2. Trace les représentations graphiques des fonctions H et F dans un repère d'unité :
   - 1 cm pour 20 cm en abscisse ;
   - 1 cm pour 10 kg en ordonnée.
3. Calcule la taille de l'homme et de la femme qui aurait la même masse idéale.

   Vérifie le résultat sur le graphique.
4. a) Place sur le graphique le point correspondant à votre taille et à votre masse, puis mesure l'écart qui vous sépare éventuellement de la masse idéale.

   b) Même question pour un athlète de haut niveau mesurant 195 cm et ayant une masse de 110 kg.

Je retiens

1. Fonction affine

Définition

a et b étant deux nombres réels, la fonction : $x \longmapsto ax + b$ qui au nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$, s'appelle une **fonction affine.**

Exemple : la fonction définie par $x \longmapsto -2x + 4$ est une fonction affine ($a = -2$; $b = 4$).
On a : $f(0) = (-2 \times 0) + 4 = 4$; $f(2,5) = (-2 \times 2,5) + 4 = -5 + 4 = -1$.

Notation et vocabulaire

Dans la pratique, une fonction affine est souvent désignée par f (ou g ; h…) et on note :
$f : x \longmapsto ax + b$ ce qui se traduit par :'' Soit *f la fonction affine définie sur IR par f(x) = ax + b* ''.

Cas particulier

- La fonction linéaire $x \longmapsto ax$ est aussi affine car on peut écrire $ax = ax + 0$; ici $b = 0$
- La fonction constante $x \longmapsto b$ est une fonction affine, car on peut écrire $b = 0x + b$ ici $a = 0$.

2. Sens de variation

soit une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$:

- si $a > 0$, la fonction est croissante ;
- si $a < 0$, la fonction est décroissante ;

Exemple : $f(x) = 3x - 1$, ($a = 3$) a positif, donc la fonction est croissante.
$f(x) = -0,5x + 6$, ($a = -0,5$) a négatif, donc la fonction est décroissante.

3. Représentation graphique

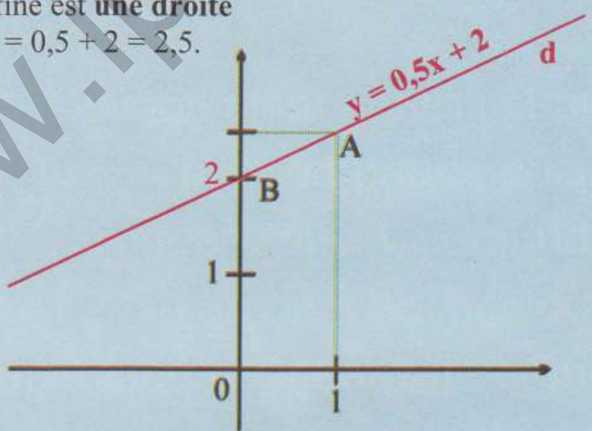
La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**

Exemple : $x \longmapsto 0,5x + 2$; $f(0) = 2$; $f(1) = 0,5 + 2 = 2,5$.

La représentation graphique de la fonction f est la droite d d'équation : $y = 0,5x + 2$; elle passe par les points A(1 ; 2,5) , B(0 ;2).

0,5 est le coefficient directeur de la droite (d) d'équation $y = 0,5x + 2$;

2 est **l'ordonnée à l'origine** de la droite (d) d'équation $y = 0,5x + 2$



Remarque : il n' y a plus de proportionnalité entre les grandeurs x et y.

Je sais faire

1. Identifier une fonction affine

Exercice 1 : Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines ?

a) $x \longmapsto -2x + 1$ b) $x \longmapsto x$ c) $x \longmapsto 3 - \frac{1}{2}x$

d) $x \longmapsto 12$ e) $x \longmapsto \frac{x+1}{3}$ f) $x \longmapsto 5x^2 - 1$

2. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine

Exercice 2 : une fonction affine f est telle que : $f(2) = 5$; $f(-4) = -1$.
Exprime $f(x)$ en fonction de x.

3. Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

Exercice 3 : Soit la fonction affine $f(x)$ telle que $f(x) = -2,5x + 4$.
Pour $x_2 = 6$ et $x_1 = -4$, calcule $f(x_2)$; $f(x_1)$ et $f(x_2) - f(x_1)$

a) Sur l'exemple précédent, vérifie que : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -2,5$; puis démontre ce résultat.

b) Que peut-on dire de la différence $f(x_2) - f(x_1)$ lorsque $x_2 - x_1 = 1$.

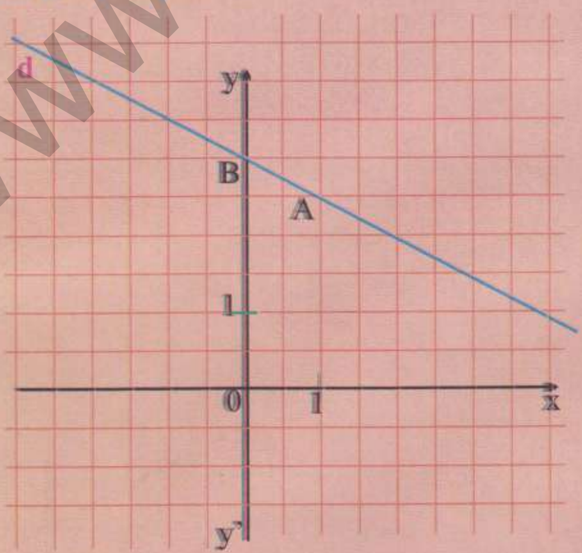
c) Quel est le sens de variation de cette fonction.

4. Représenter graphiquement une fonction affine.

Dans un repère orthonormé représente graphiquement la fonction affine définie par :
$x \longmapsto -0,5x + 3$.

5. Interpréter une représentation graphique.

Sur la figure ci-contre, la droite (d) est la représentation graphique d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.
Détermine cette fonction.



CORRECTION

1. les fonctions : $x \longmapsto -2x+1$; $x \longmapsto x$; $x \longmapsto 12$; $x \longmapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$; $x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 3$

sont des fonctions affines.

2. $f(2) = 5$; $f(-4) = -1$, comme f est une fonction affine, il existe a et b tels que : pour tout x de IR, on a : $f(x) = ax + b$, donc

$$\begin{cases} 2a + b = 5 & (1) \\ -4a + b = -1 & (2) \end{cases}$$

On résous donc, ce système, en multipliant les deux membres de l'équation 2 par -1 et en additionnant les deux équations membre à membre.

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ \qquad\qquad \rightarrow 6a = 6 \rightarrow a = 1 \\ 4a - b = 1 \end{cases}$$

En remplaçant la valeur de a dans l'équation 1, on trouve :
$b = 5 - 2$,
$b = 3$.
La fonction f est donc définie par l'expression $f(x) = x + 3$.

3. $f(x) = -2,5x + 4$, d'où
$f(x_2) = f(6) = -2,5 \times 6 + 4 = -11$.
$f(x_1) = f(-4) = -2,5 \times (-4) + 4 = 14$.
Le calcul de $f(x_2) - f(x_1)$ donne,
$-11 - 14 = -25$.

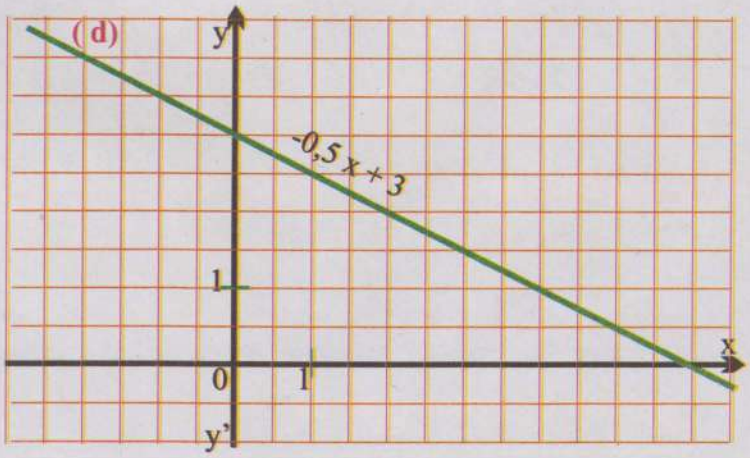
a) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-25}{6-(-4)} = \dfrac{-25}{10} = \dfrac{-5}{2} = -2,5.$

On peut généraliser ce résultat, pour tout x_1 et x_2 ($x_2 \neq x_1$) de IR.
$f(x_2) = -2,5x_2 + 4$, $f(x_1) = -2,5x_1 + 4$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-2,5x_2 + 4) - (-2,5x_1 + 4)}{x_2 - x_1} = \frac{-2,5x_2 + 4 + 2,5x_1 - 4}{x_2 - x_1} = \frac{-2,5(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = -2,5.$$

Lorsque $x_2 - x_1 = 1$, $f(x_2) - f(x_1)$ devient le coefficient directeur de la droite représentant cette fonction affine.
Comme le coefficient $a = -2,5$,
Donc la fonction f est décroissante.

4. Représentation graphique de la fonction définie par : $x \longmapsto -0,5x + 3$.



5. Soit f la fonction représentée, sur cette représentation on peut lire $f(0) = 3$ et $f(1) = 2,5$.
donc f est la fonction affine déterminée par l'image de 0 et 1.
On peut aussi, donner l'expression de f, en déterminant les coefficient a et b dans le système suivant :

$$\begin{cases} a \times 0 + b = 3 & (1) \\ a \times 1 + b = 2,5 & (2) \end{cases}$$

de l'équation 1, $b = 3$.
En remplaçant dans 2, on trouve $a = 2,5 - 3 = -0,5$.
Donc l'expression de f est la suivante : $x \longmapsto -0,5x + 3$.

Je m'exerce

Reconnaître et déterminer des fonctions affines

1. ***Réponds par vraie ou faux en justifiant***

a) Toute fonction affine est une fonction linéaire
b) Toute fonction linéaire est une fonction affine
c) L'image de zéro par une fonction linéaire est zéro.
d) L'image de zéro par une fonction affine est toujours égale à zéro.
e) Si l'image de zéro par une fonction f est zéro, alors f est une fonction linéaire.

2. Parmi les procédés suivants, précise ceux qui correspondent à une fonction affine.

$f(x) = 2 - 3x$; $f(x) = 3x^2 + 1$; $f(t) = 5 - (t + 2)$

$f(x) = \dfrac{4x - 3}{2}$; $f(x) = \dfrac{2}{5}(x - 1)$; $f(t) = \dfrac{2}{t}$;

$f(x) = (x - 1)2 - x(x - 3)$; $f(x) = 4$; $f(t) = 1 - t$

3. Donne l'image des nombres : -20 ; $-\dfrac{1}{2}$; 0 ; $\dfrac{4}{5}$; 1 ; 2 par chacune des fonctions suivantes :

$y = 5x - 2$; $y = \dfrac{1}{4}x + 1$; $y = -x + \dfrac{1}{2}$;

On pourra noter, dans chaque cas, les résultats dans un tableau de type ci-dessous :

Nombre x	-20	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{5}$	1	2
Images y						

4. Complète le tableau de valeurs associées à la fonction affine $y = -2x + 3$:

x	-3	-1	0	…	3	…
y	…	…	…	-1	…	-7

5. Recopie et complète le texte suivant :

a) La fonction $f : x \longmapsto 0{,}5x$ est une fonction … de coefficient …. ; sa représentation graphique est ….. d'équation ….
b) La fonction $g : x \longmapsto …x + …$ est une fonction ….. ; sa représentation graphique est la droite d_2 ….$y = 0{,}5x + 3$.
c) Les droites d_1 et d_2 sont parallèles, leur … est 0,5.
d) La droite d_2 coupe l'axe des ordonnées au points B(…. ; …..) ; 3 est ….. de d_2

6. En physique et en chimie, on utilise indifféremment deux échelles de température : le degré Celsius (°C) et le degré Kelvin (°K).

1) On donne les informations suivantes :

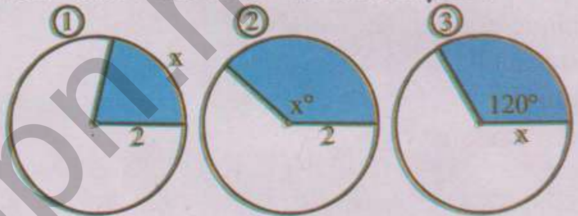
- 0 °K(le zéro absolu) est égal à – 273°C ; 273 °K est égal à 0 °C ;
- Il existe une fonction affine *f* telle que si T_C exprime une température (en degré Celsius), alors $T_K = f(T_C)$ exprime la même température (en degré kelvin).

Calcule T_K en fonction de T_C.

2) Complète le tableau suivant :

T_K	0	100					456
T_C			-155	-70	0	100	

7. Dans chacun des cas suivant, on appelle $p(x)$ le périmètre et $a(x)$ l'aire de la surface bleue. p et a sont-elles : linéaires ? affine ? autres ?

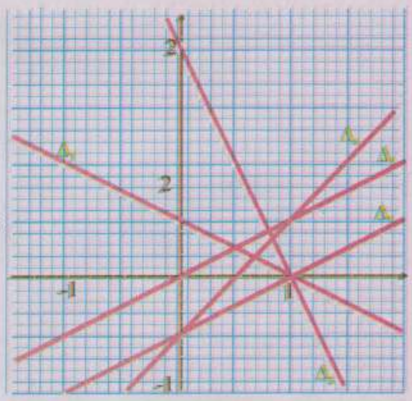


8. Montre que les fonctions suivantes sont des fonctions affines.

$f : x \longmapsto 2(x + 3) - 4(x - 2)$.
$g : x \longmapsto (x + 1)^2 - (x + 5)x$.

9. Retrouve, pour chacune des fonctions affines, la représentation graphique correspondante :

a) $y = 2x - \dfrac{1}{2}$;
b) $y = 2x$;
c) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$;
d) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$;
e) $y = -2x + 2$.



Deux nombres et leurs images

10. Détermine la fonction affine *f* sachant que 1 a pour image 2, et -3 a pour image 10.
La représenter ensuite

11. Détermine la fonction affine f sachant que $f(3) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}$
La représenter ensuite.

12. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 1$.

Calcule les images des nombres -2 ; 1 ; 0 ; $\frac{5}{3}$

Trouve le nombre qui a pour image 5.
Trouve le nombre qui a pour image 0.

13. Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.
On considère les points A(3; 1), B(2; -2) et C(-6; 4).
1. Place les points A, B et C dans le repère.

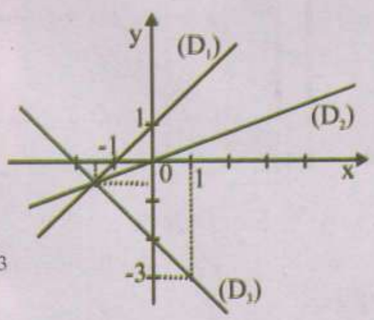
2. On considère la fonction affine $f : x \longmapsto mx + p$ dont la représentation graphique est la droite (AB).
a) Détermine les images de 2 et de 3 par la fonction f.
b) Détermine les valeurs de m et p de la fonction f.

14. Détermine la fonction affine f telle que $f(-1) = 5$ et $f(1) = 1$.

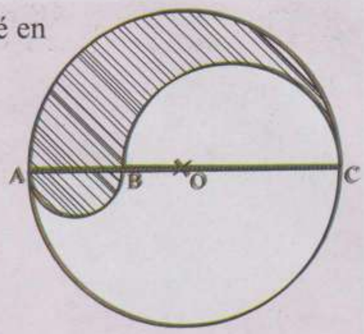
15. Soit f la fonction affine définie sur IR par $f(x) = 5x + b$.
1. Calcule l'accroissement de $f(x)$ lorsque l'accroissement de x est 30.
2. Calcule l'accroissement de x lorsque l'accroissement de $f(x)$ est 45.
3. Calcule $f(x_2)$ sachant que $f(x_1) = -10$ et que l'accroissement de x_1 à x_2 est 2.

Fonction et géométrie

16. En utilisant les indications portées sur le graphique ci-contre, détermine les fonctions affines f_1 ; f_2 ; f_3 représentées par les droites d_1 ; d_2 ; d_3

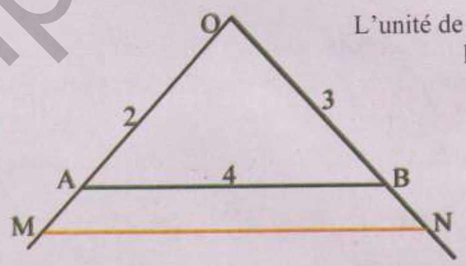


17. O est le centre du cercle de diamètre [AC].
On donne : OA = 10, et on pose : OB = x.
Exprime en fonction de x la longueur $p(x)$ de l'arc ABC passé en trait gras.
La fonction p est-elle affine ? linéaire ?
Exprime en fonction de x l'aire hachurée $\mathscr{A}(x)$.
La fonction $\mathscr{A}$ est-elle affine ? linéaire ?



18. OAB étant un triangle tel que OA = 2, OB = 3, AB = 4, on place un point M sur la demi-droite [OA) à l'extérieur du segment [OA].
La parallèle à (AB) passant par M coupe [OB] en N. On pose OM = x (x > 2).
Exprime ON et MN en fonction de x.
On appelle $p_1(x)$ le périmètre du triangle OMN et $p_2(x)$ le périmètre du quadrilatère ABMN.
Détermine
$p_1(x)$ et $p_2(x)$.
La fonction p_1 est-elle linéaire ? est-elle affine ?
Reprends la question c. avec la fonction p_2.

L'unité de longueur est le centimètre



Représentation graphique et étude de situation

19. ABC est un triangle tel que AB = 6 cm ; BC = 5 cm ; AC = 4 cm.
M est un point du segment [AB] ; la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.
On pose AM = x.
a) Précise les valeurs possibles de x.
b) Exprime AN ; MN ; MB et NC en fonction de x.
c) Exprime le périmètre du triangle AMN et le périmètre du trapèze MNCB en fonction de x.
d) Détermine la valeur de x pour laquelle ces périmètres sont égaux et calcule ce périmètre.
e) Dans un même repère, trace les droites d_1 et d_2 qui représentent les fonctions :

$f_1 : x \longmapsto 2{,}5x$; $f_2 : x \longmapsto -\frac{5}{6}x + 15$.

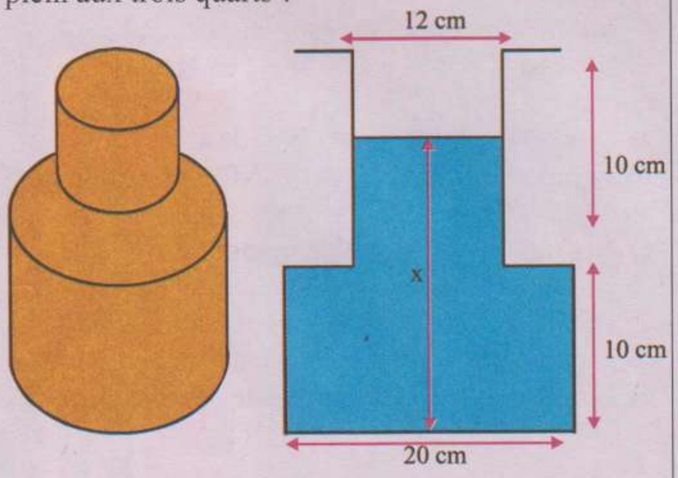
Lis sur le graphique les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2.
Que représentent ces coordonnées ?

20. Un automobile dont le réservoir a une capacité de 64 litres consomme, habituellement en moyenne, 7 litres d'essences au 100 km. Par suite d'une avarie, sa consommation moyenne est passée à 12 litres aux 100 km. et l'automobile tombe en panne sèche au bout de 800 km, alors que son réservoir était plein au départ.
La distance y (exprimée en km), parcourue par l'automobile depuis le départ est une fonction affine de la quantité x d'essence consommée depuis le départ (exprimée en litres).

a) Détermine les deux fonctions ***f*** et ***g*** donnant y en fonction de x avant et après l'avarie.
b) Choisis un repère et représente graphiquement ***f*** et ***g***. Détermine graphiquement à quelle distance du point de départ a eu lieu l'avarie.
c) Retrouve par le calcul la distance au point de départ à laquelle a eu lieu l'avarie?

21. Dans un réservoir composé de deux cylindres, on verse un liquide dont le niveau supérieur est égal à une hauteur x.
1) Exprime le volume du liquide contenu dans le réservoir en fonction de x.(on distinguera deux cas : $0 \leq x \leq 10$ et $10 < x \leq 20$.)
2) Représente graphiquement ce volume avec :
- En abscisse : 1 cm pour 2 cm
- En ordonnée : 1 cm pour 500 cm^3

Lorsque x = 10, peut-on dire que le récipient est plein aux trois quarts ?

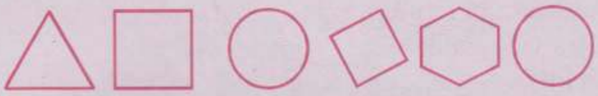


Enigme

22. Il s'agit de trouver un mot composé de six lettres. Les lettres de l'alphabet ont été codées suivant le principe ci-contre.

A ⟶ 1
B ⟶ 1/2
C ⟶ 3
D ⟶ 1/4
E ⟶ 5
F ⟶ 1/6
G ⟶ 7
etc

Les six lettres du mot (dans le désordre!) :



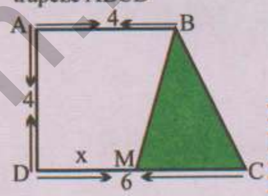
Pour trouver ces lettres, on dispose des renseignements ci-après.


Solution de l'équation $f(x) = g(x)$, avec $f(x) = 5x + 7$ et $g(x) = -9x + 8$

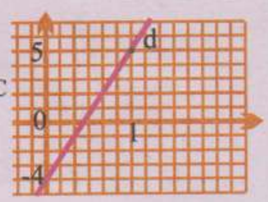

Image de zéro par l'application affine f sachant que $f(4) = 3$ et $f(-2) = 6$.


Est la durée (en heure) mise par un athlète pour parcourir 3 000 m à la vitesse de 18 km/h.


Est la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle BCM est égale à la moitié de l'aire du trapèze ABCD

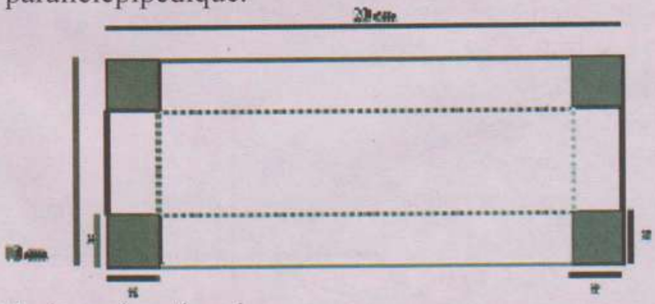



Coefficient directeur de la droite d.



23. La boîte à malices

Dans chacun des angles d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 10 cm, on découpe un carré de x cm de côté (grisé sur le dessin). En pliant suivant les pointillés on fabrique alors une boîte parallélépipédique.



Ecris en fonction de x :
l'aire 𝒜 de cette boîte, le volume 𝒱 de cette boîte.
2. Recopie et complète les tableaux ci dessous qui donne le volume de la boîte V(x) en fonction de x.

x	2,1	2,2
V(x)		

x	2,11	2,12
V(x)		

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
V(x)											

3. Représente graphiquement V en fonction de x. En utilisant la représentation graphique, dis pour quelles valeurs de x le volume V(x) est il égal à 100 cm³ ?

24. Sur une année, on propose au public deux types de tarifs pour l'emprunt de livres dans une bibliothèque :
le tarif plein : 900 UM par livre emprunté.
le tarif « abonné » : cotisation annuelle de 1000 UM à laquelle s'ajoute 50 UM par livre emprunté.

1. Reproduis et complète le tableau suivant :

Nombre de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix payé au plein tarif (en UM)		18000		
Prix payé au tarif ''abonné'' (en UM)	1500			

2 . Quel est le prix payé, en UM, pour l'emprunt de 35 livres :
a) Avec le tarif plein ? Justifie ta réponse.
b) Avec le tarif « abonné » ? Justifie ta réponse.
On note :

- x le nombre de livres empruntés sur l'année ;
- P(x) le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif plein ;
- A(x) le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif « abonné ».

Exprime P(x) et A(x) en fonction de x.
4. a) Résous l'équation : $900x = 50x + 1000$.
b) Que représente la solution trouvée pour une personne empruntant des livres à la bibliothèque ?.

25. a) On considère le mois d'août 2005.
Soit x le nombre de jours écoulés depuis le début du mois. On admet que le volume d'eau restant dans la cuve pour x jours écoulés est donné par $y = 4,8 - 0,3x$.
Calcule le volume restant dans la cuve à la fin du 7e jour.
b) Soit g la fonction affine définie par $g(x) = 4,8 - 0,3x$.
Construis la représentation graphique de la fonction g sur une feuille millimétré (prendre 1 cm pour 2 jours en abscisse et 1 cm pour 0,4 m³ en ordonnée).
c) Cet habitant a continué à consommer 300 litres d'eau par jour en août.
Détermine par lecture graphique le volume d'eau (en m³) qui reste dans la cuve au bout du 10^e jour. (Fais apparaître la réponse sur le graphique).

11 Fonctions affines 2

Je me souviens

I. Soit $f(x) = 2x + 3$

1) Complète le tableau :

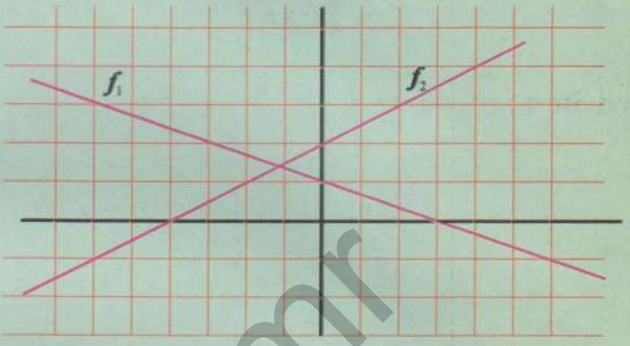
x	-3	-2	0	1	2	3
$f(x)$						

2) Construis le graphique de f
3) Quel est le sens de variation de f.

II. g est une fonction affine telle que :
$g(-2) = -1$; $g(3) = 20$

1) Donne l'expression de $g(x)$.
2) Représente graphiquement $g(x)$.

III. Reconnaître les fonctions affines représentées ; donne les expressions.



IV. Ecris sans valeur absolue :

$$|3x - 5| = \begin{cases} \ldots\ldots ; & x > \ldots \\ \ldots\ldots ; & x < \ldots \end{cases}$$

Je vais plus loin

Activité 1 :

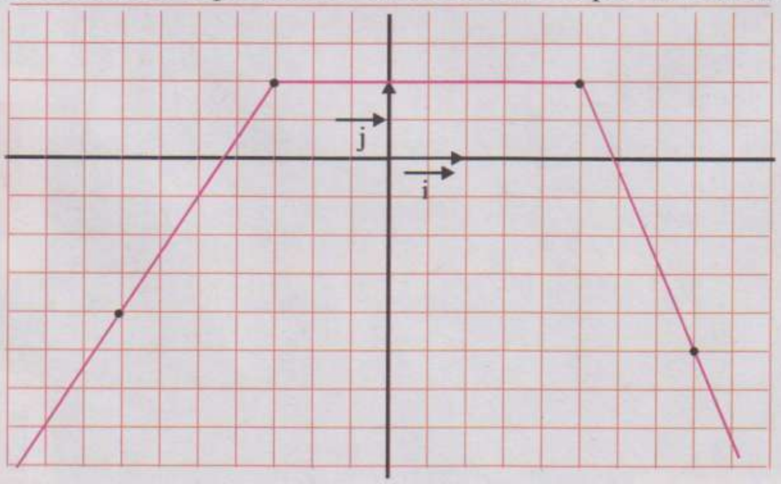
Soit la fonction $f : x \longmapsto |2x - 5|$

a) f est elle une fonction affine ?
b) Ecris f sans valeur absolue.
c) Représente graphiquement f dans un repère orthonormé.
d) f est elle affine sur : $]-\infty ; 2,5]$; pourquoi ?
e) f est elle affine sur : $]2,5 ; +\infty[$; pourquoi ?

$f(x)$ ***est appelée fonction affine par morceaux ou affine par intervalles.***

Activité 2 :

Reconnaître l'expression de la fonction affine par intervalles représentée ci-dessous :



Activité 3 :

L'ITS

L'impôt sur les salaires s'applique de la manière suivante :

- Salaire < 21 000UM 0%
- 21 000 < salaire < 61 000 15%
- 61 000 < Salaire 35%

a) Calcule l'impôt sur les salaires bruts suivants :
14 000 ; 45 000 ; 120 000.

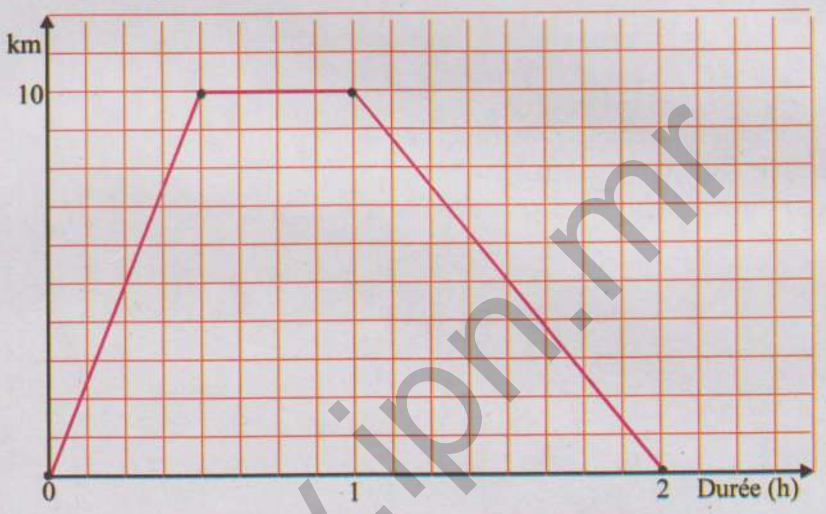
b) En déduis les salaires nets

c) Un employé reçoit un salaire net de 45 000 ; Calcule son salaire brut.

d) On note (I) impôt et (S) salaire, représente I = *f*(S) en prenant 1 cm pour 2 000 ouguiyas.

Activité 4 :

Le graphique suivant représente le mouvement de Diallo pendant son footing.



a) Recopie et complète le texte suivant :

Au départ, Diallo court pendant …. minutes (ce qui correspond à une vitesse moyenne de …..km /h).

b) Donne l'expression de la fonction qui relie la distance et la durée sur chaque intervalle.

Je retiens

Fonctions affines par morceaux

Une fonction affine par morceaux ou par intervalles est une fonction qui a diverses expressions selon les intervalles :

Exemples :

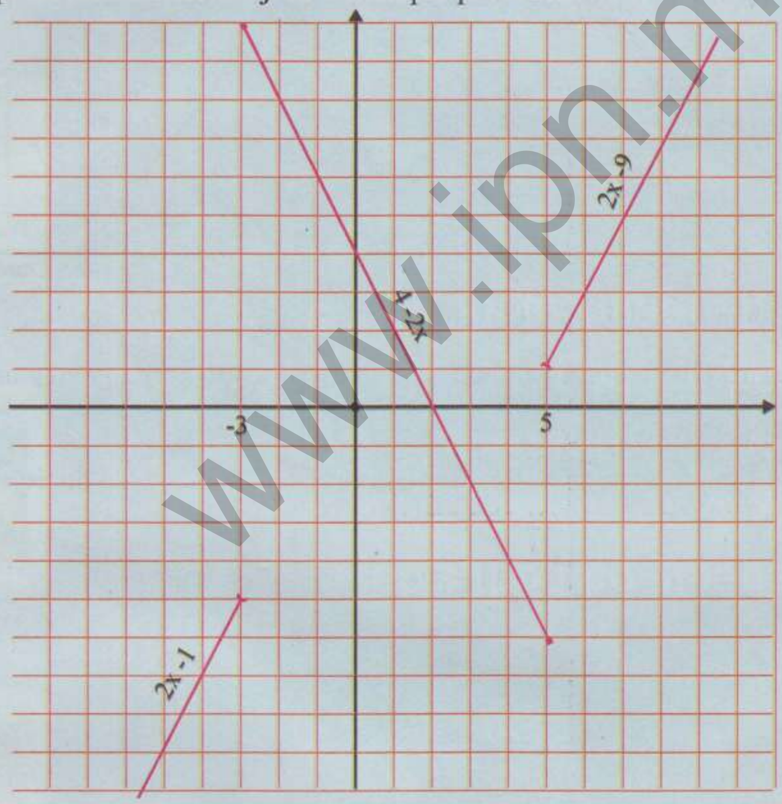
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \ x < -3 \\ 4-2x & ; -3 \leq x \leq 5 \\ 2x-9 & ; \ 5 < x \end{cases}$$

La valeur absolue d'une expression de la forme ax + b est une fonction affine par intervalles:

$$f(x) = |ax+b| = \begin{cases} ax+b & ; \ x > \dfrac{-b}{a} \ ; a \neq 0 \\ -ax - b & ; \ x < \dfrac{-b}{a} \ ; a \neq 0 \end{cases}$$

Pour représenter graphiquement une fonction affine par intervalles on calcule chaque expression pour les bornes de l'intervalle correspondant.

Exemple : pour représenter la fonction f de l'exemple précédent



Je sais faire

1. Donner l'expression d'une fonction affine par morceaux

Exercice 1: Soit la fonction $f(x) = |2x+3| + |4x-5|$

Donne l'expression de f sur les intervalles suivants :

a) $]-\infty\ ;\ \frac{-3}{2}[$

b) $[\frac{-3}{2}\ ;\ \frac{5}{4}]$

c) $]\ \frac{5}{4}\ ;+\infty[$

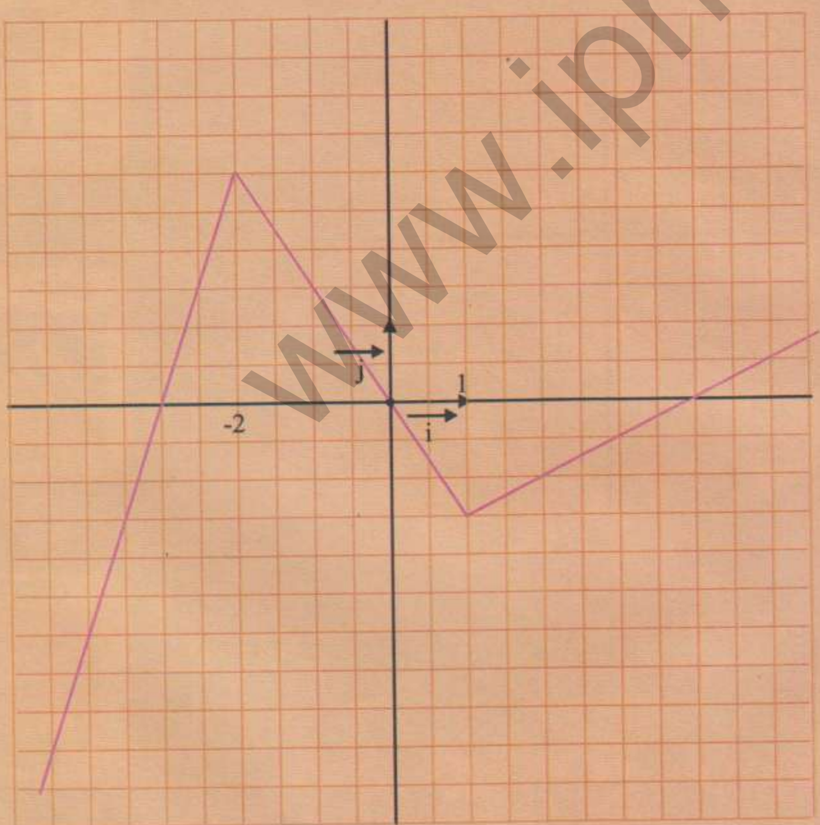
d) Ecris f comme fonction affine par intervalles.

2. Représenter graphiquement une fonction affine par morceaux

Exercice 2: Représente graphiquement la fonction $g(x)$ définie comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ;\ x < -2 \\ 4 & ;\ -2 \le x \le 2 \\ 4x - 4 & ;\ x > 2 \end{cases}$$

Exercice 3: a) Donne l'expression de la fonction h représentée ci-dessous



b) Résous graphiquement les équations :

- $h(x) = 1,5$
- $h(x) = -1$

CORRECTION

1. a) Sur l'intervalle$]-\infty ; \frac{-3}{2}[$, les deux expressions dans la valeur absolue sont négatives, donc

$f(x) = -2x - 3 + (-4x +5) = -6x + 2$.

b) Sur l'intervalle $[\frac{-3}{2} ; \frac{5}{4}]$, la première expression $(2x + 3)$ est positive, la seconde

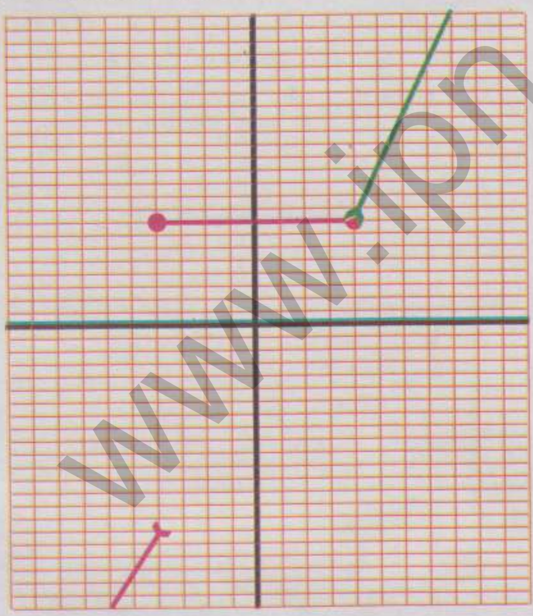
$(4x - 5)$ est négative, donc $f(x) = 2x + 3 + (-4x +5) = -2x + 8$.

c) Sur l'intervalle$]\frac{5}{4} ; +\infty[$ les deux expressions sont positives, donc

d) $f(x) = 2x + 3 + (4x -5) = 6x - 2$. Enfin l'expression de $f(x)$ est la suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -6x+2 & ; \ x < \frac{-3}{2} \\ -2x+8 & ; \ \frac{-3}{2} \le x \le \frac{5}{4} \\ 6x-2 & ; \ x > \frac{5}{4} \end{cases}$$

2. Voici les différentes représentations cherchées.



3. a) **Pour x < -2**, prenons $h(-2,5) = 1,5$; $h(-3,5) = -2$;

$$\begin{cases} -2,5a + b = 1,5 \\ -3,5a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 3,5 \Rightarrow b = 10,25 \ ; \text{ d'ou } h(x) = 3,5x + 10,25$$

Pour x > 1, prenons $h(1) = -1,5$; $h(3) = -0,5$;

$$\begin{cases} a + b = -1,5 \\ 3a + b = -0,5 \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -2 \ ; \text{ d'ou } h(x) = 0,5x - 2$$

Pour -2 < x < 1, il s'agit d'une fonction linéaire $h(x) = -1,5x$.

b) Sur le graphique $h(x) = 1,5 \rightarrow x = -1$ ou $x = -2,5$; $h(x) = -1 \rightarrow x = 2$ ou $x = -3,5$ ou $x \approx 0,75$.

a) Etudie le signe de $\frac{a+1}{a-1}$ et le sens de variation de f sur IR.

b) Construis les représentations graphiques de f pour $a = -1$; $a = 2$ et $a = \frac{1}{3}$.

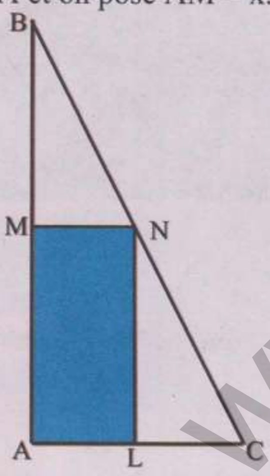
c) Détermine a pour que la représentation graphique de f passe par le point $A(1 ; \sqrt{2})$

11. Soit f et g deux fonctions affines définies par $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{1}{2}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{8}$.

a) Représente graphiquement ces deux fonctions. Utilise cette construction pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

b) Résous exactement cette équation.

12. ABC est un triangle rectangle en A.
On a AC = 4 cm et AB = 8 cm.
M est un point variable de [AB]. On construit le rectangle MNLA et on pose AM = x.



a) Démontre que $MN = \frac{8-x}{2}$ et démontre que l'aire y du rectangle MNLA est égale à $\frac{x(8-x)}{2}$.

b) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

Utilise ce tableau pour représenter graphiquement les variations de y en fonction de celles de x.

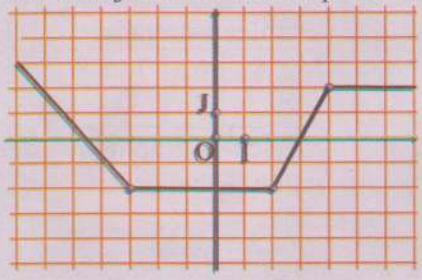
13. f, g, h et ℓ sont des fonctions linéaires de IR dans IR de coefficient respectifs a, b, a + b et ab.
Démontre que, pour tout nombre réel x,
$h(x) = f(x) + g(x)$ et $\ell(x) = g[f(x)]$.

14. Deux villes A et B sont distantes de 70 km.
Un premier cycliste part de A et se dirige vers B A la vitesse constante de 15 km/h. Au même instant, un autre cycliste part de B et se dirige vers A à la vitesse constante de 20 km/h.
Exprime en fonction du temps la distance qui sépare chaque cycliste de A.
Représente graphiquement les fonctions obtenues.
Que représentent les coordonnées du point commun aux deux droites ?

Je m'exerce

Fonctions affines par morceaux

1. La représentation ci-dessous est celle d'une fonction *f* de IR dans IR par morceaux.



Reproduis cette représentation puis détermine les quatre expressions qui donnent $f(x)$ pour $x \in$ IR.

2. Représente graphiquement les fonctions *f* et *g* définies respectivement, pour $x \in$ IR, par $f(x) = x - |x - 2|$ et $g(x) = |x - 3| - |5 - x|$.

3. Fonction en escalier

Représente graphiquement la fonction en escalier *f* définie par le tableau suivant :

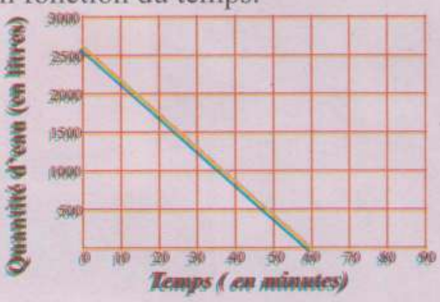
x	$-10 \leq x < -3$	$-3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 8$
$f(x)$	5	-4	2

4. Représente graphiquement la fonction en escalier *f* définie par le tableau ci-après :

x	$-6 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$
$f(x)$	-4	-2	0	3

Résolution graphique d'un problème

5. On décide de vider une citerne qui contient 2 700 litres d'eau. Le graphique ci-dessous représente les variations de la quantité d'eau contenue dans la citerne en fonction du temps.



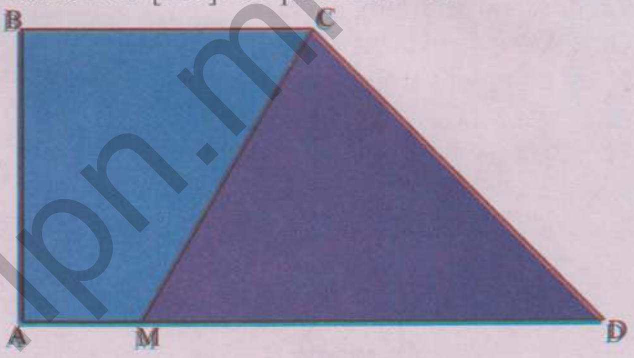
a) En utilisant le graphique et en faisant les calculs nécessaires, complète le tableau ci-dessous :

Temps t (en min)	0	10	30	40	60
Volume d'eau restant V (en ℓ)	…	…	…	…	…

b) Quelle est la nature de la fonction qui lie la quantité V d'eau qui est contenue dans la citerne au temps t (en min) ?

c) Exprime la relation qui existe entre V et t.

6. ABCD est trapèze rectangle en A et en B voir figure ci-dessous : de bases [AD] et [BC]. AD = 10 cm et AB = BC = 5 cm. M est un point variable de [AD]. On pose AM = x.



Montre que les aires du trapèze AMCB et du triangle MDC sont respectivement $\frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ et $\frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

Représente graphiquement les deux fonctions affines *f* et *g* définies respectivement par $f(x) = \frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ et $g(x) = \frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Que représente la solution trouvée ?

Exercices de recherche et problèmes.

9. Soit *f* une application linéaire, de IR dans IR de coefficient $a \neq 0$. Détermine qu'on a toujours $f(3x + 5y) = 3f(x) + 5f(y)$ quels que soient les nombres x et y.

10. Soit a un nombre réel différent de 1 et soit *f* la fonction linéaire de IR dans IR définie par $f(x) = \frac{a+1}{a-1} x$.

Module d'intégration 3

Chapitres

9;10;11

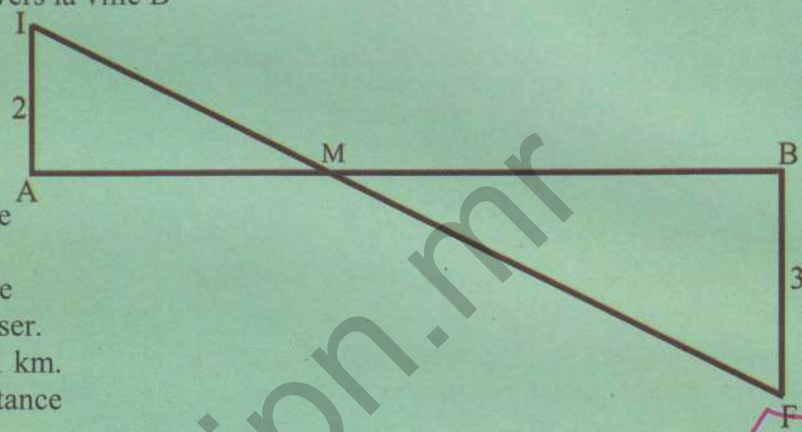
Chapitres / Compétences : 9. 2 ; 10. 3 ; 11. 3

Avec tout ce que tu as appris, et en particulier dans les trois derniers chapitres, tu peux résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, dont voici quelques situations- problèmes.

Situation 1

Lecture de l'énoncé

Au même instant, Saïdou et Malik partent en cyclomoteur,
Malik quite la ville A et se dirige vers la ville B avec une vitesse de 20 km.
Saïdou quite la ville B et se dirige vers la ville A avec une vitesse de 30 km/h.
Pour déterminer graphiquement le lieu de rencontre on a construit le schéma ci-contre :



Montre que le point M représente le point où les deux amis vont se croiser.
Les deux villes sont distantes de 31 km.
Fais un schéma pour estimer la distance du point A au lieu de croisement.

situation2

Vraisemblance des résultats

Dans une société de transport, le prix normal d'un billet est proportionnel au nombre de kilomètres parcourus.
Le prix d'un kilomètre est de 3 UM.
Cette société propose un tarif réduit aux 15-25 ans selon deux possibilités :
Tarif 1 : réduction de 25% sur tous les trajets.
Tarif 2 : Achat d'une carte « 15- 25 ans »au prix de 825 UM valable pour une année, permettant d'obtenir 50% de réduction sur tous les trajets.

a) Détermine la dépense annuelle selon chaque tarif pour :
   500 km ; 2000 km.
b) Soit y_1 et y_2 les dépenses annuelles en UM pour x km au tarif 1 et au tarif 2.
   Donne les dépenses annuelles de chaque tarif en fonction de x.
c) Quand est-il plus intéressant d'acheter une carte ? Trouve cette réponse graphiquement.
   (Choisir des unités convenables).
d) Un employé de la gare doit expliquer à la clientèle, les tarifs, rédige en quelques lignes de façon simple ces tarifs.

Situation3 — Choix des outils

Un automobiliste part d'une ville A et se dirige vers une ville B à la vitesse de 90 km/h.
Arrivé en B, il retourne vers A à la vitesse de 70km/h.
La durée totale du trajet est de 8h.

- Représente graphiquement le déplacement de cet automobiliste en reportant les durées sur l'axe des abscisses (2cm pour 1h) et les distances sur l'axe des ordonnées (0,5 cm pour 10 km) comptées depuis le point de départ.
- Ecris les équations qui correspondent aux déplacements de cet automobiliste.
- Au bout de combien de temps l'automobiliste est-il arrivé en B ?
- Trouve la durée qui s'est écoulée entre les deux passages de l'automobiliste au village C situé à mi-chemin entre A et B.

Situation4 — Apprentissage du raisonnement

Un terrain ayant la forme d'un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 40 m et AC = 50 m.
Soit M un point du segment [AC]. On pose AM = x.
La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe le segment [BC] en N.
Le propriétaire veut que son enfant élève de 4ème AS, présente une technique pour pouvoir trouver l'aire d'une partie de son terrain en faisant varier M.
Pour cela :

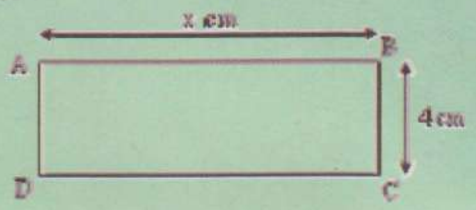
a) Donne les valeurs pour lesquels x peuvent varier.
b) Détermine la longueur CM en fonction de x.
c) Trouve la longueur MN en fonction de x.
d) Calcule l'aire A(x) du trapèze ABNM en fonction de x.
e) Quelle condition doit remplir x pour que l'aire du trapèze soit la moitié de celle du triangle ?
f) Montre que $x = 25(2 - \sqrt{2})$, vérifie cette condition et donne une valeur approchée de cette solution.
g) Quelle valeur doit prendre x pour que N soit le milieu de [BC] ?

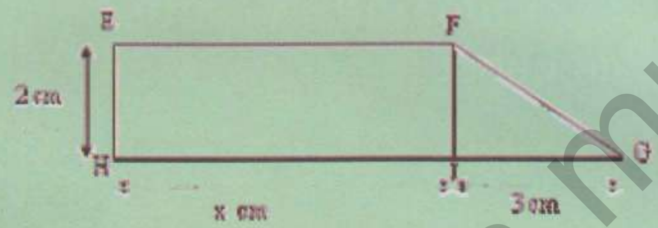
Entraînement à l'évaluation

Situation a

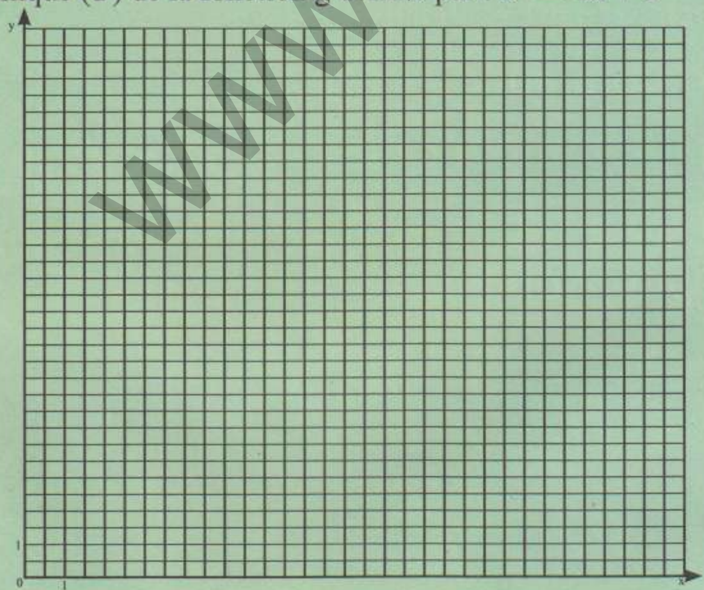
Voici un extrait d'un sujet de BEPC donné en 2004 dans un pays étranger.

On donne les figures suivantes :





1. Exprime en fonction de x l'aire A_{ABCD} du rectangle ABCD.
2. Exprime en fonction de x l'aire A_{EFGH} du quadrilatère EFGH.
3. Dans le repère orthonormal ci-dessous, après l'avoir reproduis trace en justifiant :
la représentation graphique (d) de la fonction f définie par : $x \longmapsto 4x$
la représentation graphique (d') de la fonction g définie par : $x \longmapsto 2x + 3$



4. a) Calcule l'aire du rectangle ABCD pour x = 3.
b5. a) Calcule la valeur de x pour que l'aire du quadrilatère EFGH soit égale à 15 cm^2.
b) Retrouve ce résultat sur le graphique (on laissera apparents les traits nécessaires).
6. a) Résous graphiquement l'équation : $4x = 2x + 3$
b) Retrouve ce résultat en résolvant l'équation : $4x = 2x + 3$
c) Comment interpréter ce résultat pour le rectangle ABCD et le quadrilatère EFGH ?

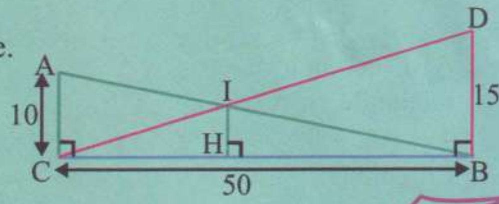
Situation b

Lors d'une sélection des meilleurs élèves des classes de 4ème AS, la situation suivante a été proposée sans consignes.

Les élèves l'ont traité avec diverses manières dont certaines ont été appréciées par le professeur.

❖ Choisis ta propre méthode pour résoudre cette situation.

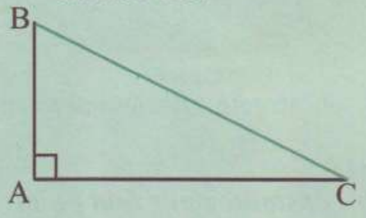
- Les dimensions connues sont portées sur la figure ci - contre.
- Les triangles ABC et BCD sont rectangles respectivement en C et B.



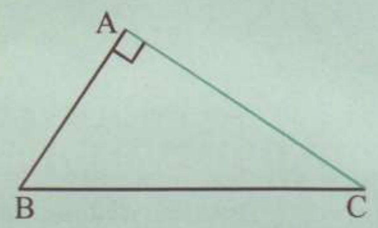
13 Géométrie du triangle rectangle

Je me souviens

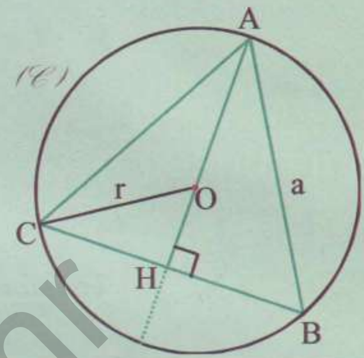
- ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 et AC = 8.
  Calcule BC.



- ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 et BC = 9.
  Calcule AC.



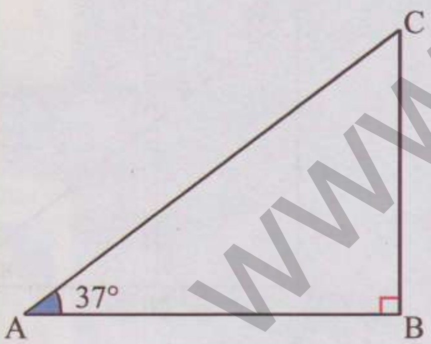
- Démontre que : $a = r\sqrt{3}$

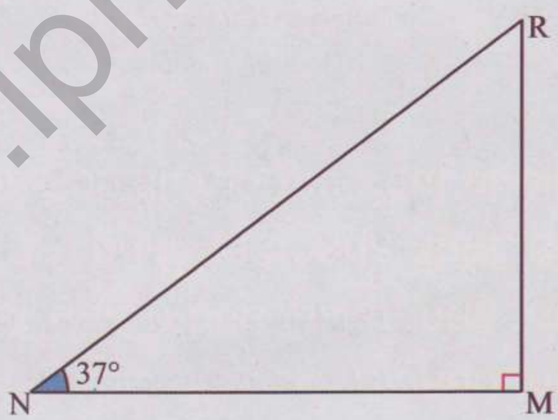


Je vais plus loin

Activité 1 :

Observe





a) Mesure les côtés [AB] et [AC], [NM] et [NR] des triangles ABC et NMR.

b) Calcule les quotients : $\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{NM}{NR}$.

Compare leurs arrondis au dixième.

Que constates-tu ?

c) De même pour : $\dfrac{BC}{AC}$ et $\dfrac{MR}{NR}$.

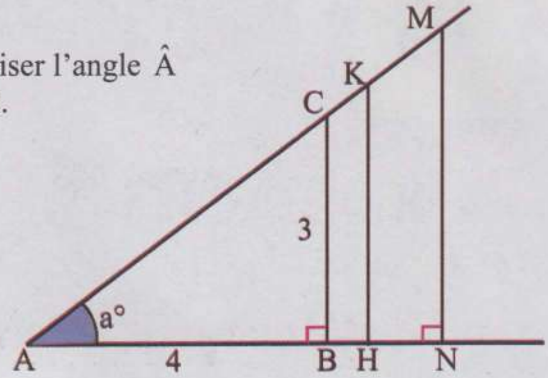
Compare leurs arrondis au dixième.

Que constates-tu ?

Activité 2 :

Cosinus et sinus d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en B tel que $\hat{A}$ a pour mesure a°.On veut caractériser l'angle $\hat{A}$ (ou sa mesure) par les côtés du triangle ABC.



a) Calcule $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{BC}{AC}$.

b) M est un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB).
Justifie les égalités suivantes :

- $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM}$
- $\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AM}$.

c) Reprends le même travail avec le point K sur (AM) et son projeté orthogonal H sur (AB).

➢ ***Les nombres $\frac{AN}{AM}$ et $\frac{MN}{AM}$ gardent chacun une valeur constante pour tout point M de (AC).***

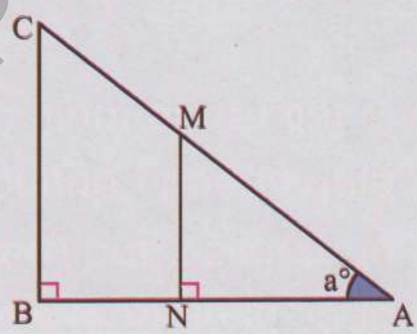
➢ ***Ces nombres ne dépendent que de l'angle $\hat{A}$.***

➢ ***Ils sont notés respectivement cos $\hat{A}$ et sin $\hat{A}$.***

Activité 3 :

Tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en B, tel que $\hat{A}$ a pour mesure a°.
M est un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB).



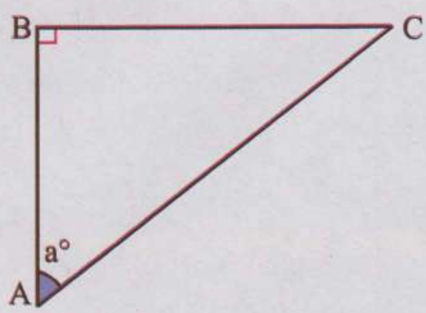
- Justifie que : $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN}$

Le nombre $\frac{MN}{AN}$ conserve la même valeur pour tout point M de (AC).
Ce nombre ne dépend que de l'angle $\hat{A}$
Il est noté tan $\hat{A}$

Activité 4 :

Propriétés

ABC est un triangle rectangle en B, tel que : $\hat{A} = a°$.
Sachant que AB < AC ; BC < AC.



a) Justifie que :

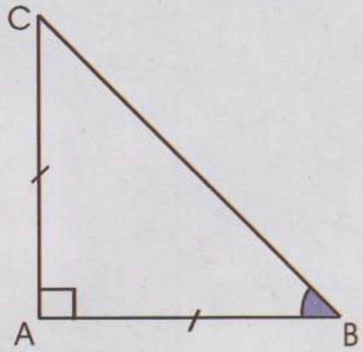
- $0 < \frac{AB}{AC} < 1$
- $0 < \frac{BC}{AC} < 1$

b) Calcule : $(\sin a°)^2 + (\cos a°)^2$.

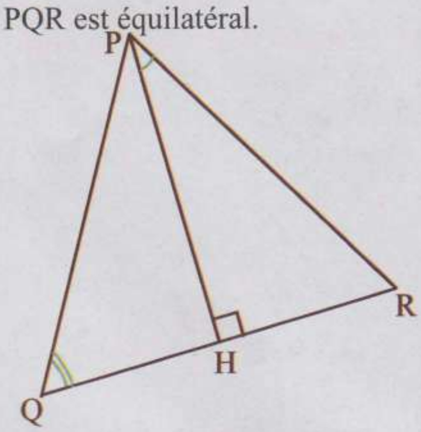
Activité 5 :

Cosinus et sinus d'angles particuliers

ABC est isocèle rectangle en A.



PQR est équilatéral.



A l'aide de ces deux triangles reproduis et complète le tableau suivant :

a°	30°	45°	60°	90°
sin a°				
cos a°				

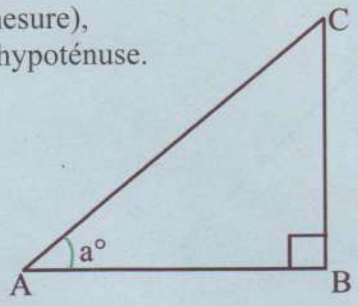
Je retiens

1. sinus et cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle,

- on appelle **sinus** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
  On écrit :

  $$\sin a^\circ = \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$



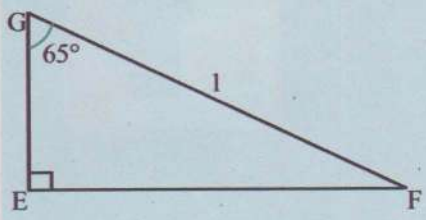
- on appelle **cosinus** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

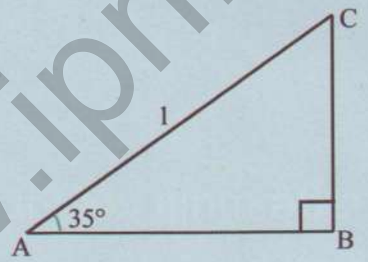
  On écrit : $\cos a^\circ = \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{A}}{\text{Hypoténuse}}$

Exemple : L'unité de longueur est le dm.

Les triangles suivants sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Calcule le cosinus et le sinus de l'angle donné.





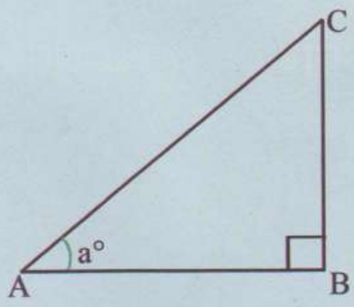
2. Tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, on appelle **tangente** d'un angle aigu (ou de sa mesure) le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.

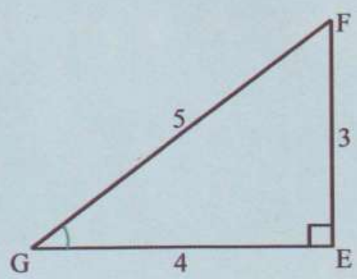
On écrit :

$$\tan(a^\circ) = \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{côté adjacent à } \hat{A}}$$

On écrit aussi : $\tan(a^\circ) = \tan \hat{A} = \frac{\sin a^\circ}{\cos a^\circ}$



Exemple : Calcule $\tan \hat{G}$ et $\tan \hat{F}$



3. Propriétés

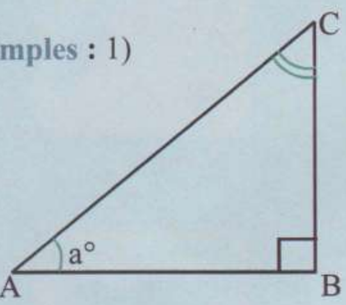
a) Pour tout angle aigu a, on a :

$0 < \cos a° < 1$; $0 < \sin a° < 1$; $\cos^2 a° + \sin^2 a° = 1$

b) Si deux angles sont complémentaires, alors

- le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.
- les tangentes de ces deux angles sont inverses l'une de l'autre.

Exemples : 1)



$\cos(90 - a)° = \sin a°$; $\sin(90 - a)° = \cos a°$

$\cos \hat{C} = \sin \hat{A}$; $\sin \hat{C} = \cos \hat{A}$

$$\tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \frac{\cos \hat{A}}{\sin \hat{A}} = \frac{1}{\tan \hat{A}}$$

2) Le cosinus d'un angle aigu $\hat{A}$ est $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Calcule le sinus de cet angle.

Nous savons que : $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$,

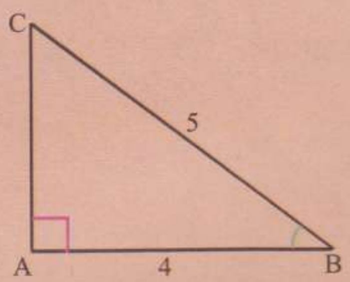
donc, $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

D'où, $\sin \hat{A} = \frac{1}{3}$.

Je sais faire

1. Calculer le sinus et le cosinus d'un angle aigu

Exercice 1: Calcule le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle précisé dans le triangle ci-dessous.



2. Utiliser le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu pour calculer les deux autres côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 2: ABC est un triangle rectangle en B tel que:
$AB = 12$ et $\hat{C} = 60°$.
Calcule AC et BC.

Exercice 3 : Dans un triangle ABC rectangle en B, on a : $\cos\hat{A} = \frac{9}{14}$. Calcule $\sin\hat{A}$

3. Calculer la tangente d'un angle aigu, dans un triangle, connaissant les deux côtés de son angle droit

Exercice 4 : ABC est un triangle rectangle en A tel que: $AB = 7{,}5$ et $AC = 12{,}5$. Calcule $\tan\hat{C}$

4. Calculer un côté de l'angle droit, connaissant l'autre côté et la tangente d'un angle aigu.

Exercice 5 : ABC est un triangle rectangle en C tel que: $AC = 4$ et $\tan\hat{A} = 0{,}75$.Calcule le deuxième côté de l'angle droit.

5. Calculer la tangente d'un angle aigu connaissant son sinus et son cosinus

Exercice 6 : ABC est un triangle rectangle en B. Calcule $\tan\hat{A}$ lorsque :

a) $\sin\hat{A} = \frac{1}{3}$ et $\cos\hat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\sin\hat{C} = \frac{3}{5}$ et $\cos\hat{C} = \frac{4}{5}$.

CORRECTION

1. Le triangle ABC est rectangle, d'après Pythagore :

$AC^2 = BC^2 - AB^2$
$= 5^2 - 4^2$
$= 25 - 16 = 9$

d'où : AC = 3.

$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{4}{5} = 0,8.$

$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{3}{5} = 0,6.$

2. Dans ce triangle, on a :

- $\sin 60° = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{AC}$, ce qui donne : $AC = \frac{12}{\sin 60°}$.

  d'où, $AC = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$.

  Donc, $AC = 8\sqrt{3}$

- $\cos 60° = \frac{CB}{AC} = \frac{CB}{8\sqrt{3}}$, ce qui donne : $CB = 8\sqrt{3} \times \cos 60° = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$.

  D'où, $CB = 4\sqrt{3}$.

3. Dans ce triangle rectangle, nous savons que :

$\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$, d'où $\sin^2\hat{A} = 1 - \cos^2\hat{A}$.

Donc, $\sin^2\hat{A} = 1 - (\frac{9}{14})^2$

$\sin^2\hat{A} = 1 - \frac{81}{196} = \frac{196-81}{196} = \frac{115}{196} \approx 0,59.$

Grâce à la touche ($\sqrt{\ }$) de la calculatrice

on trouve : $\sin\hat{A} \approx 0,77$.

4. $\tan\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{7,5}{12,5} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$;

donc, $\tan\hat{C} = 0,6$.

5. Dans ce triangle $\tan\hat{A} = \frac{CB}{AC} = \frac{CB}{4}$, d'où $CB = 4 \times \tan\hat{A} = 4 \times \tan\hat{A} = 4 \times 0,75 = 3$.

donc, CB = 3.

6. Le calcul de la tangente de l'angle $\hat{A}$, dans les deux cas :

a) Si, $\sin\hat{A} = \frac{1}{3}$; $\cos\hat{A} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, alors, $\tan\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\times 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$;

donc, $\tan \hat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

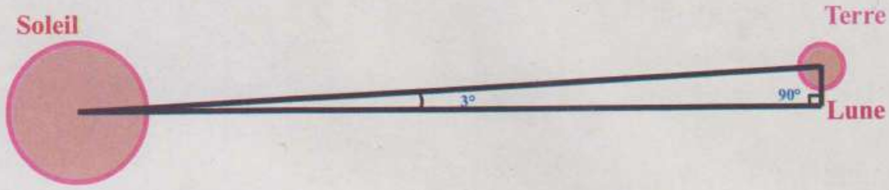
b) si, $\sin \hat{C} = \dfrac{3}{5}$ et $\cos \hat{C} = \dfrac{4}{5}$, alors, $\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \dfrac{\cos \hat{C}}{\sin \hat{C}}$, car les deux angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires dans le triangle ABC, par conséquent, $\tan \hat{A} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$;

D'où, $\tan \hat{A} = \dfrac{4}{3}$.

Activité documentaire

Un peu de l'histoire

Aristarque (310 -av- J-C).
Un grand astronome grec. Il émit, le premier, l'hypothèse de la rotation de la terre sur elle-même et autour du soleil.
Pour mesurer la distance de la terre au soleil, il observa l'angle entre la lune, telle qu'on la voit dès le matin, le soleil et la terre quand la moitié de la surface de la lune est visible (demi-lune).

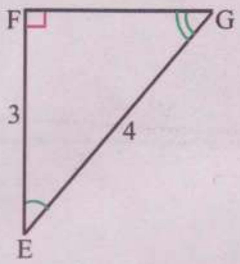


A l'aide des instruments imparfaits, dont il disposait, il trouva que l'angle $\hat{S}$, dans le triangle TSL, était de 3°.
Il n'avait pas de tables de rapports d'angles et utilisa donc une très ingénieuse, mais pour nous trot longue, il s'agit de l'application de la géométrie d'Euclide.
Il constata alors que la distance TS est dix-huit à vingt fois la distance TL.
Non content de cette méthode, il recourt à une seconde méthode pour trouver ce résultat.
Grâce à la trigonométrie, le problème d'Aristarque est désormais accessible à n'importe qu'el élève de la $4^{ème}$ AS.
Trouve la solution de ce problème, à l'aide de cette dernière méthode.
On rappelle que la distance trouvée est différente de celle qui est réelle et qui est à l'ordre de 149 000 000 km.
L'erreur commise par Aristarque provient de la faible précision de ses instruments.
Le mérite d'Aristarque est d'avoir montré que le soleil est distant d'au moins 7 500 000 km de la terre ce qui est un progrès remarquable dans les connaissances humaines liées à l'univers.

Je m'exerce

Vrai ou faux

1. Réponds par vrai ou faux en justifiant : sur la figure ci-dessous (pour les questions a ;b ;c ;d).



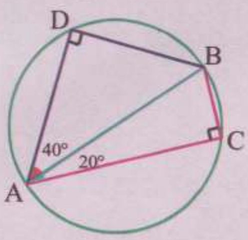
a) $\cos\hat{E} = \frac{3}{4}$ et $\sin\hat{G} = \frac{4}{3}$

b) $\tan\hat{E} = \frac{7}{3}$

c) $\tan\hat{G} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

d) $(\tan\hat{E})^2 + (\tan\hat{G})^2 = \frac{130}{63}$.

Sur la figure ci-contre (pour les questions e , f , g ,h)



e) $\sin 40° = 2\sin 20°$

f) DB = 2BC

g) $\cos 20° = 2\cos 40°$

h) AC = 2AD

i) $\cos 60° = 2\cos 30°$

j) $\sin 60° = 2\sin 30° \times \cos 30°$

k) $\cos 60° = 1 - 2(\sin 30°)^2 - 1$

l) $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

m) $\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

sinus, cosinus , tangente

2. a) Calcule α dans les cas suivants:

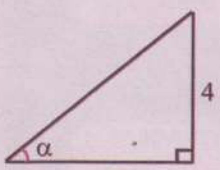


Fig.1

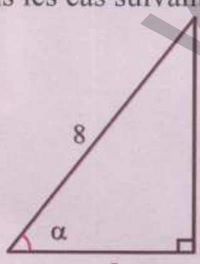
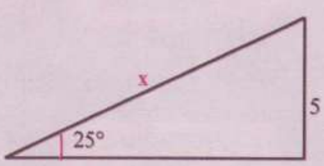
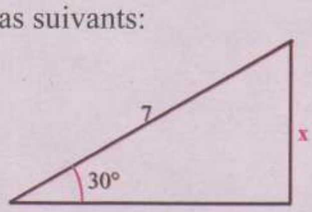


Fig.2

b) Calcule x dans les cas suivants:





3. ABC est un triangle rectangle en B tel que : AC = 7,5 et BC = 4,5.
Calcule $\sin\hat{A}$.

4. ABC est un triangle rectangle en A tel que : AC = 10,8 et BC = 13,5.
Calcule $\cos\hat{C}$.

5. L'unité de longueur est le cm.
Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :
AC = 32,5 ; $\sin\hat{A} = \frac{5}{13}$ et $\cos\hat{A} = \frac{12}{13}$.
Calcule AB et BC.

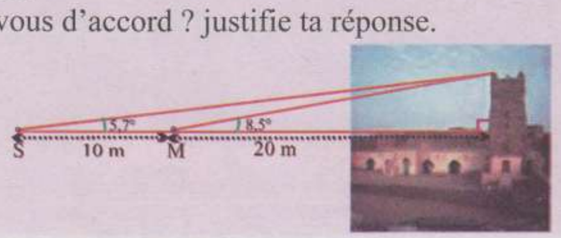
6. Dans un triangle ABC rectangle en B, on a $\sin\hat{A} = \frac{2}{3}$.
Calcule $\cos\hat{A}$.

7. Un triangle ABC, rectangle en A, est tel que AB = 7cm et BC = 9cm. Fais une figure.
Evalue sans instruments l'angle $\hat{C}$.
Calcule $\sin\hat{C}$, puis donne l'arrondi à 1° près de l'angle $\hat{C}$.

8. ABC est un triangle rectangle en B tel que : $\tan\hat{C} = \sqrt{2} - 1$.
Calcule $\tan\hat{A}$.

9. L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que : $\tan\hat{A} = \frac{4}{3}$ et BC = 2.
Calcule AB et AC.

10. Mohamed et Sidi deux élèves au collège de Chinguitti, observent le minaret de la mosquée a partir des toits de leurs maisons comme l'indique la figure.
Chacun confirme qu'il peut trouver la hauteur du minaret.
Etes-vous d'accord ? justifie ta réponse.

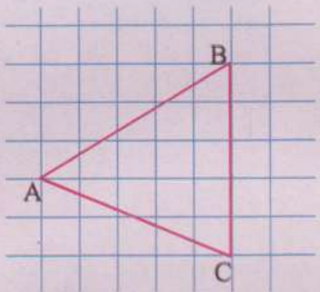


11. Deux triangles ABC et ABD, rectangles en A, ont le côté [AB] en commun et sont situés de part et d'autre de ce côté.
Fais une figure avec AC = 3cm, AD = 5cm et AB = 4cm.

a) Evalue, sans instruments, $\widehat{CBD}$

b) Calcule $\tan \widehat{ABC}$ et $\tan \widehat{ABD}$, puis les approximations par excès à 1° près de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$. $\widehat{CBD}$ est-t-il droit.

12. En projetant un des sommets du triangle ABC sur le côté opposé on peut déterminer sans mesurage $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$, puis $\hat{B}$ et $\hat{C}$ et enfin $\hat{A}$. Fais-le.



Construire un angle de tangente donnée

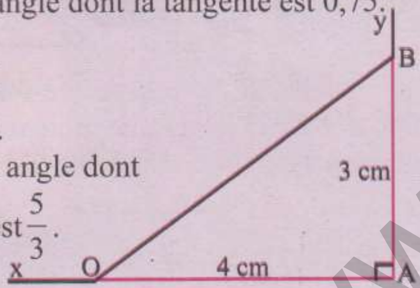
13. Exemple : angle dont la tangente est 0,75.

$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$\tan \widehat{AOB} = 0{,}75$.

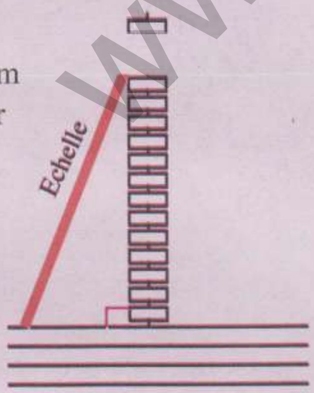
a) Construis un angle dont la tangente est $\frac{5}{3}$.

b) Construis
Un angle dont la tangente est 1,5.



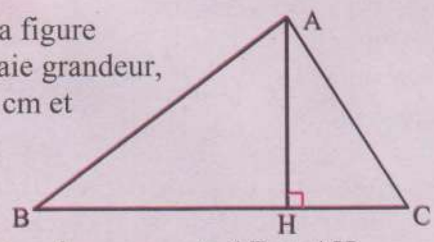
Approfondissement

14. Une échelle de 3,50 m arrive à 3,30m de hauteur sur un mur vertical.
Quel angle fait-elle avec le sol ?
(on donnera une valeur approchée)

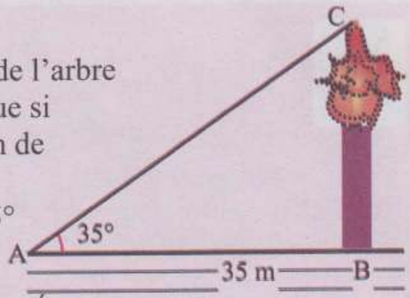


15. Reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur, avec : BC = 10 cm et AC = 6 cm.

Calcule les longueurs exactes des segments AB et AH.



16. Détermine une hauteur approchée de l'arbre ci-contre sachant que si l'on se place à 35 m de son pied, on le voit sous un angle de 35°



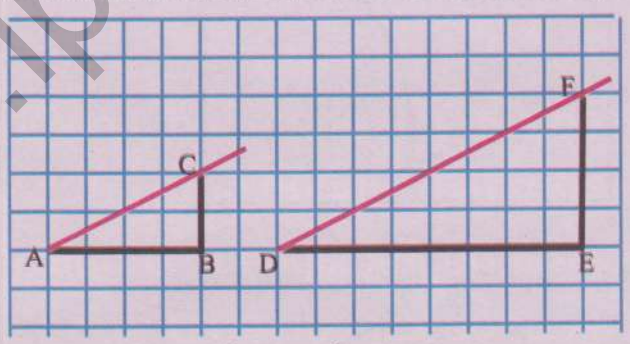
17. MNPQ est un carré.

a) Construis un carré qui a pour aire le double de l'aire de MNPQ.

b) Construis un carré qui a pour aire le triple de l'aire de MNPQ.

18. L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est triangle tel que :
AB = 5 ; $\hat{A} = 45°$ et $\hat{C} = 30°$.
Le point H est le projeté orthogonal du sommet B sur la droite (AC).
Calcule AH, BH, BC, HC et AC.

19. a) Observe la figure ci-dessous.
Montre que la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ est la même que celle de l'angle $\widehat{EDF}$.
Détermine la valeur commune de ces deux angles.



b) l'égalité de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EDF}$ permet de démontrer que les droites (AC) et (DF) sont parallèles ; faites-le.

20. Les diagonales d'un rectangle mesurent 12cm. Calcule une valeur approchée de ses côtés quand l'angle aigu des diagonales mesure :

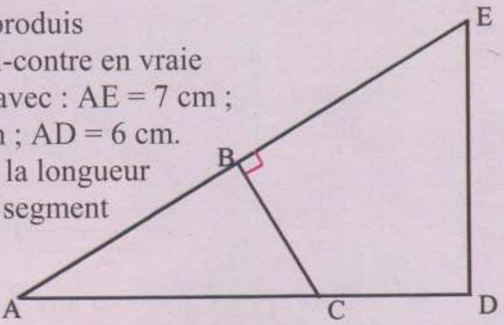
a) 60° b) 80° c) 30°

21. a) On donne un triangle ABC tel que : BC = 10 cm ; AB = 15 cm et $\hat{B} = 50°$.

Calcule une valeur approchée de l'aire du triangle ABC.

b) En remplaçant ''AB = 15 cm'' par ''AB = x'', montre que l'aire du triangle ABC est proportionnelle à x.

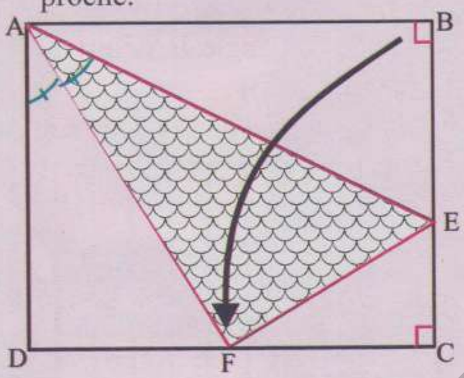
22. a) Reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur avec : AE = 7 cm ; AC = 4 cm ; AD = 6 cm.
b) Calcule la longueur exacte du segment [AB].



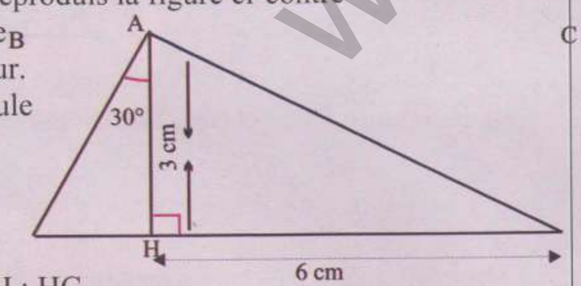
c) Donne une valeur approchée de [AB] et vérifie sur la figure.

23. On considère une feuille de papier rectangulaire ABCD. On la plie de façon à amener le point B sur le côté [DC] en F.

a) Sachant qu'alors $D\hat{A}F = F\hat{A}E$ et que AE = 120mm, détermine les longueurs exactes des côtés de la feuille.
b) En déduis l'aire de la feuille au mm^2 le plus proche.

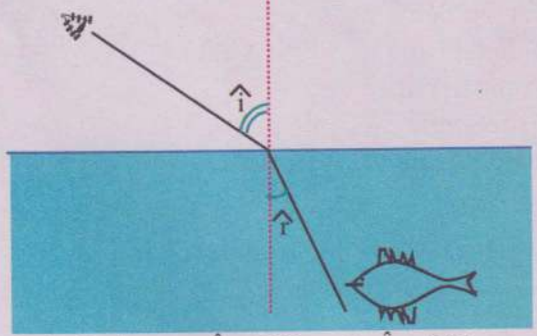


24. a) Reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur.
b) Calcule Les valeurs exactes de AC ; AB ; BH ; HC.



c) En déduis la valeur de BD par deux méthodes différentes.
d) En déduis l'aire du triangle ABC par deux méthodes différentes.
e) On désigne par I le milieu du segment [BC].Calcule AI et la mesure de l'angle $A\hat{I}B$.

25. Le rayon lumineux passant de l'air dans l'eau est dévié au niveau de la surface de l'eau.
L'angle d'incidence ($\hat{i}$) et l'angle de réflexion ($\hat{r}$) sont tels que $\sin\hat{r} = \frac{3}{4}\sin\hat{i}$.

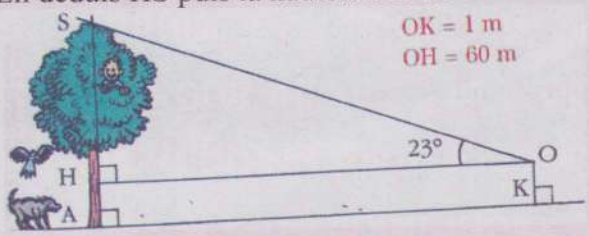


a) Calcule $\hat{r}$ pour $\hat{i} = 30°$, puis $\hat{i} = 60°$.
b) Calcule $\hat{i}$ sachant que $\hat{r} = 45°$.
c) Que vaut $\hat{r}$ si $\hat{i} = 90°$? peut-on avoir $\hat{r} = 50°$?

26. En pente

De combien de mètres s'élève-t-on lorsqu'on parcourt 1 435 m sur une route rectiligne qui fait un angle de 6° avec l'horizon ?

27. Calcule la distance OS et la mesure de $H\hat{S}O$. En déduis HS puis la hauteur AS de l'arbre.



28. Trace un triangle ABC tel que BC = 8 cm, $C\hat{B}A = 54°$ et
de [BC]. Le cercle de diamètre [BC] coupe [AB] en M.

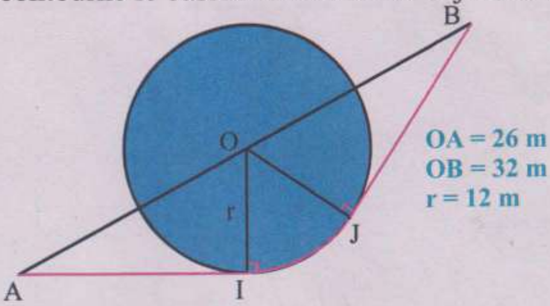
a) Démontre que le triangle BMC est rectangle.
b) Calcule les angles $B\hat{C}M$ et $M\hat{C}A$.
c) Calcule CM, donne son arrondi à 0,01 cm.
d) Démontre que : $AC = \dfrac{BC \times \cos 36°}{\cos 44°}$
Donne l'arrondi de AC à 0,01cm.
e) On appelle $\mathscr{C}_1$ le demi-cercle de diamètre [BC] ne contenant pas le point M.
Sur ce demi-cercle $\mathscr{C}_1$, place le point D tel que CD = 7 cm.

Calcule l'arrondi à l'unité de l'angle $\widehat{BCD}$

f) La perpendiculaire à (MC) passant par O coupe [AC] en N. démontre que N est le milieu de [AC].

g) En déduis que le cercle de centre N et de rayon NA passe par M.
En suivant la méthode des questions a. b. c et d, calcule une valeur approchée de AB à 0,01.

29. Pour se rendre de A à B, un promeneur contourne le bassin en suivant le trajet AIJB.

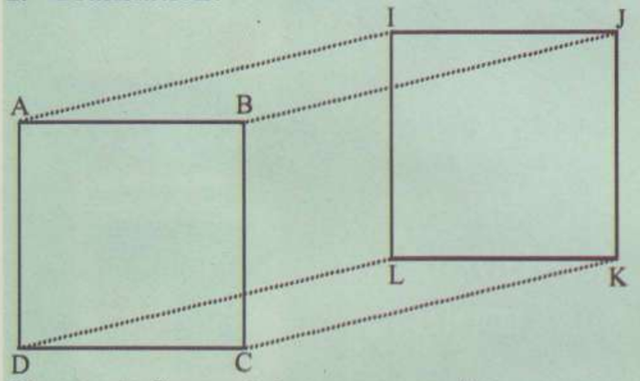


Calcule à 0,1 m près la longueur de ce trajet.

14 Transformations

Je me souviens

1. Translations



Observe la figure ci-dessus et complète

- Avec la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$

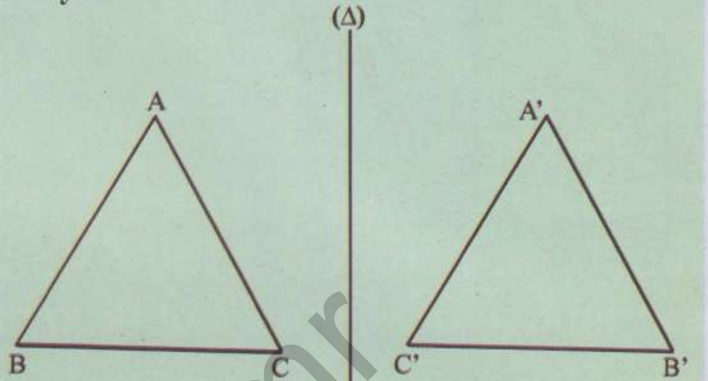
  $t_{\overrightarrow{AI}}(B) = \dots$;

  $t_{\overrightarrow{AI}}(C) =$;

  $t_{\overrightarrow{AI}}(D) =$

- Le carré IJKL est le …. du carré ABCD par la translation $t_{\overrightarrow{AI}}$

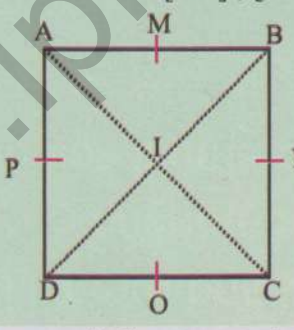
2. Symétries



$S_\Delta(A) = A'$; $\Delta = \dots[AA']$

$S_\Delta(B) = \dots$; $S_\Delta(C) = C'$; $S_\Delta(ABC) = \dots$

I c'est le … de [AC] ; [BD] ; [NP] ; …



$S_I(A) = \dots$;

$S_I(B) = \dots$;

$S_I[AB] = \dots$;

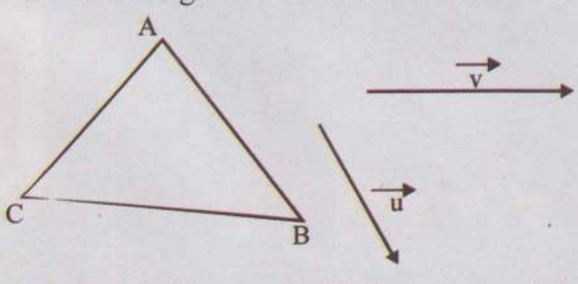
$S_I[ABN] = \dots$

Les trois transformations citées plus haut conservent : l'alignement ; la distance et les angles

Je vais plus loin

Activité 1 :

Voici un triangle ABC et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



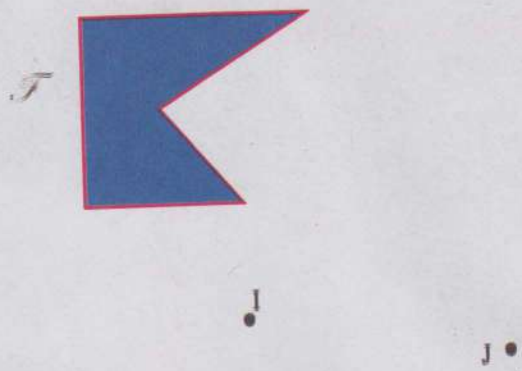
a) Construis l'image de ABC par la translation $t_{\vec{u}}$ que l'on notera A'B'C'.

b) Construis le translaté du triangle A'B'C' par la translation de vecteur $\vec{v}$ que l'on notera A''B''C''.

c) Quelle est la transformation qui au triangle ABC associe A''B''C'' ?

Activité 2 :

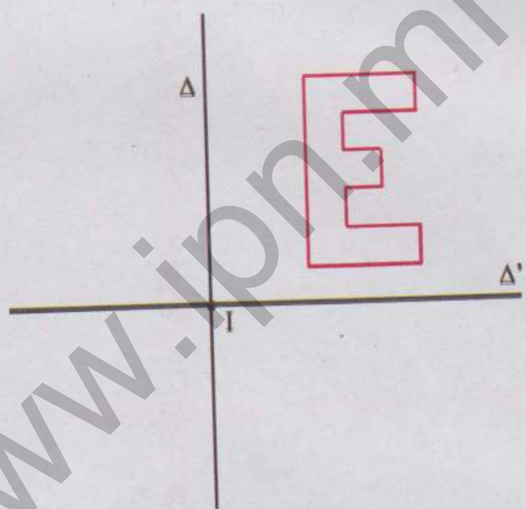
a) Construis l'image de la figure $\mathscr{F}$ par la symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre J.



b) Par quelle transformation peut-on obtenir directement cette image ?

Activité 3 :

a) Δ et Δ' sont deux droites perpendiculaires en I.
Construis l'image de la figure donnée par la symétrie d'axe Δ suivie de la symétrie d'axe Δ'.



b) Par quelle transformation peut-on obtenir directement cette image ?

c) Reprends les mêmes questions dans le cas ou $\Delta // \Delta'$.

Je retiens

1. La composée de deux translations

La composée de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ **(fig. 1)**

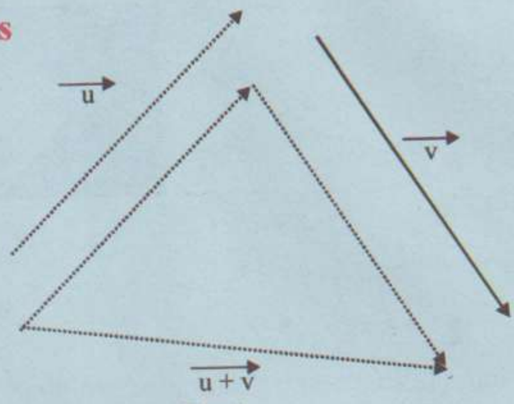


Fig.1

2. La composée de deux symétries centrales

La composée de deux symétries centrales de centres respectifs I et J est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{IJ}$ **(Fig.2)**

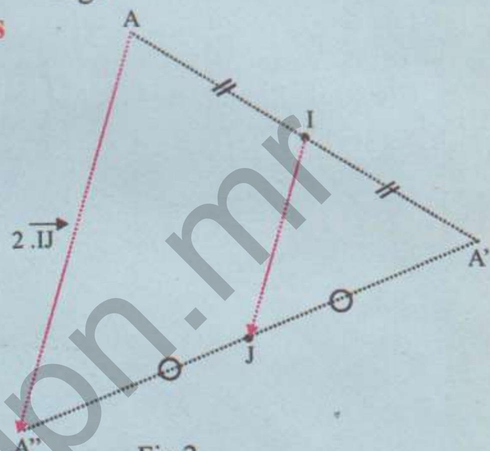


Fig.2

3. La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires

La composée de deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ et Δ' perpendiculaires en I c'est la symétrie centrale de centre I (Fig. 3)

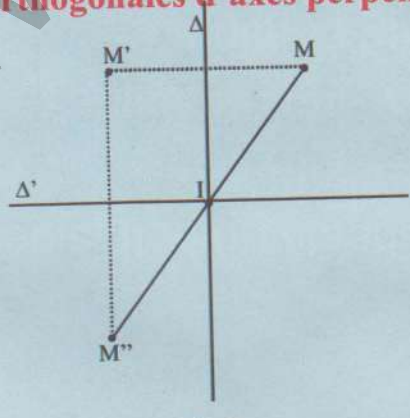


Fig.3

4. La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

La composée de deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ et Δ' parallèles c'est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{AB}$ ou A est un point de Δ ; B est son projeté orthogonal sur Δ'. (Fig. 4)

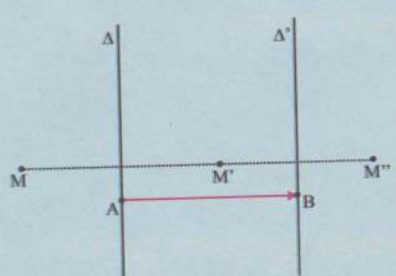
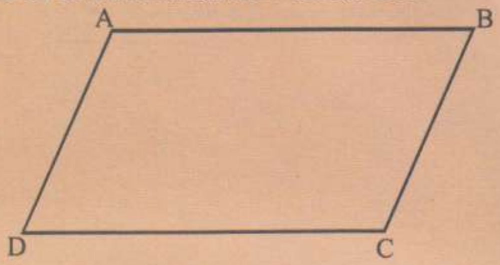


Fig.4

Je sais faire

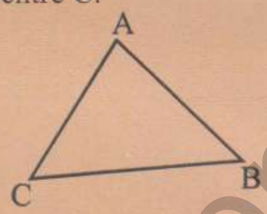
1. Construire l'image d'un point par deux translations qui se suivent

Exercice 1: ABCD est un parallélogramme, construis directement l'image D' du point D par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.



2. Construire l'image d'un point par deux symétries centrales qui se suivent

Exercice 2: ABC est un triangle ; construis directement l'image A' du point A par la symétrie centrale de centre B suivie de la symétrie centrale de centre C.



3. Construire l'image d'un point par deux symétries axiales qui se suivent

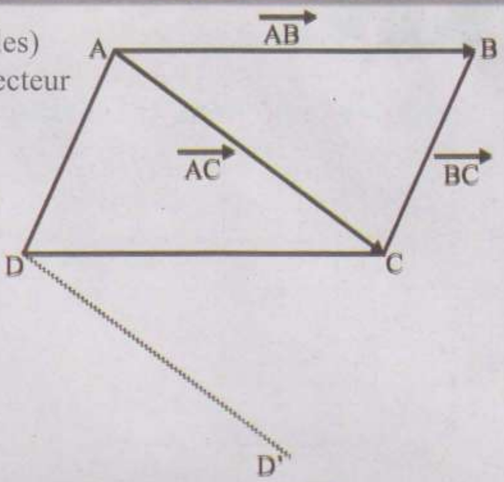
Exercice 3 : ABCD est un rectangle, M est un point hors de ce rectangle ; construis directement :

a) M_1 l'image de M par la symétrie par rapport à (AB) suivie de la symétrie par rapport à (AD).

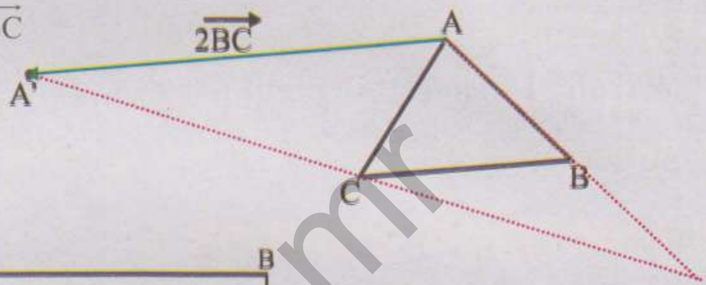
b) M_2 l'image de M par la symétrie par rapport à (AB) suivie de la symétrie par rapport à (CD).

CORRECTION

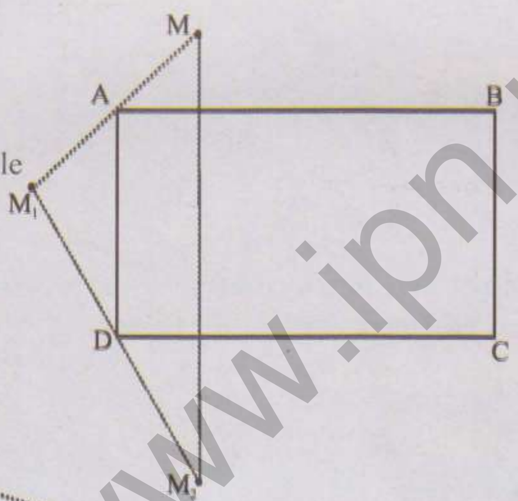
1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)
On construit donc un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$ à partir du point D on obtient D'.



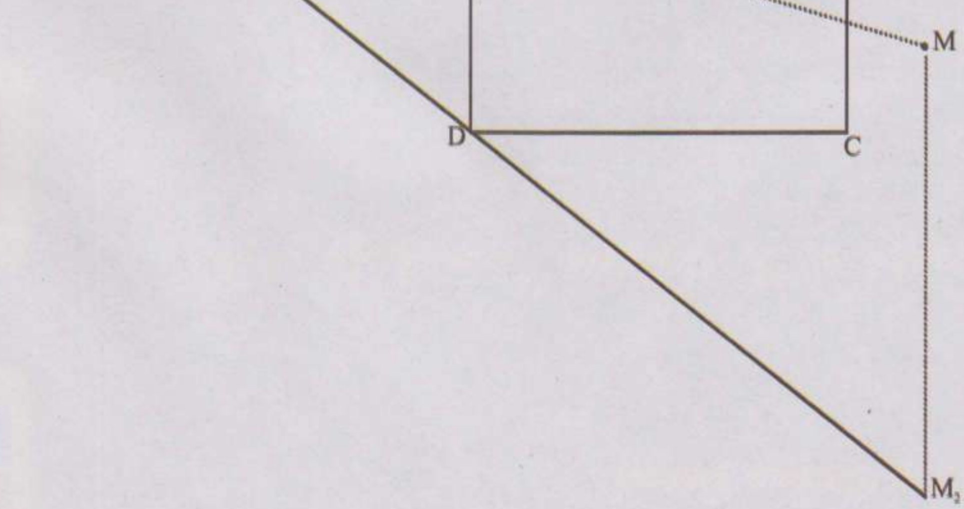
2. Je construis un vecteur égal à deux fois $\overrightarrow{BC}$ à partir du point A pour obtenir A'.



3. Position 1 :
(AB) et (AD) sont perpendiculaire en A. Il suffit de construire le symétrique de M par rapport au point A pour trouver M_1.



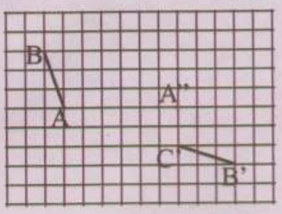
Position 2 :
(AB) et (DC) sont parallèles, il suffit de translater M avec le vecteur $2\overrightarrow{BC}$ pour trouver M_2.



Je m'exerce

Symétries centrales successives

1. A'B'C 'est le symétrique de ABC par rapport à S. A''B''C'' est le symétrique de A'B'C' par rapport à S.
Reproduis la figure ci-contre et retrouve les éléments qui manquent.

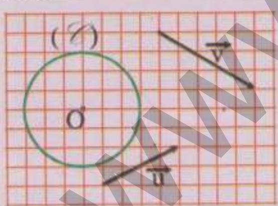


2. Construis un triangle équilatéral ABC et marque deux points O et O'. Construis le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport à O puis les symétriques A''B''C'' du triangle A'B'C' par rapport à O'. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AA''}, \overrightarrow{BB''}$ et $\overrightarrow{CC''}$.

3. Marque quatre points M, N, S et S'.
Construis les symétriques M' et N' de M et de N par rapport à S puis les symétriques M'' et N'' de M' et de N' par rapport à S'. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{MM''}$ et $\overrightarrow{NN''}$ sont égaux.

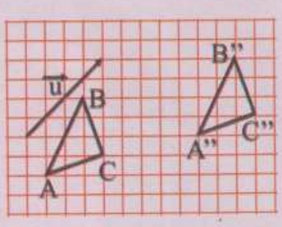
Translations successives

4. Reproduis la figure suivante.
Construis l'image $\mathscr{C}_1$ du cercle $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ puis l'image $\mathscr{C}_2$ de $\mathscr{C}_1$ par la translation de vecteur $\vec{v}$.



Démontre que les cercles $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}$ ont même rayon.

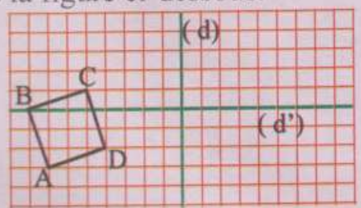
5. Une première translation de vecteur $\vec{u}$ transforme un triangle ABC en A'B'C' puis une seconde translation, de vecteur $\vec{v}$ cette fois, transforme A'B'C' en A''B''C''. Sur la figure ci-dessous, il manque le triangle A'B'C' et le vecteur $\vec{v}$.



Reproduis cette figure et complète-la en dessinant le triangle A'B'C' et le vecteur $\vec{v}$.

Symétries orthogonales successives

6. Reproduis la figure ci-dessous.



Transforme le carré ABCD en faisant agir successivement la symétrie d'axe (d) puis la symétrie d'axe (d'). Fais de même en changeant l'ordre des symétries. Le résultat final est-il le même ? Justifie ta réponse.

7. Soit ABC un triangle. I est le milieu de [AC], J est le milieu de [AB]. Soit (Δ) la perpendiculaire à (BC) qui passe par J et soit (d) la parallèle à (Δ) qui passe par I.
Construis le symétrique A'B'C' de ABC par rapport à (d) et le symétrique A''B''C'' de A'B'C' par rapport à (Δ). Montre que A''B''C'' est l'image de ABC par une translation. Quel est son vecteur ?

8. ABC est un triangle de hauteur [AH]. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. La droite (AH) coupe la droite (IJ) en O. Construis le symétrique A'B'C' de ABC par rapport à (AH), puis le symétrique A''B''C'' de A'B'C' par rapport à (IJ). Démontre que A''B''C'' est le symétrique de ABC par rapport à O.

Exercices de recherches et problèmes

9. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O. soit A un point de ce cercle et soit I le milieu de [OA]. On appelle (d) la médiatrice de [OA] et (Δ) la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.

a) Fais une figure. Construis le symétrique $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par rapport à (d) puis le symétrique $\mathscr{C}''$ de $\mathscr{C}'$ par rapport à (Δ).
b) Démontre que $\mathscr{C}''$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{IA}$.

10. Soit un triangle ABC. J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC]. Soit M un point du plan, N est le symétrique de M par rapport à J, P est le symétrique de N par rapport à K. Q est le symétrique de P par rapport à L et M'est le symétrique de Q par rapport à J.

a) Démontre que M'est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Démontre de même, que M est l'image de M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Des symétries centrales successives

11. Soit ABCD un parallélogramme et soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à A, P est le symétrique de N par rapport à B, Q est le symétrique de N par rapport à C et M'est le symétrique de P par rapport à D.

a) Fais une figure. Qu'observes-tu ?
b) Quelle est la translation qui peut remplacer les deux premières symétries ? Quelle est la translation qui peut remplacer les deux autres ?
c) Montre que ces deux translations effectuées successivement correspondent à une translation unique de vecteur nul. Déduis-en que M' = M.

12. Soit ABCD un quadrilatère quelconque et soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à A, P est le symétrique de N par rapport à B, Q est le symétrique de P par rapport à C et M'est le symétrique de Q par rapport à D.

a) Construis le vecteur $\vec{v} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
Compare ce vecteur au vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
Qu'observes-tu ?
b) Montre que M'est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Translation et symétrie centrale

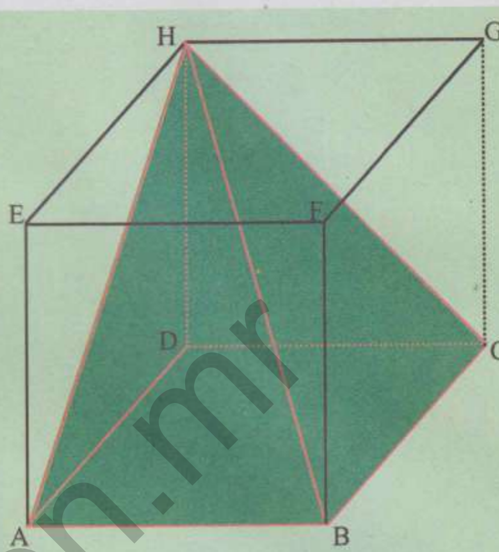
13. Soit $\vec{v}$ un vecteur et M et S deux points du plan. On appelle N l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$, M' le symétrique de N par rapport à S et A l'antécédent de S par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Soit O le milieu de [AS].
Démontre que O est le milieu de [MM'].
Déduis-en que M'est le symétrique de M par rapport à O.

Trois symétries centrales successives

14. Utilise le résultat de l'exercice 13 pour démontrer que trois symétries centrales successives par rapport à trois points non alignés peuvent être remplacées par une seule symétrie centrale.

15 Cône de révolution

Je me souviens



1. ABCDEFGH est un …. d'…. a = 4cm.
- Calcule la surface latérale de ABCDEFGH.
- Calcule le volume de ABCDEFGH.

2. HABCD est une … de hauteur …..
- Cette … est constitué de 4… et d'une… de forme …
- Calcule la surface latérale de HABCD.
- Calcule le volume de HABCD.

3. Complète le tableau de correspondance

Angle	360°			150°	120°
Longueur	$2\pi \times 3$	2π	π		

Je vais plus loin

Activité 1 : ***Découverte et description***

Lors de l'exposition d'un club de Mathématiques d'un collège, les élèves de 4èmeAS ont réalisé plusieurs figures géométriques planes avec des fils de fer.

S'inspirant de cette exposition le professeur demande à chaque élève :

a) De construire avec du fil de fer un triangle rectangle, puis de faire tourner le triangle obtenu autour d'un des côtés de l'angle droit.

b) Quelle figure géométrique simple décrit le deuxième côté de l'angle droit?

c) Quelle figure géométrique décrit l'hypoténuse de ce triangle ?

d) Dessine en perspective la figure obtenue, en prenant S pour sommet du cône.

O le centre du disque de base ; M un point du cercle de base de rayon r = 2,5 cm et de hauteur 6cm.

e) Calcule le cosinus de l'angle $\widehat{OSM}$, en déduis l'arrondi à 0,1° de sa mesure.

f) On appelle M' le point du cercle de base diamétralement opposé à M.

Donne l'arrondi à 1° de l'angle $\widehat{MSM'}$

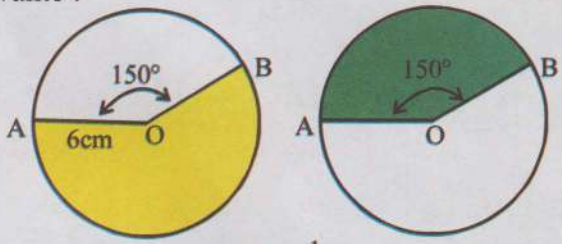
Activité 2 :

Fabrication de chapeaux

Un jeune apprenti artisan, veut fabriquer des chapeaux pour se protéger contre le soleil.

Son maître lui propose la démarche suivante :

- Sur une feuille de papier de dessin, reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur, puis découpe le disque en les coupant suivant [OA]. et [OB], on obtient deux bouts de disques.



Echelle $\frac{1}{4}$

Colle avec un ruban adhésif, les rayons bord à bord, des deux, vous avez construis deux chapeaux pointus.

Les deux surfaces obtenues sont des surfaces latérales de deux cônes.

Pour obtenir les patrons, il reste à construire leurs bases, sur une feuille qui matérialise les bords inférieurs des deux cônes obtenus plus haut.

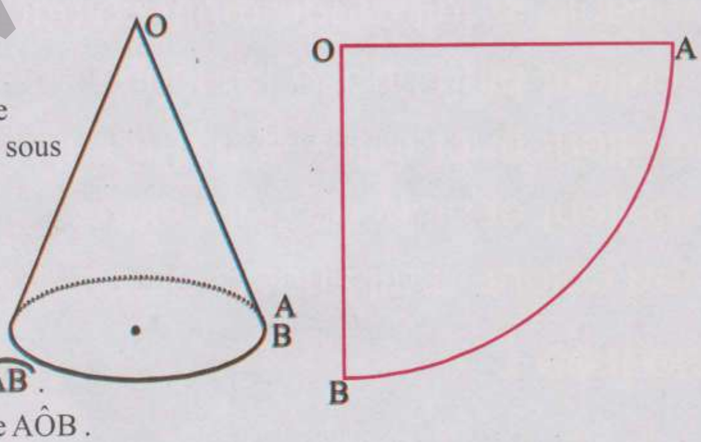
Découpe les deux disques correspondant qui sont les bases des deux cônes dont tu as construis puis colle. Chaque disque sur le bout de base des cônes.

Trouve la longueur de ces deux arcs dans le tableau suivant :

Angle au centre	360°	150°	210°	
Longueur des arcs				

Activité 3 :

Patron d'un cône de révolution



Pour participer à une fête, un des frères de Cheikh, veut faire un déguisement avec un chapeau sous la forme d'un cône.

On donne le rayon de base $r = 25$ cm, la hauteur 60 cm.

a) Détermine, le rayon OA du secteur circulaire $O\hat{A}B$.

b) Calcule, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

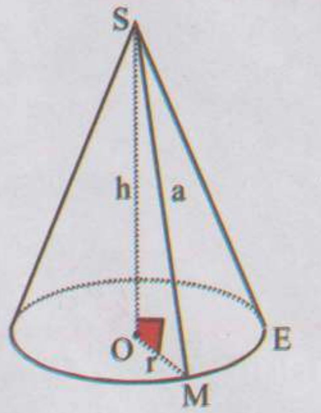
c) En déduis la mesure de l'angle $A\hat{O}B$.

d) Dessine le patron de ce cône à l'échelle $\frac{1}{10}$.

e) Fais le même patron sur une feuille que vous découperez et collerez sur votre cahier ; colle des bases en mettant des languettes sur le disque de base et l'un des bords de la surface latérale.

Activité 4 : ***Aire et volume du cône de révolution***

Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution.
Sa base est un disque de centre O et de rayon 3cm.
S est le sommet, la droite (SO) est perpendiculaire à tous les rayons [OM].
[SO] est la hauteur du cône, elle mesure 4cm.



a) Dessine en vraie grandeur, le triangle SOM, puis calcule SM.

b) A quelle distance de S se trouvent tous les points du cercle de base ?

c) Calcule la mesure exacte de l'aire $\mathcal{A}_B$ du disque de base.

d) Détermine la mesure exacte du volume du cône, sachant que :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_B \times h$, puis trouve son arrondi à $0{,}1\text{cm}^3$.

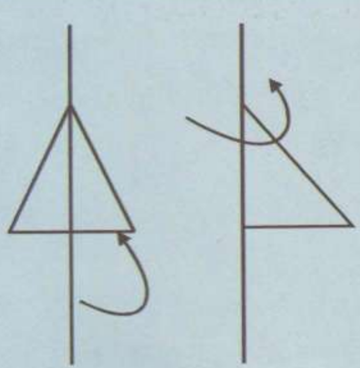
d) Trouve l'aire latérale

Je retiens

1. Cône de révolution

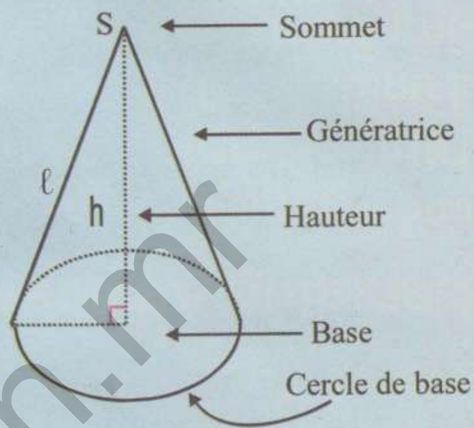
Un cône de révolution est un solide obtenu :

- soit en faisant tourner un triangle isocèle autour d'un axe de symétrie
- soit en faisant tourner un triangle rectangle autour d'une droite qui porte un des côtés de l'angle droit.



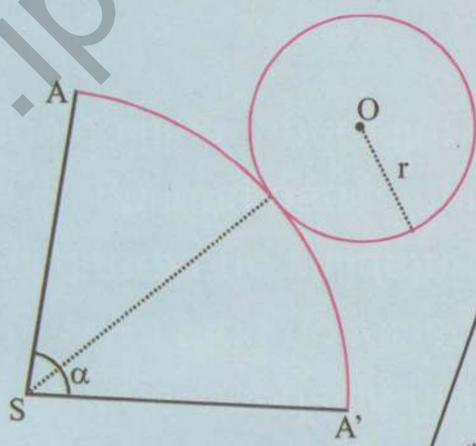
2. Représentation en perspective cavalière

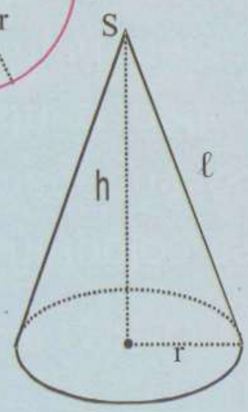
La base d'un cône de révolution est un disque ; son axe est la hauteur du cône.
La hauteur d'un cône de révolution est la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.



3. Patron d'un cône

Le patron d'un cône de révolution se compose d'un disque et d'un secteur de disque.
Le disque est la base du cône.
Le secteur est la surface latérale, il a pour rayon, la longueur de la génératrice.
et un angle α tel que la longueur de l'arc qui le borde est le périmètre du disque de base.
Sur un patron, la surface latérale est un secteur circulaire de rayon : $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$.
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ est égale à la longueur du cercle de base.





4. Formules

Aires :

$\mathscr{A}_L$ aire latérale est $\mathscr{A}_L = \pi\ell \times r$.

$\mathscr{A}_B$ aire de base est $\mathscr{A}_B = \pi r^2$.

$\mathscr{A}_T$ aire latérale est $\mathscr{A}_T = \mathscr{A}_L + \mathscr{A}_B = \pi r(\ell + r)$

Volume:

Le volume d'un cône de révolution est le tiers de l'aire de la base par la hauteur.

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times \mathbf{h}$$

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h.$$

Je sais faire

1. Représenter en perspective un cône de révolution

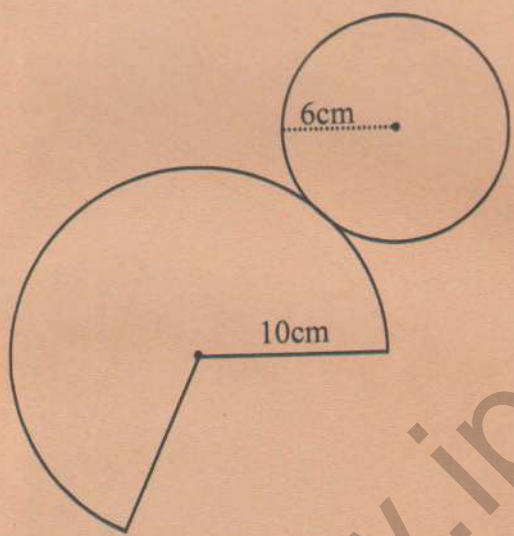
Exercice 1: Représente en perspective un cône de révolution de hauteur SO égale à 4,8cm.

2. Réaliser le patron d'un cône

Exercice 2: Construis le patron d'un cône de révolution dont la hauteur est 5cm et dont le rayon de la base est 2cm.

3. Représenter en perspective un cône à partir de son patron

Exercice 3: Représente le cône dont le patron est donné ci-dessous avec l'échelle $\frac{1}{4}$.



4. Calculer les éléments métriques d'un cône

Exercice 4 : On donne un cône de révolution : r = 3cm et h = 4cm.

a) Calcule la valeur exacte de l'aire de base.

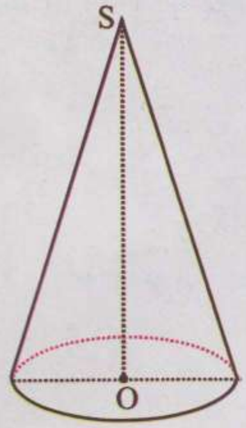
b) Détermine le volume $\mathscr{V}$ de ce cône.

c) Calcule l'aire latérale du cône.

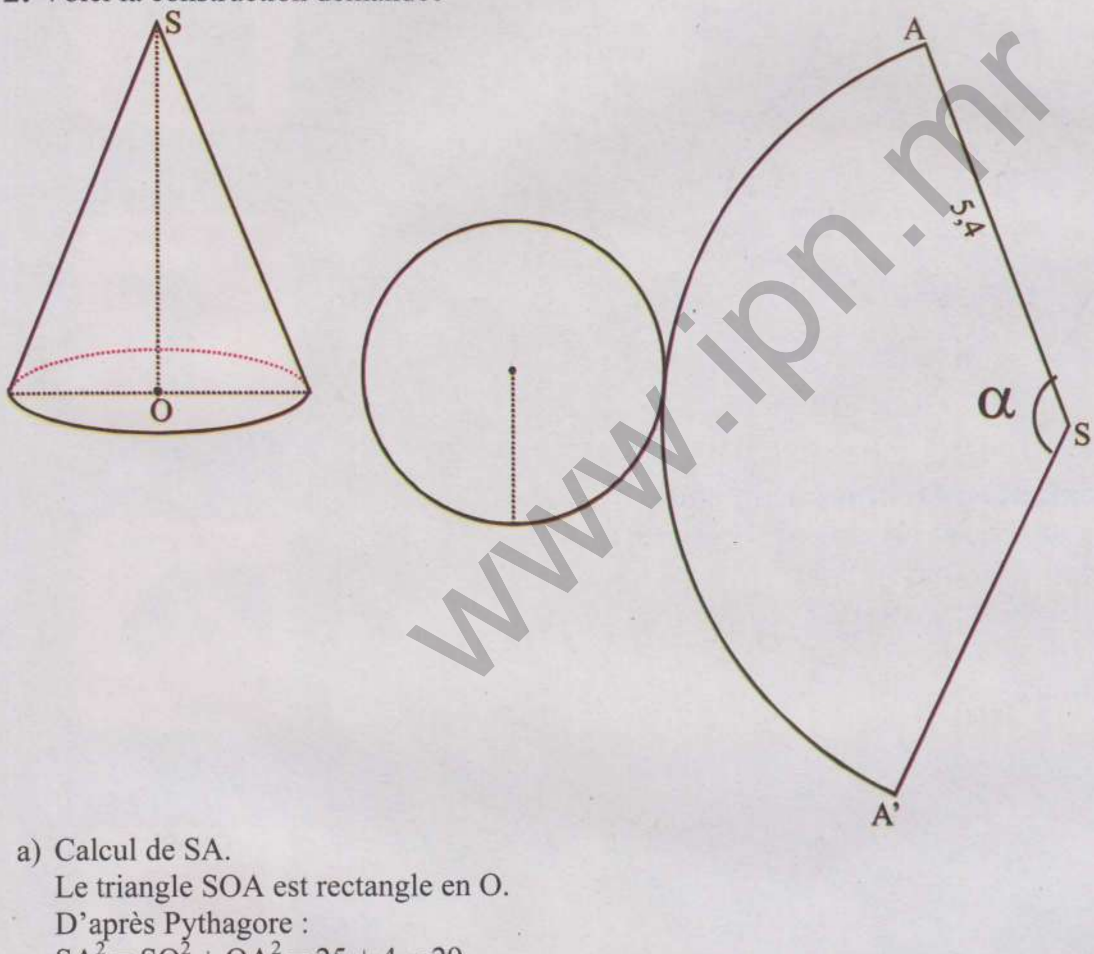
d) Calcule l'aire totale du cône.

CORRECTION

1. Voici la construction demandée :



2. Voici la construction demandée



a) Calcul de SA.
   Le triangle SOA est rectangle en O.
   D'après Pythagore :
   $SA^2 = SO^2 + OA^2 = 25 + 4 = 29$
   $SA = \sqrt{29}$; $SA \approx 5,4$

b) Calcul de α
   $\frac{\alpha}{2\pi \times 2} = \frac{360°}{2\pi \times SA}$;
   D'où $\alpha = 360 \times \frac{2}{SA}$;
   $\alpha \approx 134°$

3. Dans le triangle rectangle OAS, on a

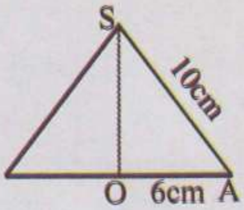
$SA^2 = SO^2 + OA^2$

Donc $OS = \sqrt{SA^2 - OA^2}$

On sait que SA = 1 0cm ;

OA = 6cm

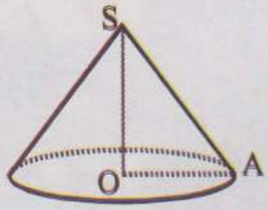
$OS = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8cm$



Distances à l'échelle :

OS = 2cm ; SA = 2,5cm ; OA = 1,5cm.

Par conséquent, on donne la représentation suivante :



4. Calcul des aires et du volume

$\mathscr{A}_{\mathbf{B}} = \pi r^2 = \pi\ 3^2 = 9\pi\ cm^2$

$\mathscr{V} - \frac{1}{3}\ \mathscr{A}_{\mathbf{B}} \times h\ \ = \frac{1}{3} 9\pi \times 4 == 12\pi\ cm^2.$

$\mathscr{A}_{\mathbf{L}} = \pi\ \ell\ \times\ r$

$\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\mathscr{A}_{\mathbf{L}} = \pi\sqrt{r^2 + h^2} \times r = \pi\sqrt{9+16} \times 3$

$= 5 \times 3 \times \pi = 15\ \pi cm^2.$

$\mathscr{A}_{\mathbf{T}} = \mathscr{A}_{\mathbf{B}} + \mathscr{A}_{\mathbf{L}} = 9\pi\ cm^2\ + 15\ \pi cm^2 = 34\pi\ cm^2$

Je m'exerce

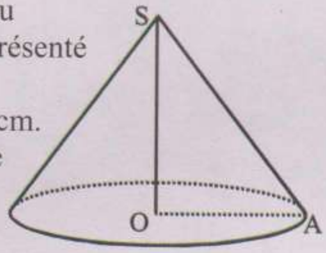
Cône de révolution

1. Dans chaque cas, calcule le volume V d'un cône de révolution de hauteur h, de rayon r ; précise les unités choisies.

a. h = 12 cm ; r = 52 mm.

b. h = 4,5 cm ; r = 80 cm.

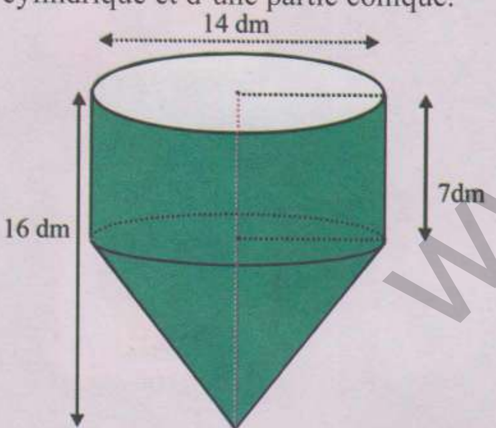
2. Calcule le volume du cône de révolution représenté ci-contre.
SO = 6 cm ; SA = 6,5 cm.
Donne la valeur exacte puis l'arrondi à $0{,}001\ cm^3$.



3. a) Quel est le rayon de la base d'un cône de révolution de hauteur 10 cm, de volume égal à $30\pi\ cm^3$.

b) Quelle est la hauteur d'un cône de révolution dont la base a pour rayon 6 cm et dont le volume est égal à $24\pi\ cm^3$?

4. Un réservoir d'eau est formé d'une partie cylindrique et d'une partie conique.



a. Donne, en dm^3, les volumes exacts des deux parties du réservoir, exprimés avec le nombre π.

b. Donne le volume exact du réservoir, puis sa valeur arrondie à $1 dm^3$.

c. Le réservoir peut-il contenir 1 000 ℓ?

5. Une presse papiers en verre a la forme d'un cylindre de hauteur 8cm, de diamètre 8 cm.
A l'intérieur, deux cônes de verre bleuté sont superposés.

a) Calcule le volume $\mathscr{V}_1$ du verre coloré.

b) Calcule le volume $\mathscr{V}_2$ du verre transparent

c) Compare le volume $\mathscr{V}_1$ au volume d'un cône de même hauteur et de même diamètre que le cylindre.

6. La même glace au café peut être présentée dans un cône de hauteur 10,5 cm, de diamètre 6 cm ou en forme de pyramide à base carrée de côté 6 cm. Quelle doit être la hauteur de la pyramide pour que son volume soit égal à celui du cône ?

7. L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm^2, l'unité de volume est le cm^3.
$\mathscr{V}$ est le volume d'un cône de révolution de hauteur h ; r est le rayon du cercle de base. $\mathscr{B}$ est l'aire de la base.
Reproduis et complète le tableau suivant :

h	r	$\mathscr{B}$	$\mathscr{V}$
8	3		
7,5	4		
	6		24π
10			30π

Donne les valeurs exactes de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{V}$ en fonction de π.

8. S est le sommet d'un cône de révolution ; O est le centre du cercle de base et M un point de ce cercle.
SO = 6 cm, SM = 6,5 cm.
Calcule le volume de ce cône (donne la valeur exacte puis l'arrondi au mm^3)

9. Angle au sommet

Un cône de révolution a une hauteur de 6 cm. Le rayon du disque de base est 2,5 cm. On appelle S le sommet du cône et O le centre du cercle de base. M et M' sont deux points diamétralement opposés du cercle de base.

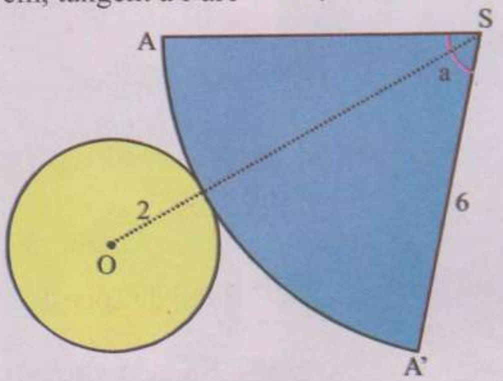
a. Calcule SM.

b. Calcule l'arrondi de $M\hat{S}M'$ à 1°.

Indication : $M\hat{S}M'$ s'appelle l'angle au sommet du cône. On a : $M\hat{S}M' = 2O\hat{S}M'$.

10. Du simple au double
Le rayon du cercle d'un cône de révolution est égal à 3 cm. Les segments qui joignent le sommet aux points du cercle de base mesurent 6 cm. Construis un patron de ce cône.

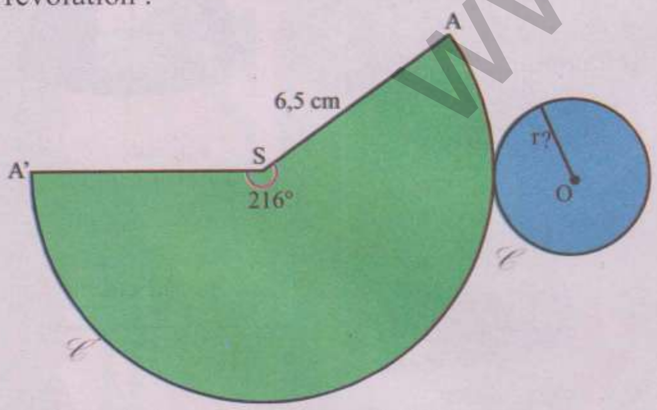
11. La figure ci-dessous représente un secteur circulaire de rayon 6 cm et un disque de rayon r = 2 cm, tangent à l'arc $\overset{\frown}{AA'}$.



a. On appelle a la mesure de l'angle $A\hat{S}A'$ et ℓ longueur de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ exprimée en cm.
Montre que : $\ell = \dfrac{a}{360} \times 2\pi \times 6$.

b. Pour quelle valeur de a, la figure serait-elle le schéma d'un patron de cône de révolution ? Construis un tel patron avec SA = 6 cm ; r = 2 cm.

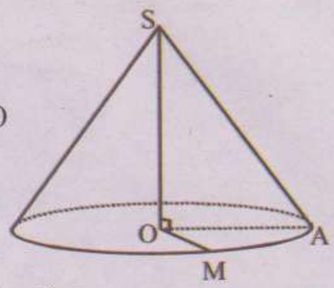
12. Voici le schéma d'un patron de cône de révolution :



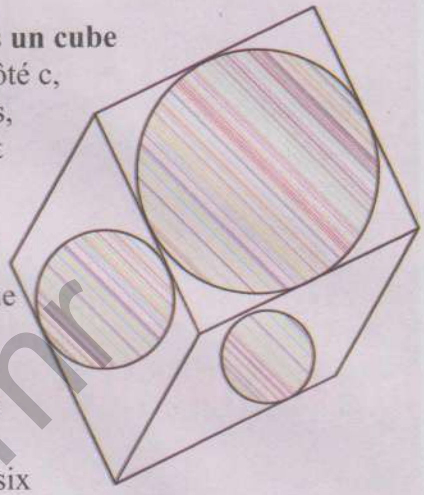
a. Calcule le rayon r du cercle 𝒞.
b. Construis le patron en vraie grandeur ;
Découpe et assemble. Fais une figure à main levée pour représenter le cône et porte les données sur le dessin.
c. Calcule la hauteur du cône et son angle au sommet.

Patron d'un cône

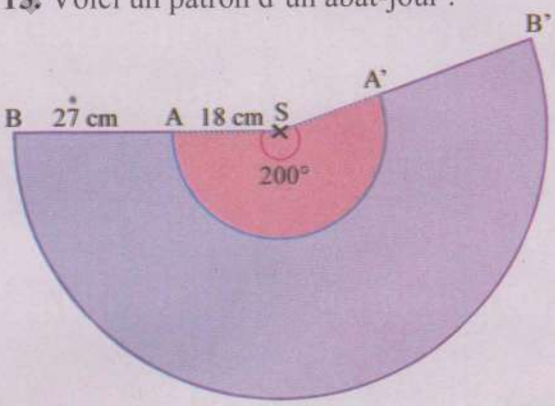
13. La figure ci-contre représente un cône de révolution de hauteur SO égale à 4,8 cm.
Le rayon du cercle de base est 3,6 cm.
a. Calcule SA.
b. Construis un patron du cône.



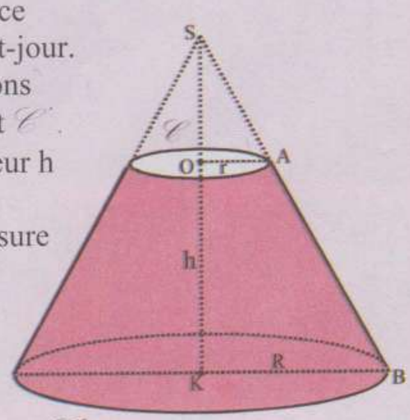
14. Six cônes dans un cube
Dans un cube de côté c, on creuse six cônes, ayant pour sommet commun le centre du cube et pour bases les cercles inscrits dans chaque face du cube.
a) Exprime, en fonction de c, le volume restant.
b) Le volume des six cônes représente-t-il plus de la moitié du cube ?



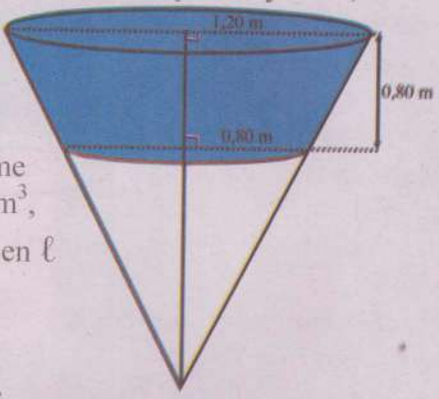
15. Voici un patron d'un abat-jour :



a. Calcule la surface latérale de l'abat-jour.
b. Calcule les rayons des cercles 𝒞 et 𝒞'.
c. Calcule la hauteur h de l'abat-jour.
d. Calcule une mesure de l'angle $K\hat{S}B$ (cet angle est l'inclinaison de la surface latérale par rapport à la verticale).



16. Un réservoir a la forme d'un tronc de cône. Les cercles de base ont pour rayons 0,80 m et 1,20 m.
La hauteur du réservoir est égale à 0,80 m.
Calcule le volume du réservoir en m^3, puis sa capacité en ℓ



17. Sur la plage

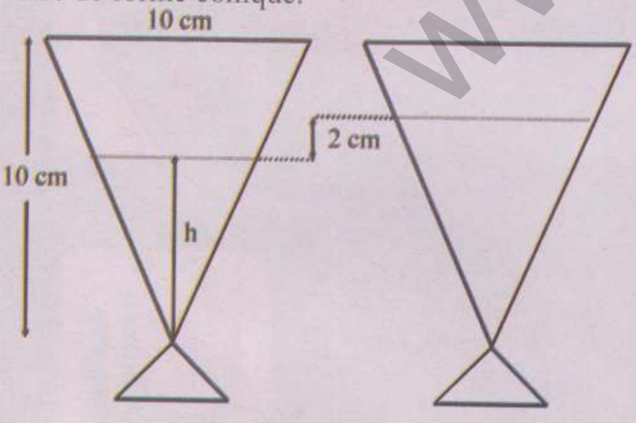
Sur la plage d'une ville côtière, Ahmed achète un cornet de glace qui a la forme d'un cône de révolution.
Celui-ci a une hauteur de 10,5 cm et le diamètre de base est 6 cm. La glace remplit exactement le cornet ; hélas elle fond trop vite, Ahmed la verse dans un verre cylindrique de diamètre 5 cm.
Quelle est la hauteur de la glace dans le verre ?

18. Pyramide et cône

Une pyramide à base carrée et un cône de révolution ont la même hauteur h et le même volume $\mathcal{V}$.
Le rayon du cercle da base du cône est égale à 17 cm. Calcule le côté de base de la pyramide.

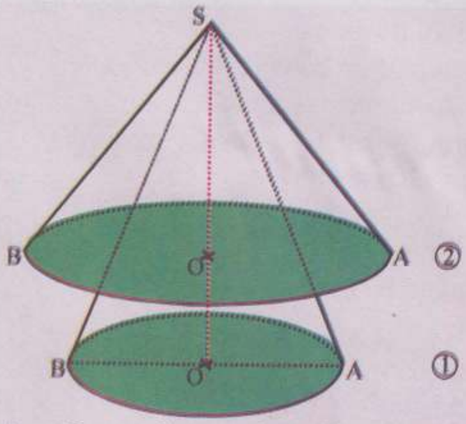
19. La coupe d'une coupe

Les figures ci-dessous représentent en coupe un verre de forme conique.



La hauteur h du liquide étant égale à 6 cm, quel volume de liquide faut-il ajouter pour que la hauteur augmente de 2 cm ?

20. Angle au sommet d'un cône.



A et B sont deux points diamétralement opposés du cercle de base d'un cône de révolution.

1) **On suppose que** : OA = 10 cm ; SA = 15 cm.

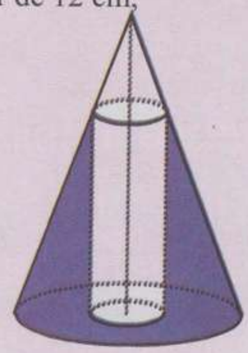
a. Calcule le cosinus de l'angle $\widehat{SAO}$.
En déduis la mesure de cet angle, puis celle de $\widehat{ASO}$ et enfin celle de $\widehat{ASB}$ arrondi à 1°.

b. Calcule SO, puis le volume du cône.

2) On suppose que **$\widehat{ASB}$ = 130°, SA = 15 cm.**
Calcule le volume du cône.
Lequel des deux cônes a le plus grand volume ?

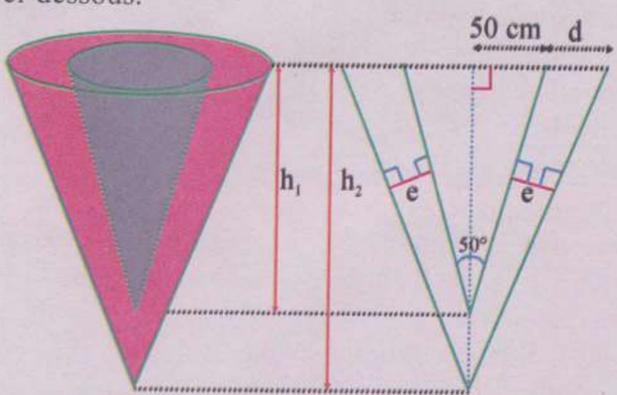
21. On coupe, on creuse

Un cône de bois a une hauteur de 12 cm, un rayon de 4,5 cm.
On coupe ce cône au tiers de sa hauteur par un plan parallèle au plan de sa base et on enlève un cylindre comme le montre la figure ci-contre.
Calcule le volume du solide obtenu.



22. Cônes emboîtés

On veut construire un objet de ciment limité par deux cônes emboîtés comme le montre la figure ci-dessous.



L'épaisseur du ciment e est égale à 8 cm.

a. Calcule h_1

a. Calcule d ; calcule h_2.
b. Calcule le volume $\mathscr{V}$ de ciment nécessaire à la réalisation de cet objet.
c. Calcule l'aire $\mathscr{A}$ de la surface extérieure de cet objet.

23. Le silo

Un silo à grains est formé d'un cylindre et d'un cône de même diamètre : 6 m. La hauteur du cylindre est égale à 8 m. La hauteur totale du silo est égale à 14 m.
Le silo étant plein à ras bord, on remplit des bennes qui ont la forme du prisme droit représenté ci-contre.
Les bases sont des trapèzes.
h = 1,5 m, AB = 2 m,
DC = 2,6 m, AE = 4 m.
Combien pourra-t-on remplir de bennes?

24. On désigne par h, R et g respectivement la hauteur, le rayon et la génératrice d'un cône de révolution. Recopie et complète le tableau suivant en justifiant tes calculs :

h(cm)	24	…	10
R(cm)	9	5	…
g(cm)	…	12	15

25. Le développement de la surface latérale d'un cône de révolution est un secteur circulaire de 100° et de 9 cm de rayon. Calcule la hauteur de ce cône.

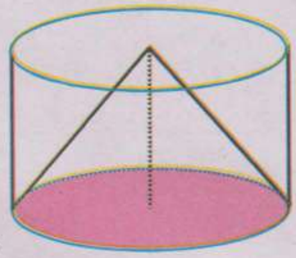
26. On désigne par a la longueur des côtés de la base d'une pyramide régulière à base carrée, par h sa hauteur et par V son volume. Recopie et complète le tableau suivant en justifiant tes calculs :

a(cm)	5	4,5	6	…
h(cm)	12	8,5	…	12
$\mathscr{V}$(cm^3)	…	…	540	400

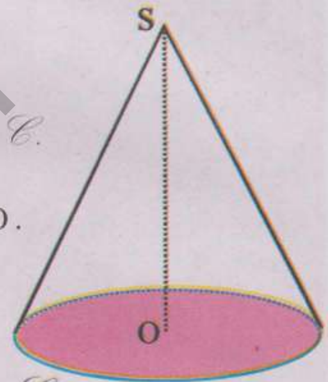
27. On désigne par R le rayon de la base d'un cône de révolution, par h sa hauteur et par V son volume. Recopie et complète le tableau suivant en justifiant tes calculs :

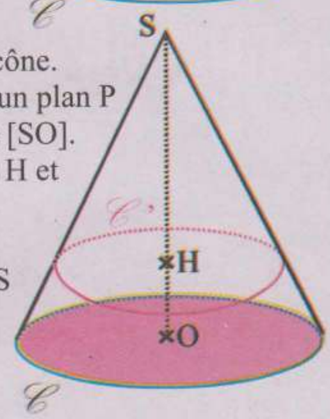
R(cm)	5	8	4	…
h(cm)	9	12	…	7,5
$\mathscr{V}$(cm^3)	…	…	800	600

28. Un cône de révolution est inscrit dans un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h.
Compare le volume du cône à celui du cylindre.



29. La hauteur [SO] du cône de révolution ci-contre mesure 4 cm.
Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est 3 cm.
Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$.
a) Calcule l'arrondi au dixième de l'angle $\widehat{MSO}$.
b) Calcule SM.
c) Fais un patron de ce cône.
d) Calcule l'aire latérale de ce cône.
e) Calcule le volume du cône.
f) Le cône est coupé par un plan P perpendiculaire à l'axe [SO]. Ce plan coupe [SO] en H et SH = 3 cm.
On obtient un cône de révolution de sommet S dont le cercle de base est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre H.
Calcule l'aire latérale et le volume de ce cône.





Module d'intégration 4

Chapitres 13;14;15

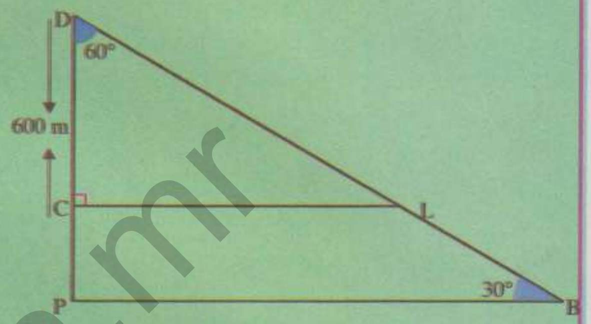
Chapitres / Compétences : 13.2 ; 14.2 ; 15. 4

Avec tout ce que tu as appris, et en particulier dans les trois derniers chapitres, tu peux résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, dont voici quelques situations- problèmes.

Situation 1

Lecture de l'énoncé

Le collège, le Lycée et le Dispensaire - du village natal du jeune Abderrahmane, fils du topographe de ce village sont respectivement représentés par les points C ; L et D (voir figure ci-contre).Pour relier ces trois lieux (C ; L ; D) par un réseau de téléphone fixe, il faut calculer les distances :
(CL)Collège – Lycée ; Lycée – Dispensaire (LD).
(donne les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers)
Cette alimentation tire sa source à partir d'un boîtier B situé à $200\sqrt{3}$ m de L sur la parallèle à (CL) passant par un poteau P se trouvant sur la demi-droite [DC) de sorte que : $\widehat{DBP}$ mesure 30°.
Trouve les distances CP (Collège- Poteau) et PB (Poteau -Boîtier)



On donne : $\tan 60° = \sqrt{3}$

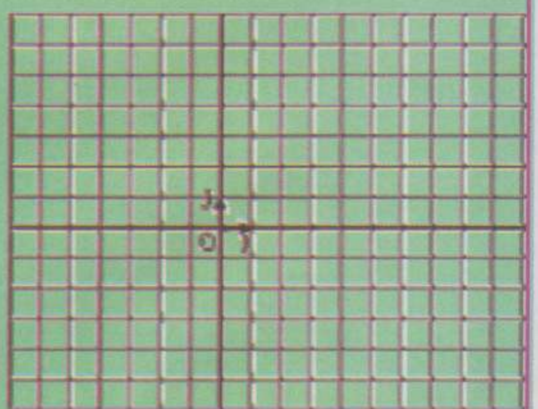
situation2

Vraisemblance des résultats

Sidi élève en 4$^{\text{ème}}$ AS doit traiter cet extrait d'un sujet de BEPC.
Dans un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points A(-4; 3), B(3; 2) et C(1; -2).
L'unité graphique est le centimètre.

- PARTIE A -

1. Place les points A, B, C dans le repère (O, I, J) ci-contre.
2. a) Calcule AB.
   b) On admet que le calcul donne $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{20}$.
   Que peut-on en déduire du triangle ABC ?
3. Soit H le milieu du segment [BC]. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées (2; 0).
4. Pourquoi le segment [AH] est-il une hauteur du triangle ABC ?
5. a) Prouve que $AH = 3\sqrt{5}$
   b) Calcule l'aire du triangle ABC.



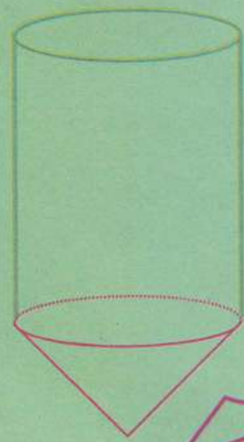
- PARTIE B -

1. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
a) Place le point D.
b) Montre par le calcul que D a pour coordonnées (8; -3).
3. Quelle est la nature du quadrilatère ACDB ? Justifier.

Situation3 — Choix des outils

Pour des raisons de sécurité alimentaire, la mairie a décidé de construire un silo à céréales à la forme d'un cylindre de révolution accolé à un cône de révolution de même base.
Ce silo doit répondre aux caractéristiques suivantes :

- le disque de base a 10 m de diamètre,
- la hauteur du cylindre 30 m,
- hauteur du cône 10 m.

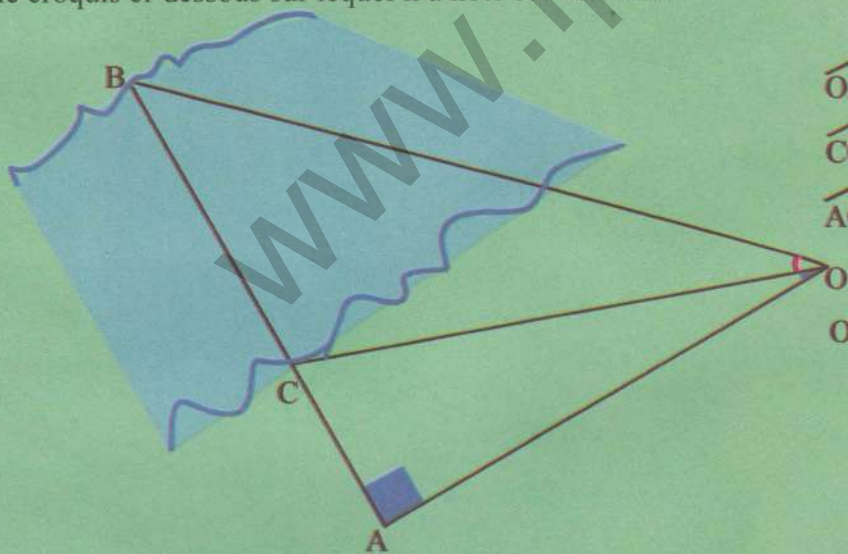


La réalisation de cette construction se fait à partir de feuilles métalliques de type $2,5 \times 0,9\ m^2$

a) Trouve le nombre minimal de feuilles pour bâtir ce silo.
b) Trouve la capacité exacte de stockage du silo ?
c) Ce silo peut-il contenir 1000 tonnes de céréales ?

Situation4 — Apprentissage du raisonnement

Suite aux inondations provoquées par les dernières pluies dans un village de la vallée, une marée s'est formée entre certains quartiers du village.
Les autorités locales ont chargé un topographe d'estimer la largeur de cette marée en vue de construire un pont permettant d'assurer la circulation des individus et des biens entres les différents quartiers du village.
Celui -ci a réalisé un certain nombre de mesures.
Il a dessiné le croquis ci-dessous sur lequel il a noté ses mesures.



$\widehat{OAB} = 90°$

$\widehat{COB} = 37°$

$\widehat{AOC} = 20°$

$OA = 136$ m

Aide le topographe à :

- Exprime les longueurs AC et AB en fonction de tan20° et de tan57°.
- Trouve, à 1 m près, une valeur approchée de la largeur BC de cette marée.

Entraînement à l'évaluation

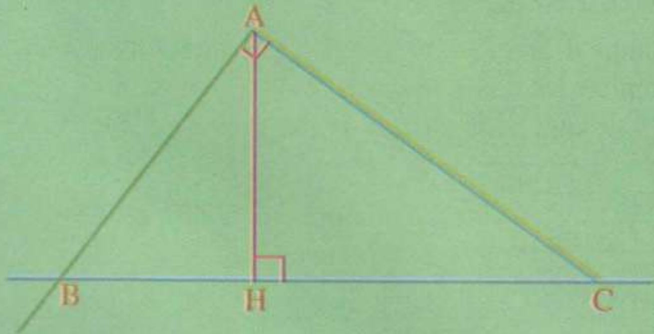
Situation a

Voici un extrait d'un BEPC.

AHC est un triangle rectangle en H. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B.

On sait que : AH = 4,8 cm et HC = 6,4 cm.

Essaie de répondre aux différentes questions :



1. a) Justifie l'égalité : $\widehat{ACH}=90°-\widehat{HAC}$
   b) Justifie l'égalité : $\widehat{BAH}=90°-\widehat{HAC}$
   c) Que peut-on en déduire pour les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{HAC}$??
2. a) Montre que. ten$\widehat{ACH}=\frac{3}{4}$
   b) En utilisant le triangle BAH, exprimer tan$\widehat{BAH}$ en fonction de BH.
3. Déduis des questions 1. et 2. que BH = 3,6 cm.
4. Calcule la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{ACH}$

Situation b

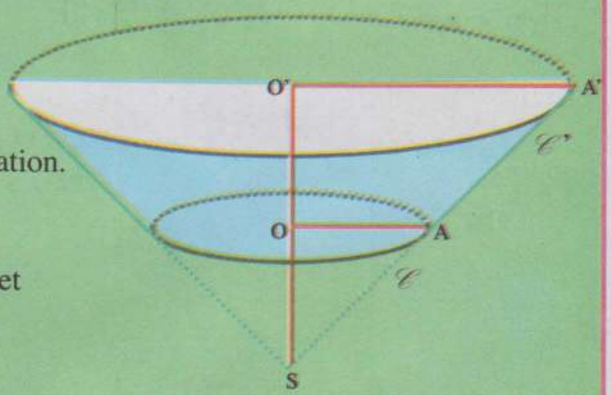
Une ville dispose d'un château d'eau construit depuis les années soixante.

Il a la forme d'un tronc de cône représenté ci-dessous.

Signalons qu'un tronc de cône est la partie d'un cône comprise entre sa base et un plan parallèle à cette base.

On donne : OO' = OA = OS = 5 m.

Suite à la réhabilitation de ce château d'eau,
La ville sera alimentée en eau.
Mais, les techniciens chargés de ce travail n'arrivent pas à surmonter quelques difficultés liées à cette réhabilitation.
Parmi ces difficultés, on cite :



- la détermination de O'A'
- la détermination du volume du cône $\mathscr{C}$ de sommet S et de base le disque de rayon [OA].
- la relation entre le volume de $\mathscr{C}$ et celui de $\mathscr{C}$', sachant que $\mathscr{C}$'est le cône de sommet S et de base le disque de rayon [O'A'].
- le calcul du volume du château d'eau.

Aide ces techniciens à surmonter ces difficultés.

17 Statistiques

Je me souviens

Les valeurs d'une série statistique sont données dans les 2 tableaux

a) Complète les tableaux, arrondi au 10^{-2} près.

Relevé des âges de 25 élèves d'une classe

Age	13	8	15	16	17
Effectif	2	8	11	3	1
Effectif cumulé					
fréquence					
Fréquences cumulées					

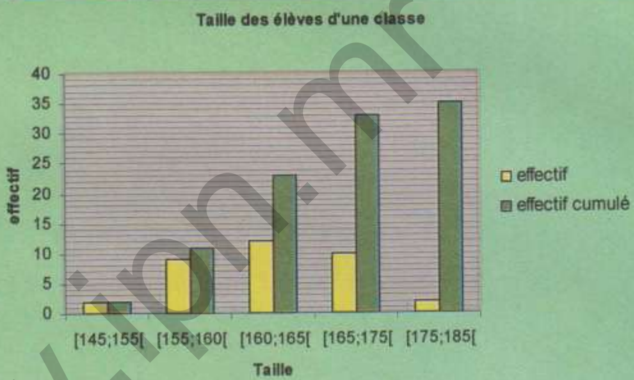
Relevé des tailles de 25 élèves d'une classe.

Taille (cm)	[145 ;155[	[155 ;165[	[165 ;175[	[175-185[
Effectif				
Effectif cumulé				
fréquence				
Fréquences cumulées				

b) Donne dans chaque cas le mode ou la classe modale.

c) Représente les données du 1^{er} tableau par un histogramme identique à celui donné au 2^{ème} tableau.

c) Calcule la moyenne des âges de cette classe.



Je vais plus loin

Activité 1 :

Polygone des fréquences

Lors d'un contrôle de Mathématiques effectué en 4^{ème} AS, de votre collège, chacun des 56 élèves de la classe a obtenu une des huit notes suivantes : 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 dont voici le tableau

Notes attribuées	5	8	10	11	13	15	16	18
Effectifs cumulés	3	7	12	17	24	36	50	56

a) Combien d'entre eux ont la note 8 ? la note 10 ? la notez 11 ?

b) A l'aide du tableau des effectifs cumulés, reconstitue le tableau suivant :

Notes attribuées	5	8	10	11	113	15	16	18
Effectifs								
Fréquences								

a) Quel est le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note inférieure à 10 ?

b) Trace un diagramme en bâtons, puis joint les sommets des bâtons. On obtient le polygone des effectifs.

c) Quel est le mode ? calcule la moyenne.

d)

Activité 2 :

Education physique

1) Un maître d'éducation physique et sportive décide de séparer ses élèves en plusieurs groupes. Pour cela, il mesure la taille en mètre de ses élèves et trouvé :

1,54	1,53	1,57	1,59	1,54	1,55	1,60	1,63	1,56	1,67
1,61	1,63	1,67	1,69	1,68	1,69	1,70	1,72	1,73	1,64
1,74	1,78	1,55	1,76	1,75	1,79	1,66	1,77	1,67	1,69
1,59	1,76	1,64	1,67	1,69	1,79	1,76	1,59	1,74	1,78
1,73	1,68	1,65	1,71	1,78	1,65	1,57	1,58	1,65	1,54.

Il forme trois groupes :

Le groupe des « petits » formé des élèves dont la taille appartenant à [1,50 ; 1,60[

Le groupe des « moyens » formé des élèves dont la taille appartenant à [1,60 ; 1,70[

Le groupe des « grands » formé des élèves dont la taille appartenant à [1,70 ; 1,80[

On dit qu'on a regroupé les élèves en classes.

a) Organise les donnés sou forme de tableau des effectifs et des fréquences.
   Pour cela : combien d'élèves y -a –t- il dans chaque groupe ?
   Détermine la fréquence de chaque classe.
b) Quelle est l'amplitude des classes ?
c) Quelle est la classe modale ?
d) Représente cette série par un diagramme en bandes ou histogramme, puis le polygone des effectifs en prenant le milieu du sommet de chaque bande.
e) Calcule la moyenne de la série en utilisant les centres de classes (en considérant que dans chaque classe, les valeurs prises sont regroupées au centre de classe).

Activité 3 :

Dans une entreprise, les salaires mensuels se répartissent ainsi,

De 10 000 UM à 15 000 UM ; 60 salariés

De 15 000 UM à 20000 UM ; 25 salariés

De 20 000 UM à 40 000 UM ; 12 salariés

De 40 000 UM à 60 000 UM ; 3 salariés

a) Détermine une estimation du salaire médian de 100 salariés de l'entreprise.
b) Calcule une estimation du salaire moyen des 100 salariés en supposant que le salaire moyen de chaque groupe de salariés est le centre de classe.
c) Détermine le plus petit salaire moyen possible.
d) Détermine le plus grand salaire moyen possible.
e) Le salaire moyen est égal au salaire médian ?
f) Trace un diagramme circulaire correspondant.
g) Trace le polygone des effectifs cumulés.

Activité 4 :

Etat matrimonial

La répartition en (%) des femmes et des hommes par l'état matrimonial actuel selon l'âge est représentée par le tableau suivant :

	femmes				
Groupe d'âge	Célibataire	Mariée	Veuf (ve)	Divorcé(e)	effectif
15-19	72,3	24	0	3,7	1697
20-24	39,6	50,9	0,4	09,1	1467
25-29	20,4	66,5	1,2	11,9	1306
30-34	06,7	75,7	1,7	15,9	1191
35-39	03,9	83,1	2	11	833
40-44	2	73,7	4,6	19,7	774
45- 49	2	76,6	10,7	10,7	459
	Hommes				
15-19	99,5	0,5	0	0	494
20-24	91,9	7,1	0	1	319
25-29	60,3	36,2	0,4	3,2	299
30-34	23,4	71,6	0,2	4,8	258
35-39	13,1	84,4	0	2,5	227
40-44	4	92,7	1,5	1,8	249
45- 49	09	96,7	0	2,4	140
50-54	1,5	94,7	3,7	0	134
55-59	0	96,9	0,3	2,8	71

Source : EDSM Mauritanie 200 -2001 publication ONS et ORC marco.

a) A partir des données du tableau, présente à tes amis l'état des lieux de l'échantillon enquêté en reprenant le tableau avec des effectifs seulement.

b) Donne les pourcentages de l'ensemble de chaque cas (célib- marié- veuf(ve)

c) Quel est le pourcentage des femmes mariées dont l'âge est moins que 30 ans. de même que les hommes ?

d) Dans quelle tranche d'âge se trouve le plus grand nombre de femme divorcées ? donne, si possible, des explications.

e) Dans quelle tranche d'âge se trouve le plus grand nombre de mariés qui divorce ? peux-tu donner une explication ?

Je retiens

1. Le mode ou classe modale

On appelle mode d'une série statistique toute modalité dont l'effectif est maximal.
On appelle classe modale, toute classe représentant un effectif maximal.
Remarque : une série peut avoir deux modes (ou plus).

2. Effectif cumulé

L'effectif cumulé croissant (resp. décroissant) pour une valeur x du caractère est la somme des effectifs correspondant aux valeurs du caractère inférieure ou égale (resp. supérieur ou égales) à cette valeur x.
Remarque : *l'effectif cumulé croissant (resp. décroissant) représente le nombre d'individus dans la population étudiée, dont la valeur du caractère est au plus égale (resp. au moins égale) à la valeur x. L'effectif cumulé croissant (resp. décroissant) pour la plus grande valeur (resp. la plus petite valeur) du caractère est égale à l'effectif total.*

3. Fréquences cumulées

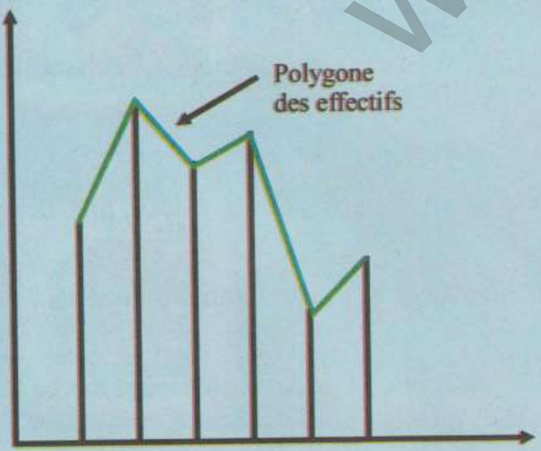
La fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) pour une valeur x du caractère est la somme des fréquences correspondantes aux valeurs du caractère inférieures ou égales (resp. supérieures ou égales) à cette valeur x.

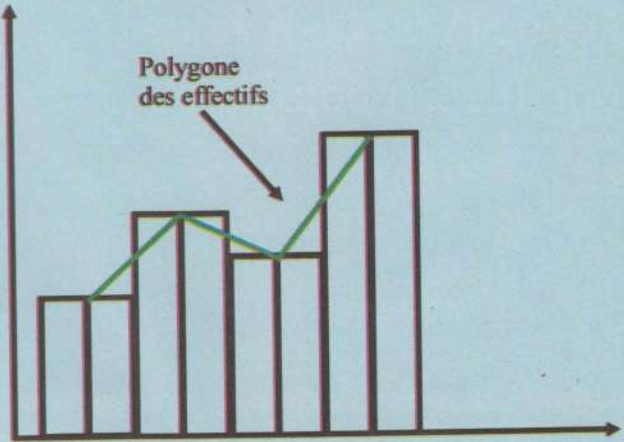
Remarque : *On a aussi fréquence cumulée* $= \dfrac{\text{effectif cumulé}}{\text{effectif total}}$

La fréquence cumulée est un nombre compris entre 0 et 1.
La fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) pour la plus grande valeur (resp. la plus petite valeur) du caractère est égale à 1.
On exprime souvent la fréquence cumulée en pourcentage.

4. Polygone des effectifs

Les polygones des effectifs d'une série statistique s'obtiennent en joignant les sommets relatifs aux effectifs.
Le polygone des effectifs d'une série statistique groupée s'obtient en traçant le polygone des effectifs de série des centres associés aux différentes classes.





5. Moyenne d'une série statistique

La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de tous les nombres de cette série par son effectif total.

Remarque : si une série se présente sous forme de classes, on admet que toutes les valeurs observées se regroupent au centre de classes.

6. Médiane

Quand une série est ordonnée, il y a autant de valeurs supérieures à la médiane que de valeurs inférieures.

Remarque : *dans le cas d'un nombre pair de valeur, toute variable (valeur) comprise entre ses 2 valeurs est la médiane.*

- On peut obtenir la médiane graphiquement en traçant sur un même repère, les diagrammes des effectifs cumulés croissants et décroissants, la médiane est l'abscisse du point d'intersection.

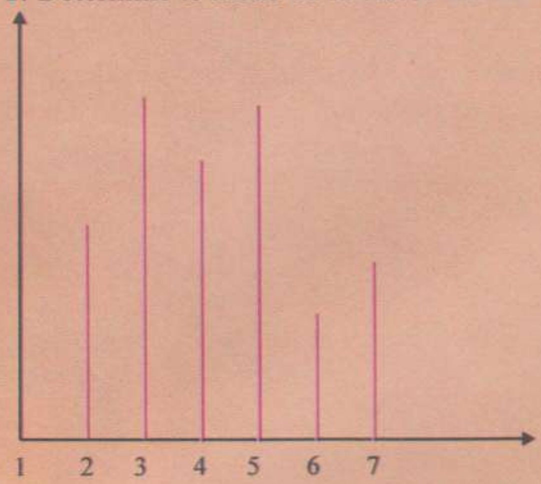
7. L'étendue

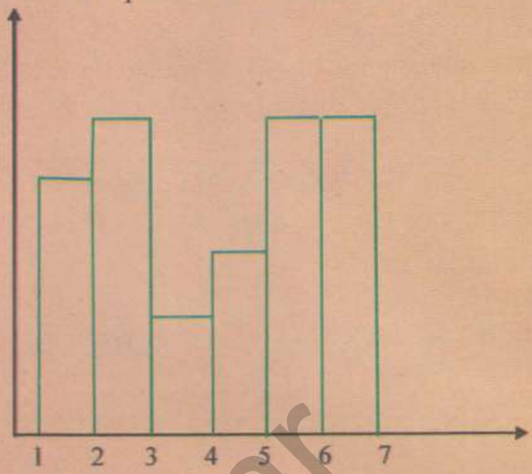
Une étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite de ses valeurs.

Je sais faire

1. Déterminer le mode

Exercice 1: Détermine le mode ou la classe modale des séries représentées ci-dessous :





2. Calculer l'effectif cumulé

Exercice 2: Une épreuve d'examen a donné les résultats indiqués dans le tableau suivant :

Note N sur 40	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	fréquences cumulées croissantes	fréquences cumulés décroissantes
$0 \leq N < 10$	25				
$10 \leq N < 20$	45				
$20 \leq N < 30$	75				
$30 \leq N < 40$	55				

a) Recopie et complète ce tableau.
b) Représente graphiquement par un histogramme les effectifs cumulés croissants.
c) Représente aussi graphiquement par un histogramme les fréquences cumulées décroissantes.

3. Représenter un polygone des effectifs

Exercice 3: Représente graphiquement le polygone des effectifs relatif au tableau précédent.

4. Calculer la Moyenne

Exercice 4: Voici les notes données à un groupe de 15 élèves.

Notes	3	5	6	7	7,5	8	9
Effectifs	2	1	4	1	2	3	2

Calcule la note moyenne de ce groupe.

5. Déterminer la médiane

Exercice 3: Détermine la valeur médiane de la série suivante :

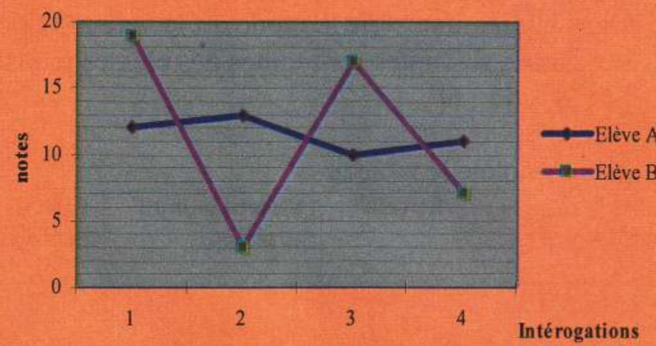
12,1 10,8 10,3 11,8 12,5 10,1 10,6 13,2 11,4 10,5 9,9 11,1 10,8 10,2 12,2

Déterminer l'étendue d'une série

Voici les notes obtenues par deux élèves :

	Int1	Int2	Int3	Int4	moyenne
Elève A	12	13	10	11	…
Elève B	19	3	17	7	…

a) Calcule la moyenne de chacun des deux élèves.
b) Détermine l'étendue de la série de chacun deux.
c) Interprète la représentation ci-contre.



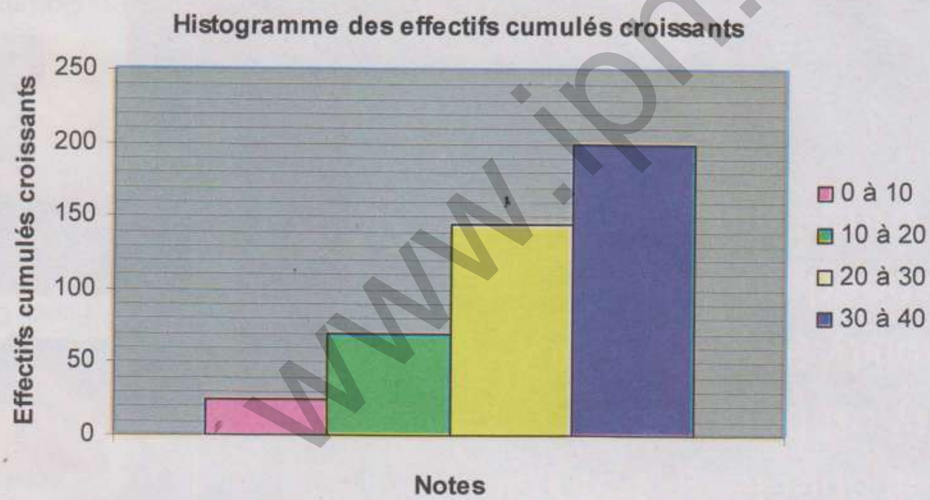
CORRECTION

1. Dans la première série le mode est la valeur 3 ; pour la deuxième, il s'agit d'une série multimodale, les classes suivantes sont toutes des classes modales :
[2 ; 3[, [5 ; 6[, [6 ; 7[.

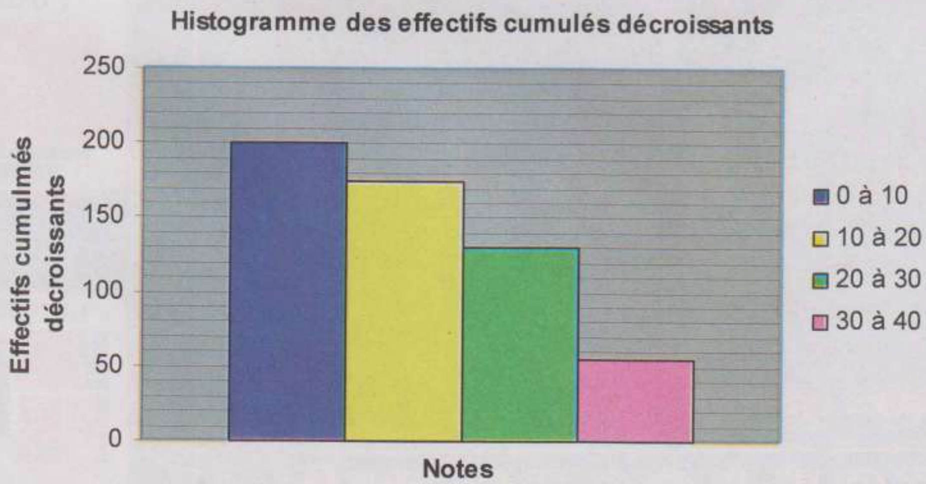
2. a) Je complète le tableau

Note N sur 40	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	fréquences cumulées croissantes	fréquences cumulés décroissantes
$0 \le N < 10$	25	25	200	$\frac{25}{200}$	$\frac{200}{200}=1$
$10 \le N < 20$	45	70	175	$\frac{70}{200}$	$\frac{175}{200}$
$20 \le N < 30$	75	145	130	$\frac{145}{200}$	$\frac{130}{200}$
$30 \le N < 40$	55	200	55	$\frac{200}{200}=1$	$\frac{55}{200}$

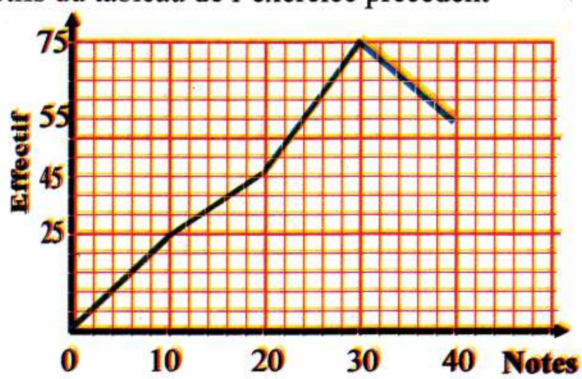
b) Voici la représentation graphique des effectifs cumulés croissants



c) Voici la représentation graphique des effectifs cumulés décroissants



3. Voici le polygone des effectifs du tableau de l'exercice précédent



4. La moyenne de cette série est la somme de toutes notes obtenues divisées par l'effectif total

Elle est égale à : $\dfrac{3\times2+5\times1+6\times4+7\times1+7{,}5\times2+8\times3+9\times2}{15}$

$= \dfrac{99}{15} = 6{,}6.$

5. La médiane est le nombre se trouvant au "milieu" de la série, c'est-à-dire qu'il y a autant d'effectif à droite de ce nombre qu'à gauche.

9,9 10,1 10,2 10,3 10,5 10,6 10,8 10,8 11,1 11,4 11,8 12,1 12,2 12,5 13,2

La médiane

6. a) Voici les moyennes demandées

					moyenne
élève A	12	13	10	11	11,5
élève B	19	3	17	7	11,5

b) L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

- L'étendue de la série des notes de l'élève A est : 13 - 10 = 3.
- L'étendue de la série des notes de l'élève B est : 19 - 3 = 16.

c) Ces deux élèves ont la même moyenne. Pourtant, graphiquement, les notes sont différemment réparties.

On dit que la série de l'élève B est plus dispersée que celle de l'élève A, car les valeurs extrêmes sont plus éloignées.

Activités documentaires relatives aux concepts et aux messages EMP

Situation 1

Le tableau suivant donne les effectifs des populations des différentes wilayas et ceux des médecins dans ces wilayas (les données sont tirées du recensement de la population mauritanienne de 1998).

Wilaya	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif population en milliers	212	159	167	184	192	202	61	63	65	116	33	15
Nombre de médecins	5	4	8	4	4	4	3	5	8	7	1	3

1. Calcule, en moyenne, le nombre d'habitants par médecin. Soit m ce nombre.
2. Représente la droite d'équation $m = \frac{x}{3}$ dans un repère orthogonal (1 cm représente 20 000 habitants ; en ordonnée 1 cm représente 1 médecin).
   On représente chaque wilaya par un point dont l'abscisse est l'effectif de la population et l'ordonnée est le nombre de médecins y travaillant. Représente dans le repère les différentes wilayas.
3. Quelles sont les wilayas qui sont au dessus de la moyenne et celles qui sont en dessous ?
4. Commenter cette situation.

Situation 2

A l'occasion de l'une des campagnes de vente promotionnelle de la SOMAGZ, un père de familles a constaté qu'il a le choix entre deux modes de consommations d'énergies :

- Utiliser du charbon de bois à raison de 2 kg par jour au prix de 150 UM, il doit acheter un fourneau (foyer amélioré) à 500 UM .
- Utiliser la gaz butane à raison de 2 bonbonnes par mois à 2 200UM et doit acheter une cuisinière à gaz et ses accessoires à 7 000UM et une bonbonne vide à 4 000UM.

1. Calcule le coût de la consommation mensuelle suivant chacun des deux modes.

Soit $f(x)$ la dépense après x mois suivant le premier mode et **g**(x) la dépense après x mois suivant le deuxième mode.

2. Donne les expressions de deux fonctions en fonction de x.
3. Représente ces deux fonctions dans un repère (1 cm pour un mois en abscisse et 1 cm pour 100UM en ordonnée).
4. Après combien de mois les deux modes se valent-ils?
   L'investissement premier se justifie-t-il?

D'après le guide d'intégration et de la remédiation de la 4ème AS
IGEN

Je m'exerce

Diagramme en bâtons

1. Voici un tableau qui donne la répartition de la population dans la région du Gorgol :

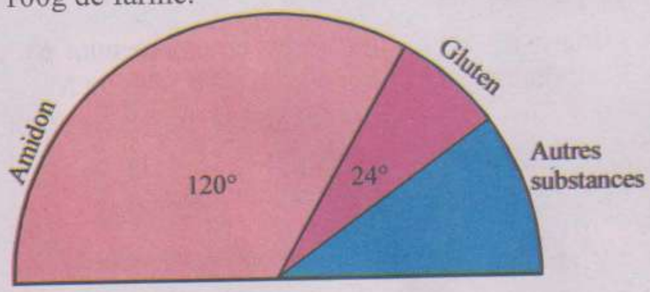
Département	Population en 2000	Fréquence %
Kaédi	107 309	
Maghama	46 743	
M'Bout	65 221	
Monguel	29 707	

a) Calcule la population totale de cette région.
b) Reproduis et complète le tableau.
c) Représente ce tableau par un diagramme en bâtons.
d) Sachant que la superficie et la wilaya de Gorgole est de 13560 km^2.
Quelle est la densité de cette wilaya ?
e) Compare la densité de la population du Gorgol avec celle du Hodh El Ghargui dont la population totale est de 275 288 et de superficie 189 376 km^2.

2. Ali a lancé 50 fois de suite un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Il a noté le nombre de sorties de chaque face. Sachant que la face n°3 est sortie deux fois plus souvent que la face n°2.
Reproduis et complète le tableau suivant :

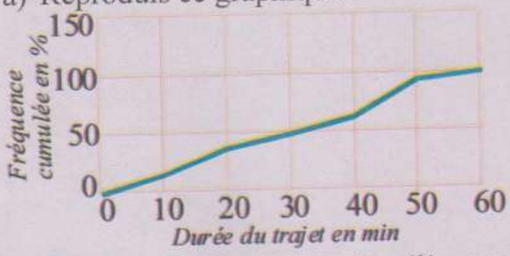
Face	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties	[illegible]			[illegible]		
fréquence		0,1				0,16

3. Echelles
Le diagramme ci-dessous représente la composition de la farine d'avoine.
Calcule la masse d'autres substances contenues dan 100g de farine.



4. On a demandé aux élèves d'un collège combien de temps ils mettent pour aller de leur domicile au collège.
Le graphique ci-contre indique les fréquences cumulées croissantes des durées.

a) Reproduis ce graphique.



b) Quel est le pourcentage des élèves qui mettent moins de 10min ? moins de 50min ?
c) Quel est le temps maximum mis par 70% des élèves ?
d) Quelle est la durée médiane du trajet d'un élève ?

5. On a relevé les âges des candidats à un concours de recrutement de la société de pétrole ; puis on a dressé le tableau suivant :

Age	[18 ; 22[	[22 ; 26[	[26 ; 30[	[30 ; 34[
Nombre de candidats	70	82	55	24

a) Détermine le centre de chaque classe.
b) Calcule le nombre total de candidats.
c) Calcule l'âge moyen des candidats.

6. Un élève devait présenter lors de son exposé une étude statistique portant sur deux caractères d'une population.
Il a demandé aux élèves de 4ème AS de son collège, filles ou garçons, s'ils buvaient ou non du café au petit déjeuner.
L'élève a perdu ses relevés et ses calculs.
Heureusement, il a une bonne mémoire, il se souvient que 60% des élèves qui boivent du café au petit déjeuner sont des filles.
Il se souvient aussi de 3 valeurs du tableau ci-dessous :

Sexe / Café	Garçons	Filles	total
Oui	32		
Non			40
Total	55		

a) Reproduis et complète le tableau.
b) Représente les répartitions des élèves de 4ème AS par trois diagrammes circulaires :
- Selon les 4 catégories
- Selon le 1er caractère seul.
- Selon le 2ème caractère seul.

7. Pour améliorer le rendement de son commerce, un grand magasin a commandé une enquête sur le choix des cadeaux offerts aux enfants. Le tableau ci-dessous présente la répartition des réponses, on a effacé une valeur de ce tableau.

Cadeau / Enquêteur	jouet	Livre	autre
A	243	158	78
B		187	52
C	190		36

a) Combien de réponses l'enquêteur a-t-il recueillis
b) Combien de personnes ont-elles choisi la réponse jouet ?
c) L'ensemble des réponses a été représenté par un diagramme circulaire dans lequel le secteur qui représente le choix « livre » a un angle de 120°.

Choix	Jouet	Livre	Autre	total
Effectif	634			
angle		120°		360°

- Calcule le nombre total de réponses.
- Complète le tableau et dessine le diagramme circulaire.

8. On a classé les adhérents d'un club de maths suivant leur âge.

Age	Effectif	Effectif cumulé	Fréquence à 10^{-3} près	Fréquence cumulée
[5 ; 15[	142			
[15 ; 25[	115			
[25 ;35[	80			
[35 ;45[	86			
[45 ;55[	53			
[55 ;65[	25			
[65 ;75[	9			

a) Calcule l'effectif total N.
- Que représente la somme 142 + 115 + 80 ?
- Que représente le quotient $\dfrac{142+115+80}{N}$?

b) Reproduis et complète le tableau. Détaille les calculs pour la classe [25 ; 35[.
c) Combien d'adhérents ont moins de 35 ans ?
d) Combien d'adhérents ont moins de 45 ans ?
Combien d'adhérents ont un âge compris entre 25 (inclus) et 55 ans (exclus)?
d) Construis sur une feuille de papier millimétré :
- un diagramme à bases des effectifs
- un diagramme à bases des effectifs cumulés.

c) Démontre qu'un candidat doit obtenir un total supérieur à 80 pour être reçu.

9. Le tableau suivant montre la répartition des 64 matchs de la coupe du monde de 2002 selon le nombre des buts marqués.

Nombre de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de matchs	3	12	11	18	10	6	1	2	1

a) Quelle est la médiane de cette série statistique ?
b) Quel est le nombre moyen de buts marqués par matchs.

10. Une enquête effectuée auprès de 120 élèves a donné les résultats suivants :
- 12 élèves n'ont lu aucun roman le mois dernier.
- 40 ont lu un roman.
- 30 élèves ont lu deux romans.
- 21 élèves ont lu trois romans.
- 9 élèves ont lu au moins quatre romans.

Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de romans	0	1	2	3	4 ou plus
Effectif					
Effectif cumulé					
Effectif cumulé					

b) Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants (utilise le papier millimétré).
c) En déduis la médiane
d) A l'aide du tableau, trouve :
- Combien d'élèves ont lu moins de romains ?
- Combien d'élèves ont lu au moins 3 romains.
- Quel est le pourcentage d'élèves ayant lu de 1 à 3 romains.

11. Un examen a quatre épreuves notées sur 20 dans les matières M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4.
Leurs coefficients sont :
$M_1 : 3$; $M_2 : 2$; $M_3 : 2$; $M_4 : 1$.
On appelle n_1 ; n_2 ; n_3 ; n_4 les notes obtenues par un candidat dans les matières M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4.
Pour être reçu on doit obtenir une moyenne sur 20 supérieure ou égale à 10.

a) Abou a obtenu les notes suivantes :
$M_1 : 13$; $M_2 : 14$; $M_3 : 11$; $M_4 : 17$.
Calcule sa moyenne.
b) On appelle T le totale des points obtenus par un candidat : $T = 3 \times n_1 + 2 \times n_2 + 2 \times n_3 + n_4$.
Calcule le total des points d' Abou.
d) Si on augmente la note n_1 de 2 points, de combien varie le total des points.

12. L'enquête porte sur un texte qui utilise 21 lettres différentes réparties en 329 signes typographiques.
Il est intéressant de remarquer que plus un mot est fréquent, plus son sens est large et peu précis. Ceci tient au fait qu'il est utilisé dans un grand nombre de phrases différentes au sein desquelles les autres mots lui donnent un sens particulier. De même, on peut noter que plus un mot est fréquent et son sens variable, plus il est court.
« Les mots grammaticaux sont à la fois fréquent, peu précis, et courts ».

a) Fais un diagramme représentant cette série.
b) Quel est le mode ?
c) Quelle est la consonne la plus fréquente ?
d) Quelles sont les lettres qui n'apparaissent pas dans ce texte ?
e) De cette population, on étudie les 133 signes typographiques qui constituent l'ensemble des voyelles.
   - Donne le tableau des effectifs des voyelles.
   - Trace le diagramme circulaire des fréquences

13. A l'approche de la fête de Tabaski, un éleveur de moutons les classe selon leurs poids et leurs prix.
Il a organisé les données dans le tableau suivant :

Poids	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	Plus de 55
Prix	10 000UM	12 000 UM	15 000 U	25 000 UM
effectifs	27	51	39	18

a) Détermine le pourcentage des moutons dont le prix est plus petit que 12 000UM.
b) Calcul le prix moyen d'un mouton.
c) Quelle est la classe modale ?
d) Trace le diagramme circulaire et le diagramme à bandes des effectifs de cette série.

14. Un chauffeur de taxi a noté dans la semaine le nombre et la distance de ses courses et ses prix.

Distance (km)	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[	10 ;1
Effectif	17	28	47	23	5	3
Prix	100	150	200	300	400	500
fréquence						

a) Complète le tableau ci-dessus.
b) Donne la recette totale de la semaine.
c) Trace le diagramme des effectifs cumulés et le diagramme à bandes.
d) Trace le polygone des effectifs cumulés.

15. La population d'une ville de 13 748 habitants est repartie en 5 classes d'égales amplitudes, de la façon suivante :
Le 3ème âge 2,4% ; les jeunes adultes 35%.
L'âge minime 1,5% ; les jeunes 24% les adultes 27%.
La personne la plus âgée a 98 ans.
Pour ce groupement en classes, établis un tableau des effectifs et des fréquences.
Quelle est la classe modale. Représente ces données par un diagramme à bandes.

16. On considère le tableau de répartition des tailles pour un échantillon de 1000 hommes et de 1000 femmes (INSEE).

Taille (cm)	Hommes	femmes
$140 \leq t \leq 150$	10	38
$150 \leq t \leq 160$	36	360
$160 \leq t \leq 170$	383	531
$170 \leq t \leq 195$	571	71

Dans cet échantillon,

a) Quel est le nombre total d'adultes de tailles inférieures à 170 cm ?
b) Quel est le nombre de femmes dont la taille est supérieure ou égale à 160 cm ?
c) Calcule le pourcentage d'hommes dont la taille est inférieure à 160 cm.
   - Par rapport aux hommes
   - Par rapport à l'ensemble.
d) Donne la classe modale correspondante à la médiane :
   - des hommes
   - des femmes

17. On donne le tableau de 4 séries de 48 notes de 4 classes de 4ème AS

Note / effectif	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4èmeAS1	0	1	2	7	1[illegible]	1[illegible]	9	1	1	0
4èmeAS2	4	6	4	5	5	4	6	5	5	4
4èmeAS3	2	5	1[illegible]	4	3	1	1[illegible]	5	5	3
4èmeAS4	0	0	7	8	9	9	8	7	0	0

a) Détermine dans chacun des cas la moyenne et la médiane. Que remarques-tu ? dans chaque cas :
   - calcule l'étendue (écart entre la note la plus basse et la plus haute).
   - détermine le pourcentage de notes qui sont dans l'intervalle [4 ; 7].
b) A quelles séries correspondent les descriptions suivantes :

A« les notes sont régulièrement réparties mais,

il n' y en a ni de très mauvaises ni de très bonnes ».
B« l'éventail des notes est très large et il y a deux dominantes».
C « A une ou deux exceptions près, les notes sont bien groupées, le niveau est homogène».

18. Un devoir commun de mathématiques a été proposé à l'ensemble des classes de $4^{ème}$ AS d'un collège.
Les résultats sur 20 sont les suivants :
12 ; 8 ; 15 ; 04 ; 07 ; 13 ; 02 ; 09 ; 10 ; 17 ; 13 ; 14
03 ; 06 ; 06 ; 08 ; 12 ; 09 ; 16 ; 12 ; 09 ; 04 ; 15 ; 05
03 ; 13 ; 02 ; 18 ; 05 ; 06 ; 11 ; 10 ; 14 ; 06 ; 14 ; 08
17; 10 ; 11 ; 16 ; 10 ; 8 ; 10 ; 09 ; 11 ; 10 ; 14 ; 7
13 ; 19 ; 14 ; 10 ; 15 ; 12 ; 13 ; 06 ; 12 ; 11 ; 09 ; 13
16 ; 15 ; 13 ; 05 ; 10 ; 07 ; 16 ; 10 ; 08 ; 16 ; 11.

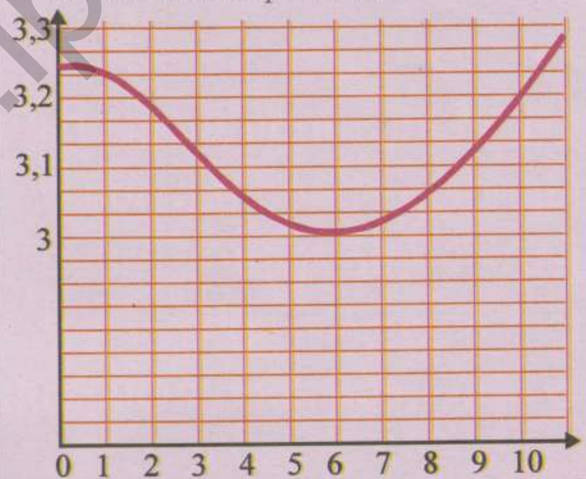
a) Recopie et complète le tableau suivant :

Note	C	1	..	.	.	..	..	20
Effectif								
Fréquence								
Effectif cumulé								
Fréquence cumulée								

b) Réponds aux questions suivantes :
- Combien d'élèves étaient présents au contrôle ?
- Combien d'élèves ont obtenu une note supérieur à 10?
- Combien d'élèves ont obtenu une note inférieure à 12?
- Quel est le pourcentage d'élèves ayant eu une note supérieure ou égale à 15?
- Quel est le pourcentage d'élèves ayant eu au plus 7?

c) Représente la série par un diagramme en bâtons.
d) Les professeurs de Mathématiques emmènent en excursion les 36 élèves qui ont obtenus les meilleures notes.
Issa a obtenu 10, partira-t-il en excursion ?
e) Calcule la moyenne de la série de notes.
Il y a 3 classes de $4^{ème}$ AS, de 24 élèves chacune dans le collège.
La moyenne de l'une des classes est 11,2, la différence entre les moyennes des autres classes est égale à 0,3 points.
Calcule les moyennes de ces deux classes.
f) Un élève est dit ''moyen '' s'il obtient une note strictement supérieure à 8 et inférieure à 12.
Calcule le pourcentage des élèves moyens dans l'ensemble des 3 classes de $4^{ème}$ AS.

19. La courbe suivante représente le poids d'un bébé pendant les premiers jours de sa vie.
a) Quel a été le « poids » de ce bébé à la naissance ? à l'âge de 8 jours?
b) Combien de jours après la naissance le poids de ce bébé a-t-il été de 3,2 kg.
c) Combien de jours après la naissance le poids de ce bébé a-t-il été plus faible?



d) Détermine le poids moyen d'un tel bébé durant les premiers 10 jours de sa naissance.

Module d'intégration 5
Evaluation de l'Objectif Terminal d'Intégration (OTI)

Evaluation de l'OTI

Situation 1

Le tableau suivant représente la hauteur des précipitations relevées mensuellement sur un village africain.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	O	S	O	N	D
Précipitation	200	175	120	0	95	110	110	90	85	100	140	155

1) Quel est le mois le plus sec ?
2) Détermine la hauteur d'eau tombée sur ce village.
3) Détermine la hauteur d'eau moyenne tombée en un mois.
4) Samba un habitant de ce village utilise la toiture de sa maison pour recueillir l'eau de pluie et la stocker dans un réservoir vu en ciel, cette toiture à la forme d'un rectangle de 6 m par 10 m.
   a) Détermine l'aire de ce rectangle en m^2.
   On admet que le volume d'eau recueilli sur cette toiture est obtenu à l'aide de la formule suivante : $V = A \times h$.
   Trouve le volume d'eau tombée sur cette toiture pendant le mois de mars.
   b) Cette eau est stockée dans une cuve pouvant contenir toute l'eau de précipitation :
   La consommation de cet habitant est de 300 litres par jour.
   Détermine sa consommation pour le mois de mars.
   c) A la fin du mois de février, il restait 6,9 m^3 d'eau dans la cuve.
   Quel volume d'eau reste-t- il à la fin du mois de mars ?
5) On considère le mois d'avril, x le nombre de jours écoulés depuis le début du mois.
   On admet que le volume d'eau restant dans la cuve pour x jour écoulés est donné par
   $y = 4,8 - 0,3x$.
   a) Calcule le volume restant dans la cuve à la fin du $7^{ème}$ jours.
   b) Soit g la fonction affine définie par $g(x) = 4,8 - 0,3x$.
   Construis la représentation graphique de la fonction g sur du papier millimétré (1 cm pour 2j en abscisse et 1 cm pour 0,4m^3 en ordonnée).
   c) Samba a continué à consommer 300 litres d'eau par jour en avril.
   Détermine par lecture graphique le volume d'eau (en cm^3) qui reste dans la cuve au bout de 10 jours (faire apparaître le repère sur le graphique).

Situation 2

Le professeur de Mathématiques de la $4^{ème}$ AS a proposé l'exercice suivant :
''ABC est un triangle ; P, Q et R sont les points définis par :

$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$.

S est le milieu de [BP] ; T est le milieu de [BR].

- Montre que P, Q et R sont alignés et que Q est le milieu de [PR].
- Montre que QRTS est un parallélogramme''.

Ahmed a proposé d'utiliser le calcul vectoriel.
Marième a utilisé la propriété de Thalès.
Kane a utilisé le repère (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$).
Rédige la solution et le raisonnement avancé par chacun des trois élèves.

Situation 3

En 2005, la mairie de notre village a construit un bassin de forme ci-contre.
Il servira à l'arrosage du jardin public dans lequel la construction a eu lieu.
Pour des raisons d'hygiènes et de sécurité la construction prévoit :

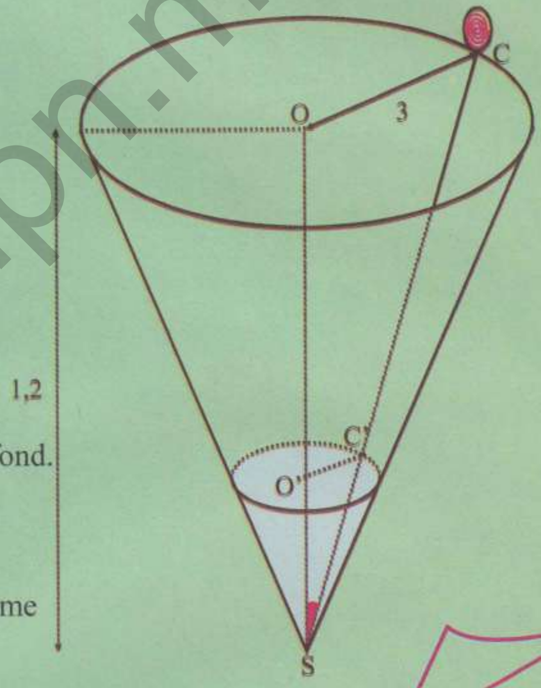
- L'emplacement d'une ampoule sur le bord de la base, au point C de telle sorte qu'elle soit reliée au sommet S par un fil tendu.
- d'entourer le bassin par du grillage.

❖ Aide la mairie à trouver :

- La longueur du fil reliant l'ampoule A au sommet S.
- L'angle sous lequel l'extrémité du fil est observée au fond.

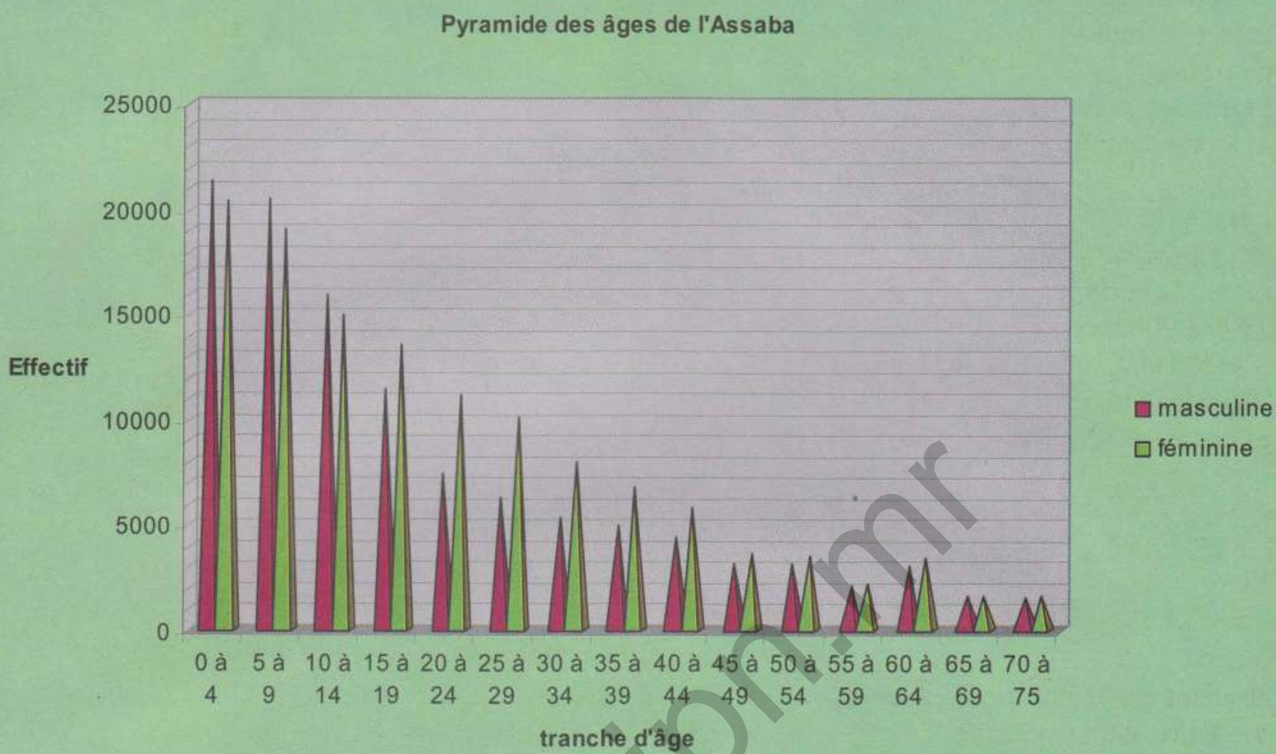
Lors du remplissage du bassin, l'eau atteint seulement le niveau indiqué.

❖ Aide aussi le gestionnaire de ce bassin à trouver le volume d'eau, sachant que : SO' = $\frac{1}{3} \times$ SO.



Situation 4

Sidi, Silly et Fatma étant des élèves intéressés par les statistiques ont observé les données ci-dessous tirées du RANVEC 2000.



Moughataa	Population		
	Masculine	Fémininine	Total
Barkéwol	29538	32700	62238
Boumdeid	4328	4376	8704
Guerrou	14085	17395	31480
Kankossa	30485	32579	63064
Kiffa	35363	41416	76779
Total	113799	128466	242265

Tab.1 Répartition de la population par sexe et par Moughataa.

	2000		
	Sédentaire	Nomade	Ensemble
Assaba	95.2	4.8	242.265
Mauritanie	94.9	5.1	2.508.159

Tab.2 Population par milieu de résidence.

Ils veulent mettre en évidence certaines réalités liées à cette population à savoir la pyramide des âges ; le mode de résidence, la répartition par Moughataa et par sexe.
Pour ce faire, chacun doit réaliser une tâche précise :

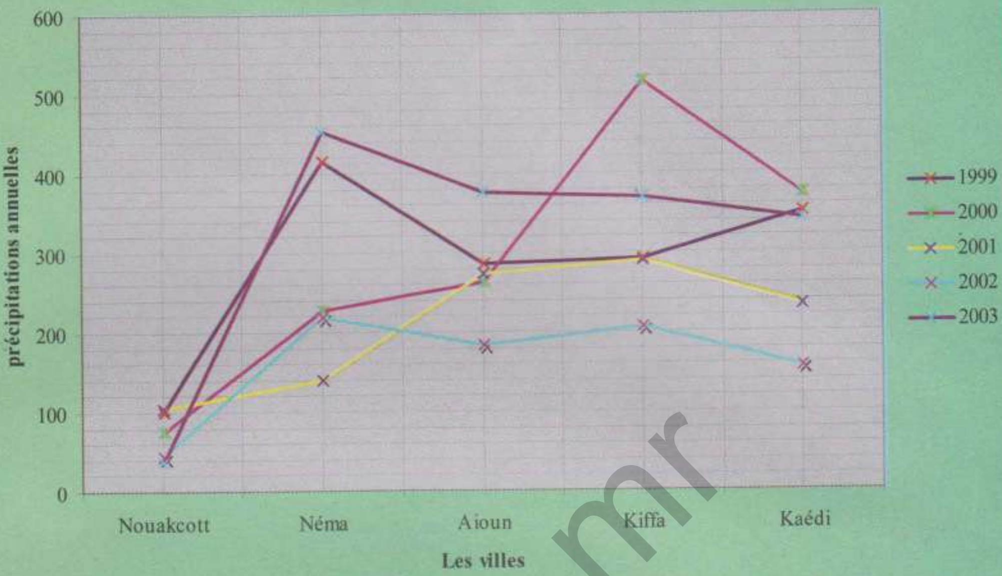
- Fatma s'occupe de la lecture de la pyramide des âges.
- Sylli doit construire l'histogramme donnant la répartition par sexe et par Moughataa.
- Sidi représente à l'aide d'un diagramme circulaire la répartition par mode de résidence, en la comparant par la répartition nationale.

❖ Aide les trois élèves à assumer leurs tâches

Situation 5

Climat : Evolution des hauteurs annuelles de pluie (en millimètres) enregistrées de 1999 à 2003.

Un projet de développement communautaire a publié une étude sur les facteurs de développement dans certaines villes du pays.
Parmi ces facteurs, il a retenu, entre autres, l'état de la pluviométrie durant la période 1999 à 2003, comme l'indique la représentation ci-contre.



Source : ASECNA

Sachant que le projet doit intervenir dans les deux villes dont la pluviométrie est la plus faible,

1. Faire la moyenne pluviométrique de chaque ville sur les cinq ans.
2. Quelles sont les deux villes ciblées par le projet ?

Entraînement au BEPC

Epreuve de Mathématiques. *Sujet National*

Durée : 2 heures Coefficient : 5

Exercice 1 (10 points)

Pour chaque question, choisir la réponse exacte parmi les réponses proposées en justifiant votre choix :

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse B	Barème
	La solution de l'équation : $x\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$ est	$1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1	0,5 + 0,5
	$(x-7)^2 =$	$x^2 - 14x + 49$	$x^2 - 49$	$x^2 - 14 + 49$	0,5 + 0,5
	L'inverse de -0,08 est	-12,5	0,08	12,5	0,5 + 0,5
	Les nombres solutions de $2x - 3 < 1$ sont tels que	$x > 2$	$x < 2$	$x < -2$	0,5 + 0,5
	La représentation graphique d'une application linéaire est une droite	Parallèle à l'axe des abscisses	Qui passe par l'origine du repère.	Parallèle à l'axe des ordonnées	0,5 + 0,5
	Dans un triangle équilatéral ABC de centre O, $\widehat{AOB} =$	45°	60°	120°	0,5 + 0,5
	Un carré de côté 2 cm et inscrit dans un cercle de rayon	$\sqrt{2}$ cm	$2\sqrt{2}$ cm	2 cm	0,5 + 0,5
	Dans un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 8 et AC = 6 cos($\widehat{ABC}$) est égal à	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	0,5 + 0,5
	Si $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, alors	B milieu de [AC]	A, B et C sont alignés	C milieu de [AB]	0,5 + 0,5
	Le volume d'un cône d'e révolution, de rayon de base 3 cm, de hauteur 4 cm est	12π cm^3	$36\pi^2$ cm^3	36π cm^3	0,5 + 0,5

Exercice 2 (6 points)

On donne un triangle ABC tel que AB = 6 cm, BC = 8 cm et AC = 10 cm.

1) a)construire le triangle ABC. **(1 point)**
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier. **(1 point)**

2) Sur le segment [BC] on place le point I tel que : $CI = \dfrac{1}{4}CB$.

La parallèle à la droite (AB) passant par I coupe la droite (AC) en J.
   a) Compléter la figure tracé au 1°). **(0,5 point)**
   b) Calculer les distances CJ et IJ. **(1 point)**

3) Sur le segment [BC], on considère maintenant le point M tel que : CM = x.

La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe la droite (AC) en K.
   a) Calculer MK en fonction de x. **(1 point)**
   b) Montrer que l'aire du triangle CMK est : $\dfrac{3}{8}x^2$. **(1 point)**
   c) Trouve la valeur de x pour que l'aire du triangle CMK soit la moitié de celle du triangle ABC. **(0,5 point)**

Exercice 3 (4 points)

Regrouper dans un tableau le dépouillement de 24 fiches de renseignements remplis par les élèves en début d'année sur le nombre de frères :

1	0	2	3	5	7	1	2	0	3	2	1	2	4	1
0	1	2	2	1	3	1	0	1						

a) Quel est le nombre moyen de frères dans cette classe ? **(1 point)**
b) Combien d'élèves ont plus que 3 frères ? moins que 4 frères ? **(1 point)**
c) Représenter le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série. **(1 point)**

Sujet étranger : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice et Toulouse.
La rédaction et la présentation seront notées sur 4 points.
L'emploi des calculatrices est autorisé.
Coefficient : 2 Durée : 2 heures

I. Activités Numériques (12 points)

Exercice 1

Dans cet exercice, tous les calculs devront être détaillés.

1. Calculer l'expression : $A = \frac{13}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}$ (donner le résultat sous sa forme la plus simple).
2. Donner l'écriture scientifique du nombre B tel que : $B = \frac{7 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-4}}$
3. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (où a est un entier) le nombre C tel que : $C = 4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700}$
4. Développer et simplifier : $(4\sqrt{5} + 2)^2$

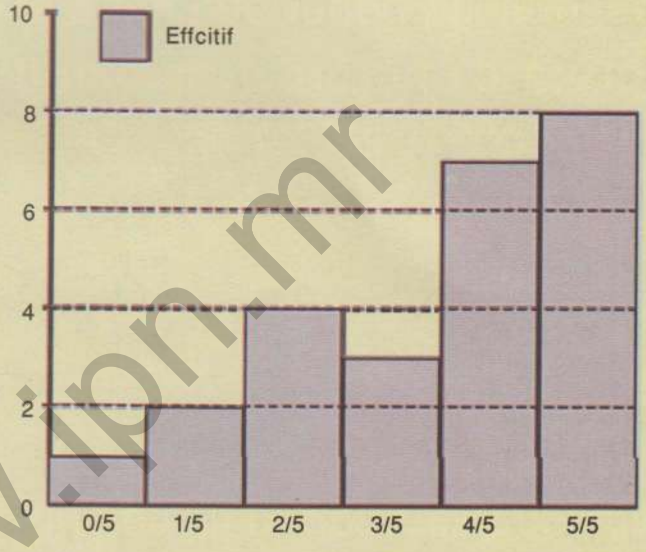
Exercice 2

Voici l'histogramme des notes d'un contrôle noté sur 5 pour une classe de 25 élèves.

1. Reproduire et remplir le tableau des notes suivant.

Note	0	1	2	3	4	5
Effectif						
Effectif cumulé croissant						

2. Calculer la moyenne des notes de la classe.
3. Quelle est la médiane des notes de la classe ?
4. Calculer la fréquence des notes inférieures ou égales à 3 points sur 5.



Exercice 3

Répondre aux questions suivantes. (Les calculs pourront être totalement faits à la calculatrice : on ne demande pas d'étapes intermédiaires ni de justification).

a) Donner un arrondi au centième du nombre A tel que : $A = \frac{831-532}{84}$
b) Convertir 3,7 heures en heures et minutes.
c) Donner un arrondi au millième du nombre B tel que : $B = \frac{\frac{53}{51} - \frac{32}{85}}{\frac{63}{34}}$
d) Calculer à 0,01 près $C = \sqrt{\frac{83+167}{158}}$

Exercice 4

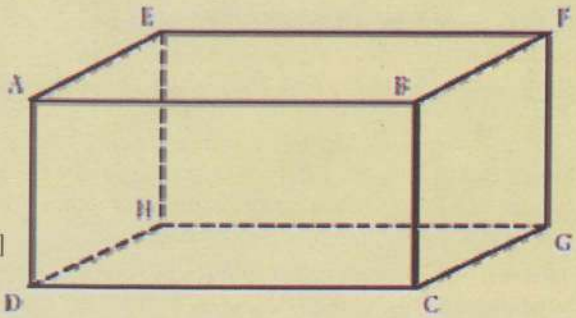
1. Trouver le PGDC de 6 209 et 4 435 en détaillant la méthode.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer pourquoi la fraction $\frac{4435}{6209}$ n'est pas irréductible.
3. Donner la fraction irréductible égale à $\frac{4435}{6209}$

II. Activités Géométriques (12 points)

Exercice 1

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
On donne AE = 3 m; AD = 4 m; AB = 6 m.

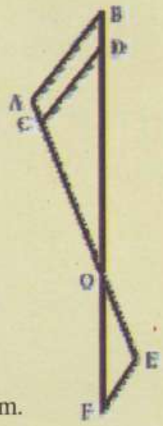
1. a) Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ?Le justifier.
   b) Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?
2. a) Calculer EG. On donnera la valeur exacte.
   b) En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de la diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.
3. Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m³.
4. Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m².



Exercice 2

Sur le dessin ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les points A, C, O, E sont alignés ainsi que les points B, D, O et F. (On ne demande pas de faire le dessin).
De plus, on donne les longueurs suivantes :
CO = 3 cm, AO = 3,5 cm, OB = 4,9 cm, CD = 1,8 cm, OF = 2,8 cm et OE = 2 cm.

1. Calculer (en justifiant) OD et AB.
2. Prouver que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.



Exercice 3

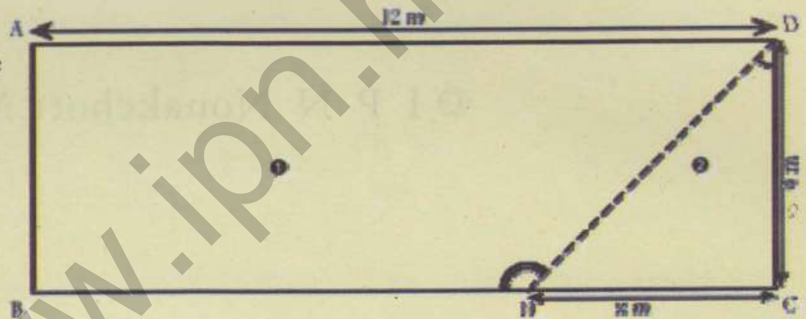
Soit ABC un triangle tel que AB = 4,2 cm, BC = 5,6 cm, AC = 7 cm.

1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Prouver que ABC est rectangle en B.
3. Calculer le périmètre et l'aire de ABC.

III. Problème (12 points)

Exercice

On dispose d'un séjour rectangulaire dans lequel on veut réaliser un petit cagibi triangulaire. Pour cela, on veut installer une cloison.
Voici ci-contre, une représentation de la pièce.
La partie (2) est le cagibi et la partie (1) représente le séjour après la création du cagibi. La cloison a été dessinée en pointillés.
Dans l'exercice, on considérera que la cloison a une épaisseur nulle.
Les trois parties sont indépendantes.



Partie 1

On considère que x = 3 m.

1. Quelle est la longueur de la cloison (en pointillé) ?
2. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{HDC}$.
3. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{DHB}$.

Partie 2

1. a) Exprimer la surface au sol du cagibi (2) en fonction de x, sous la forme f(x) = ...
   b) Exprimer la surface au sol du séjour (1) en fonction de x, sous la forme g(x) = ...

2. On admet que f(x) = 2x et que g(x) = 48 - 2x.
   a) Quelle est la nature de la fonction f ? Quelle est la nature de la fonction g ?
   b) Tracer dans un repère (abscisse : 1 cm pour 0,5 unités et en ordonnées, 1 cm pour 5 unités) les représentations graphiques des fonctions f et g pour x compris entre 0 et 10.

3. On veut que le séjour (1) ait une surface minimale de 35 m².
   a) Lire sur le graphique la valeur maximale de x pour que cette condition soit respectée.
   b) Écrire une inéquation qui traduise que la surface du séjour doit être supérieure ou égale à 35 m².
   c) Résoudre cette inéquation.

Partie 3

On réalise une maquette de cette pièce, avant la création du cagibi, à l'échelle 1/200.

1. Rappeler ce que signifie « échelle 1/200 » ?
2. Quelle sera, sur la maquette, la longueur du mur de 12 m ?
3. La surface réelle du séjour est de 48 m². Quelle est la surface du sol du séjour dans la maquette (en cm²) ?
4. Le volume du séjour de la maquette est de 13,125 cm³. Quel est le volume réel du séjour (en cm³ puis en m³) ?