

Universidade de Brasília

Instituto de Física

Vítor Dantas Meireles

**Grupo de Renormalização e o Modelo Sigma  
Não-Linear**

Brasília

27 de junho de 2019



Vítor Dantas Meireles

## **Grupo de Renormalização e o Modelo Sigma Não-Linear**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

27 de junho de 2019

Vítor Dantas Meireles

## **Grupo de Renormalização e o Modelo Sigma Não-Linear**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 27 de junho de 2019:

---

**Arsen Melikyan**  
Orientador

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Brasília  
27 de junho de 2019

# Resumo

Neste trabalho usamos métodos da teoria quântica de campos para estudar teorias efetivas que descrevam o magnetismo de cadeias de spin unidimensionais. Para tal serão revisados conceitos fundamentais da teoria quântica de campos, e as suas conexões com a física estatística e criticalidade. Desta maneira seremos capazes de mostrar que a teoria efetiva que descreve antiferromagnetos de Heisenberg unidimensionais, no limite de baixas energias, é o Modelo Sigma Não-Linear, com um termo topológico. Através do uso do grupo de renormalização, estudaremos o comportamento assintótico desta teoria no acoplamento forte, assim como as implicações que o termo topológico nos traz a esta análise.

**Palavras-chaves:** Renormalização, Modelo Sigma Não-Linear, Antiferromagnetismo.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Espaço-Tempo Euclidiano como um cilindro com perímetro de circunferência $\beta = 1/T$ . . . . .	11
Figura 2 – Triângulo geodésico formado pelos vetores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ . . . . .	19
Figura 3 – A curva $\Gamma$ e as superfícies $\Sigma^+$ e $\Sigma^-$ . . . . .	21
Figura 4 – Ground State do Ferromagneto de Heisenberg . . . . .	25
Figura 5 – Estado de Néel . . . . .	29
Figura 6 – Compatificação da variedade $M$ em uma esfera. . . . .	38
Figura 7 – Configuração de spin em um espaço euclidiano 2D, compatificado em uma esfera $S^2$ . . . . .	43



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>INTEGRAL DE TRAJETÓRIA PARA SPINS</b> . . . . .	<b>15</b>
1.1	Estados Coerentes de Spin . . . . .	15
1.2	Função de Partição e Termo de Wess-Zumino . . . . .	20
1.3	Ação para um Conjunto de Spins . . . . .	22
<b>2</b>	<b>MAGNETISMO QUÂNTICO E O MODELO SIGMA NÃO-LINEAR</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1	Ferromagnetos Quânticos . . . . .	25
2.2	Antiferromagnetos Quânticos . . . . .	29
<b>3</b>	<b>TERMOS TOPOLÓGICOS</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	Homotopias e Teorias de Campo . . . . .	37
3.2	Termos Topológicos . . . . .	40
3.3	Termo Topológico do NLSM e o caso $\pi_2(S^2)$ . . . . .	42
<b>4</b>	<b>MODELO SIGMA NÃO-LINEAR</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Flutuações Quânticas e Renormalização . . . . .	47
4.2	Conjectura de Haldane . . . . .	53
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>61</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE A – INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA E TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS</b> . . . . .	<b>67</b>
A.1	Integrais de Trajetória na Mecânica Quântica . . . . .	67
A.2	Integrais de Trajetória na Teoria Quântica de Campos . . . . .	78
	<b>APÊNDICE B – ESTADOS COERENTES GENERALIZADOS</b> . . . . .	<b>87</b>
B.1	Completeza dos Estados . . . . .	89



# Introdução

Nas últimas décadas, o campo da física da matéria condensada viu um desenvolvimento rápido e, às vezes, quase revolucionário. Sem dúvida, o sucesso do campo deve muito aos avanços inovadores na área experimental. Porém, por mais importante que seja, o progresso experimental, por si só, talvez não explique completamente o apelo da física da matéria condensada moderna. De fato, muitos dos resultados mais surpreendentes desta área da física surgiram do desenvolvimento teórico da mesma.

Ao longo deste progresso, vários dos métodos mais proeminentes usados têm a origem em comum da teoria quântica de campos. De fato, esta evoluiu para um status que vai além de um mero método, sendo encarada como a linguagem natural para a descrição dos mais diversos fenômenos da matéria condensada. Além desta, muitos dos conceitos mais importantes usados na área são provenientes da física estatística, mais recentemente motivados pelo notório progresso na investigação de fenômenos críticos a nível quântico.

Com estas motivações, é evidente que um bom entendimento dos métodos básicos da teoria quântica de campos e da física estatística torna-se indispensável para um entendimento dos fenômenos descritos pela teoria moderna da matéria condensada. Esta é de fato a motivação por trás deste trabalho, onde investigaremos um problema concreto na matéria condensada sob o ponto de vista da teoria quântica de campos.

É interessante ressaltar aqui que uma das motivações mais interessantes que levam ao uso da teoria quântica de campos para se estudar esta classe de fenômenos é a sua relação intrínseca com a física estatística, e de fato as analogias e consequências desta conexão irão permear este trabalho desde o seu início.

O cerne desta conexão está no formalismo de integrais de trajetória<sup>1</sup>, originando-se da chamada rotação de Wick, que até então é encarada como um mero artifício matemático, usada para a realização de cálculos de maneira mais formal dentro deste formalismo. Para visualizarmos esta conexão, considere, por exemplo a amplitude de transição de uma partícula quântica com um grau de liberdade,  $x$ , que se propaga no intervalo de tempo  $t \in [0, T]$ , sob a ação de um potencial  $V(x)$ . Esta amplitude

---

<sup>1</sup> Uma breve introdução a este formalismo pode ser vista no apêndice [A](#)

é escrita como uma integral de trajetória como:

$$\langle x' | e^{-i\hat{H}T} | x \rangle = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \right\} \quad (1)$$

Agora considere que, por algum motivo diverso, seja efetuada a rotação de Wick, o que faz com que tenhamos a seguinte integral de trajetória euclideana:

$$\int \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^T d\tau \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \right\} \quad (2)$$

Até aqui encaramos este procedimento como um mero artifício matemático, que facilita cálculos mal definidos com o tempo real. Porém a expressão (2) carrega uma interpretação que vai além do que estamos considerando até agora, sendo exatamente a função de partição um campo clássico unidimensional.

Esta realização é facilmente vista ao se considerar uma corda elástica de comprimento  $T$  e tensão  $m$ , fixa nos pontos  $x$  e  $x'$ . Supondo que o sistema esteja sob um potencial externo  $V(x)$ , a energia potencial da corda será:

$$E_{pot}[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x(\tau)) \right] \quad (3)$$

É importante notar que  $\tau$  não é a variável temporal do sistema, mas sim o comprimento da corda. Com esta expressão dada, a função de partição clássica do sistema será proporcional a:

$$Z[\beta] \sim \int \mathcal{D}x(\tau) \exp \{ -\beta E_{pot}[x(\tau)] \}, \quad (4)$$

onde foi omitida a contribuição da energia cinética, visto que a mesma pode ser fatorada e não depende de  $x$  e nem de  $x'$ . É natural esperar uma integração funcional aqui, pois a operação de traço que define a função de partição deve ser tomada continuamente em todas as configurações possíveis do sistema.

Assim chegamos à conclusão de que a integral de trajetória euclideana de uma partícula quântica *pontual* é análoga à função de partição de um campo clássico *unidimensional*, pois a variável temporal é agora associada a uma variável que mede o comprimento da corda.

Este é um resultado que pode ser mais facilmente generalizado para a teoria quântica de campos. Considerando uma teoria de campos em  $d$  dimensões espaciais,

realizamos uma rotação de Wick no funcional gerador, que se transforma no funcional de uma teoria de campos euclideana:

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int d\tau d^d x \mathcal{L}_E[\phi] - \int d\tau d^d x \phi(x) J(x)\right\} \quad (5)$$

Da mesma maneira que associamos uma integral de trajetória da partícula pontual à função de partição de um sistema estatístico com uma dimensão, podemos associar o funcional gerador de uma teoria de campos euclideana  $d$ -dimensional com uma função de partição de algum sistema estatístico<sup>2</sup>  $(d + 1)$ -dimensional, sendo a dimensão extra descrita pelo tempo imaginário.

O fato de que a rotação de Wick realiza uma analogia com um sistema com uma dimensão extra é matematicamente consistente, pois ao se considerar uma teoria de campos euclideana, a variável temporal se transforma da mesma maneira que as espaciais, nos dando uma invariância por rotações e translações em  $D = d + 1$  dimensões. Isso somado às condições de contorno periódicas induzidas pela operação de traço nos leva à uma descrição do espaço-tempo como um cilindro, que pode ser visto na figura abaixo:

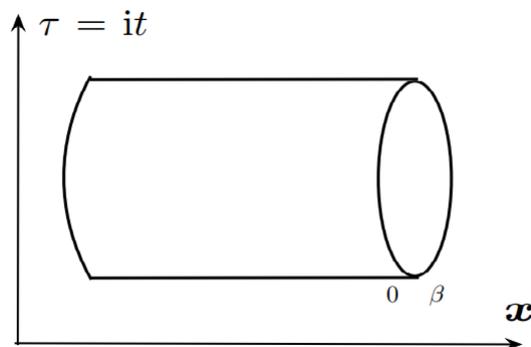


Figura 1 – Espaço-Tempo Euclidiano como um cilindro com perímetro de circunferência  $\beta = 1/T$ .

A realização desta conexão entre as duas teorias é de extrema utilidade, visto que a função de partição essencial para a física estatística, onde a partir desta é possível extrair quantidades termodinâmicas macroscópicas de modelos microscópicos. Assim, um dos problemas centrais da física estatística, que é encontrar  $Z$  para um dado sistema, pode ser traduzido em um problema na teoria de campos com uma integral de trajetória, e vice-versa.

<sup>2</sup> O termo de fonte aqui pode ser interpretado na física estatística como um campo externo, como por exemplo, um campo magnético externo em sistema de spins.

A utilidade do intercâmbio de técnicas entre estas duas áreas é notória para a física da matéria condensada, onde um dos conceitos mais importantes utilizados sob o ponto de vista da física estatística é o de transição de fase.

Vamos relembrar alguns conceitos básicos da teoria de transição de fase com o exemplo da transição ferromagnética de um sistema de spins em uma rede discreta. Considere que este sistema está inicialmente na fase em que os spins estão desalinha- dos. Conforme a temperatura do sistema é diminuída, o efeitos de interação entre os spins se tornam aparentes, e assim são formados aos poucos aglomerados com spins apontando na mesma direção. A escala de comprimento destes aglomerados é denominada por *comprimento de correlação*, geralmente denotado por  $\xi$ . Quando estamos próximos da temperatura crítica, o sistema tem um comprimento de correlação de alguns comprimentos atômicos. Nesta configuração é dito que o sistema se encontra na *ordem em curto alcance*.

Ao atingirmos a temperatura crítica, o comprimento de correlação diverge. Neste ponto o sistema se comporta com um modo coletivo único, e estruturas orde- nadas existem em todas as escalas de comprimento. Assim, neste ponto o sistema se encontra na *ordem a longo alcance*.

Uma descrição natural para estas flutuações a longo alcance é de fato em termos de uma teoria de campos contínua, que é formalizada pela conexão que dis- cutimos mais acima. Uma das características mais interessantes desta descrição em termos de campos é o surgimento de uma relação entre o comprimento de corre- lação de um modelo estatístico com a massa da teoria de campos. Isso pode ser visto de maneira explícita se considerarmos a função de correlação de dois spins, por exemplo, que em geral se comporta como:

$$\langle s_i s_j \rangle = G_{ij} \sim \frac{e^{-|i-j|/\xi}}{r^{d-2+\nu}}, \quad (6)$$

Onde  $\xi$  é de fato o comprimento de correlação, o que faz sentido, visto que a função acima mede a escala efetiva em que temos dois pontos na rede correlacionados. A fórmula análoga a esta na teoria de campos euclideana é dada pela função de correlação de dois pontos, ou o propagador, que para um campo escalar livre é dada por:

$$G_E(x_1 - x_2) = \frac{\sqrt{\pi/2} m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2} (m|x_1 - x_2|)^{\frac{d-1}{2}}} e^{-m|x_1 - x_2|} \quad (7)$$

A demonstração desta fórmula pode ser vista no apêndice A. Aqui vemos claramente que as duas quantidades decaem exponencialmente, e assim é possível

escrever a seguinte relação:

$$m \sim \frac{1}{\xi} \quad (8)$$

Desta maneira, quando um sistema está no ponto crítico, a sua descrição por meio de uma teoria de campos é tal que a massa seja nula.

Embora a ideia de descrever um sistema estatístico complexo por intermédio de uma teoria de campos pareça satisfatória, devemos levar em conta que são poucas as soluções exatas conhecidas na teoria de campos. Em geral devemos usar métodos de aproximação, sendo a teoria de perturbação o mais o proeminente destes. Uma das características mais notórias das soluções perturbativas de teorias de campos é a presença de divergências, que geralmente podem ser eliminadas por um processo de renormalização.

No contexto em que estamos, ao invés de tratarmos os problemas de divergências usando a renormalização perturbativa, é mais útil usar técnicas do chamado grupo de renormalização, onde estudamos como uma teoria em geral se transforma conforme a escala de interesse muda. O grupo de renormalização de fato consiste em um conjunto de ideias, que pode ser aplicado nas mais diversas situações e problemas.

Para o caso de uma teoria de campos, a origem das divergências pode ser vista como a maneira inapropriada em que as flutuações são contabilizadas, visto que na expansão perturbativa todos os momentos são tratados sob o mesmo pé de igualdade. A ideia do grupo de renormalização aqui é considerar qual é a escala que de fato é importante para o problema, eliminando os graus de liberdade que estão além desta.

Este procedimento leva a uma construção de uma teoria efetiva, que para sistemas na matéria condensada e na física estatística são teorias definidas em uma escala de longos comprimentos de onda. Assim, o interesse em geral desta classe de problemas é a eliminação dos graus de liberdade associados aos momentos mais altos da teoria. Isto pode ser feito por uma integração funcional de maneira direta, por exemplo. Um processo como este é caracterizado como uma transformação do grupo de renormalização, que toma uma teoria com um certo conjunto de parâmetros e leva a outra em uma outra escala, descrita por um conjunto diferente de parâmetros. Um resultado importante neste tipo de análise é a dependência da escala que as constantes de acoplamento da teoria tomam quando consideramos este tipo de transformação. Ao considerar uma transformação infinitesimal, podemos calcular qual a dependência dos parâmetros da teoria com a partir de uma equação

diferencial, denotada por:

$$\beta(g(a_0)) \equiv a_0 \frac{g(a_0)}{da_0} \quad (9)$$

Onde  $g(a_0)$  é um parâmetro que depende de uma certa escala  $a_0$ , que pode ser uma escala de comprimento, por exemplo.

Assim, com o uso destes métodos podemos estudar um problema na matéria condensada sob o ponto de vista da teoria quântica de campos, e considerar um teoria efetiva na escala de interesse, usando técnicas do grupo de renormalização.

Neste trabalho focaremos exclusivamente no problema de se descrever uma cadeia de spins unidimensionais . Este é um sistema que foi extensivamente estudado, sendo um dos mais notórios resultados devido a Haldane, onde o mesmo conjectura uma há diferença crucial entre cadeias de spin, onde as de spin inteiro são descritas por uma teoria de campos massiva, ou, com comprimento de correlação finito, e as de spin inteiro são não massivas, estado no ponto crítico, e assim, com um comprimento de correlação infinito.([HALDANE, 1983a](#))([HALDANE, 1983b](#))

Este é um resultado inesperado ao se considerar a fenomenologia conhecida das cadeias de spin, onde esperava-se que todas as cadeias não fossem massivas([FRADKIN, 2013](#)). Para chegar a este resultado, deve se considerar uma teoria de campos efetiva, que descreva a cadeia de spins a uma escala de baixas energias. Para isso, é útil se fazer uso do formalismo de integrais de trajetória, o que nos leva à necessidade natural de encontrar a integral de trajetória de um sistema de spins, o que é feito no capítulo a seguir.

# 1 Integral de Trajetória para Spins

Iremos considerar um sistema com apenas o grau de liberdade de spin- $S$  e um termo de acoplamento com um campo magnético externo, e assim será derivada a função de partição com o uso de integrais de trajetória. Este resultado será útil para uma derivação semelhante no caso de uma cadeia de Spins. Uma característica importante a ser vista aqui é a presença de um termo topológico na ação do spin, que pode, ser interpretado como um termo de monopolo.

Para a construção da integral de trajetória, vamos considerar o conjunto completo de *estados coerentes de spin*, que tem a interpretação de serem os autoestados mais “clássicos” do operador de spin, como veremos mais adiante. A definição geral de estados coerentes pode ser vista no apêndice B.

## 1.1 Estados Coerentes de Spin

Como mencionado, vamos considerar um sistema extremamente simples, cujo o único grau de liberdade é o do spin. O espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é formado por vetores que se transformam de acordo com representações irredutíveis do grupo  $SU(2)$ , definido como o conjunto de matrizes  $2 \times 2$  unitárias com determinante igual a 1, i.e., como:

$$SU(2) = \{g \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid g^\dagger g = 1, \det g = 1\} \quad (1.1)$$

Como  $SU(2)$  é compacto, todas as suas representações irredutíveis são unitárias, e de dimensão finita, dada por  $2S + 1$ , com  $2S \in \mathbb{N}$ , que podem ser rotuladas como  $T^{(S)}$ . Esta é a dimensão do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  em que a representação  $T^{(S)}$  atua, onde este é provido de uma base ortonormal,  $\{|S, M\rangle\}$ , que são autoestados dos operadores  $\mathbf{S}^2$  e  $S_3$ :

$$\mathbf{S}^2 |S, M\rangle = S(S + 1) |S, M\rangle \quad (1.2)$$

$$S_3 |S, M\rangle = M |S, M\rangle \quad (1.3)$$

Com  $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ , e os operadores  $\{S_i\}$ , com  $i = 1, 2, 3$ , obedecendo à seguinte relação de comutação, formando a álgebra de lie de  $SU(2)$ :

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k \quad (1.4)$$

O primeiro passo para realizar um tratamento com integrais de trajetória é considerar um sistema completo de estados. A primeira vista, a escolha mais óbvia seria usar o conjunto de estados de  $\{|S, M\rangle\}$ , mas iremos tomar um caminho diferente, usando os *estados coerentes de spin*[2], que são definidos pela atuação da representação irredutível de  $SU(2)$  no *estado de peso mais alto*, dado pelo  $|S, M\rangle$  com o máximo autovalor  $M$ , i.e., dado por  $|S, S\rangle$ , que em geral é denotado por  $|0\rangle$ . A princípio então, temos o conjunto de estado coerentes dados por

$$\{|g\rangle = T^{(S)}(g)|S, S\rangle, \quad g \in SU(2)\} \quad (1.5)$$

Entretanto, é importante notar que  $T^{(S)}(g)$  não é a única transformação que leva  $|0\rangle$  ao vetor  $|g\rangle$ , visto que dois estados  $|g\rangle$  e  $|g'\rangle$  são fisicamente equivalentes se diferem por uma fase. Desta maneira, definimos o subgrupo  $H \subset SU(2)$  como o conjunto de transformações que levam um dado estado a outro equivalente:

$$\{h \in SU(2) \mid T^{(S)}(h)|g\rangle = e^{i\phi}|g\rangle\} \quad (1.6)$$

Se este subgrupo for maximal, será chamado de subgrupo de isotropia.

Assim, para eliminar a redundância na definição dos estados coerentes, iremos tomar o espaço quociente  $SU(2)/H$ . Agora cada estado físico pode ser unicamente parametrizado por uma classe de equivalência em  $SU(2)/H$ . Pode-se mostrar que o espaço  $SU(2)/H$  é isomorfo ao conjunto de matrizes de  $SU(2)$  do tipo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \beta \in \mathbb{C} \right\} \quad (1.7)$$

Como as matrizes acima são elementos de  $SU(2)$ , temos que a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\alpha^2 + |\beta|^2 = \alpha^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \quad (1.8)$$

O que nos mostra que o espaço  $SU(2)/H$ , tem a topologia de uma esfera  $S^2$ , i.e., o conjunto de vetores unitários  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . Isto nos permite

parametrizar os elementos do espaço quociente, e conseqüentemente o conjunto de estados coerentes, por coordenadas esféricas. Escolhendo:

$$\alpha = \cos(\theta/2), \quad \beta = \sin(\theta/2)e^{-i\phi} \quad (1.9)$$

com  $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ , os elementos  $g_n$  de  $SU(2)/H$  podem agora ser escritos por:

$$g_n = \exp \left[ i \frac{\theta}{2} (\sigma_1 \sin \phi + \sigma_2 \cos \phi) \right], \quad (1.10)$$

onde aqui  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as matrizes de Pauli nas direções  $x$  e  $y$ . Vemos aqui que  $g_n$  é uma rotação por um ângulo  $\theta$  em torno de um vetor  $\mathbf{m} = (\sin \phi, \cos \phi, 0)$ , que é perpendicular tanto ao vetor  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , quanto ao eixo de quantização  $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$ . De maneira geral, uma representação de spin  $S$  de  $g_n$ ,  $T^{(S)}$ , terá a forma:

$$T^{(S)}(g_n) \equiv D^{(S)}(\mathbf{n}) = e^{i\theta \mathbf{m} \cdot \mathbf{S}} = e^{i\theta (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}} \quad (1.11)$$

Aqui já definimos a notação usada por (FRADKIN, 2013) para a representação irreduzível que gera os estados coerentes. Usando agora o fato de que os estados coerentes são definidos unicamente por elementos de  $SU(2)/H$ , podemos finalmente escrever um estado coerente qualquer por:

$$|\mathbf{n}\rangle = D^{(S)}(\mathbf{n}) |S, S\rangle = e^{i\theta (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}} |S, S\rangle. \quad (1.12)$$

Podemos interpretar este estado como o estado mais “clássico” de spin, pois este minimiza a relação de incerteza para o spin, assim como o estado coerente do oscilador harmônico minimiza a incerteza entre  $x^2$  e  $p^2$  (PERELOMOV; PERELOMOV, 1986). Esta interpretação fica mais evidente se percebermos que  $\mathbf{n}$  é simplesmente a direção do spin  $\mathbf{S}$ .

Em termos dos estados  $|S, M\rangle$ , o estado  $|\mathbf{n}\rangle$  pode ser escrito como:

$$|\mathbf{n}\rangle = \sum_{M=-S}^S D_{MS}^{(S)}(\mathbf{n}) |S, M\rangle, \quad (1.13)$$

onde as matrizes  $D_{MS}^{(S)}(\mathbf{n})$  são as matrizes da representação de spin- $S$ . Explicitamente podemos escrever:

$$|\mathbf{n}\rangle = \sum_{M=-S}^S |S, M\rangle\langle S, M| D^{(S)}(\mathbf{n}) |S, S\rangle \quad (1.14)$$

$$= \sum_{M=-S}^S |S, M\rangle\langle S, M| e^{i\theta(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}} |S, S\rangle \quad (1.15)$$

$$= \sum_{M=-S}^S |S, M\rangle\langle S, M| e^{i\phi S_3} e^{i\theta S_2} |S, S\rangle. \quad (1.16)$$

Aqui usamos outra forma de se escrever o operador  $D^{(S)}(\mathbf{n})$ , dada pela parametrização por ângulos de Euler (KLAUDER; SKAGERSTAM, 1985). Efetuando-se a expansão da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é fácil mostrar que esta forma de  $D^{(S)}(\mathbf{n})$  é igual à definida em (1.11). Temos então:

$$|\mathbf{n}\rangle = \sum_{M=-S}^S e^{i\phi M} |S, M\rangle\langle S, M| e^{i\theta S_2} |S, S\rangle \quad (1.17)$$

$$= \sum_{M=-S}^S e^{i\phi M} d_{MS}^S(\theta) |S, M\rangle. \quad (1.18)$$

Usamos aqui que o elemento de matriz do operador  $e^{i\theta S_2}$  é dado pela chamada matriz de Wigner reduzida,  $d_{MM'}^S(\theta)$  (WIGNER; GRIFFIN, 1959), onde temos aqui o caso com  $S = M'$ . Escrevendo a forma explícita de  $d_{MS}^S(\theta)$ , temos então a forma da matriz  $D_{MS}^{(S)}(\mathbf{n})$ :

$$D_{MS}^{(S)}(\mathbf{n}) = e^{i\phi M} \sqrt{\frac{(2S)!}{(S-M)!(S+M)!}} \cos^{S+M}(\theta/2) \sin^{S-M}(\theta/2). \quad (1.19)$$

É importante notar que as o conjunto de operadores  $D^{(S)}(\mathbf{n})$  não formam um grupo, pois o produto de dois elementos deste conjunto é um terceiro a menos de uma fase:

$$D^{(S)}(\mathbf{n}_1)D^{(S)}(\mathbf{n}_2) = D^{(S)}(\mathbf{n}_3)e^{i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)S_3} \quad (1.20)$$

Em termos matemáticos, dizemos que o fator de fase é um *cociclo*, e que os operadores  $D^{(S)}(\mathbf{n})$  fornecem uma representação projetiva. O termo  $\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  é a área do triângulo geodésico formado pelos vetores  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ , como podemos ver na imagem abaixo:

É importante notar que existe uma ambiguidade na definição desta área, já que  $S^2$  é uma variedade sem bordo, e assim podemos definir  $\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  como

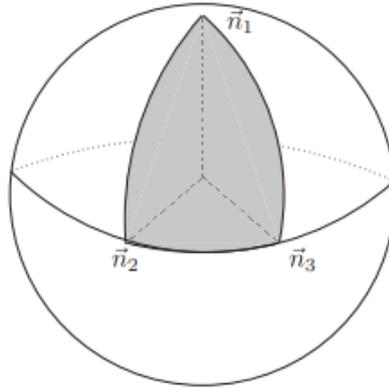


Figura 2 – Triângulo geodésico formado pelos vetores  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ .

a área de “dentro” (em cinza) ou a de “fora” (em branco). Porém, como as duas definições diferem apenas por  $4\pi$ , esta ambiguidade gera uma fase  $\exp(i4\pi M)$ , com  $M$  sendo o autovalor de  $S_3$ , que é inteiro ou meio-inteiro, e assim, o fator de fase é 1. Podemos também considerar esse resultado como um requisito para que  $M$  seja quantizado.

A sobreposição de dois estados de spin é dada por:

$$\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle = \langle 0 | D^{\dagger(S)}(\mathbf{n}_1) D^{(S)}(\mathbf{n}_2) | 0 \rangle \quad (1.21)$$

$$= \langle 0 | D^{(S)}(\mathbf{n}_0) e^{i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_0) S_z} | 0 \rangle \quad (1.22)$$

$$= e^{i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_0) S} \left( \frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \right)^S \quad (1.23)$$

Podemos usar também a forma matricial dos operadores (1.19) para mostrar o produto escalar acima. Embora não sejam ortogonais, como vimos agora a pouco, os estados coerentes de spin formam um conjunto completo (*overcomplete*), e a resolução da identidade em termos deste conjunto de estados é dada por:

$$\mathbb{1} = \int d\mu(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|. \quad (1.24)$$

A quantidade  $d\mu(\mathbf{n})$  é a medida invariante do espaço quociente  $SU(2)/H$ , dada explicitamente por

$$d\mu(\mathbf{n}) = \frac{(2S+1)}{4\pi} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) d^3\mathbf{n}. \quad (1.25)$$

Para encontrar a normalização  $\frac{(2S+1)}{4\pi}$ , usamos o lema de Schur, como descrito no Apêndice B

## 1.2 Função de Partição e Termo de Wess-Zumino

Agora estamos prontos para escrever a função de partição do sistema com o uso dos estados coerentes de spin. Denotando  $it = -\beta$ , isto é, realizando uma rotação de wick, a integral de trajetória se torna a função de partição do sistema:

$$Z = \text{Tr} e^{iHt} = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (1.26)$$

Com a hamiltoniana dada por  $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ . Vamos agora discretizar o tempo imaginário em intervalos de comprimento  $\delta\tau$ , onde  $\delta\tau N = \beta$ . Usando a fórmula de Trotter, podemos escrever:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \text{Tr} \left( e^{-\delta\tau H} \right)^N \quad (1.27)$$

Agora inserimos a resolução da identidade entre cada intervalo de tempo  $\tau_i$ , o que nos dá:

$$Z = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \left( \prod_{i=1}^N \int d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}(\tau_i)) \right) \left( \prod_{i=1}^N \langle \mathbf{n}(\tau_i) | e^{-\delta\tau H} | \mathbf{n}(\tau_{i+1}) \rangle \right) \quad (1.28)$$

$$\simeq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \left( \prod_{i=1}^N \int d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}(\tau_i)) \right) \left( \prod_{i=1}^N \langle \mathbf{n}(\tau_i) | \mathbf{n}(\tau_{i+1}) \rangle - \delta\tau \langle \mathbf{n}(\tau_i) | H | \mathbf{n}(\tau_{i+1}) \rangle \right) \quad (1.29)$$

onde  $\tau_i$  pertence ao intervalo  $[0, \beta]$  e usamos o fato de que  $\delta\tau$  é muito pequeno para poder eliminar os termos de segunda ordem na exponencial.

Como o primeiro termo é simplesmente a sobreposição de dois estados coerentes, temos

$$\langle \mathbf{n}(\tau_i) | \mathbf{n}(\tau_{i+1}) \rangle = e^{i\Phi(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{n}_0)S} \left( \frac{1 + \mathbf{n}(\tau_i) \cdot \mathbf{n}_2(\tau_{i+1})}{2} \right)^S. \quad (1.30)$$

E o segundo termo pode ser aproximado por:

$$\frac{\langle \mathbf{n}(\tau_i) | H | \mathbf{n}(\tau_{i+1}) \rangle}{\langle \mathbf{n}(\tau_i) | \mathbf{n}(\tau_{i+1}) \rangle} \simeq \langle \mathbf{n}(\tau_i) | H | \mathbf{n}(\tau_i) \rangle + O(\delta\tau) \quad (1.31)$$

Usando estes resultados, podemos reescrever a função de partição como:

$$Z \simeq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \left( \prod_{i=1}^N \int d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}(\tau_i)) \right) \times \left( \prod_{i=1}^N e^{i\Phi(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{n}_0)S} \left[ \frac{1 + \mathbf{n}(\tau_i) \cdot \mathbf{n}_2(\tau_{i+1})}{2} \right]^S \left[ 1 - \delta\tau \langle \mathbf{n}(\tau_i) | H | \mathbf{n}(\tau_i) \rangle \right] \right). \quad (1.32)$$

Com esta expressão em mãos, podemos definir a ação euclideana, ainda discretizada, por

$$\begin{aligned}
 -S_E[\mathbf{n}] = & iS \sum_{i=1}^N \Phi(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{n}_0) + \\
 & + S \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{1 + \mathbf{n}(\tau_i) \cdot \mathbf{n}_2(\tau_{i+1})}{2} \right) - \delta\tau \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{n}(\tau_i) | H | \mathbf{n}(\tau_i) \rangle
 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Onde último termo em (1.32) foi reescrito como uma exponencial.

Com a ação euclideana acima, podemos escrever a função de partição do sistema na forma de integração funcional, familiar à expressão para o gerador funcional em teoria de campos:

$$Z = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \int \mathcal{D}(\mathbf{n}) e^{-S_E[\mathbf{n}]}. \quad (1.34)$$

Notemos que esta é apenas uma expressão formal, onde mantemos os limites pois a ação acima ainda não está escrita de forma contínua, e a medida de integração é dada por:

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}) \equiv \prod_{i=1}^N d\mu(\mathbf{n}(\tau_i)).$$

O primeiro termo da ação é puramente geométrico, e é facilmente interpretado como a soma das áreas dos  $N$  triângulos geométricos formados pelos vetores  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_{i+1}$  e  $\mathbf{n}_0$ , que no limite para o tempo contínuo se torna uma superfície que contém o pólo norte da esfera (o vetor  $\mathbf{n}_0$ ) e cujo bordo é uma curva orientada  $\Gamma = \{\mathbf{n}(\tau)\}$ , que nos dá a “história” do spin. A superfície com bordo  $\Gamma$  que contém  $\mathbf{n}_0$  será denotada por  $\Sigma^+$  e a outra parte da esfera é dada por  $\Sigma^-$ , como na figura 3:

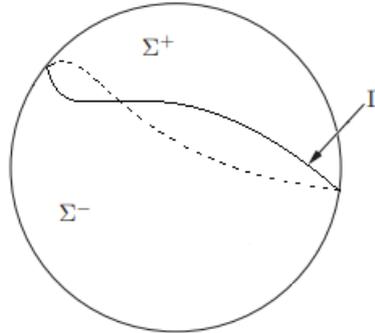


Figura 3 – A curva  $\Gamma$  e as superfícies  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$

Este termo então deve ser escrito como a área da região  $\Sigma^+$ . Denotando  $n(\tau, s)$ , com  $s \in [0, 1]$ , como uma extensão arbitrária de  $n(\tau)$  da curva  $\Gamma$  para o

interior de  $\Sigma^+$ , tal que:

$$\mathbf{n}(\tau, 0) = \mathbf{n}(\tau) \quad (1.35)$$

$$\mathbf{n}(\tau, 1) = \mathbf{n}_0 \quad (1.36)$$

$$\mathbf{n}(\tau + \beta, s) = \mathbf{n}(\tau, s) \quad (1.37)$$

A área de  $\Sigma^+$  pode ser então escrita de maneira geral como:

$$\mathcal{A}(\Sigma^+) = \int_0^1 ds \int_0^\beta d\tau \mathbf{n}(\tau, s) \cdot (\partial_\tau \mathbf{n}(\tau, s) \times \partial_s \mathbf{n}(\tau, s)) \equiv S_{WZ}[\mathbf{n}] \quad (1.38)$$

Esta é a chamada *Ação de Wess-Zumino*, que, como vimos, tem caráter puramente topológico. Este termo também é chamado de *Fase de Berry*.

Tomando o limite formal para o tempo contínuo nos outros termos de (A.33), é fácil mostrar que a ação euclideana toma a forma:

$$\mathcal{S}_E[\mathbf{n}] = -iS\mathcal{S}_{WS} + \frac{S\delta\tau}{4} \int_0^\beta d\tau (\partial_\tau \mathbf{n}(\tau))^2 + \mu S \int_0^\beta d\tau \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(\tau) \quad (1.39)$$

Notemos que o segundo termo ainda não foi descartado no limite  $\delta\tau \rightarrow 0$ . Isso pois podemos interpretar a ação acima como exatamente a ação de uma partícula com uma massa  $S\delta\tau/2$  vinculada a uma esfera, com um monopolo magnético no centro, cujo potencial corresponde exatamente à ação de Wess-Zumino.

### 1.3 Ação para um Conjunto de Spins

Com os resultados obtidos na seção anterior, é simples realizar uma generalização para um sistema (unidimensional) de muitos Spins.

Consideraremos então uma rede arbitrária em uma dimensão, com  $N$  sítios, e um spin em cada sítio. O Espaço de Hilbert agora será um produto tensorial dos espaços  $\mathcal{H}$  descritos na seção 1.1:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j^{(S)}, \quad \dim(\mathcal{H}) = (2S + 1)^N$$

O processo para escrever a função de partição do sistema é efetivamente o mesmo que foi descrito na seção anterior, e a ação euclideana do sistema toma a seguinte forma:

$$\mathcal{S}_E[\mathbf{n}] = -iS \sum_{\mathbf{r}=1}^N \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] + \frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}=1}^N (\partial_\tau \mathbf{n}(\mathbf{r}, \tau))^2 + \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}=1}^N \langle \mathbf{n}(\mathbf{r}, \tau) | \hat{H} | \mathbf{n}(\mathbf{r}, \tau) \rangle \quad (1.40)$$

Onde o vetor  $\mathbf{r}$  é a posição de  $\mathbf{n}$  na rede. O segundo termo, como discutido no fim da seção anterior, serve apenas para realizarmos uma analogia desta ação com o caso de uma partícula de massa  $m$  vinculada a uma esfera com um monopolo no centro. A partir de agora não iremos mais escrever este termo, dado que  $m \rightarrow 0$ .

A Hamiltoniana ainda não foi especificada apenas por fins de generalidade. Podemos escolher a seguinte Hamiltoniana para o sistema:

$$\hat{H} = \sum_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \quad (1.41)$$

Onde  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é um par de pontos arbitrários na rede, e  $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  é uma constante de acoplamento da interação entre dois spins  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{S}(\mathbf{r}')$ . Escolhemos esta forma para a hamiltoniana pois nos próximos capítulos vamos focar a nossa análise no chamado Modelo de Heisenberg, para descrever o ferromagnetismo e o antiferromagnetismo a nível quântico.

Com esta escolha de  $\hat{H}$ , e já efetuando uma rotação de Wick no sistema, a ação de um sistema de muitos Spins é:

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = S \sum_{\mathbf{r}=1}^N \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] - \int_0^T dt \sum_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \langle \mathbf{n}(\mathbf{r}, \tau) | \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') | \mathbf{n}(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (1.42)$$

Usando o fato de que o valor esperado do operador de spin  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  é  $S\mathbf{n}(\mathbf{r})$ , temos:

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = S \sum_{\mathbf{r}=1}^N \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] - S^2 \int_0^T dt \sum_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}', t) \quad (1.43)$$

Vemos que a ação efetiva para um conjunto de  $N$  spins se escala com o valor de  $S$ , e assim, a integral de trajetória

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{n} e^{i\mathcal{S}_M[\mathbf{n}]}$$

é dominada pelos pontos estacionários da ação  $\mathcal{S}_M[\mathbf{n}]$  quando  $S \rightarrow \infty$ , isto é, no limite semi-clássico, e as correções no limite para  $S$  grande podem ser arranjadas em potências de  $1/S$  [Ref]. Este processo é semelhante ao que ocorre quando tomamos o limite para  $\hbar$  tendendo a zero na integral de trajetória para um sistema quântico sem spin, como descrito no Apêndice A



## 2 Magnetismo Quântico e o Modelo Sigma Não-Linear

Neste Capítulo iremos aplicar os resultados obtidos com a integral de caminho para vários spins no modelo de Heisenberg para Ferromagnetos e Antiferromagnetos, e estudar algumas propriedades destes sistemas. Assim, vamos derivar uma teoria de campos efetiva para descrever o (anti)ferromagnetismo em baixas energias. Este será o Modelo Sigma Não-Linear com um termo topológico, remanescente do termo de Wess-Zumino encontrado no capítulo anterior.

### 2.1 Ferromagnetos Quânticos

Vamos começar com um sistema ferromagnético 1D, descrito pela Hamiltoniana da equação (1.41), onde agora o termo  $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ , que descreve a interação de dois Spins na cadeia, é uma constante  $-|J|$ , que se restringe aos vizinhos mais próximos. Esta é a Hamiltoniana do modelo de Heisenberg para um ferromagneto (FRADKIN, 2013):

$$\hat{H} = -|J| \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \quad (2.1)$$

Para um sistema descrito por esta hamiltoniana, o estado com todos os spins alinhados na mesma direção, isto é, com

$$\prod_i |S, S\rangle_i = |0\rangle$$

é o ground state exato, e pode ser representado de maneira pictórica como na imagem abaixo:

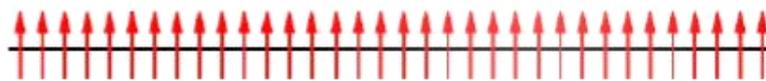


Figura 4 – Ground State do Ferromagneto de Heisenberg

Considerando esta hamiltoniana, a ação para a cadeia de spins toma a forma mais simplificada

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = S \sum_{\mathbf{r}=1}^N \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] + S^2 |J| \int_0^T dt \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}', t) \quad (2.2)$$

A princípio poderíamos usar esta forma da ação, mas vamos usar o vínculo  $\mathbf{n}^2 = 1$  para escrever:

$$(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n}(\mathbf{r}', t))^2 = \mathbf{n}^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{n}^2(\mathbf{r}', t) - 2\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}', t) \quad (2.3)$$

$$= 2 - 2\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}', t) \quad (2.4)$$

Portanto, a menos uma constante aditiva, a ação é reescrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = S \sum_{\mathbf{r}=1}^N \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] - \frac{S^2|J|}{2} \int_0^T dt \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n}(\mathbf{r}', t))^2 \quad (2.5)$$

Esta forma a nos será extremamente conveniente para cálculos futuros.

Vamos agora deduzir qual é a teoria efetiva, contínua, para o ferromagnetismo quântico 1D no limite de baixas energias, isto é, para comprimentos de onda grandes. Este é o limite onde o cutoff espacial, ou a constante da rede, que denominaremos por  $a_0$ , se torna infinitesimal.

Este é um caso extremamente simples pois no seu ground state, o ferromagneto tem os spins alinhados, como visto na figura 4, o que nos permite definir o vetor  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  como uma função contínua de  $\mathbf{x}$ , i.e.,  $\mathbf{n}$  agora será um campo.

Usando então o fato de que o cutoff espacial é infinitesimal na escala que nos interessa, e que agora  $\mathbf{n}$  é uma função contínua da posição, com  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  sendo vizinhos imediatos na rede, podemos reescrever o termo dinâmico da ação como:

$$(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n}(\mathbf{r}', t))^2 \simeq a_0^2 (\partial_x \mathbf{n}(x, t))^2 \quad (2.6)$$

Com este resultado, podemos finalmente escrever a ação efetiva para um ferromagneto quântico unidimensional no limite para baixas energias:

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = \frac{S}{a_0} \int dx \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}] - \frac{S^2|J|a_0}{2} \int dx \int_0^T dt (\partial_x \mathbf{n}(x, t))^2 \quad (2.7)$$

Ao contrário do que foi mencionado na introdução deste capítulo, não chegamos no modelo sigma não-linear. De fato, como veremos na próxima seção, apenas o *antiferromagnetismo* é descrito, neste limite, pelo modelo sigma não linear (NLSM). O que faz com que a ação na equação (2.5) não seja a do NLSM é a falta de uma derivada temporal quadrática, como veremos mais adiante. Isto tem implicações profundas no que tange ao espectro de excitações da teoria.

As excitações de um magneto quântico são geralmente descritas pela chamada teoria de *Spin-Waves* (Ondas de Spin) (AUERBACH, 1998), onde é bem conhecido o

fato as excitações de um ferromagneto obedecem à uma relação de dispersão quadrática (BLOCH, 1930), o que nos faz esperar que tenhamos duas vezes mais derivadas espaciais que temporais na ação da teoria.

Vamos então verificar este fato. Para tal, usaremos o vínculo local  $\mathbf{n}^2(x, t) - 1 = 0$ . Este vínculo é introduzido na ação por meio de um multiplicador de lagrange  $\lambda(x, t)$ , nos dando um termo extra na ação:

$$\mathcal{S}_{extra}[\mathbf{n}, \lambda] = \frac{1}{2} \int dx \int_0^T dt \lambda(x, t) (\mathbf{n}^2(x, t) - 1) \quad (2.8)$$

De tal maneira que a ação total do sistema é dada por:

$$\mathcal{S}_T[\mathbf{n}] = \mathcal{S}_M[\mathbf{n}] + \mathcal{S}_{extra}[\mathbf{n}, \lambda] \quad (2.9)$$

Vamos deduzir as equações de movimento para esta ação. A variação do termo de Wess-Zumino é dada por:

$$\delta\mathcal{S}_{WZ} = \int_0^T dt \delta\mathbf{n} \cdot (\partial_t \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \quad (2.10)$$

A variação do termo dinâmico da ação, o qual chamaremos de  $\mathcal{S}_0$ , é calculada como:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_0 &= -\frac{|J|S^2a_0}{2} \int dx \int_0^T dt \delta (\partial_x \mathbf{n}(x, t))^2 \\ &= -\frac{|J|S^2a_0}{2} \int dx \int_0^T dt (\delta\mathbf{n} \cdot \partial_x^2 \mathbf{n} + \partial_x (\delta\mathbf{n} \cdot \partial_x \mathbf{n})) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Eliminando o termo de derivada total, temos:

$$\delta\mathcal{S}_0 = -\frac{|J|S^2a_0}{2} \int dx \int_0^T dt \delta\mathbf{n} \cdot \partial_x^2 \mathbf{n} \quad (2.12)$$

Por fim, a variação do termo extra da ação é dada por:

$$\delta\mathcal{S}_{extra}[\mathbf{n}, \lambda] = \frac{1}{2} \int dx \int_0^T dt \lambda(x, t) [(\mathbf{n}(x, t) + \delta\mathbf{n}(x, t))^2 - 1] - \mathcal{S}_{extra}[\mathbf{n}, \lambda] \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{2} \int dx \int_0^T dt \lambda [(\mathbf{n}^2(x, t) - 1) + 2\delta\mathbf{n}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x, t)] - \mathcal{S}_{extra}[\mathbf{n}, \lambda] \quad (2.14)$$

$$= \int dx \int_0^T dt \delta\mathbf{n}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x, t) \lambda(x, t) \quad (2.15)$$

Assim, a variação da ação total é dada por:

$$\delta\mathcal{S}_T[\mathbf{n}] = \int dx \int_0^T dt \delta\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{n} + |J|S^2a_0 \partial_x^2 \mathbf{n} + \mathbf{n} \lambda(x, t)] \quad (2.16)$$

E com este resultado, podemos finalmente escrever a equação de movimento para um ferromagneto quântico:

$$\frac{S}{a_0} \mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n} = -|J|S^2 a_0 \partial_x^2 \mathbf{n} \quad (2.17)$$

Tomamos agora o produto escalar desta equação com o vetor  $\mathbf{n}(x, t)$ , e usando o vínculo  $\mathbf{n}^2(x, t) = 1$ , é possível encontrar a expressão para o multiplicador de lagrange:

$$\lambda = -|J|S^2 a_0 \mathbf{n} \cdot \partial_x^2 \mathbf{n} \quad (2.18)$$

Agora que encontramos o nosso multiplicador de lagrange, iremos substituí-lo na equação de movimento:

$$S \mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{n} + |J|S^2 a_0 \left[ \partial_x^2 - (\mathbf{n} \cdot \partial_x^2 \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} = 0 \quad (2.19)$$

Usando o produto triplo

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \partial_x^2 \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \partial_x^2 \mathbf{n}) \mathbf{n} - \partial_x^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \quad (2.20)$$

$$= \left[ \mathbf{n} \cdot \partial_x^2 - \partial_x^2 \right] \mathbf{n}, \quad (2.21)$$

temos:

$$\mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n} - |J|S a_0^2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \partial_x^2 \mathbf{n}) = 0 \quad (2.22)$$

$$\implies \partial_x \mathbf{n} = |J|S a_0^2 \mathbf{n} \times \partial_x^2 \mathbf{n} \quad (2.23)$$

Esta é a equação de Landau-Lifshitz, que é uma equação diferencial não linear com derivadas temporais de primeira ordem e espaciais de segunda ordem, o que nos leva a uma relação de dispersão quadrática! Esta é uma equação que em geral descreve o movimento de precessão de um spin em um sólido[L&L book 9 cap 7], com velocidade de precessão dada por:

$$\boldsymbol{\Omega} = -|J|S a_0^2 \partial_x^2 \mathbf{n}$$

Para escrever as relações de dispersão do ferromagneto, podemos tomar o regime linear da teoria. Parametrizando o vetor  $\mathbf{n}$  como  $\mathbf{n} = (\sigma, \pi_1, \pi_2)$ , satisfazendo o vínculo  $\sigma^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2 = 1$ . Com esta forma para  $\mathbf{n}$ , as equações de Landau-Lifshitz linearizadas tomam a seguinte forma:

$$\partial_t \pi_1 \approx -|J|S a_0^2 \partial_x^2 \pi_2; \quad (2.24)$$

$$\partial_t \pi_2 \approx -|J|S a_0^2 \partial_x^2 \pi_1 \quad (2.25)$$

A partir destas equações, é fácil ver que a relação de dispersão é dada por

$$|p_0| \approx |J|S a_0^2 |\mathbf{p}|^2, \quad (2.26)$$

que é exatamente o que queríamos mostrar, uma relação de dispersão quadrática, ou em outras palavras, que a frequência das excitações de baixas energias para um ferromagneto são proporcionais ao momento ao quadrado. Esta é a chamada de *Lei de Bloch* (BLOCH, 1930). Isto é um indício da consistência da teoria efetiva que construímos, já que a mesma nos retorna um resultado já bem conhecido na teoria do ferromagnetismo.

Agora que já temos um entendimento razoável da teoria de campos que descreve ferromagnetismo a baixas energias, vamos nos voltar para a sua contraparte, o *antiferromagnetismo*, que será bem menos trivial devido às características do seu ground state, e isto nos levará a resultados bem mais interessantes (e topológicos!) que os discutidos aqui.

## 2.2 Antiferromagnetos Quânticos

Consideraremos agora o Modelo de Heisenberg para um antiferromagneto, onde na hamiltoniana em (1.41), o termo que descreve a interação  $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  é dado por uma constante  $J > 0$ , que se restringe aos vizinhos mais próximos, assim como no caso ferromagnético. A hamiltoniana do antiferromagneto em  $d$  dimensões é então dada por:

$$\hat{H} = J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \quad (2.27)$$

Classicamente, i.e., no limite para  $S$  grande, tais tipos de modelos tendem a minimizar a sua energia fazendo com que os vizinhos mais próximos tendam a ficar antiparalelos, como no caso unidimensional descrito na imagem abaixo:



Figura 5 – Estado de Néel

Este é o chamado estado de Néel. Aqui escolheremos uma rede bipartida, isto é, uma rede que se divide em outras duas subredes equivalentes intercaladas, de maneira que cada sítio tenha seus vizinhos mais próximos pertencendo à outra subrede. A condição para que tenhamos o ground state como um estado de Néel é

imediatamente satisfeita em uma rede bipartida. Em  $d > 1 + 1$  efeitos interessantes surgem ao considerarmos uma rede não bipartida (ou então se considerarmos interações além dos vizinhos mais próximos em qualquer dimensão.), como pode ser visto em (SACHDEV, 2011).

Com a Hamiltoniana do sistema dada, escolhemos uma rede bipartida unidimensional, isto é, uma cadeia, com um número par de sítios  $N$  ocupados por spins- $S$ . Cada sítio é rotulado por um número inteiro que denotaremos por  $j = 1, \dots, N$ . Podemos então escrever a ação, com o tempo real, de uma cadeia antiferromagnética como:

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = S \sum_{j=1}^N \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(j)] - S^2 J \int_0^T dt \sum_{j=1} \mathbf{n}(j, t) \cdot \mathbf{n}(j+1, t). \quad (2.28)$$

Como esperamos estar em torno do estado de Néel, imporemos a seguinte condição para o vetor  $\mathbf{n}(j)$ :

$$\mathbf{n}(j) \longrightarrow (-1)^j \mathbf{n}(j) \quad (2.29)$$

O termo de interação entre dois spins na ação é reescrito da seguinte maneira:

$$\mathcal{S}_0[\mathbf{n}] = -S^2 J \int_0^T dt \sum_{j=1} (-1)^{2j+1} \mathbf{n}(j, t) \cdot \mathbf{n}(j+1, t) \quad (2.30)$$

Usando agora o vínculo  $\mathbf{n}^2(j) = 1$ , e o fato de que  $(-1)^{2j+1} = -1$ , podemos reescrever este termo da ação a menos de uma constante:

$$\mathcal{S}_0[\mathbf{n}] = -\frac{S^2 |J|}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1} (\mathbf{n}(j, t) - \mathbf{n}(j+1, t))^2 \quad (2.31)$$

Vemos aqui que este é exatamente o mesmo termo que encontramos para um ferromagneto unidimensional! Por definição é fácil ver que o termo de Wess-Zumino é ímpar, e assim, após impormos a condição (2.29), a ação fica da forma

$$\mathcal{S}_M[\mathbf{n}] = S \sum_{j=1}^N (-1)^j \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(j)] - \frac{S^2 |J|}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1} (\mathbf{n}(j, t) - \mathbf{n}(j+1, t))^2 \quad (2.32)$$

Desta maneira, concluímos que o único termo que distingue a ação de um ferromagneto para um antiferromagneto é o termo de Wess-Zumino, um efeito puramente quântico.

Agora que construímos a ação para um antiferromagneto de Heisenberg unidimensional, vamos deduzir a teoria efetiva que descreve este modelo no limite de baixas energias, ou, de comprimentos de onda grandes.

Para isso vamos dividir o vetor  $\mathbf{n}$  em duas componentes, uma parte que varia pouco, denotada por  $\mathbf{m}(j)$ , que pode ser interpretada como o parâmetro de ordem, e uma parte pequena que contabiliza as flutuações mais altas, denotada por  $\mathbf{l}(j)$  (AFFLECK, 1988). Escrevemos então o vetor  $\mathbf{n}$  como:

$$\mathbf{n}(j) = \mathbf{m}(j) + (-1)^j a_0 \mathbf{l}(j), \quad (2.33)$$

onde  $a_0$  é o cutoff espacial. As quantidades  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{l}$  são agora funções contínuas, mas por ora manteremos a notação  $\mathbf{m}(j)$  e  $\mathbf{l}(j)$ . Ainda devemos ter o vínculo local  $\mathbf{n}(j)^2 = 1$ , que agora é dado por:

$$\left(\mathbf{m}(j) + (-1)^j a_0 \mathbf{l}(j)\right)^2 = \mathbf{m}^2(j) + 2(-1)^j a_0 \mathbf{m}(j) \cdot \mathbf{l}(j) + \mathcal{O}(a_0^2) \quad (2.34)$$

Onde são descartadas contribuições de ordens superiores de  $a_0$ . Impondo  $\mathbf{m}^2(j) = 1$  e  $\mathbf{m}(j) \cdot \mathbf{l}(j) = 0$ , retornamos ao vínculo para  $\mathbf{n}(j)$ .

Vamos agora ver o efeito desta decomposição na ação. Começaremos com o termo que contém a ação de Wess-Zumino, que pode ser dividido em uma parte par e uma ímpar:

$$S \sum_{j=1}^N (-1)^j \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] = S \sum_{k=1}^{N/2} [\mathcal{S}_{WZ}[\mathbf{n}(2k)] - \mathcal{S}_{WZ}[\mathbf{n}(2k-1)]] \quad (2.35)$$

Aproximadamente, esta é uma variação da ação  $\mathcal{S}_{WZ}$ , e usando (2.10), temos:

$$S \sum_{k=1}^{N/2} [\mathcal{S}_{WZ}[\mathbf{n}(2k)] - \mathcal{S}_{WZ}[\mathbf{n}(2k-1)]] \approx S \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^T dt \delta \mathbf{n}(2k) \cdot (\mathbf{n}(2k) \times \partial_t \mathbf{n}(2k)) \quad (2.36)$$

Aqui a variação de  $\mathbf{n}(2k)$  é dada explicitamente, usando a decomposição (2.33), por:

$$\delta \mathbf{n}(2k) = \mathbf{n}(2k) - \mathbf{n}(2k-1) \quad (2.37)$$

$$= \mathbf{m}(2k) - \mathbf{m}(2k-1) + a_0 (\mathbf{l}(2k) + \mathbf{l}(2k-1)) \quad (2.38)$$

$$= a_0 (\partial_x \mathbf{m}(2k) + 2\mathbf{l}(2k)) + \mathcal{O}(a_0^2) \quad (2.39)$$

Usando este resultado, a ação de Wess-Zumino é aproximadamente

$$S \sum_{j=1}^N (-1)^j \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] \approx S \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^T dt (a_0 \partial \mathbf{m}(2k) + 2a_0 \mathbf{l}(2k)) \cdot (\mathbf{m}(2k) \times \partial_t \mathbf{m}(2k)) + \mathcal{O}(a_0^2) \quad (2.40)$$

Tomando agora o fato de que  $a_0$  é infinitesimal, podemos reescrever a soma em  $k$  como uma integral, obtendo a seguinte expressão para o termo topológico:

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} S \sum_{j=1}^N (-1)^j \mathcal{S}_{WS}[\mathbf{n}(\mathbf{r})] \approx \frac{S}{2} \int d^2x \mathbf{m} \cdot (\partial_0 \mathbf{m} \times \partial_1 \mathbf{m}) + S \int d^2x \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \partial_0 \mathbf{m}), \quad (2.41)$$

onde aqui mudamos a notação para as coordenadas temporais e espaciais,  $t \rightarrow x_0$  e  $x \rightarrow x_1$ , e escrevemos a integral dupla no tempo e no espaço simplesmente como uma integral em  $d^2x$ . A partir de agora usaremos esta notação, que remete à notação usada em teoria de campos em física de altas energias. Implicitamente, temos que  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{l}$  são funções de  $x = (x_0, x_1)$ .

Agora que temos a nova forma do termo de Wess-Zumino, vamos reescrever o termo de interação da ação. Dada a decomposição de  $\mathbf{n}$ , reescrevemos o integrando como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}(j, t) - \mathbf{n}(j+1, t))^2 &= [\mathbf{m}(j) - \mathbf{m}(j+1) + (-1)^j a_0 \mathbf{l}(j) - (-1)^{j+1} a_0 \mathbf{l}(j+1)] \\ &\simeq [a_0 \partial_1 \mathbf{m} + a_0 (-1)^j 2\mathbf{l}]^2 \\ &\simeq a_0^2 [(\partial_1 \mathbf{m})^2 + 4\mathbf{l}^2 + 4(-1)^j \partial_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}] \\ &\simeq a_0^2 [(\partial_1 \mathbf{m})^2 + 4\mathbf{l}^2], \end{aligned} \quad (2.42)$$

Tomando o limite para  $a_0$  tendendo a zero, as somas são reescritas como integrais, e finalmente a ação é reescrita da seguinte maneira:

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} \frac{JS^2}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^T dt (\mathbf{n}(j, t) - \mathbf{n}(j+1, t)) \mathcal{S}_0[\mathbf{n}] \approx \frac{a_0 JS^2}{2} \int d^2x ((\partial_1 \mathbf{m})^2 + 4\mathbf{l}^2). \quad (2.43)$$

Com estes resultados, temos finalmente qual é a lagrangiana efetiva que descreve o antiferromagnetismo 1D a baixas energias:

$$\mathcal{L}_M(\mathbf{m}, \mathbf{l}) = -2a_0 JS^2 \mathbf{l}^2 + S \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \partial_0 \mathbf{m}) - \frac{a_0 JS^2}{2} (\partial_1 \mathbf{m})^2 + \frac{S}{2} \mathbf{m} \cdot (\partial_0 \mathbf{m} \times \partial_1 \mathbf{m}) \quad (2.44)$$

E assim, a o gerador funcional (ou a função de partição com temperatura imaginária) é simplesmente

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{m}\mathcal{D}\mathbf{l} e^{i \int d^2x \mathcal{L}_M(\mathbf{m}, \mathbf{l})}. \quad (2.45)$$

Embora isto pareça o suficiente, não podemos parar a nossa análise por aqui. Isso pois devemos eliminar a componente do campo que gera as flutuações que variam mais rápido. Também podemos pensar que como estamos lidando com uma teoria efetiva em baixas energias, a parte do campo  $\mathbf{n}$  que é proporcional ao cutoff espacial deve ser integrada, nos deixando apenas a componete  $\mathbf{m}$ . De fato, podemos dividir a integração funcional em duas partes, onde uma é uma integral gaussiana com um termo linear, que só depende de  $\mathbf{l}$ , e pode ser integrada explicitamente. Desta maneira, escrevemos:

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{m} \exp \left[ i \int d^2x \left( -\frac{a_0 JS^2}{2} (\partial_1 \mathbf{m})^2 + \frac{S}{2} \mathbf{m} \cdot (\partial_0 \mathbf{m} \times \partial_1 \mathbf{m}) \right) \right] \times \quad (2.46)$$

$$\times \int \mathcal{D}\mathbf{l} \exp \left[ i \int d^2x \left( -2a_0 JS^2 \mathbf{l}^2 + S \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \partial_0 \mathbf{m}) \right) \right] \quad (2.47)$$

Agora vamos realizar a integração funcional no campo  $\mathbf{l}$ . Para isso reescrevemos a integral de trajetória que depende de  $\mathbf{l}$  de maneira discretizada. Denotaremos o tempo discretizado pelo índice  $k$  e a coordenada espacial por  $j$ .

$$Z_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N d\mathbf{l}_{j,k} \exp \left\{ i \sum_j a_0 \sum_k \delta x_0 \left[ S(\mathbf{m}_{j,k} \times \partial_0 \mathbf{m}_{j,k}) \cdot \mathbf{l}_{j,k} - 2a_0 JS^2 \mathbf{l}_{j,k}^2 \right] \right\} \quad (2.48)$$

Para simplificar a integração, vamos renomear algumas variáveis:

$$\frac{\alpha}{2} = 2a_0 JS^2 \quad (2.49)$$

$$\mathbf{A}_{j,k} = S(\mathbf{m}_{j,k} \times \partial_0 \mathbf{m}_{j,k}) \quad (2.50)$$

Podemos reescrever as exponencias com somatórios como um produto de exponencias, já que estamos apenas lidando com quantidades clássicas no expoente. Assim, usando este fato e a as equações (2.49)-(2.50), temos a seguinte integral:

$$Z_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \int d\mathbf{l}_{j,k} \exp \left\{ \frac{-i\alpha a_0 \delta x_0}{2} \mathbf{l}_{j,k}^2 + i a_0 \delta x_0 \mathbf{A}_{j,k} \cdot \mathbf{l}_{j,k} \right\} \quad (2.51)$$

Podemos agora calcular cada integral individualmente, para depois realizar o produto. Em geral, a integral que encontramos é dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ia}{2}x^2 + iJx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{ia}} e^{\frac{iJ^2}{2a}} \quad (2.52)$$

Usando este resultado, cada integral em  $\mathbf{l}$  será dada por:

$$\int d\mathbf{l} \exp \left[ \frac{-i\alpha a_0 \delta x_0}{2} \mathbf{l}^2 + ia_0 \delta x_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{l} \right] = \left( \frac{2\pi}{i\alpha a_0 \delta x_0} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{ia_0^2 \delta x_0 S^2 \mathbf{A}^2}{2\alpha a_0} \right] \quad (2.53)$$

Retornando às variáveis originais, este resultado é reescrito como:

$$\left( \frac{2\pi}{4ia_0^2 JS^2 \delta x_0} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{ia_0 \delta x_0 (\mathbf{m}_{j,k} \times \partial_0 \mathbf{m}_{j,k})^2}{8Ja_0} \right] \quad (2.54)$$

Este resultado pode ser simplificado ainda mais, notando que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \times \partial_0 \mathbf{m})^2 &= (\mathbf{m}^2 (\partial_0 \mathbf{m})^2 + (\mathbf{m} \cdot \partial_0 \mathbf{m})^2) \\ &= (\partial_0 \mathbf{m})^2 \end{aligned}$$

onde usamos o vínculo  $\mathbf{m}^2 = 1$ , e o fato de que  $\mathbf{m}$  e a sua derivada são ortogonais. Finalmente, podemos então escrever o resultado da integração funcional, onde já desconsideraremos a constante que multiplica a exponencial em (2.54).

$$Z_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \exp \left[ \frac{ia_0 \delta x_0 (\partial_0 \mathbf{m}_{j,k})^2}{8Ja_0} \right] \quad (2.55)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[ \sum_{j,k} \frac{ia_0 \delta x_0 (\partial_0 \mathbf{m}_{j,k})^2}{8Ja_0} \right] \quad (2.56)$$

Tomando o limite para o contínuo, é fácil ver que teremos uma integral no tempo e no espaço (por isso mantivemos a constante  $a_0$ !). E por fim a função de partição em  $\mathbf{l}$  é dada por:

$$Z_1 = \exp \left[ \frac{i}{8Ja_0} \int d^2x (\partial_0 \mathbf{m})^2 \right] \quad (2.57)$$

Agora que eliminamos as flutuações mais rápidas, temos a função de partição do sistema escrita como um funcional que depende apenas do campo  $\mathbf{m}$ :

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{m} \exp \left[ i \int d^2x \left( \frac{1}{8Ja_0} (\partial_0 \mathbf{m})^2 - \frac{a_0 JS^2}{2} (\partial_1 \mathbf{m})^2 + \frac{S}{2} \mathbf{m} \cdot (\partial_0 \mathbf{m} \times \partial_1 \mathbf{m}) \right) \right] \quad (2.58)$$

A lagrangiana encontrada na integral de trajetória acima pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}_M(\mathbf{m}) = \frac{1}{2g} \left( \frac{1}{v_s} (\partial_0 \mathbf{m})^2 - v_s (\partial_1 \mathbf{m})^2 \right) + \frac{\theta}{8\pi} \mathbf{m} \cdot (\partial_0 \mathbf{m} \times \partial_1 \mathbf{m}), \quad (2.59)$$

onde definimos os seguintes parâmetros:

$$g = \frac{2}{S} \quad (2.60)$$

$$v_s = 2a_0 JS \quad (2.61)$$

$$\theta = 2\pi S \quad (2.62)$$

Esta é a lagrangiana do *Modelo Sigma Não-Linear*, com um termo topológico, remanescente do termo de Wess-Zumino. Normalmente este é chamado de termo- $\theta$ . Aqui  $g$  é a constante de acoplamento da teoria, e  $v_s$  é a velocidade de propagação da excitação, ou da onda de spin, na cadeia.  $\theta$  pode ser interpretado como a constante de acoplamento do termo topológico.

Pode-se ainda escrever o termo topológico da lagrangiana de maneira mais geral,

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}), \quad (2.63)$$

com  $\varepsilon^{\mu\nu}$  sendo o pseudo-tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita. Esta é uma forma mais utilizada na literatura, e iremos escrever o termo topológico desta maneira daqui em diante.

Em palavras gerais, obtivemos aqui que a teoria efetiva para flutuações de baixas frequências, e longos comprimentos de onda, em torno de um estado com ordenamento de Néel em curtas distâncias (*short-range order*), é o Modelo Sigma Não-Linear, ou simplesmente NLSM, com um termo topológico. Os próximos capítulos serão focados em investigar as propriedades desta teoria de campos, assim como qual é o papel deste termo topológico na mesma.



## 3 Termos Topológicos

Neste capítulo iremos investigar qual a natureza do termo dos termos topológicos que encontramos até agora, começando com um tratamento relativamente geral de teorias de campos usando a teoria de homotopias. Com isso poderemos mostrar que a função de partição que pode ser particionada em diferentes classes de equivalência, que são rotuladas por números inteiros, chamados de *Cargas Topológicas*, ou *Winding Numbers*. Trataremos aqui da teoria de homotopias de maneira relativamente informal e intuitiva, pois esta é uma vasta área e não teremos tempo de explorá-la com mais rigor. Iremos referenciar as fontes com as provas e definições formais ao longo do capítulo.

### 3.1 Homotopias e Teorias de Campo

Começaremos aqui tratando de teorias de campos em geral, como visto em (ALTLAND A.; SIMONS, 2006), pois muitas das ideias desenvolvidas aqui não são exclusivas do nosso caso de estudo, que será devidamente analisado em seções posteriores.

Assim, como estamos interessados em estudar conceitos topológicos especialmente em teorias de campo, vamos começar dando uma definição um pouco mais formal pro conceito de campo, que agora deve ser encarado como um mapa que leva pontos de uma certa variedade  $M$ , a "Variedade Base", para uma outra variedade  $T$ , chamada de "Variedade Alvo", do termo *Target Manifold*. Explicitamente temos então a definição de um campo  $\phi$  como

$$\phi : M \longrightarrow T, \tag{3.1}$$

$$x \longmapsto \phi(x), \tag{3.2}$$

Usualmente  $M$  é algum subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Por praticidade, vamos supor que de fato a nossa teoria seja definida sobre alguma variedade conexa  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Podemos ainda, sem muita perda de generalidade, tratar  $M$  como um objeto "infinitamente" grande. A nível de uma teoria de campos a baixas energias, isto quer que as configurações de campo sejam constantes conforme chegamos no infinito, ou seja:  $\phi|_{\partial M} = \phi_0$ , com  $\phi_0$  constante. Desta maneira a ação não se torna infinita no bordo.

No que diz respeito à nossa teoria de campo efetiva, podemos identificar

todos os pontos de fronteira com um único ponto no “infinito”. Geometricamente, isto significa que podemos compatificar  $M$  em uma esfera, como na figura abaixo:

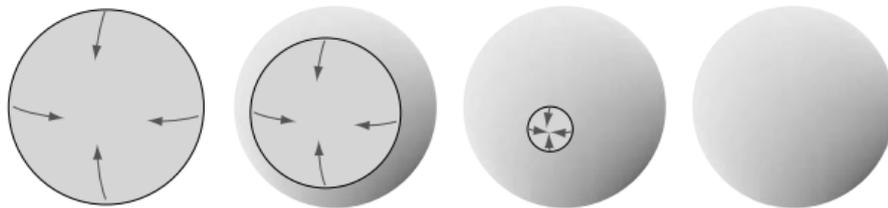


Figura 6 – Compatificação da variedade  $M$  em uma esfera.

Como o raio desta esfera não carrega significado, podemos realizar a identificação  $M \simeq S^n$ , i.e., a variedade  $M$  é equivalente a uma esfera unitária  $n$ -dimensional.

Com isso, podemos nos concentrar em geral em campos definidos por:

$$\begin{aligned} \phi : S^n &\longrightarrow T, \\ x &\longmapsto \phi(x), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vamos agora explorar os aspectos topológicos de mapas deste tipo. Para isso vamos considerar dois campos quaisquer  $\phi_1$   $\phi_2$ , que mapeiam pontos de  $M$ , ou no nosso caso de interesse,  $S^n$ , a pontos de  $T$ . Estes mapas são ditos topologicamente equivalentes, ou homotópicos, se existe um mapa contínuo  $H$ , definido como

$$\begin{aligned} H : S^n \times [0, 1] &\longrightarrow T, \\ (x, s) &\longmapsto H(x, s), \end{aligned} \tag{3.4}$$

e que obedeça à seguinte condição

$$H(x, 0) = \phi_1(x) \tag{3.5}$$

$$H(x, 1) = \phi_2(x) \tag{3.6}$$

Este mapa é uma *homotopia*, e pode ser interpretado como o mapa que deforma continuamente  $\phi_1$  em  $\phi_2$ . Com esta construção, podemos dizer que dois campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são equivalentes, i.e,  $\phi_1 \sim \phi_2$ , se eles são homotópicos. A demonstração de que de fato temos uma relação de equivalência pode ser encontrada em (NASH; SEN, ). Denotaremos então a classe de equivalência formada por todos os campos topologicamente equivalentes a um campo  $\phi$  como  $[\phi]$ . O conjunto de todas as classes de equivalência,  $\{[\phi]\}$ , de mapas definidos de  $S^n$  a  $T$  forma um grupo, que chamamos de  $n$ -ésimo grupo de Homotopia, denotado por  $\pi_n(T)$ .

Antes de mostrarmos que  $\pi_n(T)$  é um grupo, é conveniente considerar o nosso espaço base como o espaço  $I^n$ , definido por:

$$I^n = \underbrace{I \times \cdots \times I}_n, \quad I \equiv [0, 1]. \quad (3.7)$$

Isto é, estamos deformando o nosso espaço base,  $S^n$ , em um cubo  $n$ -dimensional. Topologicamente, esta é uma operação legal, desde que identifiquemos o bordo do cubo,  $\partial I^n$ , com um ponto da esfera,  $x_0$ . De fato, podemos escolher  $x_0$  como o ponto singular da nossa construção por compactificação, i.e., o os pontos no "infinito" de  $M$  que identificamos na esfera. Desta maneira, devemos ter agora a condição  $\phi|_{\partial I^n} = \phi|_{x_0} = \phi_0$ , com  $\phi_0$  constante.

Para mostrar que de fato  $\pi_n(T)$  tem estrutura de grupo, devemos primeiramente definir um produto fechado entre duas classes de equivalência. Com a consideração de que agora estamos no espaço  $I^n$ , definimos o que chamamos de mapa produto, denotado por  $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_3$ , que explicitamente é:

$$\phi_3(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \phi_1(2x_1, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in [0, 1/2] \\ \phi_2(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (3.8)$$

Podemos encarar esta definição como uma "colagem" das duas funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Além desta definição, precisamos de definir o mapa inverso,  $\phi^{-1}$ , dado por:

$$\phi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.9)$$

Com isso, podemos verificar que os axiomas de um grupo são satisfeitos se definirmos o produto do grupo como:

$$[\phi_1] * [\phi_2] = [\phi_1 * \phi_2] = [\phi_3] \quad (3.10)$$

Lembramos que axiomas que um grupo deve obedecer são, o fechamento, a associatividade, a existência de uma única identidade e de um única inversa para cada elemento. Mostraremos aqui apenas uma ideia da prova de que  $\pi_n(T)$  forma um grupo, sem entrar nos detalhes.

1. *Fechamento*: Se  $[\phi_1] \in \pi_n(T)$  e  $[\phi_2] \in \pi_n(T)$ , então usando a definição (3.11) é fácil ver que esta condição é satisfeita.
2. *Associatividade*: Dados  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , existe uma homotopia entre as funções  $\phi_1 \circ (\phi_2 \circ \phi_3)$  e  $(\phi_1 \circ \phi_2) \circ \phi_3$ , e desta maneira as duas são equivalentes, nos levando à  $[\phi_1] * ([\phi_2] * [\phi_3]) = ([\phi_1] * [\phi_2]) * [\phi_3]$

3. *Identidade*: Definindo o mapa constante como a função  $c(x_1 \dots, x_n)$  que leva ao ponto  $x_0$ , pode-se mostrar que  $c \circ \phi \sim \phi$ , assim como  $c \circ \phi \sim \phi \circ c$ , o que nos permite definir a identidade como  $[c]$ , que satisfaz  $[c] * [\phi] = [\phi] * [c] = [\phi]$ .
4. *Inversa*: Usando a definição (3.10), existe uma homotopia que leva  $\phi^{-1} \circ \phi$  a  $c$ , assim podemos definir o elemento inverso de  $[\phi]$  por  $[\phi^{-1}] = [\phi]^{-1}$ , que obedece  $[\phi] * [\phi]^{-1} = [c]$

Com isso, podemos concluir que de fato  $\pi_n(T)$  tem uma estrutura de grupo. Os detalhes desta prova, para o caso simples com  $d = 1$ , que é o suficiente para reproduzir o caso geral, podem ser encontrados em (NAKAHARA, 2003).

Assim, a estrutura topológica dos nossos campos está codificada no grupo  $\pi_n(T)$ . Em geral, estes grupos são isomorfos a conjuntos já bem conhecidos, porém, calculá-los é uma tarefa que pode ser demasiadamente complicada, dependendo do nosso espaço  $T$ .

Vamos então nos concentrar em um caso além de ser bastante recorrente, nos será útil para o nosso estudo, onde  $T$  é uma outra esfera,  $S^m$ . Para o caso em que  $m = n$ , o grupo de homotopia é isomorfo ao conjunto de números inteiros, isto é,

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}.$$

Os casos em que  $m \neq n$  geralmente são menos triviais, não nos serão importantes aqui.

Assim, considerando o caso  $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ , temos que as funções de uma esfera  $S^n$  para outra esfera  $S^n$  são particionadas em classes, que podem ser rotuladas por números inteiros. Estes números inteiros, chamados de *Winding Numbers*<sup>1</sup>, podem ser interpretados como o número de vezes que as variáveis de uma esfera  $S^n$  encobrem uma outra esfera  $S^n$ . Esta é uma interpretação de difícil visualização em  $n$  dimensões, sendo de fato mais bem entendida nos casos simples em que  $n$  é igual a 1 ou 2, sendo este último o nosso objeto de interesse, que descreve o termo topológico em (2.59).

## 3.2 Termos Topológicos

Vamos voltar a nossa atenção à teoria de campos novamente, onde podemos usar os conceitos que vimos na seção anterior para redefinir a função de partição de uma teoria. Como vimos, um campo é um mapa que leva pontos de  $M$  à  $T$ , onde em muitos casos de interesse,  $M \simeq S^n$ . Cada campo pode ser atribuído a uma classe

<sup>1</sup> Traduzindo livremente, este é o *Número de Voltas*.

de homotopia, e conseqüentemente, podemos reescrever a nossa função de partição em termos dessas diferentes classes de equivalência:

$$Z = \sum_{W \in \pi_n(T)} \int_W \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}_E[\phi]}. \quad (3.11)$$

Aqui  $W$  é um elemento do grupo de homotopia  $\pi_n(T)$ , e a função de partição é agora particionada em uma soma de diferentes classes, correspondendo a diferentes elementos do grupo. O símbolo  $W$  sob a integração funcional indica que estamos realizando uma integração sobre uma classe de homotopia definida pelo elemento  $W$ . Esta partição em diferentes classes pode ser interpretada como uma partição em diferentes *setores topológicos* da teoria.

Em muitos casos, podemos ter a ação sendo escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{S}[\phi] = \mathcal{S}_0[\phi] + \mathcal{S}_{top}[\phi]. \quad (3.12)$$

Aqui  $\mathcal{S}_{top}[\phi]$  é uma componente da ação que depende apenas da classe topológica do campo  $\phi$ . Em geral, contribuições na ação deste tipo são chamadas de termos topológicos. Aqui vamos usar a notação  $F(W)$ , para denotar termos topológicos em geral, pois como já dito, estes só dependem da classe de homotopia, então é natural escrevê-los como como uma função de um elemento  $W$  de  $\pi_n(T)$ . Este termo também é chamado de *carga topológica*. Neste caso onde uma contribuição puramente topológica da ação é separada do resto da mesma, escrevemos a função de partição como

$$Z = \sum_{W \in \pi_n(T)} \int_W \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}_0[\phi]} e^{-F(W)}. \quad (3.13)$$

É importante notar que se  $F(W)$  depende apenas da classe de homotopia, este será um termo invariante sob transformações suaves na configuração de campo, e assim a ação gera as mesmas equações de campo que em um caso onde não temos este termo. Desta maneira, a adição de um termo topológico na nossa ação é uma operação insignificante a nível clássico. Porém quando quando estamos a um nível quântico, este termo tem implicações profundas. É fácil ver isto se lembrarmos que ao quantizar um campo por integrais de trajetória, cada configuração de campo terá um peso proporcional a ao fator  $\exp(i\mathcal{S}[\phi])$ , e ao somarmos um termo topológico, teremos efeitos de interferência quântica, vindos de contribuições provenientes de diferentes setores topológicos. Tais efeitos não são vistos a nível clássico, onde apenas os pontos estacionários da ação importam.

Um caso que é frequentemente encontrado, como já mencionado, é onde o grupo de homotopia é isomorfo ao conjunto de números inteiros, isto é,  $\pi_n(T) \simeq \mathbb{Z}$ , desta maneira podemos rotular cada classe de equivalência  $[\phi]$  por um número inteiro, que denotaremos por  $Q \in \mathbb{Z}$ . Nestes casos é muito comum o termo topológico da ação aparecer da forma

$$F(Q) = i\theta Q, \quad (3.14)$$

que é justamente a forma que encontramos na ação efetiva do antiferromagneto de Heiseberg 1D, caso que exploraremos com mais atenção na próxima seção.

Com esta consideração, o fator do termo topológico na função de partição se torna simplesmente um fator de fase, dado por  $\exp(-i\theta W)$ , com a constante  $\theta$  sendo definida mod  $(2\pi)$ . Na literatura em geral,  $\theta$  é chamado de ângulo topológico.

Apesar da sua simplicidade, uma desvantagem desta representação é que ela depende explicitamente da decomposição da integral dos campos em diferentes setores topológicos. Seria mais interessante em muitas ocasiões trabalhar com uma representação de  $\mathcal{S}_{top}[\phi]$  que seja escrita diretamente em termos dos campos, ao invés de simplesmente em termos do índice  $Q$ . De fato é quase sempre possível representar a ação topológica como uma integral sobre uma "Lagrangiana Topológica":

$$\mathcal{S}_{top}[\phi] = \int d^n x \mathcal{L}_{top}[\phi, \partial_\mu \phi] \quad (3.15)$$

Embora não exista um método geral de se obter esta representação para a ação topológica, muitos casos de lagrangianas de teorias de campos topologicamente não triviais já são conhecidas, e pode-se, através da experiência, identificar quando um termo de uma lagrangiana é um termo- $\theta$  ou não.

Para ilustrar melhor toda esta discussão geral, vamos nos voltar para o nosso caso de interesse novamente, o termo topológico encontrado na ação efetiva do antiferromagneto 1D.

### 3.3 Termo Topológico do NLSM e o caso $\pi_2(S^2)$

Vamos focar as nossas atenções de volta ao caso da teoria de campos efetiva para o antiferromagneto 1D. Neste caso, podemos argumentar da mesma maneira que o caso geral discutido na seção (3.1), onde assintoticamente o campo  $\mathbf{m}$  se torna uma constante, para que ação se mantenha finita:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{m}(x) = \mathbf{m}_0 \quad (3.16)$$

Como estamos tratando de uma teoria em um espaço euclidiano bidimensional, o limite acima nos permite realizar a identificação do espaço base como uma esfera  $S^2$ , como podemos ver pela figura 7, pelo mesmo argumento já discutido na seção (3.1). Entretanto a variedade "alvo" da nossa teoria, denominado  $T$  no caso geral, é também uma esfera  $S^2$ , visto que o vínculo  $|\mathbf{m}|^2 = 1$  deve ser satisfeito em todo o espaço. Assim, uma configuração de campo  $\mathbf{m}$  com uma ação euclidiana finita pode ser encarada com um mapa (suave) de uma esfera  $S^2$  para outra esfera  $S^2$ .

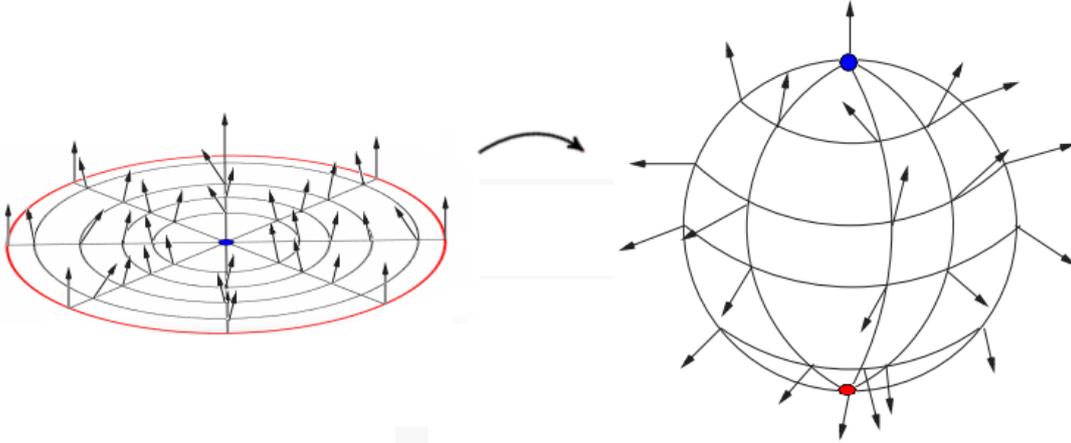


Figura 7 – Configuração de spin em um espaço euclidiano 2D, compactificado em uma esfera  $S^2$

Com esta conclusão, podemos particionar a nossa teoria em diferentes classes de homotopia, pertencentes ao grupo  $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ . Assim, cada configuração de campo topologicamente distinta é rotulada por um número inteiro  $Q \in \mathbb{Z}$ , e a função de partição é dada por:

$$Z = \sum_{Q \in \mathbb{Z}} \int \mathcal{D}\mathbf{m} e^{-S_\varepsilon} \quad (3.17)$$

Onde a ação efetiva (euclidiana) é dada por

$$S_E = \frac{1}{2g} \int d^2x \left[ v_s (\partial_2 \mathbf{m})^2 + \frac{1}{v_s} (\partial_1 \mathbf{m})^2 \right] + \frac{i\theta}{8\pi} \int d^2x \varepsilon_{ij} \mathbf{m} \cdot (\partial_i \mathbf{m} \times \partial_j \mathbf{m}) \quad (3.18)$$

Note que aqui, dado o fato de que estamos agora no espaço-tempo euclidiano, abandonamos a notação covariante para o termo- $\theta$ . Este é um termo, como argumentamos em seções anteriores, de origem geométrica, sendo remanescente da fase proporcional à área da esfera  $SU(2)/U(1)$ , encontrada na integral de trajetória para um spin. Devemos nos perguntar agora, se este termo de fato é puramente

topológico, isto é, se só depende da classe de homotopia do mapa  $\mathbf{m}$ . Para isso devemos ter primeiramente que o mesmo é invariante sob transformações locais, que são tais que levam uma configuração a outra pertencente à mesma classe. Esta é uma exigência simples de se mostrar, pois quando escrevemos a variação da ação, pode-se ver que a mesma é proporcional ao produto de  $\delta\mathbf{m}$  com uma quantidade perpendicular este,  $(\partial_i\mathbf{m} \times \partial_j\mathbf{m})$ .

Além disso, como já foi apontado, as classes de homotopia de  $\mathbf{m}$  são rotuladas em números inteiros. Desta maneira, definimos a quantidade  $Q$  por:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon_{ij} \mathbf{m} \cdot (\partial_i\mathbf{m} \times \partial_j\mathbf{m}). \quad (3.19)$$

Sendo esta a chamada *Carga Topológica*, ou o *Índice de Pontryagin*. Este é de fato um número inteiro, que conta o número de vezes os pontos do espaço base,  $S_{base}^2$ , "varrem" a o espaço interno  $S_{int}^2$ . Este é um fato relativamente não trivial, e omitiremos a prova formal aqui <sup>2</sup>, nos atentando apenas na sua interpretação, que nos leva exatamente à definição do que chamamos de *Winding Number*, como mencionado no final da seção 3.1.

A afirmação de que a quantidade  $Q$  conta o número de vezes que a esfera  $S_{base}^2$  encobre a esfera  $S_{int}^2$  é visualizada mais facilmente se lembrarmos da fórmula da área em (1.38), de maneira que esta agora é área encoberta  $Q$  vezes por  $S_{base}^2$ .

Portanto, o termo- $\theta$  é de fato um termo topológico, proporcional a um número inteiro  $Q$ , o que nos permite escrever a nossa função de partição da seguinte maneira:

$$Z = \sum_{Q \in \mathbb{Z}} e^{i\theta Q} \int_Q \mathcal{D}\mathbf{m} e^{-S_0[\mathbf{m}]}. \quad (3.20)$$

Pela dedução da ação efetiva, sabemos que o valor de  $\theta$  é

$$\theta = 2\pi S, \quad (3.21)$$

e com isso temos que o termo topológico nos dá uma contribuição para o peso da configuração na integral de trajetória de

$$e^{i2\pi S Q} = (-1)^{2SQ} \quad (3.22)$$

<sup>2</sup> Matematicamente falando, esta quantidade é chamada de *grau topológico* do mapa  $\mathbf{m}$ , e é possível mostrar em geral que o grau topológico é de fato um número inteiro, que rotula as classes de equivalência de  $\mathbf{m}$ . As definições e a prova deste resultado podem ser vistas em (MONASTYRSKY, 1993).

Sabemos que  $S$  pode ser inteiro ou meio inteiro. Para o caso em que  $S$  é inteiro, o termo acima é simplesmente 1, e assim, as cadeias de spin inteiro, no limite de baixas energias, serão descritas simplesmente pelo modelo sigma não-linear, sem um termo topológico.

No caso em que o spin é semi-inteiro, o termo acima pode ser 1 ou  $-1$ , e assim cada classe contribui com um peso na integral de trajetória com um sinal, que é positivo se  $Q$  for par, e negativo se for ímpar.

Notemos que o sinal não depende do valor do spin, mas sim se o mesmo é um número inteiro ou semi-inteiro. Isto significa que a física do problema não é analítica em  $S$ , e, como veremos mais adiante, as cadeias de spin inteiras e semi-inteiras caem em duas classes de universalidade diferentes. Esta propriedade será fundamental para mostrarmos a chamada *conjectura de Haldane*, que afirma que cadeias de spin inteiro tem um gap de massa, enquanto as de spin semi-inteiro não o tem. Chegaremos a este resultado nas próximas seções, usando técnicas do grupo de renormalização.



## 4 Modelo Sigma Não-Linear

No capítulo anterior mostramos que a teoria efetiva que descreve um anti-ferromagneto de Heisenberg unidimensional no regime de baixas energias é o Modelo Sigma Não Linear, ou simplesmente NLSM. Vamos agora analisar este modelo usando métodos do grupo de renormalização, a fim de extrair o comportamento do conforme a escala física de interesse muda.

### 4.1 Flutuações Quânticas e Renormalização

Aqui vamos ignorar o termo topológico da ação pois o mesmo não é alterado sob o processo da renormalização. A função de partição do sistema é dada por:

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{m} e^{-\mathcal{S}_0^E[\mathbf{m}]} \quad (4.1)$$

com a ação euclideana agora escrita na forma

$$\mathcal{S}_0^E[\mathbf{m}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\nabla_i \mathbf{m})^2. \quad (4.2)$$

Queremos que as flutuações sejam suficientemente pequenas e locais. Esta suposição equivale ao tratamento semi-clássico das integrais de trajetória, onde  $S \rightarrow \infty$ . Para realizarmos a análise através do grupo de renormalização de maneira mais cuidadosa e geral, vamos tomar agora a dimensionalidade como  $d$ , ao invés de simplesmente 2.

Através da análise dimensional, onde queremos que a ação  $\mathcal{S}_0^E$  no final seja adimensional, vemos que o campo  $\mathbf{m}$  também é adimensional para todo  $d$ , e assim a constante de acoplamento tem a dimensão canônica  $[g] = d - 2$ . Vamos agora redefinir a constante de acoplamento como

$$g = u a_0^{d-2} \quad (4.3)$$

Onde  $u$  é a nova constante de acoplamento, adimensional, e toda a dimensionalidade está contida no cutoff espacial  $a_0$ .

A ação clássica do modelo sigma não linear tem a propriedade de ser invariante de escala, isto é, quando tomamos uma transformação

$$(x, t) \longrightarrow \lambda(x, t),$$

a ação se mantém invariante. Vamos considerar aqui o processo de transformações do grupo de renormalização pelo ponto de vista de Wilson, integrando os graus de liberdade com energias mais altas na teoria, nos dando uma teoria efetiva com os parâmetros reescalados, ou melhor, renormalizados. Esta abordagem também foi utilizada de maneira independente por Polyakov, especificamente no contexto do modelo sigma não-linear (POLYAKOV, 1975). Aqui seguiremos de maneira semelhante a (KOGUT, 1979).

Em geral, o campo  $\mathbf{m}$ , no espaço dos momentos, tem componentes de Fourier que vão desde o setor IR, com  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ , até o UV, com  $|\mathbf{p}| \sim 1/a_0 \sim \Lambda$ , onde aqui  $\Lambda$  é o cutoff UV no momento.

Para usar o esquema de integração das variáveis com o modos "mais rápidos", vamos usar o vínculo do NLSM,  $\mathbf{m}^2 = 1$ . Com isso podemos escolher uma coordenada,  $m_3$ , para ter apenas graus de liberdade com momentos mais altos, e podemos reparametrizar os nossos graus de liberdade como:

$$m_1 = \sqrt{1 - m_3^2} \cos \phi, \quad m_2 = \sqrt{1 - m_3^2} \sin \phi \quad (4.4)$$

onde  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Desta maneira, usando o formato da lagrangiana (euclideana) do NLSM, como em (4.2), devemos reescrever os termos que correspondem aos graus de liberdade  $m_1$  e  $m_2$  usando as expressões:

$$\nabla_i m_1 = \nabla_i \left( \sqrt{1 - m_3^2} \cos \phi \right) = \cos \phi \frac{m_3 \nabla_i m_3}{\sqrt{1 - m_3^2}} - \sqrt{1 - m_3^2} \sin \phi \nabla_i \phi \quad (4.5)$$

$$\nabla_i m_2 = \nabla_i \left( \sqrt{1 - m_3^2} \sin \phi \right) = \sin \phi \frac{m_3 \nabla_i m_3}{\sqrt{1 - m_3^2}} + \sqrt{1 - m_3^2} \cos \phi \nabla_i \phi. \quad (4.6)$$

Com estas expressões, a lagrangiana é reescrita como:

$$\mathcal{L}_E[m_3, \phi] = \frac{1}{2ua_0^{d-2}} (\nabla_i \mathbf{m})^2 = \frac{1}{2ua_0^{d-2}} [(\nabla_i m_1)^2 + (\nabla_i m_2)^2 + (\nabla_i m_3)^2] \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{2ua_0^{d-2}} \left[ (\nabla_i m_3)^2 + (1 - m_3^2) (\nabla_i \phi)^2 + \frac{(m_3 \nabla_i m_3)^2}{(1 - m_3^2)} \right] \quad (4.8)$$

Por fim, vamos reescalar o campo  $m_3$  como

$$m_3 = \sqrt{ua_0^{d-2}} \sigma. \quad (4.9)$$

Agora o campo  $\sigma$  tem a dimensão canônica  $[\sigma] = \frac{2-d}{2}$ , enquanto a constante de acoplamento da teoria é adimensional, como definimos em (4.3). Com esta redefinição, a lagrangiana é dada finalmente por:

$$\mathcal{L}_E[\sigma, \phi] = \frac{1}{2} (\nabla_i \sigma)^2 + \frac{1}{2ua_0^{d-2}} (1 - ua_0^{d-2}\sigma^2) (\nabla_i \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{ua_0^{d-2}}{1 - ua_0^{d-2}\sigma^2} \right) (\sigma \nabla_i \sigma)^2 \quad (4.10)$$

Para efetuar a integração funcional sem sofrimentos desnecessários, vamos usar o fato de que estamos interessados no comportamento para  $g$  pequeno, que é o mesmo que  $u$  pequeno. Essa suposição pode ser encarada como uma aproximação perturbativa, onde usaremos a expansão  $(1-x)^{-1} = 1+x + \mathcal{O}(x^2)$ , com  $x$  pequeno, para aproximar o último termo da lagrangiana, nos dando a seguinte expressão:

$$\mathcal{L}_E[\sigma, \phi] = \frac{1}{2} (\nabla_i \sigma)^2 + \frac{1}{2ua_0^{d-2}} (\nabla_i \phi)^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 (\nabla_i \phi)^2 + \quad (4.11)$$

$$+ \frac{1}{2} ua_0^{d-2} (\sigma \nabla_i \sigma)^2 + \frac{1}{2} u^2 a_0^{2(d-2)} \sigma^2 (\sigma \nabla_i \sigma)^2 + \mathcal{O}(u^3). \quad (4.12)$$

Agora que temos uma expressão polinomial para a Lagrangiana, podemos efetuar a integral de trajetória com mais facilidade. Vamos considerar uma integração na casca de momento definida por  $b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda$ , com  $b$  sendo um número real tal que  $b < 1$ . Como esperamos que momentos com valor próximo de  $\Lambda$  não afetem muito fenômenos que ocorrem à baixas energias, vamos realizar a seguinte integração funcional:

$$\begin{aligned} & \int_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \mathcal{D}\sigma(\mathbf{p}) e^{-S_0^E[\sigma, \phi]} \\ &= \int_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x \left[ (\nabla_i \sigma)^2 + \frac{1}{ua_0^{d-2}} (\nabla_i \phi)^2 - \sigma^2 (\nabla_i \phi)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aqui assumimos que  $\phi(\mathbf{p})$  varia pouco, e assim o termo  $(\nabla_i \phi)^2$  é pequeno e não tem momentos na casca  $b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda$ , provido pelo fato que queremos no final tomar o limite  $b \rightarrow 1$ , que é equivalente a tomar uma transformação infinitesimal do grupo de renormalização. Assim, o segundo termo, proporcional apenas à  $(\nabla_i \phi)^2$  pode ser desconsiderado e no último termo, esta quantidade pode ser encarada como um campo externo, que não está sendo integrado funcionalmente. De fato, como assumimos *a priori* que  $\sigma$  é a componente que tem os modos mais rápidos, a integral na casca  $b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda$  é efetuada somente sob esse grau de liberdade.

Com isso em mente, e já reescrevendo as integrais no espaço dos momentos, temos a seguinte expressão para a integral funcional:

$$\int_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \mathcal{D}\sigma(\mathbf{p}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \mathbf{p}^2 |\sigma(\mathbf{p})|^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |\sigma(\mathbf{p})|^2 (\nabla_i \phi)^2 \right\} \quad (4.14)$$

Esta é uma integração gaussiana, que pode ser facilmente calculada através da discretização da integral funcional em passos de comprimento  $\delta_{\mathbf{p}}$ , como fizemos na seção 2.2, por exemplo. O resultado final é facilmente visto como:

$$\prod_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \left[ \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2 - (\nabla_i \phi)^2} \right]^{1/2}. \quad (4.15)$$

Exponenciando e tomando o logaritmo natural deste resultado, temos a seguinte expressão:

$$\prod_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \left[ \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2 - (\nabla_i \phi)^2} \right]^{1/2} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \ln \left[ \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2 - (\nabla_i \phi)^2} \right] \right\} \quad (4.16)$$

Vamos agora usar o fato de que sob a soma na exponencial, o termo  $(\nabla_i \phi)^2$  é muito pequeno para escrever:

$$\frac{2\pi}{\mathbf{p}^2 - (\nabla_i \phi)^2} = \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2 \left( 1 - \frac{(\nabla_i \phi)^2}{\mathbf{p}^2} \right)} \quad (4.17)$$

$$\approx \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2} \exp \left\{ \frac{(\nabla_i \phi)^2}{\mathbf{p}^2} \right\} \quad (4.18)$$

E com isso podemos finalmente escrever, já voltando para a forma integral, o resultado da integração funcional na camada de momento  $b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda$ :

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \int_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left( \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2} \right) + \frac{1}{2} (\nabla_i \phi)^2 \int_{b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \right] \quad (4.19)$$

Voltando agora à expressão da função de partição com a integração nos modos mais rápidos já efetuada, temos a lagrangiana efetiva escrita como:

$$\mathcal{L}_E[\sigma, \phi] = \frac{1}{2} \int_{b\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left( \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2} \right) + \frac{1}{2} (\nabla_i \sigma)^2 + \quad (4.20)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{ua_0^{d-2}} - \int_{b\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \right) (\nabla_i \phi)^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 (\nabla_i \phi)^2 + \mathcal{O}(u^2). \quad (4.21)$$

Vemos aqui que os efeitos de se realizar a integração na região  $b\Lambda \leq |\mathbf{p}| \leq \Lambda$  são um shift na energia, dado pelo primeiro termo, e a renormalização da constante de acoplamento  $u$ . Além disso, o cutoff UV agora é  $\Lambda'$ , que é o cutoff anterior reduzido por  $b$ :  $\Lambda' = b\Lambda$ . Equivalentemente, o cutoff espacial foi aumentado pelo fator  $b$ .

Esta redefinição da constante de acoplamento pela integração dos modos mais rápidos é encarada como uma transformação infinitesimal do grupo de renormalização, i.e., com  $b \rightarrow 1$ , que é dada explicitamente por

$$\frac{1}{u'a_0^{d-2}} = \frac{1}{ua_0^{d-2}} - \int_{b\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{p}^2}. \quad (4.22)$$

Para termos uma forma explícita para a constante de acoplamento renormalizada, devemos efetuar a integração no lado direito da equação. Esta é uma integral que é facilmente efetuada em coordenadas esféricas  $d$ -dimensionais:

$$\int_{b\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{p}^2} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_{b\Lambda}^{\Lambda} dp \frac{p^{d-1}}{p^2} \quad (4.23)$$

$$= \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{[1 - b^{d-2}] \Lambda^{d-2}}{d-2}, \quad (4.24)$$

onde

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (4.25)$$

é a área da superfície da hipersfera  $d$ -dimensional. Com este resultado, temos a expressão para  $u'$ :

$$\frac{1}{u'a_0^{d-2}} = \frac{1}{ua_0^{d-2}} - \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{[1 - b^{d-2}]}{d-2} \frac{1}{a_0^{d-2}} \quad (4.26)$$

Usando o fato de que o cutoff espacial é reescalado como  $a'_0 = a_0/b$ , e estamos interessados em  $d$  tendendo a 2, definimos  $\varepsilon = d - 2$ , para finalmente escrever uma expressão mais compacta para  $u'$ :

$$\frac{1}{u'} = \left[ \frac{1}{u} - \frac{S_{\varepsilon+2}}{(2\pi)^{2+\varepsilon}} \frac{[1 - b^\varepsilon]}{\varepsilon} \right] b^{-\varepsilon} \quad (4.27)$$

Como  $\varepsilon$  é pequeno, podemos escrever a expressão  $(1 - b^\varepsilon)/\varepsilon$  como  $\ln(b)$ . O nosso objetivo é reescrever esta expressão de maneira que visualizemos como  $u$  depende de uma variação de escala infinitesimal, isto é, quando consideramos uma transformação infinitesimal do grupo de renormalização:  $a'_0 = a_0 + \delta a_0$ , com  $\delta a_0$

muito pequeno. Com isso em mente, vamos reescrever os fatores de  $b$  usando

$$-\ln(b) = \ln\left(\frac{a'_0}{a_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\delta a_0}{a_0}\right) = \frac{\delta a_0}{a_0} \quad (4.28)$$

$$b^{-\varepsilon} = \left(\frac{a'_0}{a_0}\right)^\varepsilon = \left(1 + \frac{\delta a_0}{a_0}\right)^{-\varepsilon} = 1 + \varepsilon \frac{\delta a_0}{a_0} \quad (4.29)$$

Substituindo estas expressões na definição de  $u'$ , e mantendo os termos de primeira ordem em  $\delta a_0$ , temos a expressão:

$$u' = u \left[ 1 + \frac{\delta a_0}{a_0} \left( \varepsilon - \frac{u}{2\pi} \right) \right]^{-1} \quad (4.30)$$

$$= u \left[ 1 - \frac{\delta a_0}{a_0} \left( \varepsilon - \frac{u}{2\pi} \right) \right] \quad (4.31)$$

Onde já tomamos o valor do termo Finalmente, como estamos assumindo que a transformação do grupo de renormalização é infinitesimal, temos que  $u' = u(a_0 + \delta a_0)$ , e a equação acima pode ser reescrita de maneira formal como uma equação diferencial, a chamada função  $\beta$  de Gell-Mann-Low:

$$\beta(u) = a_0 \frac{du}{da_0} = -\varepsilon u + \frac{u^2}{2\pi} + \mathcal{O}(u^3) \quad (4.32)$$

A função  $\beta(u)$  nos diz como a constante de acoplamento varia conforme mudamos a escala, e tomando finalmente o limite para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos a forma da função  $\beta$  para o NLSM em  $d = 1 + 1$ :

$$\beta(u) = \frac{u^2}{2\pi} + \mathcal{O}(u^3) \quad (4.33)$$

Em duas dimensões, temos então uma função  $\beta$  positiva. Este resultado nos mostra que conforme aumentamos o cutoff espacial  $a_0$ , isto é, conforme "olhamos" para distâncias cada vez mais longas, as flutuações aumentam o valor efetivo da constante de acoplamento nestas escalas. Por outro lado conforme estamos em uma escala muito pequena, ou, no regime de altas energias, a teoria tem uma constante de acoplamento efetiva que diminui gradativamente, onde no limite UV ela se torna livre. Esta é a premissa básica do que chamamos de *Liberdade Assintótica*. Esta propriedade fundamental no NLSM foi descoberta por Polyakov em 1975 (POLYAKOV, 1975), usando um método semelhante ao mostrado aqui, onde os graus de liberdade com energias mais altas são integrados.

É importante ressaltar que tudo o que fizemos aqui foi apenas uma análise sem pretensões mais profundas sob o contexto do grupo de renormalização, isto é, sem tomar o devido cuidado com o tratamento perturbativo da teoria. Para tratar

perturbativamente da mesma com consistência devemos em algum momento deveríamos mostrar que a teoria é *renormalizável*, isto é, sempre conseguimos reescalar a constante de acoplamento, como fizemos com o método de Wilson, por exemplo, em todas as ordens de  $g$ . De fato em  $d = 1 + 1$  o NLSM é renormalizável, o que não iremos mostrar pois isto está além do escopo deste trabalho. Os detalhes desta análise podem ser vistos em (ZINN-JUSTIN, 2002)

Por fim, devemos mencionar que aqui nos atentamos apenas a uma análise pelo contexto puro da teoria de campos, sem fazer nenhuma menção explícita à física estatística e às implicações que este resultado nos trás no contexto da criticalidade da teoria. Este será um assunto a ser explorado na seção a seguir, onde iremos mostrar que a o NLSM é desordenado e as excitações têm um gap de massa dinamicamente gerado, ou na linguagem da teoria de transições de fase, ela tem um comprimento de correlação finito. Além disso, veremos qual é o papel do termo topológico nesta análise.

## 4.2 Conjectura de Haldane

Vimos que o NLSM é assintoticamente livre em  $1 + 1$  dimensões, fato evidenciado pelo cálculo da função  $\beta(u)$ , que mede o quanto o acoplamento varia conforme mudamos a escala de comprimento  $a_0$ . Alternativamente, podemos manter o cutoff fixo, e variar alguma escala física como o comprimento da cadeia,  $L$ , ou a temperatura  $T$ . Notemos que não mencionamos nada a respeito do comprimento da cadeia de spin até agora, e de fato sempre assumimos implicitamente que a mesma é um sistema unidimensional que vai de  $-\infty$  a  $\infty$ .

Um fato que nos permite realizar a análise pelo ponto de vista da física estatística é que à temperatura finita  $T$ , o sistema pode ser visto como uma faixa de comprimento  $L$ , o comprimento linear da cadeia, e largura  $1/T$ , no espaço-tempo Euclidiano.

A análise que realizamos na seção anterior foi feita pra um NLSM com simetria  $O(3)$ , mas sem o termo de anisotropia, a velocidade da onda de spin, encontrada na definição da lagrangiana efetiva do antiferromagneto de Heisenberg 1D. O processo de renormalização descrito na seção anterior pode ser facilmente generalizado contabilizando o termo  $v_s \neq 1$ , não mudando as características que encontramos. Assim, para realizarmos uma descrição mais realista, vamos mantê-lo nas nossas contas daqui em diante.

Começamos então o processo de transformação do grupo de renormalização com um cutoff espacial  $a_0$  e uma constante de acoplamento não renormalizada

$u_0 \propto 1/S$ . Como foi visto anteriormente, o fluxo do grupo de renormalização nos mostra que o acoplamento cresce conforme aumentamos a escala de comprimento. Porém, considerando esta afirmação pelo ponto de vista de uma teoria a uma temperatura  $T \neq 0$  no espaço euclidiano, teremos que a cadeia é finita agora, e em algum momento o cutoff  $a$  se torna da ordem de  $v_s/T$ , que é da mesma ordem que a largura da faixa, O que faz com que as flutuações quânticas sejam negligíveis.

Neste ponto temos um modelo sigma não-linear à temperatura finita  $T$ , com tempo imaginário, que é idêntico ao modelo de Heisenberg clássico em  $d$  dimensões no espaço euclidiano. Um fato importante proveniente da física estatística é que todos os sistemas clássicos 1D, com interações de curto alcance, tem um comprimento de correlação finito  $\xi_c$  a todas as temperaturas, ou em outras palavras, são desordenados (LANDAU; LIFSHITZ, 2013).

Podemos nos perguntar agora o quanto que a constante de acoplamento muda quando chegamos nesta escala, denotada por  $\tilde{a}_0 \sim v_s/T$ . Como mencionado, o fato de contarmos agora com o termo de anisotropia  $v_s$  não muda os resultados já encontrados, e assim podemos analisar este caso integrando a função  $\beta$ , dada por:

$$\frac{1}{u(\tilde{a}_0)} = \frac{1}{u(a_0)} + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{a_0}{\tilde{a}_0} \right) \quad (4.34)$$

Usando o fato de que  $\tilde{a}_0$  é da ordem de  $v_s/T$ , obtemos a dependência da temperatura da constante de acoplamento:

$$u(T) = u_0 \left[ 1 + \frac{u_0}{2\pi} \ln \left( \frac{a_0 v_s}{T} \right) \right]^{-1} \quad (4.35)$$

Para temperaturas muito altas,  $T \gg v_s/a_0$  esta expressão é aproximadamente

$$u(T) \approx \frac{2\pi}{\ln(a_0 T/v_s)} \rightarrow \infty \quad (4.36)$$

Esta é outra maneira de ver o resultado que já encontramos, a liberdade assintótica, onde o acoplamento efetivo a altas temperaturas se torna cada vez mais pequeno. Por outro lado, a temperatura do sistema pode ser feita cada vez menor, até atingir um ponto  $T_0$  tal que o acoplamento efetivo diverge, dado explicitamente por

$$T_0 \approx \frac{v_s}{a_0} e^{-2\pi/u_0} = \frac{v_s}{a_0} e^{\pi S} \quad (4.37)$$

Esta é a temperatura onde a expansão para acoplamento fraco,  $1/S$ , não funciona mais, e qualquer resultado além disso está além da teoria de perturbação. Para entender o que ocorre quando abaixamos mais a temperatura, devemos levar em conta justamente que o acoplamento é forte. Nesse ponto, notemos então que, a valores altos de  $g$ , o NLSM é desordenado em qualquer dimensão.

Como o sistema é desordenado, é esperado então o surgimento de um comprimento de correlação finito e pequeno, que denotaremos por  $\xi$ . Como discutimos na introdução, o comprimento de correlação é proporcional ao inverso da massa, e assim quando o sistema está desordenado esperamos um gap de massa finito, dado neste caso por  $\Delta = v_s/\xi$ . Uma interpretação deste resultado vem do fato de que classicamente temos uma lagrangiana com um parâmetro adimensional, e que é invariante sob transformações de escala, e após a transformação do grupo de renormalização, que escolhemos como a integração nos modos mais rápidos, o parâmetro da nossa teoria,  $u$ , toma a forma de uma função que depende da escala. Desta maneira, a teoria renormalizada não é mais invariante sob transformações de escala, e para extrairmos resultados da mesma, devemos escolher uma escala de energia (ou de comprimento) apropriada, o que nos leva a geração de um comprimento de correlação, ou gap de massa. Assim, o surgimento deste gap de massa pode ser encarado como um resultado proveniente da renormalização da teoria <sup>1</sup>, isto é, de efeitos puramente quânticos. Este processo, onde um parâmetro adimensional se torna uma função da escala, e ganha dimensão, é geralmente chamado de *Transmutação Dimensional*. Esta análise é extremamente semelhante à que ocorre com a teoria de Yang-Mills, onde também temos um gap de massa dinamicamente gerado, por meio da transmutação dimensional, evidenciando mais um aspecto em comum entre as duas teorias (KOGUT; STEPHANOV, 2003).

Após a discussão qualitativa acima, vamos usar o grupo de renormalização para entender melhor como este comprimento de correlação depende da constante de acoplamento não renormalizada  $u_0 = 2/S$ . Por análise dimensional podemos escrever o comprimento de correlação como

$$\xi(u) = a_0 f(u) \tag{4.38}$$

onde  $f$  é uma função apenas de  $u$ , que é o acoplamento na escala do cutoff  $a_0$ . O comprimento de correlação é invariante sob as transformações do grupo de renor-

---

<sup>1</sup> Deve ser notado que este é um resultado que depende somente do processo de renormalização em si, e não do método escolhido.

malização, e assim a sua função  $\beta$  é nula, o que nos permite escrever

$$\beta(u) \frac{df(u)}{du} + f(u) = 0 \quad (4.39)$$

A solução desta equação diferencial é facilmente vista como

$$f(u) = f(u') \exp \left[ - \int_{u'}^u \frac{d\tilde{u}}{\beta(\tilde{u})} \right] = f(u') \exp \left[ 2\pi \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{u'} \right) \right] \quad (4.40)$$

onde para resolver a integral usamos a forma da função  $\beta$  e os acoplamentos  $u$  e  $u'$  são conectados pelo fluxo do grupo de renormalização. Vamos agora considerar o comprimento de correlação para dois valores diferentes de  $u$ , com o mesmo valor de  $a_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$ . Seja  $u^*$  um valor de referência, muito grande. A partir da solução da equação diferencial acima, podemos escrever a razão entre os valores de  $\xi$  para dois valores diferentes de  $u$  com o mesmo  $a_0$  como

$$\frac{\xi(u_1)}{\xi(u_2)} = \frac{a_0 f(u^*) \exp \left[ - \int_{u^*}^{u_1} \frac{d\tilde{u}}{\beta(\tilde{u})} \right]}{a_0 f(u^*) \exp \left[ - \int_{u^*}^{u_2} \frac{d\tilde{u}}{\beta(\tilde{u})} \right]}, \quad (4.41)$$

que pode ser claramente simplificado como

$$\frac{\xi(u_1)}{\xi(u_2)} = \exp \left[ - \int_{u_2}^{u_1} \frac{d\tilde{u}}{\beta(\tilde{u})} \right]. \quad (4.42)$$

E finalmente resolvendo a integral, o seguinte resultado é encontrado:

$$\frac{\xi(u_1)}{\xi(u_2)} = \exp \left[ 2\pi \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \right] \quad (4.43)$$

O caso de interesse é quando começamos o fluxo do grupo de renormalização com o acoplamento da ordem de  $u_0 = 2/S$ , e o valor de  $u_2$ , que agora denotaremos simplesmente por  $u$ , é grande, conforme atingimos o limite IR. Neste caso, temos o seguinte comprimento de correlação:

$$\xi_0 = \xi(u_0) \approx \xi(u_2) e^{\pi S}. \quad (4.44)$$

A pergunta agora é, qual o valor de  $\xi(u)$  conforme  $u$  vai se tornando cada vez maior, i.e, quando  $u \rightarrow \infty$ ? Aqui devemos nos lembrar que o nosso modelo é particionado em duas classes diferentes, definidas a partir do termo topológico! De fato, o resultado deste limite depende se o spin será semi-inteiro ou inteiro. Podemos encarar esta diferença de resultados como uma evidência de que as cadeias de spin estão em duas classes de universalidade diferentes, uma com spin inteiro e a outra

com spin semi-inteiro. Vamos analisar cada caso separadamente, começando com os spins inteiros.

### 1. *Spin Inteiro*

Neste caso, como foi mostrado na seção 3.3, não temos o termo topológico na ação, e assim o sistema se comporta exatamente como descrito logo acima, sendo desordenado com o acoplamento forte, o que nos leva a ter  $\xi(u)$  muito pequeno, da ordem de  $a_0$ . Com isso chegamos ao fato de que o comprimento de correlação é finito e dado por:

$$\xi_0 = \xi(u_0) \approx a_0 e^{\pi S}. \quad (4.45)$$

Como o sistema é desordenado, não temos ordem a longo alcance, não sendo possível, portanto, termos o estado de Néel. O resultado acima pode ser traduzido como o um gap de massa, dado explicitamente por:

$$\Delta = \frac{v_s}{\xi_0} = 2JS e^{-\pi S}. \quad (4.46)$$

### 2. *Spin Semi-Inteiro*

Este é um caso mais interessante, pois aqui temos a presença do termo topológico. Notemos que embora o acoplamento  $u$  vá para um acoplamento forte em escalas de comprimento grandes, o acoplamento do termo topológico permanece no valor  $\theta = 2\pi S$ , pois este não varia sob flutuações locais, devida a sua natureza global, como já discutido. Além disso, a constante de acoplamento é relacionada com spin por  $g = 2/S$ , e  $u \propto g$ . Desta maneira, o acoplamento forte é equivalente ao spin pequeno, isto é, o caso em que  $S = 1/2$ , ou então, em que  $u_0 \propto 4$ , e usando o fato de que a ação topológica é invariante sob a mudança de spins, dentro da mesma classe de homotopia, e que a parte dinâmica da ação pode ser reescalada de maneira que se mantenha invariante se mudarmos o valor do spin, podemos então dizer que todas as cadeias de spin se comportam de maneira qualitativamente igual às de spin  $1/2$ , isto é, ao caso com acoplamento forte

Isto é um resultado bastante importante, pois já é um fato bem conhecido que cadeias de spin  $1/2$  são *gapless*, isto é, não tem um gap de massa, e assim são ordenadas com um comprimento de correlação infinito. Este é um resultado não trivial, que pode ser mostrado de maneira exata com o Ansatz de Bethe (FRADKIN; STONE, 1988). Assim, no limite para acoplamento forte, temos que  $\xi(u)$  diverge, o que nos leva a conclusão de que  $\xi_0$  também diverge, e assim

todas as cadeias de spin semi-inteiro são ordenadas, ou, estão no ponto crítico, onde as excitações não tem um gap de massa.

Este resultado é conhecido como a conjectura de Haldane([HALDANE, 1983a](#))([HALDANE, 1983b](#)), sendo testado numericamente ([MOREO, 1987](#))([ZIMAN; SCHULZ, 1987](#)) diversas vezes e até mesmo experimentalmente ([KENZELMANN et al., 2002](#)).

## Conclusão

Neste trabalho vimos como usar diversos métodos da teoria quântica de campos e da física estatística para deduzir uma teoria efetiva que descreva cadeias de spins unidimensionais. Foi mostrado que para o caso de uma cadeia antiferromagnética a teoria efetiva que a descreve é o modelo sigma não linear, com um termo topológico. As implicações deste termo topológico aparecem quando é considerada a renormalização da teoria, onde é visto que cadeias de spin com  $S$  inteiro tem um gap de massa, e estão em uma única fase desordenada, e as cadeias com  $S$  semi-inteiro não tem um gap de massa, estando no ponto crítico, onde o comprimento de correlação é infinito. Esta constituiu a chamada conjectura de Haldane.



## Referências

- ABRAMOWITZ, M. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY, USA: Dover Publications, Inc., 1974. ISBN 0486612724. Citado na página 84.
- BREZIN, E.; ZINN-JUSTIN, J. (Ed.). *Field Theory Methods and Quantum Critical Phenomena*, (Les Houches 1988, Proceedings, Fields, strings and critical phenomena). North-Holland, [S.l.]: North-Holland, 1988. 563 p. Citado na página 31.
- ALTLAND A., P.; SIMONS, B. *Condensed Matter Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. ISBN 9780521845083. Citado na página 37.
- AUERBACH, A. *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. [S.l.]: Springer New York, 1998. (Graduate Texts in Contemporary Physics). ISBN 9780387942865. Citado na página 26.
- BLOCH, F. Zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, v. 61, n. 3, p. 206–219, Mar 1930. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01339661>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- FEYNMAN, R.; HIBBS, A. *Quantum mechanics and path integrals*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965. (International series in pure and applied physics). Citado na página 67.
- FRADKIN, E. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. (Field Theories of Condensed Matter Physics). ISBN 9780521764445. Citado 3 vezes nas páginas 14, 17 e 25.
- FRADKIN, E.; STONE, M. Topological terms in one- and two-dimensional quantum heisenberg antiferromagnets. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 38, p. 7215–7218, Oct 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.38.7215>>. Citado na página 57.
- GRADSHTEYN, I.; JEFFREY, A.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Academic Press, 1996. ISBN 9780122947568. Citado na página 84.
- HALDANE, F. D. M. Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnetic identification with the O(3) nonlinear sigma model. *Phys. Lett.*, A93, p. 464–468, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 58.
- HALDANE, F. D. M. Nonlinear field theory of large-spin heisenberg antiferromagnets: Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis néel state. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 50, p. 1153–1156, Apr 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.50.1153>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 58.

- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill, 1980. (International Series In Pure and Applied Physics). ISBN 9780486445687, 0486445682. Citado 3 vezes nas páginas 75, 80 e 85.
- KENZELMANN, M. et al. Properties of haldane excitations and multiparticle states in the antiferromagnetic spin-1 chain compound  $\text{csncl}_3$ . *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 66, p. 024407, Jun 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.024407>>. Citado na página 58.
- KLAUDER, J.; SKAGERSTAM, B. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*. [S.l.]: World Scientific, 1985. ISBN 9789971966522. Citado na página 18.
- KLEINERT, H. *Particles and Quantum Fields*. 1. ed. [S.l.]: WORLD SCIENTIFIC, 2016. Citado na página 85.
- KOGUT, J. B. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 51, p. 659–713, Oct 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.659>>. Citado na página 48.
- KOGUT, J. B.; STEPHANOV, M. A. *The Phases of Quantum Chromodynamics: From Confinement to Extreme Environments*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology). Citado na página 55.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Statistical Physics*. [S.l.]: Elsevier Science, 2013. ISBN 9780080570464. Citado na página 54.
- MONASTYRSKY, M. *Topology of gauge fields and condensed matter*. [S.l.: s.n.], 1993. Citado na página 44.
- MOREO, A. Conformal anomaly and critical exponents of heisenberg spin models with half-integer spin. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 36, p. 8582–8586, Dec 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.36.8582>>. Citado na página 58.
- NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 40.
- NASH, C.; SEN, S. *Topology and Geometry for Physicists*. [S.l.]: Dover Publications. (Dover books on mathematics). ISBN 9780486478524. Citado na página 38.
- PERELOMOV, A.; PERELOMOV, A. *Generalized Coherent States and Their Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986. (Modern Methods of Plant Analysis). ISBN 9780387159126. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 87.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. Citado na página 85.
- POLYAKOV, A. Interaction of goldstone particles in two dimensions. applications to ferromagnets and massive yang-mills fields. *Physics Letters B*, v. 59, n. 1, p. 79 – 81, 1975. ISSN 0370-2693. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 52.

- SACHDEV, S. *Quantum Phase Transitions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781139500210. Citado na página 30.
- SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780521864497, 9780511267208. Citado na página 79.
- WEINBERG, S. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521670531, 9780511252044. Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 83.
- WIGNER, E.; GRIFFIN, J. *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. [S.l.]: Academic Press, 1959. (Pure and applied Physics). Citado na página 18.
- ZIMAN, T.; SCHULZ, H. J. Are antiferromagnetic spin chains representations of the higher wess-zumino-witten models? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 59, p. 140–143, Jul 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.140>>. Citado na página 58.
- ZINN-JUSTIN, J. Quantum field theory and critical phenomena. *Int. Ser. Monogr. Phys.*, v. 113, p. 1–1054, 2002. Citado na página 53.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Integrais de Trajetória e Teoria Quântica de Campos

Neste revisados serão revisados conceitos fundamentais do formalismo de integrais de Trajetória, que é fundamental para a realização da conexão entre a física estatística e a teoria quântica de campos. Começaremos com a construção da integral de trajetória sob o contexto da mecânica quântica não relativística, onde serão discutidas as principais propriedades e implicações deste formalismo. Com isso poderemos então generalizar os resultados e ideias para o caso da teoria de campos.

Ao que concerne a teoria quântica de campos, faremos uma brevíssima revisão da teoria de campos escalares livres, onde deduziremos uma expressão exata para o propagador euclideano. Não trataremos de teorias interagentes aqui, visto que a teoria de perturbação, assim como a renormalização perturbativa, não são essenciais para este trabalho.

## A.1 Integrais de Trajetória na Mecânica Quântica

Ao tratar de um problema na mecânica quântica, é comum se fazer uso do chamado formalismo canônico, onde variáveis clássicas de um sistema são promovidas a operadores hermitianos, cujo espectro nos dá os valores observáveis do sistema. Esta é uma prescrição baseada diretamente no formalismo hamiltoniano da mecânica clássica, o que leva a muitos a se perguntarem se há uma forma de se produzir os mesmos resultados a partir do formalismo lagrangiano. De fato, a formulação por integrais de trajetória, desenvolvida por Feynman, nos dá uma prescrição lagrangiana da mecânica quântica, que é totalmente equivalente à formulação canônica.

Pode-se deduzir a integral de trajetória de um sistema sem fazer nenhuma menção ao formalismo canônico, como pode ser visto em (FEYNMAN; HIBBS, 1965). Optaremos aqui por uma abordagem baseada no formalismo canônico, onde a partir deste, será deduzida a integral de trajetória. Assim, consideremos um sistema quântico não relativístico descrito por um operador hamiltoniano  $\hat{H}(\hat{q}_i, \hat{p}_i)$ , como uma função dos operadores do momento,  $\hat{p}_i$ , e da posição  $\hat{q}_i$ , que devem obedecer às relações de comutação canônicas, dadas por<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Note que aqui omitimos  $\hbar$  da primeira relação de comutação, escolhendo o sistema de unidades naturais, onde o mesmo é igual a 1.

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0. \quad (\text{A.2})$$

Como os operadores  $\hat{q}_i$  comutam para qualquer  $i$ , é possível definir um conjunto completo de autoestados  $|q\rangle$ , com autovalores  $q_i$ :

$$\hat{q}_i |q\rangle = q_i |q\rangle \quad (\text{A.3})$$

Escolhemos esta base de autoestados como uma ortonormal, isto é, com o produto interno obedecendo:

$$\langle q|q'\rangle = \prod_i \delta(q_i - q'_i) \equiv \delta(q - q'). \quad (\text{A.4})$$

E como já dito, os autoestados  $|q\rangle$  formam um conjunto completo de vetores no espaço de Hilbert, que significa que os mesmos obedecem à relação de completudeza:

$$\mathbb{1} = \int \prod_i dq_i |q\rangle\langle q| \quad (\text{A.5})$$

De maneira similar, podemos definir um conjunto completo de autoestados de  $\hat{p}_1$ , denotados por  $|p\rangle$ , com autovalores dados por  $p_i$ . Este também é um conjunto de vetores ortonormais, e que obedecem à relação de completudeza da mesma maneira que vista em (A.5). Por fim, o produto escalar entre os autoestados de  $\hat{q}_i$  e  $\hat{p}_i$  é dado por

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_i e^{iq_i p_i} \quad (\text{A.6})$$

É importante notar aqui que estes são operadores na chamada representação de Schrödinger, que é tal que os estados do sistema evoluem no tempo, enquanto os observáveis, i.e., os operadores, se mantêm constantes. A evolução temporal de um vetor  $|q\rangle$  nesta representação é dada por

$$|q(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |q(0)\rangle, \quad (\text{A.7})$$

com  $e^{-i\hat{H}t}$  sendo o operador de evolução temporal, também denotado por  $U(t)$ . A contraparte desta é a representação de Heisenberg, onde os estados se mantêm estáticos, enquanto os operadores evoluem no tempo. Nesta representação os operadores

$\hat{q}_i$  e  $\hat{p}_i$  evoluem como:

$$\hat{q}_i(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_i e^{i\hat{H}t} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{p}_i(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{p}_i e^{i\hat{H}t} \quad (\text{A.9})$$

Os autoestados nesta representação são denotados por  $|q; t\rangle$  e  $|p; t\rangle$ . Note que aqui o  $t$  no ket é usado como um simples rótulo, indicando que este é o instante em que o sistema foi medido. Estes estados também formam um conjunto completo e ortonormal. A relação entre este conjunto de estados e os da representação de Schrödinger é dada por

$$|q; t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle \quad (\text{A.10})$$

$$|p; t\rangle = e^{i\hat{H}t} |p\rangle \quad (\text{A.11})$$

Agora que definimos as nossas quantidades observáveis, devemos nos voltar ao problema dinâmico central da mecânica quântica, que consiste em calcular qual é a probabilidade do sistema transitar de um dado estado, digamos,  $|q\rangle$ , em um instante inicial  $t$ , para um outro estado  $|q'\rangle$ , em um instante posterior  $t'$ . Na representação de Schrödinger, esta probabilidade é dada pelo módulo ao quadrado do seguinte produto interno:

$$\langle q(t)|q'(t')\rangle = \langle q'| e^{-i\hat{H}(t'-t)} |q\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Na representação de Heisenberg, temos simplesmente  $\langle q'; t'|q; t\rangle$ . Esta quantidade é o propagador, também chamado de amplitude de probabilidade, ou amplitude de transição. A partir desta quantidade iremos deduzir a integral de trajetória do sistema.

Vamos considerar um caso em que  $t$  e  $t'$  estão infinitesimalmente próximos, o que nos permite escrever  $t' = t + \delta t$ . Assim, a amplitude de transição é reescrita como

$$\langle q'; t + \delta t|q; t\rangle = \langle q'| e^{-i\hat{H}\delta t} |q\rangle \quad (\text{A.13})$$

A hamiltoniana do sistema, como já foi mencionado, é uma função de  $\hat{p}_i$  e  $\hat{q}_i$ , que a princípio, pode ter uma forma arbitrária com produtos de  $\hat{q}_i$ 's e  $\hat{p}_i$ 's, e é possível, usando as relações de comutação canônicas, mudar o ordenamento dos operadores. Será adotada aqui a convenção onde todos os  $\hat{q}_i$ 's estão à esquerda dos  $\hat{p}_i$ 's. Com esta convenção, os  $\hat{q}_i$ 's na hamiltoniana que aparece na equação (A.12) podem ser substituídos pelos seus respectivos autovalores. Note que isto só é possível

devido o caráter linear do operador de evolução temporal,  $e^{-i\hat{H}\delta t}$ , que é expandido somente na primeira ordem em  $\delta t$ . Para lidar com os termos de  $\hat{p}_i$  na hamiltoniana da mesma maneira, tomaremos a relação de completeza, para expandir os estados  $|q\rangle$  na base de  $|p\rangle$ , nos dando a seguinte expressão:

$$\langle q'; t + \delta t | q; t \rangle = \int \prod_i dp_i \langle q' | \exp \left[ -i\hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t)) \right] | p \rangle \langle p | q \rangle \quad (\text{A.14})$$

Aqui foi usado o fato de que a hamiltoniana também se transforma como (A.8), o que permite escrevê-la como uma função dos operadores na representação de Heisenberg. Com a convenção de ordenamento dos operadores  $\hat{p}_i$  e  $\hat{q}_i$  e o produto entre  $|q\rangle$  e  $|p\rangle$  dados, podemos reescrever a equação (A.14) como uma expressão que depende apenas dos autovalores de  $\hat{p}_i$  e  $\hat{q}_i$ :

$$\langle q'; t + \delta t | q; t \rangle = \int \prod_i \frac{dp_i}{2\pi} \exp \left[ -iH(q', p)\delta t + i \sum_i (q'_i - q_i)p_i \right], \quad (\text{A.15})$$

onde cada integral em  $p_i$  é calculada de  $-\infty$  e  $\infty$ .

Agora que temos uma expressão para o propagador calculado em um intervalo de tempo infinitesimal, podemos calcular o caso mais geral para um intervalo de tempo finito. Para este realizamos uma discretização do intervalo  $[t, t']$  em  $N$  passos  $\tau_k$ , que definem a sequência:  $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, t'$ ; onde o intervalo entre dois passos é dado por:

$$\tau_{k+1} - \tau_k = \delta\tau = \frac{t' - t}{N + 1} \quad (\text{A.16})$$

Com esta partição do intervalo de tempo, é possível inserir  $N$  relações de completeza no propagador  $\langle q'; t' | q; t \rangle$ , obtendo

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int \prod_{k=1}^N dq_k \langle q'; t' | q_N; \tau_N \rangle \langle q_N; \tau_N | q_{N-1}; \tau_{N-1} \rangle \dots \langle q_1; \tau_1 | q; t \rangle \quad (\text{A.17})$$

Agora podemos inserir no lugar de cada termo  $\langle q_{k+1}; \tau_{k+1} | q_k; \tau_k \rangle$  a expressão que foi encontrada para o propagador com o tempo infinitesimal (A.15), nos dando a seguinte expressão para a amplitude de transição entre  $t$  e  $t'$ :

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle = & \int \left[ \prod_{k=1}^N \prod_i dq_{i,k} \right] \left[ \prod_{k=1}^N \prod_i \frac{dq_{i,k}}{2\pi} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{N+1} \left[ \sum_i (q_{i,k} - q_{i,k-1}) p_{i,k-1} - \delta\tau H(q_k, p_{k-1}) \right] \right\}, \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

onde  $q_{i,0} = q_i$  e  $q_{i,N+1} = q'_i$ .

É importante ressaltar aqui estas são variáveis em uma rede discreta, e não necessariamente são funções suaves. Ao tomar o limite para o contínuo, isto é, quando  $\delta\tau \rightarrow 0$  (e  $N \rightarrow \infty$ ), torna-se possível definir as variáveis acima como funções de interpolação suaves:

$$q_{i,k} \equiv q_i(\tau_k) \quad (\text{A.19})$$

$$p_{i,k} \equiv p_i(\tau_k) \quad (\text{A.20})$$

Com esta definição, podemos aproximar a diferença  $q_{i,k} - q_{i,k-1}$  usando uma expansão em Taylor na primeira ordem em  $\delta\tau$ :

$$q_{i,k} - q_{i,k-1} = \dot{q}_i(\tau_k)\delta\tau + \mathcal{O}(\delta\tau^2) \quad (\text{A.21})$$

Tomando agora o limite para o contínuo, e usando a expressão acima, o argumento da exponencial em (A.18) se torna apenas uma integral em  $\tau$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^{N+1} \left[ \sum_i (q_{i,k} - q_{i,k-1}) p_{i,k-1} - \delta\tau H(q_k, p_{k-1}) \right] \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^{N+1} \left[ \sum_i \dot{q}_i(\tau_k) p_i(\tau_k) - \delta\tau H(q(\tau_k), p(\tau_k)) \right] \delta\tau + \mathcal{O}(\delta\tau^2) \\ &= \int_t^{t'} \left[ \sum_i \dot{q}_i(\tau) p_i(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right] d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Além disso, devemos considerar que ao tomar o limite para o contínuo, as integrais provenientes das relações de completude devem ser definidas como integrais *sobre* as funções  $q(\tau)$  e  $p(\tau)$ , isto é, teremos uma integração funcional sobre estas funções. A medida de integração é então redefinida no limite para o contínuo como:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta\tau \rightarrow 0}} \int \prod_{i,k} dq_{i,k} \prod_{i,k} \frac{dp_{i,k}}{2\pi} = \int \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau). \quad (\text{A.23})$$

Onde aqui absorvemos a constante  $2\pi$  na definição da medida  $\mathcal{D}p(\tau)$ . Devemos ressaltar que o lado direito de (A.23) não é uma medida bem definida matematicamente, sendo assim apenas uma expressão formal. O cálculo explícito destas integrais funcionais é de fato realizado do tempo discretizado, onde depois é tomado o limite formal para o contínuo.

Por fim, a amplitude de transição, ou propagador, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int_{\substack{q_i(t)=q_i \\ q_i(t')=q'_i}} \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) \exp \left\{ \int_t^{t'} \left[ \sum_i \dot{q}_i(\tau) p_i(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right] d\tau \right\} \quad (\text{A.24})$$

Esta é a *integral de trajetória*, que recebe esta nomenclatura pois estamos integrando sobre todos os "caminhos" possíveis  $q(\tau)$ , de  $q(t) = q$  até  $q(t') = q'$ , além de todas as configurações possíveis de  $p(\tau)$ , sendo assim uma integração calculada sobre configurações no espaço de fase. O primeiro detalhe a ser observado nesta expressão é que estamos calculando o propagador a partir de quantidades puramente *clássicas*, em completo contraste com o formalismo canônico, baseado na álgebra de operadores hermitianos. Outro detalhe interessante que surge desta é a forma do argumento na exponencial, que é uma soma de termos do tipo  $p\dot{q} - H(q, p)$ . A princípio podemos tratar esta expressão apenas como a transformada de Legendre da função hamiltoniana clássica, o que nos dá a função lagrangiana, e conseqüentemente a integral se torna simplesmente a ação clássica. Porém, esta é uma consideração equivocada, pois os momentos que aparecem na integral são funções quaisquer, que a princípio não são os momentos canonicamente conjugados às coordenadas  $q$ . Assim, de maneira geral, não podemos escrever a integral de trajetória em termos da ação clássica.

Entretanto, esta dificuldade pode ser contornada se considerarmos uma classe de Hamiltonianas que são quadráticas nos momentos. De fato, esta é uma forma muito comum da função Hamiltoniana, sendo encontrada em grande parte dos sistemas físicos conhecidos. Tomaremos então a seguinte forma geral para  $H(q, p)$ :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} A_{nm}(q) p_n p_m + \sum_n B_n(q) p_n + C(q), \quad (\text{A.25})$$

com a matriz  $A$  sendo real, simétrica, positiva, e não singular<sup>2</sup>. O argumento da exponencial em (A.24) é então reescrito como:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t'} d\tau [\dot{q}(\tau) p(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))] = \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n,m} \int_t^{t'} d\tau d\tau' A_{nm}(q) p_n(\tau) p_m(\tau') + \sum_n \int_t^{t'} d\tau B_n(q) p_n(\tau) + \int_t^{t'} d\tau C(q) \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

Onde redefinimos as quantidades  $A$  e  $B$  encontradas em (A.25) como:

<sup>2</sup> Podemos encarar  $A_{nm}$  como a métrica.

$$A_{nm}(q) \equiv A_{nm}(q)\delta(\tau - \tau') \quad (\text{A.27})$$

$$B_n(q) \equiv B_n(q) - \dot{q}(\tau) \quad (\text{A.28})$$

Com esta forma no argumento da exponencial, temos uma integração funcional gaussiana, com um termo linear. Para efetuar esta integração funcional, é necessário dar um passo atrás, considerando o tempo particionado em intervalos infinitesimais, de tal maneira que tenhamos um produto de integrais gaussianas, onde a integral em  $d\tau$  volta a ser uma soma. A forma geral das integrais que devemos calcular é dada por:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_n dp_n \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{n,m} A_{nm} p_m p_n - i \sum_n B_n p_n - iC \right\} \quad (\text{A.29})$$

O resultado desta integral é dado por<sup>3</sup>:

$$\mathcal{I} = \left[ \text{Det} \left( \frac{iA}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{n,m} B_n B_m A_{nm}^{-1} - C \right\} \quad (\text{A.30})$$

Este é um resultado que a princípio não nos ajuda na nossa análise, porém, podemos reescrevê-lo de uma maneira mais adequada aos nossos propósitos. Para isso, definimos a função  $F(p)$  como

$$F(p) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} A_{nm} p_m p_n + \sum_n B_n p_n + C \quad (\text{A.31})$$

De maneira que o argumento da exponencial em (A.30) se torna simplesmente  $-iF(p)$ . Um resultado importante que concerne integrais da forma de (A.30) é que podemos escrever o seu resultado em termos dos pontos estacionários de  $F(p)$ , denotados por  $\bar{p}$ :

$$\bar{p}_n = - \sum_m A_{nm}^{-1} B_m, \quad (\text{A.32})$$

$$\left. \frac{\partial F(p)}{\partial p_n} \right|_{p_n = \bar{p}_n} = 0. \quad (\text{A.33})$$

Usando o valor do ponto estacionário, é simples mostrar que o valor da integral pode ser reescrito de (A.30) para a forma mais simples:

$$\mathcal{I} = \left[ \text{Det} \left( \frac{iA}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp(-iF(\bar{p})) \quad (\text{A.34})$$

<sup>3</sup> A prova pode ser vista em (WEINBERG, 2005)

Em síntese, temos que integrais gaussianas podem ser calculadas, a menos de um fator constante multiplicativo, tomando-se a variável de integração no ponto estacionário do argumento da exponencial. A prova e os detalhes deste resultado podem ser vistos em (WEINBERG, 2005). Assim, para uma hamiltoniana da forma geral (A.27), o resultado da integração em  $n$  componentes do momento, em um instante de tempo, é dada por:

$$\mathcal{I} = \left[ \text{Det} \left( \frac{iA}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp \left( -i \sum_n \dot{q}_n \bar{p}_n - H(q, \bar{p}) \right) \quad (\text{A.35})$$

A condição para que  $\bar{p}$  seja um ponto estacionário se traduz agora para:

$$\left. \frac{\partial}{\partial p} (p\dot{q} - H(q, p)) \right|_{p=\bar{p}} = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \right|_{p=\bar{p}} = \dot{q}. \quad (\text{A.37})$$

Este resultado indica que o ponto estacionário,  $\bar{p}$ , é justamente o momento canonicamente conjugado à coordenada generalizada  $q$ , que é exatamente a condição necessária para que possamos escrever a função lagrangiana no lugar da hamiltoniana na integral de trajetória. Assim, ao tomar o produto das integrais no tempo discretizado, e tomando o limite para o contínuo, chegamos à seguinte integral de trajetória:

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int_{\substack{q_i(t)=q_i \\ q_i(t')=q'_i}} \mathcal{D}q(\tau) \exp \left\{ \int_t^{t'} [L(q(\tau), \dot{q}(\tau))] d\tau \right\}, \quad (\text{A.38})$$

onde o fator do determinante foi absorvido na definição da medida de integração  $\mathcal{D}q$ . Reconhecemos agora o argumento da exponencial como a ação clássica do sistema. É importante ressaltar que para que seja possível escrever a função lagrangiana, deve-se ter a equação (A.37) como uma invertível.

A partir deste ponto iremos admitir esta forma para a integral de trajetória, sem perda de generalidade, pois como mencionado, a classe de hamiltonianas que possibilita esta transição para a forma lagrangiana é comum à grande parte dos sistemas físicos. Esta forma é de fato a encontrada por Feynman, por meios diferentes dos mostrados aqui. Por este motivo, esta também é chamada de integral de Feynman.

A interpretação da integral de trajetória agora é mais simples de se visualizar, onde como o próprio nome já diz, estamos realizando uma soma sobre todos os

infinitos caminhos possíveis que a o nosso sistema pode realizar, com a condição que o ponto inicial seja  $q$ , em um instante  $t$ , e o final seja  $q'$  em um instante  $t'$ . Isto representa o fato que o conceito clássico de uma única trajetória bem definida não tem validade na mecânica quântica.

Uma das características mais notórias deste formalismo é justamente a sua conexão com a mecânica clássica. Para visualizarmos melhor esta relação, abandonaremos por ora o sistema de unidades naturais, e assim a amplitude de transição entre  $q$  e  $q'$  é reescrita com um fator  $\hbar$ :

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[q]\right\}, \quad (\text{A.39})$$

onde os limites da integral estão subentendidos como  $q = q(t)$  e  $q' = q(t')$ . Note que o peso desta soma é uma fase, e quando tomamos o limite clássico, isto é, quando  $\hbar \rightarrow 0$ , o termo de fase oscila muito, de tal maneira que a integral é zero se calculada em um pequeno intervalo  $[q, q + \delta q]$ , a menos que  $q$  seja um ponto crítico do argumento da exponencial. Esta análise consiste na chamada *aproximação por fases estacionárias*, cujos detalhes podem ser vistos em (ITZYKSON; ZUBER, 1980). Desta maneira, no limite clássico, as únicas contribuições que não se cancelam na integral são aquelas que obedecem à condição

$$\frac{\delta S[q(t)]}{\delta q(t)} = 0. \quad (\text{A.40})$$

Esta é exatamente a condição de extremo da ação, que define a dinâmica clássica do sistema. Assim, ao tomar o limite  $\hbar \rightarrow 0$ , de todas as infinitas trajetórias que o sistema quântico poderia percorrer, a única que contribui é aquela que satisfaz as equações clássicas de movimento. Este resultado corrobora a nossa interpretação inicial da integral de trajetória como uma "soma sobre caminhos".

O formalismo de integrais de trajetória nos permite ir além do cálculo de amplitudes de transição, nos permitindo também calcular elementos de matrizes entre os estados  $\langle q'; t' |$  e  $| q; t \rangle$ . Sendo assim, considere um operador  $\mathcal{O}(\hat{p}, \hat{q})$ , onde será adotada a convenção em que todos os operadores  $\hat{p}$  estão à esquerda dos operadores  $\hat{q}$ . Assim, vamos inserir este operador na amplitude calculada entre  $t$  e  $\delta t$ :

$$\begin{aligned} \langle q'; t + \delta t | \mathcal{O}(\hat{p}(t), \hat{q}(t)) | q; t \rangle &= \int \prod_i dp_i \langle q' | e^{-iH(\hat{q}, \hat{p})\delta t} | p \rangle \langle p | \mathcal{O}(\hat{p}(t), \hat{q}(t)) | q \rangle \\ &= \int \prod_i \frac{dp_i}{2\pi} \exp\left\{-iH(q', p)\delta t + i \sum_i (q'_i - q_i)p_i\right\} \mathcal{O}(q, p). \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Onde o procedimento foi essencialmente o mesmo que o descrito na dedução de (A.15). Aqui vemos a utilidade de se tomar a convenção de ordenamento para o operador  $\mathcal{O}(\hat{q}, \hat{p})$ , que agora é simplesmente uma função dos autovalores  $q$  e  $p$ . A partir daqui a dedução desta fórmula para um tempo finito é direta.

Resultado acima pode ainda ser generalizado para o caso em que temos um produto de diferentes operadores:

$$\mathcal{O}_a(\hat{p}(t_a), \hat{q}(t_a)) \mathcal{O}_b(\hat{p}(t_b), \hat{q}(t_b)) \cdots ,$$

definidos com o seguinte ordenamento  $t_a > t_b > \cdots$ .

Ao inserir este produto de operadores no elemento de matriz, observamos que se, por exemplo,  $t_a$  é definido no intervalo  $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ , podemos inserimos o operador  $\mathcal{O}_a$  entre  $\langle q_{k+1}; \tau_{k+1} |$  e  $|q_k; \tau_k\rangle$ . Seguindo então os mesmos passos já realizados anteriormente, encontramos a fórmula geral para a integral de trajetória de um produto de operadores:

$$\begin{aligned} & \langle q'; t' | \mathcal{O}_a(\hat{p}(t_a), \hat{q}(t_a)) \mathcal{O}_b(\hat{p}(t_b), \hat{q}(t_b)) \cdots |q; t\rangle \\ &= \int \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) \mathcal{O}_a(p(t_a), q(t_a)) \mathcal{O}_b(p(t_b), q(t_b)) \cdots \times \\ & \quad \times \exp \left\{ \int_t^{t'} \left[ \sum_i \dot{q}_i(\tau) p_i(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right] d\tau \right\} \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

Como já esperávamos, o resultado não depende mais dos operadores, mas sim de funções  $\mathcal{O}(p, q)$ , e este fato nos mostra que o ordenamento temporal que impomos para os operadores não é mais necessário, pois o lado direito de (A.42) não faz nenhuma menção a este ordenamento. Assim, se este cálculo for realizado com um ordenamento temporal qualquer, teríamos a mesma integral de trajetória. Este resultado nos mostra que ao calcularmos elementos de matriz, o resultado sempre estará com o tempo ordenado. Isso nos permite reescrever o lado direito do resultado acima como:

$$\langle q'; t' | T [\mathcal{O}_a(\hat{p}(t_a), \hat{q}(t_a)) \mathcal{O}_b(\hat{p}(t_b), \hat{q}(t_b)) \cdots] |q; t\rangle \quad (\text{A.43})$$

Onde  $T$  é apenas um símbolo indicando o ordenamento temporal.<sup>4</sup> Este é um resultado extremamente importante para a teoria quântica de campos, como discutiremos mais adiante. No caso em que os operadores  $\mathcal{O}$  são funções apenas

<sup>4</sup> No caso de um produto de dois operadores, por exemplo, ordenamento  $T$  é definido por

$$T[A(t_1)B(t_2)] \equiv A(t_1)B(t_2)\theta(t_1 - t_2) + B(t_2)A(t_1)\theta(t_2 - t_1),$$

com  $\theta(t)$  sendo a função de Heaviside. A generalização para um produto de  $N$  operadores é trivial.

dos  $\hat{q}$ 's, e considerando uma hamiltoniana da forma (A.25), é possível integrar os momentos, nos dando uma prescrição lagrangiana da equação (A.42).

Em diversas situações é mais útil calcular o elemento de matriz entre estados mais gerais, ao invés dos autoestados das coordenadas. Suponha então, por exemplo, que o sistema se encontre no ground state,  $|0\rangle$ , e que queremos calcular a probabilidade do mesmo permanecer neste estado. Além disso, é interessante realizar este cálculo para um caso em que o sistema está no ground state em um tempo remotamente distante,  $-t \rightarrow -\infty$ , e volta para o mesmo estado após um tempo muito longo,  $t \rightarrow \infty$ <sup>5</sup>. A motivação para estas considerações específicas surge da necessidade de calcular transições em processos de espalhamento, como será discutido com mais detalhes na próxima seção. A primeira pergunta que surge ao considerarmos este elemento de matriz é: como podemos reescrever a equação (A.43) com  $|0\rangle$  ao invés de  $|q\rangle$ ?

Para realizar esta mudança, considere o conjunto completo de autoestados da Hamiltoniana,  $\{|n\rangle\}$ , cujos autovalores são dados por:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle; \quad \hat{H} |0\rangle = E_0 |0\rangle \quad (\text{A.44})$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar  $E_0 = 0$ . Assim, como este é um conjunto completo de estados, é possível realizar a seguinte operação:

$$|q; t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle = \sum_{n=0} e^{i\hat{H}t} |n\rangle \langle n|q\rangle = |0\rangle \langle 0|q\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{iE_n t} |n\rangle \langle n|q\rangle \quad (\text{A.45})$$

Agora, tomamos o limite para  $t \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ , com  $\varepsilon$  pequeno e positivo, que é o mesmo que tomar uma continuação analítica infinitesimal. Neste limite, todos os termos com  $|n\rangle \neq |0\rangle$  são exponencialmente suprimidos, o que nos dá a expressão:

$$|0\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{|q; t\rangle}{\langle 0|q\rangle} \quad (\text{A.46})$$

Com expressão para o bra  $\langle 0|$  é escrita de maneira similar, em termos de  $|q'\rangle$  desta vez. Com isso, o valor esperado do vácuo para um produto de operadores  $\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \dots$  é escrito como:

$$\langle 0| T [\hat{\mathcal{O}}_a(t_a) \hat{\mathcal{O}}_b(t_b) \dots] |0\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle q'; -t| T [\hat{\mathcal{O}}_a(t_a) \hat{\mathcal{O}}_b(t_b) \dots] |q; t\rangle}{\langle q'|0\rangle \langle 0|q\rangle} \quad (\text{A.47})$$

<sup>5</sup> Como é tomado o limite para o tempo indo para o infinito, podemos, sem perda de generalidade, escolher o intervalo como  $[-t, t]$ , ao invés de  $[t, t']$

Esta equação pode ser simplificada se usarmos a definição (A.46) para escrever

$$\mathbb{1} = \langle 0|0 \rangle = \frac{1}{\langle q'|0 \rangle \langle 0|q \rangle} \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle q'; -t|q; t \rangle \quad (\text{A.48})$$

O que finalmente nos dá o valor esperado do vácuo para um produto de operadores:

$$\langle 0| T [\hat{\mathcal{O}}_a(t_a) \hat{\mathcal{O}}_b(t_b) \cdots] |0 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int \mathcal{D}q \mathcal{O}_a(t_a) \mathcal{O}_b(t_b) \cdots \exp\left\{i \int_{-t}^t d\tau L(q, \dot{q})\right\}}{\int \mathcal{D}q \exp\left\{i \int_{-t}^t d\tau L(q, \dot{q})\right\}}. \quad (\text{A.49})$$

Onde aqui, por simplicidade, foram considerados operadores que não dependem do momento  $p$ , assim como uma hamiltoniana quadrática, o que nos permite escrever o argumento da exponencial como a ação. Por ora não discutiremos a real utilidade desta fórmula, deixando a discussão para o contexto da teoria quântica de campos, onde o cálculo deste valor esperado é essencial para a extração de quantidades observáveis na teoria.

Por fim, antes de deixarmos a mecânica quântica de lado, e prosseguir para o caso da teoria de campos, é importante fazer uma observação acerca da validade matemática da formulação de integrais de trajetória na mesma. Note que quando consideramos a equação (A.15), temos uma exponencial complexa, e para manter a convergência da integral, é necessário realizar uma continuação analítica da mesma, para um tempo imaginário <sup>6</sup> $\tau$ , definido por  $\tau = it$ . Esta operação é chamada de *rotação de Wick*, e fornece uma maneira matematicamente mais consistente de se calcular as integrais de trajetória. Em teoria de campos esta é uma operação de fato muito usada, como mostraremos na seção seguinte.

## A.2 Integrais de Trajetória na Teoria Quântica de Campos

Agora que temos o formalismo de integrais de trajetória bem construído na mecânica quântica, podemos voltar as nossas atenções para a teoria quântica de campos. Esta é uma área extremamente vasta e repleta de detalhes técnicos não triviais. Como o objetivo aqui é apenas realizar uma exposição breve e despretensiosa, os detalhes técnicos serão ignorados, favorecendo discussões quantitativas.

A teoria quântica de campos pode ser encarada como uma generalização da mecânica quântica para infinitos graus de liberdade. Assim, ao invés de tratar de

<sup>6</sup> Não confundir com a  $\tau$  em (A.24), que é apenas uma variável de integração! A partir daqui usaremos  $\tau$  estritamente para o tempo imaginário.

variáveis canônicas como o momento e a posição, iremos quantizar campos clássicos, isto é, configurações contínuas com infinitos graus de liberdade no espaço-tempo.

Uma maneira de se realizar isto é por meio da quantização canônica, porém, é mais útil para os nossos propósitos tratar da teoria quântica de campos sob o ponto de vista do formalismo de integrais de trajetória. Efetivamente, este é o método mais útil para se trabalhar com a teoria quântica de campos em geral, devida a fácil manipulação de diversas quantidades, ao contrário da quantização canônica. Além disso, a formulação por integrais de trajetória fornece uma interpretação de fácil visualização do limite clássico, aos moldes do que foi apresentado na seção anterior.

Sem perda de generalidade, consideraremos aqui apenas campos escalares, devida a sua simplicidade de manipulação, que denotaremos por  $\phi(x)$ . Além disso, está implícito aqui que  $\phi(x)$  é um campo relativístico, definido sobre as coordenadas  $x^\mu$  do espaço-tempo de Minkowski. O tratamento para campos espinoriais ou vetoriais, assim como campos de calibre, pode ser visto em (SREDNICKI, 2007). Como campos são configurações que se estendem no espaço tempo de maneira contínua, a hamiltoniana terá o formato de uma integral sobre uma densidade:

$$H = \int d^4x \mathcal{H}(\phi(x), \pi(x)), \quad (\text{A.50})$$

com  $\pi(x)$  sendo o momento canonicamente conjugado ao campo  $\phi(x)$ . A densidade  $\mathcal{H}$  é a *densidade Hamiltoniana* do sistema, e por abuso de linguagem, é quase sempre chamada simplesmente de hamiltoniana.

Analogamente ao que foi realizado para a mecânica quântica, a integral de trajetória é construída a partir da amplitude de transição entre duas configurações de campo. Para isso, definimos o conjunto  $\{|\phi(x)\rangle\}$  como um conjunto completo de autoestados do campo, que são análogos ao conjunto de autoestados das coordenadas na mecânica quântica. Para realizar o cálculo desta amplitude de transição, o espaço-tempo é discretizado, formando uma rede com espaçamento  $\delta x$ . A dedução da integral de trajetória para este caso é feita em completa analogia com a dedução na mecânica quântica, e sem perda de generalidade, consideraremos apenas hamiltonianas  $\mathcal{H}$  que sejam quadráticas, o que possibilita escrever a amplitude de transição da seguinte maneira:

$$\langle \phi(\mathbf{x}', t') | \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = \int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}\right\}, \quad (\text{A.51})$$

onde a medida de integração é definida como:

$$\mathcal{D}\phi(x) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta x \rightarrow 0}} \prod_i^N d\phi(x_i). \quad (\text{A.52})$$

Porém, em teoria quântica de campos é mais útil calcular transições do vácuo para o vácuo<sup>7</sup>, por diversos motivos, sendo o mais notório a necessidade do cálculo de amplitudes de espalhamento. Em um típico problema de espalhamento, um estado, que descreve um certo conjunto de partículas em  $t \rightarrow -\infty$  transita para outro estado em  $t \rightarrow \infty$ , que pode descrever um conjunto completamente diferente de partículas. A amplitude de transição para um problema deste tipo é chamada de matriz-S. Um dos resultados mais importantes que envolvem o a matriz-S, e de fato um dos mais importantes de toda a teoria quântica de campos, nos diz que a amplitude de espalhamento pode ser reduzida, além de outros termos conhecidos *a priori*, em um produto de valores esperados do vácuo. Esta é a fórmula de redução LSZ, que consiste em um resultado extremamente útil, pois reduz o cálculo de quantidades físicas importantes ao simples problema (a princípio) de calcular os valores esperados do vácuo, comumente chamados de funções de correlação, nome que adotaremos daqui em diante. Este é um resultado não trivial, que pode ser visto com detalhes em (ITZYKSON; ZUBER, 1980).

Por um processo similar ao que foi realizado para se deduzir (A.49), é possível passar da descrição em termos da base dos autoestados do campo para o vácuo, e assim, podemos escrever o valor esperado de um produto de campos no vácuo por:

$$\langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}\}}. \quad (\text{A.53})$$

O lado direito desta equação é uma função das coordenadas  $x_1 \cdots x_n$ , assim o denotaremos por  $G(x_1, \dots, x_n)$ . Agora introduziremos uma maneira mais simples e formal de se calcular essas funções de correlação, baseada na definição do seguinte funcional:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int d^4x [\mathcal{L} + \phi(x)J(x)]\right\} \quad (\text{A.54})$$

Este é o *funcional gerador* das funções de correlação. Com este funcional, as funções de correlação podem ser escritas como:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (\text{A.55})$$

Esta é uma afirmação que pode ser diretamente verificada usando a definição de  $Z[J]$  e de  $G(x_1, \dots, x_n)$ . O campo  $J(x)$  aqui aparece apenas como um artifício que possibilita o cálculo das funções de correlação a partir de  $Z[J]$ , mas ele carrega

<sup>7</sup> O estado de vácuo é tal que o sistema não tem partículas, sendo denotado por  $|0\rangle$

um significado físico por trás, sendo interpretado como uma fonte externa que gera as excitações do campo  $\phi(x)$ .

Para tornar esta construção mais palatável, vamos considerar agora o exemplo de um campo escalar livre, cuja ação é dada por

$$\mathcal{S}_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ (\partial_\mu \phi(x))^2 - m^2 \phi^2(x) \right] \quad (\text{A.56})$$

Podemos reescrever  $\mathcal{S}_0$  de outra maneira, integrando por partes e eliminando o termo de bordo. Após este cálculo, a ação é dada por:

$$\mathcal{S}_0[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\partial^2 + m^2) \phi(x) \quad (\text{A.57})$$

Aqui reconhecemos o termo entre os campos  $\phi$  como o operador diferencial de Klein-Gordon, que define a equação do mesmo nome que rege a dinâmica clássica do sistema <sup>8</sup>. Esta forma da ação se demonstrará extremamente útil para as nossas análises.

Para se deduzir a função de correlação do campo escalar livre, devemos definir o funcional gerador da teoria, e usar a equação (A.55) para extrair  $G(x_1, \dots, x_n)$ . Porém, é necessário ser cuidadoso nesta análise. Como já foi ressaltado no final da seção anterior, os cálculos com integrais de trajetória não são geralmente bem definidos sem uma continuação analítica, o que motivou o uso do limite  $t \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ , por exemplo. Aqui será considerado um caminho diferente, tomando-se uma rotação de Wick:

$$t \longrightarrow it = \tau$$

É interessante notar que ao realizar esta operação, mudamos a métrica do espaço de Minkowski, passando para uma descrição *Euclideana*, onde a métrica é definida por  $(1, 1, 1, 1)$ . Aqui esta operação será usada apenas como um artifício para a realização dos cálculos, onde no final voltaremos à prescrição no espaço de Minkowski.

Assim, com a ação da forma (A.57), e considerando o tempo imaginário, o gerador funcional é escrito como:

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int d^4x \phi(x) \left[ (-\partial^2 + m^2) \right] \phi(x) - \int d^4x \phi(x) J(x) \right\} \quad (\text{A.58})$$

<sup>8</sup> Na presença da fonte externa, esta equação é dada por:

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = J(x)$$

O subscripto em  $Z_E$  ressalta que este é o funcional gerador euclidiano. Podemos reescrever este funcional com o uso da função  $K_E(x, y)$ , definida por:

$$K_E(x, y) = \delta^4(x - y)(-\partial^2 + m^2), \quad (\text{A.59})$$

cuja inversa é definida por:

$$\int d^4y K_E(x, y)K_E^{-1}(y, x) = \delta^4(x - y) \quad (\text{A.60})$$

Assim, em termos de  $K(x, y)$ , o gerador funcional é dado por:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ \int d^4x d^4y \phi(x)K_E(x, y)\phi(y) - \int d^4x \phi(x)J(x) \right\} \quad (\text{A.61})$$

Esta é uma integral que pode ser resolvida exatamente, nos dando, a menos de fatores de normalização, o seguinte resultado:

$$Z_E[J] = Z_E[0] \exp\left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)K_E^{-1}(x, y)J(y) \right\} \quad (\text{A.62})$$

Por fim, usando a definição da função de correlação como em (A.55), pode-se calcular, por exemplo, a função de dois pontos:

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{Z_E[0]} \frac{\delta^2 Z_E[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \quad (\text{A.63})$$

Derivando funcionalmente a equação (A.62), temos:

$$\frac{\delta^2 Z_E[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = K_E^{-1}(x_1, x_2)Z_E[J] + \left[ \int K_E^{-1}(x, x_1)J(x)dx \int K_E^{-1}(x, x_2)J(x)dx \right] Z_E[J] \quad (\text{A.64})$$

Tomando  $J = 0$ , e dividindo por  $Z_E[0]$ , temos a expressão para a função de correlação de dois pontos do campo escalar livre:

$$G_E(x_1, x_2) = K_E^{-1}(x_1, x_2) \quad (\text{A.65})$$

Como  $K_E$  é nada mais que o operador diferencial de Klein-Gordon, é fácil ver aqui que a função de correlação  $G(x_1, x_2)$  é a *Função de Green* deste operador, definida como a inversa do mesmo, por meio de (A.60). Este fato justifica a notação usada para as funções de correlação. Uma propriedade marcante da função  $G(x_1, x_2)$  é que a mesma só dependem da distância entre os pontos no espaço-tempo, podendo ser denominada por  $G(x_1 - x_2)$ , como iremos fazer daqui em diante. É possível

escrever a função de green do campo livre explicitamente, tomando a transformada de Fourier da sua definição e resolvendo a equação algébrica, resultando em:

$$G_E(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x_1 - x_2)}}{p^2 + m^2} \quad (\text{A.66})$$

Para voltar ao espaço-tempo de Minkowski, o tempo é tomado como real novamente, por meio de uma rotação de Wick inversa. O resultado com o tempo real é dado por:

$$G(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\text{A.67})$$

A origem do termo  $i\varepsilon$  é não trivial, e é mais facilmente vista se os cálculos forem realizados *a priori* no espaço de Minkowski, tomando uma continuação analítica como feito em (A.46), por exemplo<sup>9</sup>. A função de green escrita nesta forma é o conhecida como o propagador de Feynman, ou o propagador ordenado temporalmente, e é geralmente denotada por.

$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \} | 0 \rangle = G(x_1 - x_2) \equiv i\Delta_F(x_1, x_2). \quad (\text{A.68})$$

Embora essa quantidade seja mais importante para a teoria de campos relativísticos, vamos nos voltar por ora ao propagador euclideano, cujas propriedades matemáticas são mais facilmente tratáveis que a sua contraparte no tempo real.

Assim sendo, integraremos  $G_E(x_1 - x_2)$ , para extrair o seu comportamento assintótico em largas e curtas distâncias. Por fins de generalidade, este processo será realizado em  $d$  dimensões. Como o termo  $(p^2 + m^2)^{-1}$  na função  $G_E(x_1 - x_2)$  é estritamente positivo, é possível escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{\alpha(p^2 + m^2)}{2}} \quad (\text{A.69})$$

Com esta expressão, o propagador é reescrito como:

$$G_E(x_1 - x_2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\alpha \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \exp \left\{ \frac{-\alpha}{2} (p^2 + m^2) + ip(x_1 - x_2) \right\} \quad (\text{A.70})$$

<sup>9</sup> Uma exposição detalhada da origem deste termo pode ser vista em (WEINBERG, 2005)

A integral em  $p$  é gaussiana com um termo linear, e pode ser facilmente resolvida, nos dando o seguinte resultado:

$$G_E(x_1 - x_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{d/2} \exp\left\{-\frac{|x_1 - x_2|^2}{2\alpha} - \frac{m^2\alpha}{2}\right\} \quad (\text{A.71})$$

Usando a representação integral da função de Bessel modificada,  $K_\nu(z)$  (GRADSHTEYN; JEFFREY; RYZHIK, 1996), podemos enfim escrever a forma exata do propagador livre euclideano:

$$G_E(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left[ \frac{m}{|x_1 - x_2|} \right]^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(m|x_1 - x_2|). \quad (\text{A.72})$$

Com  $\nu = d/2 - 1$  e  $z = m|x_1 - x_2|$ . Primeiramente, vamos explorar o limite para grandes distâncias,  $m|x_1 - x_2| \gg 1$ . Usaremos então a fórmula para o limite assintótico da função de Bessel  $K_\nu(z)$  no caso em que  $z \gg 1$  (ABRAMOWITZ, 1974):

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + \mathcal{O}(1/z)]. \quad (\text{A.73})$$

Com esta fórmula, a função de Green se comporta como

$$G_E(x_1 - x_2) = \frac{\sqrt{\pi/2} m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2} (m|x_1 - x_2|)^{\frac{d-1}{2}}} e^{-m|x_1 - x_2|} \quad (\text{A.74})$$

Portanto, a longas distâncias, o propagador euclideano tem um decaimento exponencial com distância (e tempo imaginário). A escala de comprimento para este decaimento é  $1/m$ , o que é natural, já que é a única quantidade com unidades de comprimento na teoria.

No caso de curtas distâncias, i.e, onde  $m|x_1 - x_2| \ll 1$ , usamos a fórmula da função de Bessel no limite onde  $z \rightarrow 0$ :

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \quad (\text{A.75})$$

Com esta fórmula, é possível escrever o comportamento assintótico da função de green em curtas distâncias.

$$G_E(x_1 - x_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{4\pi^{d/2} |x_1 - x_2|^{d-2}} + \dots \quad (\text{A.76})$$

Onde os outros termos são nulos no limite onde  $m|x_1 - x_2| \rightarrow 0$ . Note que o termo dominante neste limite não depende da massa. De fato esse é o comportamento de uma teoria não massiva, onde a função de green decai com uma lei de potência da distância.

A análise para as funções de green no tempo real pode ser vista em (KLEINERT, 2016).

Pode ser mostrado que as funções de correlação de mais pontos podem ser escritas apenas em função dos propagadores de Feynman, na forma de uma soma de todas as combinações de pares possíveis. Este é o teorema de Wick, que forma a base para a construção dos diagramas de Feynman. Esta é um resultado que está distante do escopo deste trabalho, e pode ser visto com detalhes em (PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Antes de finalizarmos esta seção, vale a pena discutir um pouco sobre teorias com interação. Não mostraremos detalhes aqui, que podem ser vistos em (ITZYKSON; ZUBER, 1980), por exemplo

De fato, o passo natural agora é prosseguir para teorias interagentes, que são objeto de estudo central na teoria quântica de campos, descrevendo com precisão processos físicos nas mais diversas situações possíveis, tanto em teorias que descrevam forças fundamentais, como a QED e a QCD, assim como em teorias efetivas usadas na matéria condensada. Uma teoria interagente é quase sempre escrita na forma de uma lagrangiana livre somada a um termo extra, que caracteriza a interação do sistema:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}.$$

Ao contrário da teoria livre, em quase todos os casos com interação não é possível extrair de maneira exata o funcional gerador da teoria, o que leva à necessidade dos mais diversos métodos de aproximação para extração das funções de correlação, sendo o mais comum a teoria de perturbação.

O resultado final da teoria de perturbação na teoria quântica de campos é uma expansão das funções de correlação em uma série de potências de um parâmetro pequeno, usualmente a constante de acoplamento da interação. Embora a convergência desta série não seja muito bem definida, como na teoria de perturbação na mecânica quântica, é usual truncá-la em algum ponto, usando o fato de que o parâmetro da expansão é pequeno. Porém ao contrário do caso na mecânica quântica, quase todos os termos desta série, em quase todos os casos, divergem. A origem destas divergências nas funções de correlação é proveniente em muitos casos da má definição de campos no mesmo ponto do espaço tempo.<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Um campo, ao contrário do que é apresentado em boa parte da literatura, não é um operador,

A princípio este é um sério problema na formulação da teoria de campos, pois esperamos que a mesma dê origem a resultados finitos e observáveis. Contudo, é possível tratar destas divergências usando técnicas de *renormalização*, onde usamos os parâmetros da teoria para "absorver" os infinitos gerados pela mesma. Há de se ressaltar que neste escopo a renormalização é apenas um método, construído de maneira *Ad Hoc* para eliminar as divergências da teoria.

---

e sim uma distribuição de operadores, cujo produto no mesmo ponto não é matematicamente bem definido.

# APÊNDICE B – Estados Coerentes Generalizados

Faremos uma breve descrição da construção de um conjunto de estados coerentes generalizados de acordo com Perelomov (PERELOMOV; PERELOMOV, 1986).

A ideia aqui é, para um grupo de Lie qualquer, e um vetor fixo no espaço de Hilbert, definir o conjunto de estados gerados pela representação unitária irredutível do grupo. Esta ideia foi desenvolvida por Perelomov, e generaliza a construção dos estados coerentes para o oscilador harmônico 1D, onde o grupo de simetria é o chamado grupo de Heisenberg-Weyl. Neste caso os estados coerentes são gerados a partir do vácuo pelo chamado operador de deslocamento, que é uma representação irredutível do grupo de Heisenberg-Weyl. Para mais detalhes ver (PERELOMOV; PERELOMOV, 1986).

Assim, seja  $G$  um grupo de Lie arbitrário e  $T(g)$  sua representação unitária irredutível, com  $g \in G$ , atuando no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Tomando um vetor  $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ , consideramos o conjunto  $\{|\psi_g\rangle : |\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle\}$ . Notemos que dois estados  $|\psi_{g_1}\rangle$  e  $|\psi_{g_2}\rangle$  são equivalentes se diferem por apenas uma fase, i.e., se

$$|\psi_g\rangle = e^{i\alpha} |\psi_{g'}\rangle \quad ; \quad |e^{i\alpha}| = 1 \quad (\text{B.1})$$

Desta maneira, o conjunto  $|\psi_g\rangle$  não é univocamente definido, o que nos impede de realizar uma parametrização por elementos de  $G$ . Definiremos então o conjunto  $H$  como o conjunto de elementos de  $G$  que levam um estado a outro fisicamente equivalente :

$$H = \{h \in G : T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)} |\psi_0\rangle ; |e^{i\alpha(h)}| = 1\}$$

É fácil ver que  $H$  é um subgrupo de  $G$ , e se este for maximal, é chamado de *subgrupo de isotropia* de  $G$ . Isto nos permite então definir o espaço quociente  $G/H$ , chamado de *coclasse*, ou *grupo quociente*, onde dois elementos de  $G$ ,  $g$  e  $g'$  são equivalentes se  $\exists h \in H$  tal que  $gh = g'$ .

Pode-se mostrar que esta é uma relação de equivalência, que define a classe  $[g]$ . Assim, o conjunto de todas as classes de equivalência  $[g]$  forma o conjunto  $G/H$ , que denotaremos como  $X$ , e os seus elementos, isto é, as classes  $[g]$ , por  $x$ .

Pode ser mostrado também que  $X$  de fato forma um grupo, com o produto do grupo sendo dado por  $[g_1] * [g_2] = [g_1 g_2] \in X$  [5].

Assim, por construção, temos que vetores  $|\psi_g\rangle, \forall g$  pertencente a uma classe de  $G/H$ , diferem apenas por um fator de fase, e assim, descrevem o mesmo estado físico. Escolhendo um representante  $g(x)$  em uma classe de equivalência qualquer  $x \in X$ , temos o conjunto de estados fisicamente distintos,  $\{|\psi_{g(x)}\rangle\}$ , ou, em uma forma mais compacta, temos  $\{|x\rangle\}$ , com  $x \in X$ . Com isso, podemos definir o conjunto de estados coerentes como:

**Definição.** O sistema de estados  $\{|\psi_g\rangle : |\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle\}$ , com  $g \in G$  e  $T(g)$  sendo a sua representação unitária irredutível atuando em  $\mathcal{H}$ , com  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  fixo, é chamado de **sistema de estados coerentes**. Seja então  $H$  o subgrupo de isotropia para um estado  $|\psi_0\rangle$ . Desta maneira um estado coerente  $|\psi_g\rangle$  é determinado por um ponto  $x \in X = G/H$ , correspondente ao elemento  $g$  tal que:  $|\psi_g\rangle = e^{i\alpha} |x\rangle$ .

Voltando à eq. (B.1), temos que a condição para que dois estados,  $|\psi_{g_1}\rangle$  e  $|\psi_{g_2}\rangle$  sejam equivalentes é:

$$T(g_1)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}T(g_2)|\psi_0\rangle \Leftrightarrow T(g_2^{-1}g_1)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\psi_0\rangle \quad (\text{B.2})$$

Assim, por definição,  $g_2^{-1}$  e  $g_1$  pertencem à mesma classe em  $G/H$ .

Vamos agora considerar a ação do operador  $T(g)$  em um estado  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$

$$T(g)|0\rangle = e^{i\alpha(g)}|x\rangle, \quad (\text{B.3})$$

onde a partir de agora iremos usar a denominação  $|0\rangle$  para o estado fixo. Aplicando agora um operador  $T(g_1)$  no estado coerente  $|x\rangle$ , temos:

$$T(g_1)|x\rangle = e^{-i\alpha(g)}T(g_1)T(g) = e^{i\beta(g_1,g)}|g_1x\rangle \quad (\text{B.4})$$

Com  $\beta(g_1, g) = \alpha(g_1g) - \alpha(g)$ . É fácil ver também que o produto escalar de dois estados coerentes é dado por:

$$\langle x_1|x_2\rangle = e^{i(\alpha(g_1) - \alpha(g_2))} \langle 0|T(g_1^{-1}g_2)|0\rangle \quad (\text{B.5})$$

## B.1 Completeza dos Estados

Ao que concerne à completeza dos estados  $\{|x\rangle\}$ , consideremos um operador  $\hat{O}$ , dado por:

$$\hat{O} = \int_X dx |x\rangle\langle x| \quad (\text{B.6})$$

Onde  $dx$  é a medida invariante de  $X = G/H$ , induzida pela medida invariante  $d\mu(g)$  em  $G$ . Pode ser mostrado que:

$$T(g)\hat{O}T^{-1}(g) = \hat{O} \quad (\text{B.7})$$

Assim,  $\hat{O}$  comuta com todos os operadores  $T(g)$ , e pelo lema de Schur[3], temos que

$$\hat{O} = \lambda \mathbb{1}$$

Para fixar a constante  $\lambda$  de tal maneira que a integral fique normalizada, podemos tomar o valor esperado de  $\hat{O}$  para o estado  $|0\rangle$ :

$$\langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle = \lambda \langle 0 | \mathbb{1} | 0 \rangle = \lambda \quad (\text{B.8})$$

Onde escolhemos  $|0\rangle$  como normalizado. Por outro lado, temos:

$$\langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle = \int_X dx |\langle 0 | x \rangle|^2$$

E assim podemos fixar a constante  $\lambda$  como:

$$\lambda^{-1} = \int_X dx |\langle 0 | x \rangle|^2 \quad (\text{B.9})$$