UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

VINICIUS EVANGELISTA GONÇALVES DA SILVA

TEORIA ESPECTRAL: APLICAÇÕES DA TEORIA DE ANÁLISE FUNCIONAL

BRASÍLIA

14 DE JULHO DE 2023

Vinicius Evangelista Gonçalves da Silva

Teoria espectral: Aplicações Da Teoria de Análise Funcional

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

14 de julho de 2023

Resumo

A formulação atual da mecânica quântica é altamente dependente da teoria de operadores, relacionando em princípio seus observáveis à operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert. Para abordar estes conceitos neste trabalho o objetivo foi construir o conhecimento acerca dos fundamentos da teoria espectral, partindo de teoremas fundamentais da análise funcional, como o teorema de Hahn Banach, e perpassando as classes de operadores mais importantes para a teoria, os operadores compactos e auto-adjuntos. A ideia de desenvolver este arcabouço surge da análise dos operadores da mecânica quântica porém também encontra justificativas mais a frente na aplicação desses mesmos estudos na teoria quântica de campos e em problemas em aberto atualmente como o problema da quantização de modelos integráveis onde a teoria de perturbação não pode ser utilizada.

Palavras-chaves: Análise funcional. Teoria espectral. Teoria de Operadores. Extensões Auto-adjuntas.

Sumário

Introdução

A teoria das interações fortes é descrita por uma teoria de calibre não abeliana: A cromodinâmica quântica. Apesar dessa teoria ser efetivamente liberada em altas energias, em baixas energias existem problemas, a constante de acoplamento cresce e com isso a principal ferramenta da teoria quântica de campos, a teoria de perturbações, não pode ser usada. Portanto o desenvolvimento de teorias não-perturbativas tem sido o principal foco de pesquisa nas ultimas décadas, e o avanço mais relevante veio da descoberta da correspondência entre as teorias de calibre e a teoria das cordas. Em 2004 foi percebido que ambas eram dotadas de estruturas integráveis e isto permitiu de maneira notável que a análise não-perturbativa mapeasse precisamente o espectro para as teoria de calibre assim como para a teoria das cordas.

A teoria de sistemas integráveis é uma parte integral da física matemática e teórica, com implicações vastas desde a matemática pura e física teórica até a física da matéria condensada. O problema da determinação de seu espectro pode ser reduzido ao problema de resolver um conjunto equações algébricas conhecidas coletivamente como equações de Yang-Baxter. Estas equações desempenham um papel fundamental na teoria dos sistemas quânticos integráveis em modelos resolvidos de maneira exata na mecânica estatística.

A quantização generalizada de modelos contínuos, por outro lado, tem sido um problema aberto na maior parte dos casos. Com exceção dos casos específicos que podem ser quantizados no caso contínuo por meio das coordenadas de Bethe ansatz, é um procedimento padrão considerar primeiro as versões discretas da teoria contínua. Isto é feito ao mesmo tempo para lidar com as divergências do ultravioleta e para padronizar produtos entre operadores mal definidos. Apesar do método para construção dos modelos reticulados ser conhecido e aplicável para qualquer modelo contínuo a principio, essa construção usualmente é altamente não trivial e a Hamiltoniana resultante tem, geralmente, uma forma local bastante desagradável.

Portanto, a quantização de sistemas contínuos e integráveis é um processo altamente desejável sem que se passe primeiro por suas versões reticulares. A dificuldade primordial para essas quantizações é a presença de diversas singularidades nas Hamiltonianas definidas quântica e mecanicamente. O processo para resolução de tais singularidades é a construção das extensões auto-adjuntas. Essa construção, no entanto, é altamente não trivial e se baseia fortemente nos mecanismos da análise funcional. A maioria dos modelos integráveis contínuos interessantes ainda precisam ser quantizados e qualquer novo progresso dependerá fortemente dos entendimentos da análise funcional.

Para a construção desses conceitos, o caminho deste trabalho será similar aos capítulo sete e oito do livro (KREYSZIG, 1978), que abordam a teoria para operadores limitados e compactos em conjunto com o sétimo capítulo do livro (RICHTMYER, 1978) que aborda os assuntos referentes às extensões dos operadores e seus adjuntos. Apesar de seguir a linearidade especifica de dois livros, os assuntos estudados também foram observados em (TETA, 2018) onde foram observados exemplos em operadores da mecânica quântica, (SIMON, 1981) onde os conceitos foram desenvolvidos sob uma visão diferente, (KOLMOGOROV, 1999), (ROYDEN, 2010) e (FOLLAND, 1999) onde foram observados conceitos pertencentes à um preparo prévio e à um possível desenvolvimento desses estudos mais a frente.

1 Metodologia

Para este trabalho, a metodologia adotada consistiu do estudo de uma bibliografia adequada para o assunto escolhido em conjunto com o orientador, aliada à reconstrução dos assuntos em anotações próprias. Essa metodologia foi adotada sobre alguns itens citados na bibliografia, sendo os dois principais o livro (KREYSZIG, 1978) responsável por uma fundamentação dos conceitos gerais do assunto separados entre definições, teoremas, provas e elaborações. O foi segundo (RICHTMYER, 1978) responsável por fornecer algumas adições referentes à operadores em geral, e operadores adjuntos e auto-adjuntos, alguns exemplos concretos.

Esta proposta foi adotada buscando construir profundidade no assunto, tendo em vista os diversos problemas em aberto na área desde à mecânica quântica até a física da matéria condensada.

Quanto aos estudos expostos nesse trabalho, eles podem ser divididos essencialmente em:

i. Construção dos elementos iniciais da teoria, com a teoria de autovetores e autovalores dos operadores lineares.

ii. Operadores lineares limitados, suas propriedades e as propriedades dos seus espectros.

iii. Desenvolvimentos para operadores compactos, suas propriedades e as propriedades

iv. As operações envolvendo operadores compactos investigas por Fredholm

v. Extensões de operadores e caracterizações de seus adjuntos

vi. As observações resultantes de aplicações da teoria

As definições e teoremas da bibliografia serão seguidos e provados de forma a desenvolver os conhecimentos sobre operadores limitados e compactos seguindo os capítulos sete e oito de (KREYSZIG, 1978). Em seguida a mesma ideia é seguida mas construindo conceitos sobre operadores adjuntos, auto-adjuntos, unitários e fechados de acordo com o capítulo sete de (RICHTMYER, 1978). Todo este estudo com auxilio da bibliografia de suporte (TETA, 2018) onde foram observados exemplos em operadores da mecânica quântica, (SIMON, 1981) onde os conceitos foram observados sob uma visão diferente, (KOLMOGOROV, 1999), (ROYDEN, 2010) e (FOLLAND, 1999) onde foram observados conceitos pertencentes à um preparo prévio.

2 Revisão bibliográfica

Nesta Seção se encontram as principais construções deste trabalho, baseadas primariamente nos livros (KREYSZIG, 1978) e (RICHTMYER, 1978), tratando linearmente das construções matemáticas através de definições, teoremas e provas. Finalmente, chegamos à um breve momento de aplicações no final deste Capitulo.

2.1 Teoria de Operadores e Operadores limitados

Neste primeiro parte partimos da teoria geral de autovalores e autovetores em matrizes para avançar para os conceitos envolvendo operadores limitados em geral. Um operador linear $L : D(L) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ age linearmente no espaço de funções e pode, para muitos propósitos ser escrito como uma matriz finita, dessa forma partimos da teoria sobre matrizes:

2.1.1 Teoria de Autovetores:

Seja $A = (a_{jk})$ uma matriz quadrada $n \times n$ de componentes reais ou complexas:

Definição: Um Autovalor de A é um numero λ tal que:

$$Ax = \lambda x.$$

Para $x \neq 0$. Nesse caso, x é um autovetor de A e o espaço gerado pelos autovetores e pelo vetor nulo é o Auto-espaço.

O conjunto $\sigma(A)$ de todos os autovalores de A chama-se espectro de A e seu complemento $\rho(A)$ é o conjunto resolvente de A. A equação $Ax = \lambda x$ pode ser reescrita como:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Definição: Escrita dessa forma ela é a equação característica e escrevendo na forma matricial para um $x \neq 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{12} \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Definição: Esse é o determinante característico de A que resulta no polinômio em λ de grau n característico de A

Teorema: (7.1-2) "Os autovalores de uma matriz $N \times n$ $A = (a_{jk})$ são dados pelas soluções da equação característica de A. Portanto A tem pelo menos um autovalor e no máximo n autovalores numericamente diferentes."

Prova:

A afirmação segue do fato de que pelo teorema fundamental da álgebra um polinômio de grau positivo n com coeficientes em $\mathbf{C}$ tem pelo menos uma raiz em $\mathbf{C}$ e no máximo n raízes numericamente diferentes.

■

Teorema: (7.1-3) Todas as matrizes que representam um operador linear $A\ X \longrightarrow X$ em um espaço de dimensão finita dotado de norma tem os mesmos autovalores.

Prova:

vamos ver o que acontece quando passamos de uma base de X para outra. Sejam $e = (e_1, ..., e_n)$ e $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ duas bases de X. Pela definição de uma base podemos escrever cada $\tilde{e}_i$ como uma combinação linear de e_j 's:

$$\tilde{e} = eC.$$

Onde e e $\tilde{e}$ são matrizes linha e C é uma matriz quadrada com coeficientes complexos. Cada $x \in X$ tem uma representação única dependendo de cada base, podemos escrever

$$x = e\, x_1 = \sum c_i e_i = \tilde{e}\, x_2 \sum \tilde{c_j} \tilde{e}_j.$$

com $x_1 = (c_i)$ e $x_2 = (\tilde{c_j})$ como vetores coluna representando os coeficientes em cada base. Para escrever um em função do outro, usamos a passagem de base anterior $e\, x_1 = \tilde{e}\, x_2 = eCx_2$, ou seja

$$x_1 = Cx_2$$

De maneira similar se $Tx = y = ey_1 = \tilde{e}y_2$ e temos

$$y_1 = Cy_2$$

Consequentemente, se T_1 e T_2 são as matrizes que representam T nas bases de e e $\tilde{e}$ respectivamente, então:

$$y_1 = T_1 x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = T_2 x_2.$$

Juntando as ultimas três equações:

$$CT_2 x_2 = Cy_2 = y_1 = T_1 x_1 = T_1 C x_2.$$

Vamos olhar os resultados das pontas $CT_2x_2 = T_1Cx_2$ e multiplicar pela esquerda por C^{-1}

$$C^{-1}CT_2x_2 = C^{-1}T_1Cx_2.$$

$$T_2 x_2 = C^{-1} T_1 C x_2.$$

$$T_2 = C^{-1} T_1 C.$$

Com C determinado puramente pelas bases e e $\tilde{e}$ de acordo com: $\tilde{e} = eC$. Sabendo que $C^{-1}C = \mathbf{1}$ e com isso $\det C^{-1} \det C = 1$, podemos chegar ao determinante característico:

$$\det(T_2 - \lambda I) = \det(C^{-1} T_1 C - \lambda C^{-1} I C).$$

$$\det(T_2 - \lambda I) = \det(C^{-1}(T_1 - \lambda I)C).$$

$$\det(T_2 - \lambda I) = \det C^{-1} \det(T_1 - \lambda I) \det C.$$

$$\det(T_2 - \lambda I) = \det(T_1 - \lambda I).$$

Com isso a igualdade dos autovalores segue do teorema anterior.

■

Teorema: (7.1-4) Um operador linear em um espaço complexo e normado de dimensão finita $X \neq \{0\}$ tem pelo menos um autovalor.

2.1.2 O operador resolvente e o espectro

Vamos considerar agora espaços dotados de norma e de dimensão qualquer. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço complexo normado e $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow X$ um operador linear de domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Com T associamos T_λ:

$$T_\lambda = T - \lambda \mathbf{I}.$$

Com λ um numero complexo e $\mathbf{I}$ a matriz identidade.

Definição: Se T_λ possui inversa, denotaremos por R_λ, ou seja:

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda \mathbf{I})^{-1}.$$

Esse operador será chamado operador resolvente de T. O nome resolvente é apropriado, uma vez que o operador ajuda a resolver problemas como $T_\lambda x = y \to x = R_\lambda y$

Definição: (7.2-1) Seja $X \neq \{0\}$ um espaço complexo normado e $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow X$ um operador linear de domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Um valor regular de λ é um numero complexo tal que:

- **(R1)** $R_\lambda(T)$ existe.
- **(R2)** $R_\lambda(T)$ é limitado.
- **(R3)** $R_\lambda(T)$ é definido em um conjunto denso em X.

O conjunto resolvente $\rho(T)$ de T é o conjunto de todos os valores regulares de T e seu complemento $\sigma(T)$ no plano complexo é chamado espectro de T, se $\lambda \in \sigma(T)$ ele é chamado de um valor espectral de T.

Definição: O conjunto $\sigma(T)$ é particionado em três conjuntos disjuntos:

- Espectro pontual (ou espectro discreto): $\sigma_p(T)$ é o conjunto para o qual $R_\lambda(T)$ não existe, se $\lambda \in \sigma_p(T)$, então λ é um autovalor de T.
- Espectro contínuo: $\sigma_c(T)$ é o conjunto em que $R_\lambda(T)$ existe mas não é limitado.
- Espectro residual: $\sigma_r(T)$ é um conjunto em que $R_\lambda(T)$ existe e pode ser limitado ou não, mas seu domínio não é denso em X.

Observação: uma vez que os conjuntos $\rho(T)$ e $\sigma(T)$ são complementares em $\mathbf{C}$ podemos escrever:

$$\mathbf{C} = \rho(T) \cup \sigma(T).$$

ou ainda:

$$\mathbf{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Lema (7.2-3) Seja X um espaço de Banach complexo, $T : X \longrightarrow X$ um operador linear e $\lambda \in \rho(T)$. Assumindo T fechado ou limitado então R_λ é definido no espaço completo de X e é limitada.

Se T é fechado então T_λ também é. Como T_λ é fechado $\longrightarrow R_\lambda$ é fechado e limitado por (R2: R_λ é limitado) portanto o domínio é fechado (teorema 4.13-3) e (R3: R_λ é definido num conjunto denso em X) implica em $\mathcal{D}(R_\lambda) = \overline{\mathcal{D}(R_\lambda)} = X$

Se T é limitado então T é fechado por 4.13-5(a) e voltamos pra o caso anterior.

2.1.3 Propriedades espectrais de Operadores Lineares Limitados

Teorema: (7.3-1) Seja $T \in B(X, X)$, com X um espaço de Banach. Se $||T|| < 1$, então:

$(\mathbf{I} - T)^{-1}$ existe como um operador limitado em todo o espaço X.

$$(\mathbf{I} - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = \mathbf{I} + T + T^2 + ...$$

Prova:

Temos $||T^j|| \leq ||T||^j$, da equação (7) na seção 2.7, e que $\sum ||T||^j$ converge para $||T|| < 1$, essas duas coisas garantem que a serie converge absolutamente desde que

$||T|| < 1$. Falta provar que a Serie, que chamaremos de S será igual à $\mathbf{I} - T)^{-1}$. Para isso:

$$(I - T)^{-1}(I + T + T^2 + ... + T^n).$$

$$= (I + T + T^2 + ... + T^n) - (T + T^2 + ... + T^{n+1}).$$

$$I - T^{n+1}.$$

Seja $n \to \infty$. Então T^{n+1} é 0, já que $||T|| < 0$, com isso obtemos:

$$(I - T)S = I.$$

Ou seja, $S = (I - T)^{-1}$

■

Teorema: (7.3-2) O Conjunto resolvente $\rho(T)$ de um operador linear limitado T num espaço de Banach X é aberto e portanto seu espectro $\sigma(T)$ é fechado.

Prova:

Se $\rho(T)$ for o conjunto vazio então ele será aberto. Se $\rho(T)$ não for o conjunto vazio: Para um $\lambda_0 \in \rho(T)$ e um λ qualquer complexo temos:

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I.$$

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}].$$

Ao multiplica fica claro que voltamos exatamente ao que tínhamos. Agora denotamos o que está dentro dos parênteses como um operador V e reescrevemos:

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} V \quad \text{Onde} \quad V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}.$$

Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ e T é limitado então R_{λ_0} é limitado (Lema 7.2-3). Pelo teorema anterior V possui uma inversa e podemos representar:

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}]^j.$$

E esse operador será limitado sempre que $||\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}|| < 1$, ou seja:

$$|\lambda - \lambda_0)| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}.$$

Sabendo que R_{λ_0} é limitado e com a equação $T_\lambda = T_{\lambda_0} V$ vemos que para todo λ que satisfizer a relação anterior, o operador T_λ vai ter inversa:

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_)} V)^{-1} = V_{-1} R_{\lambda_0}.$$

Com isso, a equação $|\lambda - \lambda_0)| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}$ representa uma vizinhança de valores regulares de T, para os quais R_λ obedece (R1), (R2) e (R3). Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ foi arbitrário, então $\rho(T)$ é aberto e portanto, seu complemento é fechado.

■

Este teorema terá como consequência direta, simplesmente retirando algumas equações especificas da prova, o teorema a seguir:

Teorema: (7.3-3) de representação: Para X um espaço de Banach complexo e T um operador linear limitado. Para todo $\lambda_0 \in \rho(T)$ o operador resolvente $R_\lambda(T)$ tem a representação:

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}.$$

Com condição de que a serie converge absolutamente para todo λ no disco delimitado por:

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}.$$

Esse disco é um subconjunto de $\rho(T)$

Teorema: (7.3-4) O espectro $\sigma(T)$ de um operador linear limitado $T : X \longrightarrow X$ num espaço de Banach X é compacto e está compreendido dentro do disco:

$$|\lambda| \leq ||T||.$$

portanto o conjunto resolvente $\rho(T)$ é não vazio.

Prova:

Seja $\lambda \neq 0$ e $\kappa = 1/\lambda$. Do teorema da representação podemos escrever:

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}(I - \kappa T)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa T)^j = \frac{-1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^j.$$

Essa série vai convergir pelo teorema 7.3-1 para todo λ tal que:

$$\left|\left|\frac{1}{\lambda} T\right|\right| = \frac{||T||}{|\lambda|} < 1 \quad \text{Ou seja:} \quad ||T|| < |\lambda|.$$

■

Definição: (7.3-5) O raio Espectral $r_\sigma(T)$ de um operador $T \in B(X, X)$ num espaço de Banach complexo é um numero definido como:

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Que é o raio do menor disco fechado centrado na origem do plano complexo contendo $\sigma(T)$ Usando a condição $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}$ vemos que pra um operador linear limitado em um espaço de Banach complexo

$$r_\sigma(T) \leq ||T||.$$

Teorema: (7.4-1) Seja X um espaço de Banach complexo, $T \in B(X, X)$, $\lambda,\ \mu \in \rho(T)$. Então:

(i) O resolvente R_y satisfaz a equação: $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$.

(ii) R_λ comuta com qualquer $S \in B(X, X)$ que comute com T.

(iii) Temos $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

Prova:

(i)
O operador identidade I pode ser escrito como $I = T_\lambda T_\lambda^{-1} = T_\lambda R_\lambda$ para todo λ. Com isso:

$$R_\mu - R_\lambda = R_\mu I - R_\lambda I = R_\mu(T_\lambda R_\lambda) - (T_\mu R_\mu)R_\lambda.$$

organizando os termos:

$$R_\mu - R_\lambda = R_\mu(T_\mu - T_\lambda)R_\lambda.$$

Usando a definição $T_\lambda = T - \lambda I$:

$$R_\mu - R_\lambda = R_\mu(T - \mu I - [T - \lambda I])R_\lambda.$$

e finalmente:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

(ii)
Por hipótese T e S comutam: $ST = TS$, Portanto $ST_\lambda = T_\lambda S$. Escrevendo a matriz identidade I como $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$, podemos escrever

$$R_\lambda\ S = R_\lambda\ S\ I = R_\lambda\ S\ T_\lambda\ R_\lambda = R_\lambda\ T_\lambda\ S\ R_\lambda = I\ S\ R_\lambda = S\ R_\lambda.$$

Portanto $R_\lambda\ S = S\ R_\lambda$.

(iii)
Podemos provar de algumas formas. Partindo de $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$ temos:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

por hipótese, isso vale para quaisquer $\lambda, \mu \in \rho(T)$, então podemos trocar os índices:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda.$$

Organizando os termos temos:

$$-(R_\mu - R_\lambda) = -(\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda.$$

multiplicando por menos um vemos que

$$(\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu = R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda.$$

E finalmente
$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

■

Teorema: (7.4-2) Seja X um espaço de Banach complexo, $T \in B(X, X)$ e
$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0.$$

Então
$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

isso quer dizer que o espectro $\sigma(p(T))$ do operador
$$p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1}T^{n-1} + ... + \alpha_0 I.$$

Consiste de todos os valores que o polinômio p assume no espectro $\sigma(T)$

Prova:

Assumindo $\sigma(T) \neq \varnothing$ (isso vai ser provado mais tarde). Se $n = 0$ temos trivialmente $\sigma(p(T)) = \alpha_0 = p(\sigma(T))$, então seja $n > 0$ e vamos dividir a prova em duas:
Na parte **(i)** vamos provar que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$:

Por simplicidade $S = p(T)$ e com isso $S_\mu = p(T) - \mu I$. Se existir S_μ^{-1} então ele é, por construção, o resolvente do operador $p(T)$. Vamos manter μ fixo. Como o espaço X é complexo então o polinômio dado por $s_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ deve poder ser fatorado em pequenos termos, ou seja:
$$s_\mu = p(\lambda) - \mu = \alpha_n(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2)...(\lambda - \gamma_n). \qquad (\star)$$

Onde γ_1, ..., γ_n são os zeros do polinômio. que dependem de μ. Reescrevendo $S_\mu = p(T)$ nos moldes da equação anterior temos:
$$S_\mu = p(T) - \mu\ I = \alpha_n(T - \gamma_1 I)(T - \gamma_2 I)...(T - \gamma_n I).$$

Se cada um dos γ_i estiver contido em $\rho(T)$, então cada $T - \gamma_i$ possui uma inversa limitada, bem definida em X e o mesmo será valido pra S_μ. Usando a equação 2.6-11 explicitada no apêndice reescrevemos a equação logo acima:
$$S_\mu^{-1} = p(T) - \mu\ I = \frac{1}{\alpha_n}(T - \gamma_1 I)^{-1}(T - \gamma_2 I)^{-1}...(T - \gamma_n I)^{-1}.$$

E nesse caso $\mu \in \rho(p(T))$.
$$\mu \in \rho(p(T)) \Longrightarrow \gamma_j \in \sigma(T) \text{ para algum j.}$$

Voltando a equação $(\star)$:

$$s_\mu(\gamma_i) = p(\gamma_i) - \mu = 0.$$

$$\mu = p(\gamma_i) \in p(\sigma(T)).$$

Como a escolha de μ foi arbitraria, isso prova **(i)**:

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)).$$

Agora para **(ii)** queremos provar:

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)).$$

Faremos isso mostrando que:

$$\kappa \in p(\sigma(T)) \longrightarrow \kappa \in \sigma(p(T)).$$

Por proposição, $\kappa \in p(\sigma(T))$, ou seja:

$$\kappa = p(\beta) \quad \text{para algum } \beta \in \sigma(T).$$

Primeiro consideramos que $T - \beta I$ não tenha inversa, nesse caso, de $\kappa = p(\beta)$ temos $p(\beta) - \kappa = 0$, portanto β é um zero do polinômio

$$s_\kappa(\lambda) = p(\lambda) - \kappa.$$

Podemos reescrever isso como

$$s_\kappa(\lambda) = p(\lambda) - \kappa = (\lambda - \beta)g(\lambda).$$

Onde $g(\lambda)$ denota o produto dos outros $n-1$ fatores lineares e de α_n. Nessa representação com T:

$$S_\kappa = p(T) - \kappa I = (T - \beta I)g(T).$$

Como todos os fatores de $g(T)$ vão comutar com $(T - \beta I)$:

$$S_\kappa = g(T)(T - \beta I).$$

Se S_κ tivesse inversa, poderíamos usar as últimas duas equações gerando:

$$I = (T - \beta I)g(T)S_\kappa^{-1} = S_\kappa^{-1}g(T)(T - \beta I).$$

O que mostraria que $T - \beta I$ tem inversa, contraria a nossa hipótese. Portanto nessa situação o resolvente S_κ^{-1} não existe, de forma que $\kappa \in \sigma(p(T))$. Como a escolha desse κ foi arbitraria fica provado que $\kappa \in p(\sigma(T)) \longrightarrow \kappa \in \sigma(p(T))$ se $T - \beta I$ não tiver inversa.

Agora partindo de $\kappa = p(\beta)$ para algum $\beta \in \sigma(T)$ mas agora assumindo que a inversa $(T - \beta I)^{-1}$ existe. Para o "range"de $T - \beta I$ devemos ter:

$$\mathcal{R}(T - \beta I) \neq X.$$

Do contrario $(T - \beta I)^{-1}$ seria limitado pelo teorema (4.12-2), aplicado à $T - \beta I$ de forma que $\beta \in \rho(T)$ o que iria contradizer $\beta \in \sigma(T)$. De $\mathcal{R}(T - \beta I) \neq X$ e $S_\kappa = p(T) - \kappa I = (T - \beta I)g(T)$ teremos

$$\mathcal{R}(S_\kappa) \neq X.$$

Isso vai implicar em $\kappa \in \sigma(p(T))$, já que $\rho \in \sigma(p(T))$ implicaria em $\mathcal{R}(S_\kappa) = X$. Com isso finalmente provamos que

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

■

Teorema: (7.4-3) Autovetores $\{x_1, ..., x_n\}$ referentes aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de um operador T constituem um conjunto linearmente independente.

Prova:

Vamos assumir que $\{x_1, ..., x_n\}$ é linearmente dependente e explorar a contradição. Seja x_m o primeiro vetor que é uma combinação dos antecessores:

$$x_m = a_1 x_1 + ... + a_{m-1} x_{m-1}.$$

Nesse caso, $\{x_1, ..., x_{m-1}\}$ é linearmente independente. Aplicando $T - \lambda_m I$ em ambos os lados:

$$(T - \lambda_m I)x_m = \sum_{j=1}^{m-1} a_j (T - \lambda_m I)x_j.$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} a_j (\lambda_j - \lambda_m)x_j.$$

Como x_m é um autovetor correspondente a λ_m, o lado esquerdo é zero. Como os vetores da direita devem formar um conjunto linearmente independente, devemos ter:

$$a_j(\lambda_j - \lambda_m) = 0, \qquad \text{portanto} \qquad a_j = 0 \qquad (j = 1, ..., m-1).$$

Já que $\lambda_j - \lambda_m \neq 0$, mas assim $x_m = 0$ e isso contradiz o fato de que $x_m \neq 0$, que vem de x_m ser um autovetor. Ou seja, completamos nossa prova.

■

2.1.4 Uso da análise complexa na teoria espectral

Definição: Uma função h é dita um holomorfismo num domínio G se do plano complexo se h é definida e diferenciável em G. Com a derivada h' definida:

$$h' = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{h(\lambda + \Delta\lambda) - h(\lambda)}{\Delta\lambda}.$$

Definição: (7.5-1) Seja Λ um subconjunto aberto de C e X um espaço de Banach complexo. Dada uma S no formato de função operador:

$$S : \Lambda \to B(X, X).$$

$$\lambda \to S_\lambda.$$

ela é dita um holomorfismo local em Λ se para todo $x \in X$ e $f \in X'$ a função definida por

$$h(\lambda) = f(S_\lambda x).$$

é holomorfismo para todo $\lambda_0 \in \Lambda$. S é um holomorfismo em Λ se S é holomorfismo local em Λ e Λ é um domínio.

Teorema: (7.5-2 Holomorfismo de R_λ) O operador resolvente $R_\lambda(T)$ de um operador linear limitado $T : X \to X$ num espaço complexo de Banach X é holomórfico em todo ponto λ_0 do conjunto resolvente $\rho(T)$ de T. Portanto é localmente holomorfo em $\rho(T)$.

Prova:

Podemos representar R_λ como:

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{\lambda_0}(T)^{j+1}(\lambda - \lambda_0)^j.$$

Que converge absolutamente em para cada λ no disco definido por:

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}.$$

Escolhendo qualquer $x \in X$, $f \in X'$ e definindo h por

$$h(\lambda) = f(R_\lambda(T)x).$$

E representando na forma de serie de potencia:

$$h(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\lambda - \lambda_0)^j.$$

com $c_j = f(R_{\lambda_0}(T)^{j+1}x)$. Essa serie vai convergir absolutamente dentro do disco definido.

■

Teorema: (7.5-3) Se $T \in B(X, X)$ com X um espaço complexo de Banach e um $\lambda \in \rho(T)$ então:

$$||R_\lambda(T)|| \geqq \frac{1}{\delta(\lambda)}.$$

onde $\delta(\lambda) = inf_{s\in\sigma(T)}|\lambda - s|$. δ é distancia de λ até o espectro σ. Portanto:

$$||R_\lambda(T)|| \to 0 \text{ a medida que } \delta(\lambda) \to 0.$$

Prova:

para todo $\lambda_0 \in \rho(T)$ o disco definido como $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}$ é um subconjunto de $\rho(T)$. Assumindo $\sigma(T) \neq \varnothing$ vemos que a distancia entre λ_0 e o espectro deve ser pelo menos igual ao raio do disco, ou seja, $\delta(\lambda) \geqq 1/||R_{\lambda_0}||$, isso implica: $||R_\lambda(T)|| \geqq \frac{1}{\delta(\lambda)}$.

■

Teorema: (7.5-4) se $X \neq \{0\}$ é um espaço de Banach complexo e $T \in B(X, X)$, então $\sigma(T) \neq \varnothing$.

Prova:

Por hipótese $X \neq \{0\}$. Se $T = 0$ então $\sigma(T) = 0 \neq \varnothing$. Se $T \neq 0$ então $||T|| \neq 0$ e teremos a serie:

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^j.$$

Como essa serie converge para $\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{||T||}$, ela converge absolutamente para $\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{2||T||}$, isto é, $|\lambda| > 2||T||$. Para esses λ pela formula da soma de serie geométricas:

$$||R_\lambda|| \leqq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} \left|\left|\frac{1}{\lambda} T\right|\right|^j = \frac{1}{|\lambda| - ||T||} \leqq \frac{1}{||T||}.$$

Mostraremos que assumir $\sigma(T) = \varnothing$ leva a uma contradição. $\sigma(T) = \varnothing$ implica em $\rho(T) = \mathbf{C}$. Portanto R_λ seria holomorfismo para todo λ e consequentemente para um $x \in X$ fixo e uma função $f \in X'$ a função h definida como

$$h(\lambda) = f(R_\lambda x).$$

é holomórfica em $\mathbf{C}$, ou seja, h é toda uma função, uma vez que holomorfismo implica continuidade. h é contínua e limitada no disco compacto $|\lambda| \leqq 2||T||$. Mas h também é limitada pra $|\lambda| \geqq 2||T||$ já que $||R_\lambda|| < 1/||T||$ e

$$|h(\lambda)| = |f(R_\lambda x)| \leqq ||f||||R_\lambda x|| \leqq ||f||||R_\lambda||||x|| \leqq ||f||||x||/||T||.$$

Com isso h é limitado em $\mathbf{C}$ e portanto constante, pelo teorema de Liouville que diz que uma função que é limitada em todo o plano complexo é constante. Como $x \in X$ e $f \in X'$ h foi arbitrário. $h =$ constante implica que que R_λ não depende de λ assim como $R_\lambda^{-1} = T - \lambda I$. Mas isso é impossível e assim o teorema está provado.

■

Teorema: (7.5-5) Se T é um operador linear limitado num espaço de Banach complexo, então para o raio espectral temos:

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}.$$

Prova:

Pelo teorema do mapeamento espectral (7.4-2) temos $\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$, de forma que:

$$r_\sigma(T^n) = [r_\sigma(T)]^n.$$

Da seção 7.3 :

$$r_\sigma(T^n) \leqq ||T^n||.$$

juntando essas duas:

$$r_\sigma(T) = \sqrt[n]{r_\sigma(T^n)} \leqq \sqrt[n]{||T^n||}.$$

Para todo n, portanto:

$$r_\sigma(T) \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}.$$

vamos mostrar que isso implica em $r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}$.

A serie de potencia $\sum c_n \kappa^n$ converge absolutamente para $|\kappa| < r$, com raio de convergência dado pela formula de Hadamard:

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}.$$

Escolhendo $\kappa = 1/\lambda$ podemos escrever a serie que representa o operador resolvente como:

$$R_\lambda = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} T^n \kappa^n.$$

escolhendo $|c_n| = ||T^n||$:

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} T^n \kappa^n\right|\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} ||T^n|||\kappa|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||\kappa|^n.$$

Voltando a formula de Hadamard, temos convergência absoluta para $|\kappa| < r$, ou seja:

$$|\lambda| = \frac{1}{|\kappa|} > \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}.$$

$1/r$ vai ser o raio espectral de T. Portanto:

$$r_\sigma(T) = \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}$$

■

2.1.5 Álgebras de Banach

Definição: Uma álgebra A sobre um campo K é um espaço vetorial A sobre K em que cada par ordenado de elementos $x,\ y \in A$ um produto $xy \in A$ é definido com as propriedades:

1. $(xy)z = x(yz)$.
2. $x(y+z) = xy + xz$.
3. $(x+y)z = xz + yz$.
4. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = (\alpha y)x$.

Para $x,\ y,\ z \in A$ e α escalar.

Definição: A é dita comutativa ou abeliana se para todo $x,\ y \in A$

$$xy = yx.$$

Definição: A é dita uma álgebra com identidade existe um elemento $e \in A$ tal que que para todo $x \in A$

$$ex = xe = x.$$

e é dito identidade de A

Definição: Uma álgebra normada A é um espaço normado de forma que para todo $x,\ y \in A$

$$||xy|| \leqq ||x||||y||.$$

Se A possuir uma identidade:

$$||e|| = 1.$$

Uma álgebra de Banach é um álgebra normada que é completa, um espaço normado.

Exemplos:

Espaços R e C: A linha real $\mathbf{R}$ e o plano complexo $\mathbf{C}$ são álgebras de Banach comutativas com identidade $e = 1$.

Espaço $C[a,b]$ O espaço $C[a,b]$ é uma álgebras de Banach comutativa com identidade $e = 1$, com o produto xy definido usualmente:

$$(xy)(t) = x(t)y(t).$$

Definição: Seja A uma álgebra complexa de Banach com identidade. Então o conjunto resolvente $\rho(x)$ de um $x \in A$ é o conjunto de todos os λ no plano complexo tal que $x - \lambda e$ é inversível. O espectro $\sigma(x)$ é o complemento de $\rho(x)$ no plano complexo, o conjunto de todos os valores de λ com os quais $x - \lambda e$ não é inversível.

Teorema: (7.7-1) Seja A uma álgebra de Banach complexa com identidade e. Se $x \in A$ satisfaz $||x|| < 1$ então $e - x$ é inversível e:

$$(e-x)^{-1} = e + \sum_{j=1}^{\infty} x^j.$$

Prova:

De $||xy|| \leqq ||x||||y||$ podemos tirar que $||x^j|| \leqq ||x||^j$, com $\sum ||x^j||$ convergindo desde que $||x|| < 1$. Portanto essa serie converge absolutamente e como A é completo ela converge. Vamos denotar essa soma por s e mostrar que $s = (e-x)^{-1}$:

$$(e-x)s =$$

$$= (e-x)(e+x+...+x^n).$$

$$= (e+x+...+x^n)(e-x).$$

$$= (e+x+...+x^n) - (x+x^2+...+x^{n+1}).$$

$$= e - x^{n+1}.$$

levando $n \to \infty$ temos $x^{n+1} \to \infty$ já que $||x|| < 1$. Com isso: $(e-x)s = s(e-x) = e$

■

Teorema: (7.7-2) Seja A uma álgebra de Banach complexa com identidade. Então o conjunto G de todos os elemento inversíveis de A é um subconjunto aberto de A e portanto o subconjunto M de A que contem todos os elementos não inversíveis de A é fechado.

Prova:

Seja $x_0 \in G$. Devemos mostrar que cada $x \in A$ suficientemente perto de x_0, ou seja:

$$||x - x_0|| < \frac{1}{||x_0||}.$$

Pertence a G. Sejam $y = x_0^{-1}x$ e $z = e - y$. Usando $||xy|| \leqq ||x||||y||$ obtemos:

$$||z|| = ||-z|| = ||y-e||.$$

$$= ||x_0^{-1}x - x_0^{-1}x_0||.$$

$$= ||x_0^{-1}(x-x_0)|| \leqq ||x_0||||x-x_0|| < 1.$$

disso $||z|| < 1$ e portanto $e - z$ é inversível por (7.7-1). Dessa forma $e - z = y \in G$ e como a escolha de x_0 foi completamente arbitraria então G é aberto.

■

Definição: O raio espectral $r_\sigma(x)$ de um $x \in A$ é definido como:

$$r_\sigma(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

Teorema: (7.7-3) Seja A uma álgebra de Banach complexa com identidade. Então para cada $x \in A$ o espectro $\sigma(x)$ é compacto e o raio espectral satisfaz:

$$r_\sigma(x) \leqq ||x||.$$

Prova:

Se $|\lambda| > ||x||$, então $||\lambda^-1x|| < 1$ de forma que $e - \lambda^-1x$ será inversível por (7.7-1). Se fizermos $-\lambda(e - \lambda^-1x) = x - \lambda e$ isso também será inversível, de forma que $\lambda \in \rho(x)$. Portanto não existe λ tal que $|\lambda| > ||x||$ pertencente ao espectro de x.

Isso prova a equação acima e que $\sigma(x)$ é limitado. Para mostrar que $\sigma(x)$ é fechado provaremos que $\rho(x) = \mathbf{C} - \sigma(x)$ é aberto.

■

Teorema: (7.7.4) Se A for álgebra de Banach complexa com identidade, então $\sigma(x) \neq \varnothing$.

2.2 Operadores lineares compactos

Nesta segunda parte associamos os conceitos construídos da primeira parte com um conceito anterior da análise funcional: compacticidade. Em essência um espaço métrico X é dito compacto se toda sequencia em X possui uma subsequencia convergente, como usaremos sequencias em várias das construções à frente vamos agora trabalhar essa propriedade em operadores.

2.2.1 Propriedades espectrais de Operadores Lineares compactos

Definição: (8.1-1 Operador linear compacto) Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito um operador linear compacto se T for linear e para todo subconjunto limitado M de X a imagem $T(M)$ for relativamente compacta, isto é, o fecho $\overline{T(M)}$ é compacto. Relembrando: um subconjunto M é dito compacto se toda sequência neste subconjunto tem uma subsequencia que converge cujo limite pertence ao subconjunto M

Lemma: Sejam X e Y espaços normados.

- Todo operador linear Compacto $T : X \longrightarrow Y$ é limitado e portanto contínuo.
- Se a dimensão de X for infinita, o operador identidade não é compacto.

Teorema: (8.1-3 Critério de compacticidade) Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é compacto se e somente se ele mapeia toda sequência limitada x_n de X em uma sequência Tx_n em Y que tem uma subsequencia convergente.

Prova:

Se T é compacto e x_n é limitada, então o fecho de Tx_n é compacto e segundo a definição de compacticidade tem uma subsequencia convergente. Como x_n é qualquer, então todo x_n.
No outro sentido, assumindo que toda sequência limitada x_n contem uma subsequencia x_{n_k} de forma que Tx_{n_k} converge em Y. Assumindo agora um subconjunto limitado B de X qualquer e uma sequência y_n qualquer em $T(B)$. Então $y_n = Tx_n$ para algum x_n em B, x_n é limitada porque B é limitado. Dessa forma Tx_n contem uma subsequencia convergente e portanto é compacto pela definição 2.5-1, já que a escolha de y_n em $T(B)$ foi arbitraria.

■

Teorema: (8.1-4) Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:

- Se T é limitado e a dimensão de T é finita, T é compacto.
- Se a dimensão de X é finita então T é compacto.

Prova:

a) Seja (x_n) uma sequência qualquer em X. Usando a desigualdade $||Tx_n|| \leqq ||T||||x_n||$ mostramos que a imagem o operador em Y é limitada. Como Tx_n é fechada e limitada, $||Tx_n||$ é relativamente compacta, já que a dimensão de X é finita. Segue que Tx_n tem uma subsequencia convergente. Como x_n foi escolhida arbitrariamente em X o operador T é compacto.

b) Ter $dim\, X < \infty$ implica em T limitado e a dimensão de $dim\, T(X) \leqq dim\, X$, de acordo com (2.6-9), voltando ao caso a.

■

Teorema: (8.1-5) Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares compactos de um espaço normado X para um espaço de Banach. Se (T_n) é uniformemente convergente como operador, $||T_n - T|| \Longrightarrow 0$ então o operador limite T é compacto.

Prova:

Usando o Método diagonal para uma sequência limitada (x_m) qualquer a imagem (Tx_m) possui uma subsequencia convergente, deste ponto aplicamos o teorema 8.1-3:

Como T_1 é compacta, (x_m) tem uma subsequencia $(x_{1,m})$ tal que $(T_1 x_{1,m})$ é cauchy. Similarmente, $(x_{1,m})$ tem uma subsequencia $(x_{2,m})$ tal que $(T_2 x_{2,m})$ é cauchy. Ao continuar com isso vemos que a sequência $(y_m) = (x_{m,m})$ é uma subsequencia de (x_m) tal que para todo n inteiro e positivo a sequência $(T_n y_m)$ é cauchy. (x_m) é limitada, $(x_m) \leqq c$ para todo m, com isso $(y_m) \leqq c$ para todo m.

Seja $\epsilon > 0$, como $T_m \longrightarrow T$ existe um $n = p$ tal que $||T - T_p|| < \epsilon/3c$. Como $(T_p y_m)$ é cauchy, existe um N para o qual:

$$||T_p y_j - T_p y_k|| < \frac{\epsilon}{3}.$$

usando isso:

$$||Ty_j - Ty_k|| \leqq ||Ty_j - T_p y_j|| + ||T_p y_j - T_p y_k|| + ||T_p y_j - Ty_k||.$$
$$\leqq ||T - T_p||\,||y_j|| + \frac{\epsilon}{3} + ||T_p - T||\,||y_k||.$$
$$< \frac{\epsilon}{3c}c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c}c = \epsilon.$$

Isso mostra que (Ty_m) é cauchy e converge, já que Y é completo. Finalmente, Como T mapeia uma sequência limitada qualquer (x_m) em uma sequência (Tx_m) que possui subsequencia convergente (Ty_m) T é compacto.

■

(Teorema: 8.1-7) Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Suponha que (x_n) em X é fracamente convergente, ou seja, $x_n \xrightarrow{w} x$. Então Tx_n é fortemente convergente em Y e tem o limite $y = Tx_n$.

Prova:

Escrevemos $y_n = Tx_n$ e $y = Tx$, primeiro provamos $y_n \xrightarrow{w} y$ depois $y_n \to y$:

Seja g um funcional linear em Y, definimos um funcional f em X de forma que

$$f(z) = g(Tz).$$

f é linear, f é limitado por que T é compacto e

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leqq ||g||\,||Tz|| \leqq ||g||\,||T||\,||z||.$$

Por definição $x_n \xrightarrow{w} x$ implica que $f(x_n) \to f(x)$, ou seja, também por definição $g(Tx_n) \to g(Tx)$, isto é, $g(y_n) \to g(y)$. Como g foi escolhida arbitrariamente, está provada $y_n \xrightarrow{w} y$.

Agora, assumindo que $y_n \to y$ não seja válido. Nesse caso (y_n) tem uma subsequencia tal que:

$$||y_{n_k} - y|| \geqq \eta$$

Para algum η maior que zero. Como (x_n) é fracamente convergente, (x_n) é limitada da mesma forma uma subsequencia x_{n_k}. A compacticidade de T junto do teorema 8.1-3 implicam agora que Tx_{n_k} tem uma subsequencia convergente, denotemos essa subsequencia por $\tilde{y}_l$, como essa subsequencia converge temos $\tilde{y}_l \longrightarrow \tilde{y}$. Mas com isso temos simultaneamente:

$$||\tilde{y}_l - y|| \longrightarrow 0 \;\; ; \;\; ||\tilde{y}_l - y|| \geqq \eta.$$

mas isso gera contradição, então nossa premissa inicial ($y_n \to y$ não seja válido) não pode ser válida.

■

Definição: (8.2-1 Limitação total) Seja B um subconjunto de um espaço métrico X seja ϵ um numero positivo dado. Um conjunto $M_\epsilon \subset X$ é dito Rede ϵ de B se para todo ponto $z \in B$ existe um ponto de M_ϵ à uma distancia menor que ϵ de z. O conjunto B é dito totalmente limitado se para todo ϵ maior que zero existe um uma rede ϵ finita $M_\epsilon \subset X$, onde finito significa que o conjunto M_ϵ consiste de uma quantidade finita de pontos.
Observação a limitação total de B significa que para todo ϵ maior que zero o conjunto B é contido pela união de um numero finito de bolas abertas de raio ϵ.

(Lemma 8.2-2) Seja B um subconjunto de um espaço métrico X. Então:

- Se B é relativamente compacto então B é totalmente limitado.
- Se B é totalmente limitado e X é completo então B é relativamente compacto.
- Se B é totalmente limitado, para todo ϵ maior que zero B tem um Rede ϵ finita $M_\epsilon \subset B$.
- Se B é totalmente limitada B é separável.

Prova:

i) Partindo de B relativamente compacto. Se B é um conjunto vazio, então o próprio conjunto vazio é uma rede ϵ B. Se B for um conjunto não vazio escolhemos um $x_1 \in B$. Se $d(x_1, z) < \epsilon$ para todo z, então o conjunto $\{x_1\}$ é uma rede ϵ para B. Caso contrario, seja $x_2 \in B$ o ponto que não está satisfeito na desigualdade anterior, ou seja, $d(x_1, x_2) \geqq \epsilon$. Nesse caso, para $j = 1$ ou $j = 2$ temos:

$$d(x_j, z) < \epsilon.$$

então $\{x_1, x_2\}$ é uma rede ϵ para B. Caso contrario, seja x_3 o ponto de z para o qual a desigualdade não é satisfeita, nesse caso $\{x_1, x_2, x_3\}$ é uma rede ϵ para B. Caso contrario continuaríamos escolhendo um ponto $x_4 \in B$ e assim por diante. Temos certeza que para um inteiro n positivo a sequência $\{x_1, ..., x_n\}$ seria uma rede ϵ para B, porque se não houvesse tal n a sequência resultante (x_i) iria obedecer

$$d(x_j, x_k) \geqq \epsilon.$$

e uma sequência assim não poderia ser cauchy e portanto não poderia ter uma subsequencia convergente em X. Mas isso iria contradizer a compacticidade relativa de B, já que a sequência (x_i) está contida em B. Dessa forma concluímos que deve existir uma rede ϵ finita para B, como o ϵ positivo foi escolhido arbitrariamente concluímos que B é totalmente limitada.

ii) Agora partindo de B totalmente limitado e X completo. Consideramos uma sequência (x_n) qualquer em B e mostramos que essa sequência tem uma subsequencia que converge em X, dessa forma B será relativamente compacto. Por suposição, B possui uma rede ϵ para $\epsilon = 1$, portanto B estará contido na união de uma quantidade finita de bolas abertas de raio igual a 1. Dessas bolas podemos escolher uma bola B_1 que contem uma quantidade finita de termos de (x_n). Seja $(x_{1,n})$ a subsequencia de (x_n) que está em B_1. Similarmente, B também estará contida na união de uma quantidade finita de bolas de raio $\epsilon = 1/2$, dessas bolas escolhemos uma bola B_2 que contem uma subsequencia $(x_{2,n})$ da subsequencia $(x_{1,n})$. Continuamos esse processo escolhendo $\epsilon = 1/3$, $1/4$, $1/5$, ... e escolhendo $y_n = x_{n,n}$. Então para todo ϵ positivo existe um $N(\epsilon)$ tal que todo y_n com $n > N$ está em uma bola de raio ϵ. Dessa forma (y_n) é cauchy. Essa sequência converge em X, $y_n \Longrightarrow y \in X$, já que X é completo. Além disso, $y_n \in B$ implica em $y \in B$. Isso implica em: Pela definição de fecho, para toda sequência (z_n) em $\overline{B}$ existe uma sequência (x_n) também em B que satisfaz $d(x_n, z_n) \leqq 1/n$ para todo n. Como (x_n) está em B ela tem uma subsequencia que converge em $\overline{B}$. Assim (z_n) também tem uma subsequencia que converge em $\overline{B}$ e com isso $\overline{B}$ é compacto e B é relativamente compacto.

iii) Partindo de B totalmente limitada. O caso de B vazio é obvio (i), então seja B um conjunto não vazio. Por hipótese para um ϵ dado existe uma rede ϵ_1 finita $M_{\epsilon_1} \subset X$ onde $\epsilon_1 = \epsilon/2$. Portanto B está contido na união de uma quantidade finita de bolas de raio ϵ_1, com os elementos de M_{ϵ_1} no centro. Sejam $B_1, B_2, ..., B_n$ as bolas que unidas contém B e $x_1, x_2, ..., x_n$ seus centros. Escolhemos um ponto $z_j \in B \bigcap B_j$. Então $M_\epsilon = \{z_1, ..., z_n\}$ é uma rede ϵ de B, já que para todo $z \in B$ existe um B_j contendo z, e

$$d(z, z_j) \leqq d(z, x_j) + d(x_j, z_j) < \epsilon_1 + \epsilon_1 = \epsilon.$$

iv) Supondo B totalmente limitado, então usando iii) o conjunto B possui uma rede ϵ $M_{1/n}$, onde $\epsilon = \epsilon_n = 1/n$. A união de todas essas redes é contável. M é denso em B, inclusive para cada $\epsilon > 0$ existe um n tal que $1/n < \epsilon$. Portanto para cada $z \in B$ existe um $a \in M_{1/n} \subset M$ tal que a distancia $d(z, a) < \epsilon$. Isso mostra que B é separavel.

■

(Teorema: 8.2-3) Para um operador linear compacto $T : X \longrightarrow Y$, com X e Y dois espaços normados. O alcance $\mathcal{R}(T)$ do operador T é separavel.

Prova:

Considerando a bola $B_n = B(0; n) \subset X$. Como T é compacto a imagem $C_n = T(B_N)$ é relativamente compacta. C_n é separavel pelo lema 8.2-2 iv). A norma de um $x \in X$ qualquer é finita, tal que $||x|| < n$, assim $x \in B_n$ para algum n suficientemente grande, consequentemente:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Longrightarrow T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Como C_n é separavel ele possui algum subconjunto D_n contável e denso, de forma que a união D

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

é contável. Se olharmos o lado direito da igualdade anterior vemos que D é denso no alcance $\mathcal{R}(T) = T(X)$

■

(Teorema: 8.2-4) o operador linear compacto $T : X \longrightarrow Y$ de um espaço normado X para um espaço de Banach Y possui uma extensão linear compacta $\tilde{T} : \hat{X} \longrightarrow Y$ onde $\hat{X}$ é o complemento de X.

Prova:

Podemos tratar X como um subespaço de $\hat{X}$ de acordo com o teorema 2.3-2. Como T é limitado, ele possui uma extensão linear limitada $\tilde{T} : \hat{X} \longrightarrow Y$. Mostramos que a compacticidade de T implica na compacticidade de $\tilde{T}$. Para isso vamos considerar uma sequência $(\hat{x_n})$ em $\hat{X}$ e mostramos que $(\tilde{T}\hat{x_n})$ tem uma subsequencia convergente.

Como X é denso em $\hat{X}$, existe uma sequência (x_n) em X tal que $\hat{x_n} - x_n \longrightarrow 0$. Dessa forma (x_n) também será limitada. Como T é compacta, $T(x_n)$ possui alguma subsequencia convergente $T(x_{n_k})$. Seja

$$T(x_{n_k}) \longrightarrow y_0 \in Y$$

Agora $\hat{x_n} - x_n \longrightarrow 0$ implica em $\hat{x_{n_k}} - x_{n_k} \longrightarrow 0$. Como $\tilde{T}$ é linear e limitado, é contínuo portanto aplicando à igualdade anterior temos:

$$\tilde{T}\hat{x_{n_k}} - \tilde{T}x_{n_k} = \tilde{T}(\hat{x_{n_k}} - x_{n_k}) \longrightarrow \tilde{T}0 = 0$$

Mas de acordo com $T(x_{n_k}) \longrightarrow y_0 \in Y$ isso implica em $\tilde{T}\hat{x_{n_k}} \longrightarrow y_0$. Mostramos portanto que a sequência arbitraria $(\hat{x_n})$ possui uma subsequencia $(\hat{x_{n_k}})$ tal que $(\tilde{T}\hat{x_{n_k}})$ converge. Isto prova a compacticidade de $\tilde{T}$.

■

(Teorema: 8.2-5 (operador adjunto)) Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Se T é compacto então seu operador adjunto $T^{\times} : Y' \longrightarrow X'$ também será. Neste caso X e Y são espaços normados e X' e Y' são seus espaços duais respectivamente.

Prova:

Consideremos um subconjunto limitado B de Y', ou seja: $||g|| \leqq c \forall g \in B$ e vamos mostrar que a imagem $T^{\times}(B) \subset X'$ é totalmente limitada de forma que $T^{\times}(B)$ é relativamente compacta de acordo com 8.2-2 ii) já que X' é completo.

É necessário provar que para qualquer ϵ_0 fixo a imagem $T^{\times}(B)$ possui uma rede ϵ finita. Como T é compacto a imagem $T(U)$ da bola unitária $U = \{x \in X \,|\, ||x|| \leqq 1\}$ é relativamente compacta. Assim $T(U)$ é totalmente limitada por i). Usando 8.2-2 iii) temos uma rede ϵ_1 finita $M \subset Y(U)$, onde $\epsilon_1 = \epsilon_0/4c$. Isso significa que U contem pontos $x_1, x_2, ..., x_n$ tais que $x \in U$ satisfaz

$$||Tx - Tx_j|| < \frac{\epsilon_0}{4c}.$$

para algum j. Definimos o operador $A : Y' \longrightarrow R^n$ como:

$$Ag = (g(Tx_1), g(Tx_2), g(Tx_3), ..., g(Tx_n)).$$

g é limitado por construção e T é limitado por 8.1-2 i). Então A é compacto por 8.1-4. Já que B é limitado $A(B)$ é relativamente compacto e por isso totalmente limitado por 8.2-2 i). Por 8.2-2 iii) a imagem tem uma rede ϵ_2 finita $\{Ag_1, Ag_2, ..., Ag_n\}$ para si, com $\epsilon_2 = \epsilon_0/4$, ou seja, cada $g \in B$ satisfaz

$$||Ag - Ag_k||_0 < \frac{\epsilon_0}{4}.$$

onde $|| \cdot ||_0$ é a norma em R^n. Precisamos mostrar que $\{T^{\times}g_1, ..., T^{\times}g_m,\}$ é a rede ϵ_0 desejada para $T^{\times}(B)$ completando com isso a prova.

Da definição de A e da ultima equação temos imediatamente que para cada g e j existe um k tal que:

$$|g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2 \leqq \sum_{j=1}^{n} |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2.$$

$$= ||A(g - g_k)||_0^2.$$

$$< (\frac{\epsilon_0}{4})^2.$$

Agora seja um $x \in U$ arbitrário. Então existe um j para o qual $||Tx - Tx_j|| < \frac{\epsilon_0}{4c}$ é valido. Seja um $g \in B$ arbitrário. Então existe um k para o qual $||Ag - Ag_k||_0 < \frac{\epsilon_0}{4}$ é valido e a igualdade anterior é valida para este k e um j qualquer. Reunindo essas três condições temos:

$$|g(Tx) - g_k(Tx)| \leqq |g(Tx) - g_k(Txj)| + |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)| + |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)|.$$

$$< ||g||||Tx - Tx_j|| + \frac{\epsilon_0}{4} + ||g_k||||Tx_j - Tx||.$$

$$\leqq c\frac{\epsilon_0}{c4} + \frac{\epsilon_0}{4} + c\frac{\epsilon_0}{4} < \epsilon_0.$$

Como isso é verdade para qualquer $x \in U$ e que pela definição de $T^\times$ temos $g(Tx) = (T^\times g)(x)$ **finalmente** temos

$$||T^\times g - T^\times g_k|| = Sup_{||x||=1}|T^\times(g - g_k)(x)|.$$

$$= Sup_{||x||=1}|g(Tx) - g_k(Tx)| < \epsilon_0.$$

Isso mostra que $\{T^\times g_1, ..., T^\times g_m\}$ é uma rede ϵ_0, como essa escolha foi feita para um ϵ_0 arbitrário com $T^\times$ é totalmente limitado então $T^\times$ é relativamente compacto e como B foi um subconjunto escolhido arbitrariamente de Y' isso prova a compacticidade de $T^\times$.

■

(Teorema: 8.3-1 (Autovalores)) O conjunto de autovalores de um operador compacto $T : X \longrightarrow Y$ é contável e o único ponto de acumulação possível é $\lambda = 0$.

Prova:

Seria suficiente provar que para todo $k > 0$ o conjunto de todos os $\lambda \in \sigma_p(T)$ com $|\lambda| \leqq k$ é finito.

Vamos supor o contrário para algum $k_0 > 0$. Nesse caso existe alguma sequência (λ_n) com infinitos autovalores distintos tais que $|\lambda| \geqq k_0$. Para algum $x_n \neq 0, Tx_n = \lambda_n x_n$. O conjunto de todos os x_n's é linearmente independente pelo teorema (7.4-3). Seja M_n o alcance $\{x_1, ..., x_n\}$, ou seja todo $x \in M_n$ tem uma representação única

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n.$$

Aplicando $T - \lambda_n I$ e usando $TX_j = \lambda_j x_j$:

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + ... + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1}.$$

Vemos que x_n já não ocorre de um lado da igualdade, com isso concluímos que:

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}.$$

Os alcances M_n são fechados, com isso sabemos que existe uma sequencia (y_n) tal que: $y_n \in M_n$, $||y_n|| = 1$ e $||y_n - x|| \geqq \frac{1}{2}$ para todo $x \in M_{n-1}$. Mostramos que

$$||Ty_n - Ty_m|| \geqq k_0/2.$$

de forma que (Ty_n) não tem subsequência convergente porque k_0. Isso contradiz a compacticidade de T já que (y_n) é limitada.

Adicionando e subtraindo um termo podemos escrever:

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \tilde{x} \quad \text{onde} \quad \tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n - Ty_m.$$

Se $m < n$, mostramos que para $\tilde{x} \in M_{n-1}$, já que $m \leqq n-1$, vemos que $y_m \in M_m \subset M_{n-1}$. Por isso $Ty_m \in M_{n-1}$ já que $Tx_j = \lambda_j x_j$. Voltando à $(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}$ temos:

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}.$$

Juntando $\tilde{x} \in M_{n-1}$ e por isso $x = \lambda_n^{-1}\tilde{x} \in M_{n-1}$, de forma que

$$||\lambda_n y_n - \tilde{x}|| = |\lambda_n|||y_n - x|| \geqq \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqq \frac{1}{2}k_0.$$

já que $|\lambda| \geqq k_0$. Dessa última equação e de $Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \tilde{x}$ temos $||Ty_n - Ty_m|| \geqq k_0/2$. Dessa forma a noção de que existem infinitos autovalores que satisfazem $|\lambda_n| \geqq k_0$ para um k_0 positivo qualquer deve ser falsa.

■

(Teorema: 8.3-2 Compacticidade do produto:) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto e $S : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado em um espaço normado X. Então TS e ST são compactos

Prova:

Seja B um subconjunto limitado de X qualquer. Como S é um operador limitado, $S(B)$ é um conjunto limitado e o conjunto $T(S(B)) = TS(B)$ é relativamente compacto porque T é compacto. Portanto TS é um operador linear compacto. Para provar que ST também é compacto, seja (x_n) uma sequencia limitada qualquer em X. Então (Tx_n) tem uma subsequencia convergente (Tx_{n_k}) e (STx_{n_k}) converge, portanto ST é compacta.

■

(Teorema: 8.3-3 Espaço nulo:) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X. Então para todo λ diferente de zero o espaço vazio $\mathcal{N}(T_\lambda)$ de $T_\lambda = T - \lambda I$ é de dimensão finita

Prova:

Seja (x_n) uma sequencia em uma bola fechada e unitária M. Então (x_n) é limitada e (Tx_n) possui uma subsequencia convergente (Tx_{n_k}) por *8.1-3*. Agora, $x_n \in M \subset \mathcal{N}(T_\lambda)$ implica que $T_\lambda x_n = Tx_n - \lambda x_n = 0$ de forma que $x_n = \lambda^{-1}Tx_n$, reorganizando já que λ é diferente de zero. Consequentemente a subsequencia anterior que pode ser escrita como $x_{n_k} = \lambda^{-1}Tx_{n_k}$ também converge. O limite está em M já que M é fechado, e com isso M será compacto, já que x_n foi escolhida arbitrariamente em M. Como um espaço que possui na bola unitária a propriedade de compacticidade deve ser de dimensão finita, o teorema está provado.

■

(Teorema: 8.3-5 Alcance:) Seja $T : X \Longrightarrow X$ um operador compacto em um espaço normado X, então para todo λ diferente de zero o alcance de $T_\lambda = T - \lambda I$ é fechado.

Prova:

A prova pode ser feita por contradição, primeiro suponhamos que T_λ não é fechado, então existe um y no fecho do alcance de T_λ que não pertence à esse alcance. existe uma sequencia tal que

$$y_n = T_\lambda x_n \longrightarrow y.$$

como o alcance $T_\lambda(X)$ é um espaço vetorial, zero pertence à esse espaço, mas y não pertence, por suposição. Isso implica que $y_n \neq 0$ e com isso $x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$ para todo n suficientemente grande. Podemos, igualmente de maneira geral, assumir que isso vale para todo n. Como o espaço nulo é fechado, a distancia δ_n entre x_n e o espaço nulo de T_λ é positiva, isto é:

$$\delta_n = \inf_{z \in \mathcal{N}(T_\lambda)} ||x_n - z|| > 0.$$

pela definição do infimum existe uma sequencia z_n em $\mathcal{N}(T_\lambda$ tal que:

$$a_n = ||x_n - z_n|| < 2\delta_n$$

Agora, mostramos que a_n vai para o infinito a medida que n vai para o infinito. Supondo que isso não seja verdade $(x_n - z_n)$ tem uma subsequencia limitada, como T é compacto segue de $8.1 - 3$ que $T(x_n - z_n)$ tem uma subsequencia convergente. usando a definição de T_λ e $\lambda \neq 0$ temos $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$. Usando $T_\lambda z_n = 0$, z_n pertence ao espaço nulo de T_λ, obtemos:

■

Lemma 8.4.1 Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X e seja λ diferente de zero. Então existe um número inteiro r dependente de λ tal qual que de $n = r$ em diante os espaços nulos $\mathcal{N}({T_\lambda}^n)$ são todos iguais e se $r > 0$ então as inclusões:

$$\mathcal{N}({T_\lambda}^0) \subset \mathcal{N}({T_\lambda}^1) \subset ... \subset \mathcal{N}({T_\lambda}^r).$$

são todas próprias.

Prova:

Para abreviar a notação, vamos escrever $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}({T_\lambda}^n)$. A ideia da prova será: Assumir que $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$ não acontece para nenhum m e retirar disso uma contradição. Em seguida mostramos que $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$ implica em $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+1}$ para $n > m$.

De um corolário de 8.3.3 sabemos que $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{m+1}$. Suponhamos que isso não ocorra para nenhum m. Nesse caso, $\mathcal{N}_n$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}_{n+1}$ para todo n. Como esses espaços nulos são fechados, o lema de Riesz (2.5-4) implica na existência de uma sequência (y_n) tal que $y_n \in \mathcal{N}_n$, $||y_n|| = 1$ e $||y_n - x|| \geqq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathcal{N}_{n-1}$. Mostramos que

$$||Ty_n - Ty_m|| \leqq \frac{1}{2}|\lambda|$$

para $m < n$. De forma que (Ty_n) não tem subsequência convergente já que $|\lambda| > 0$. Mas isso iria contradizer a compacticidade de T já que a sequencia y_n é limitada.

Reescrevendo $T_\lambda = T - \lambda I$ obtemos $T = T_\lambda + \lambda I$ e com isso:

$$Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \tilde{x} \quad \text{Onde:} \quad \tilde{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n.$$

Seja $m < n$, nesse caso $m \leqq n-1$ e com isso $\lambda y_m \in \mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{n-1}$. Além disso, $y_m in \mathcal{N}_m$ implica que $0 = {T_\lambda}^m y_m = {T_\lambda}^{m-1}(T_\lambda y_m)$, ou seja, $T_\lambda y_m \in \mathcal{N}_{m-1} \subset \mathcal{N}_{n-1}$. De maneira similar $y_n \in \mathcal{N}_n$ implica em $T_\lambda y_n \in \mathcal{N}_{n-1}$. Juntando essas duas consequências concluímos que $\tilde{x} \in \mathcal{N}_{n-1}$, voltando às equações que vem do lema de Riesz temos:

$$||\lambda y_n - \tilde{x}|| = |\lambda| ||y_n - x|| \geqq \frac{1}{2}|\lambda|$$

. Com isso chegamos à conclusão que esperávamos que quer dizer partimos de algo falso, portanto deve existir um m para o qual $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$.

Suponhamos agora que $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$ não implica em $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+1}$. Então $\mathcal{N}_n$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}_{n+1}$ para um $n > m$. Consideremos um $x \in \mathcal{N}_{n+1} - \mathcal{N}_n$. Por essa definição temos ${T_\lambda}^{n+1}x = 0$ mas ${T_\lambda}^n x \neq 0$. Como $n > m$ temos $n - m > 0$. Seja $z = {T_\lambda}^{n-m}x$, então

$${T_\lambda}^{m+1}z = {T_\lambda}^{n+1}x = 0 \quad \text{mas} \quad {T_\lambda}^m z = {T_\lambda}^n x = 0$$

Assim z é um elemento de $\mathcal{N}_{m+1}$ mas não de $\mathcal{N}_m$ para que $\mathcal{N}_m$ fosse um subespaço próprio de $\mathcal{N}_{m+1}$. Isso contradiz $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$ chegando á contradiz=ção esperada.

■

Lemma 8.4.2 Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X e seja λ diferente de zero. Existe um menor número inteiro q tal que de $n = q$ em diante os alcances ${T_\lambda}^n(X)$ são todas iguais e se esse q for maior que zero as inclusões

$${T_\lambda}^0(X) \supset {T_\lambda}^1(X) \supset ... \supset {T_\lambda}^q(X).$$

São todas próprias.

Prova:

Abreviando a notação, seja $\mathcal{R}_n = {T_\lambda}^n(X)$. Suponhamos que $\mathcal{R}_s$ não seja igual à $\mathcal{R}_{s+1}$ para nenhum s. Nesse caso, $\mathcal{R}_{s+1}$ é um subespaço próprio de $\mathcal{R}_s$ para todo s. Como esse alcances são fechados por 8.3-6, o lema de Riesz implica na existência da sequência (x_n) tal que $x_n \in \mathcal{R}_n$, $||x_n|| = 1$ e $||x_n - x|| \geqq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathcal{R}_{n+1}$.

Seja $m < n$, reescrevemos T_λ obtendo $T = T_\lambda + \lambda I$. Com isso escrevemos:

$$Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - (-T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n).$$

Na direita λx_m e x_m pertencem à $\mathcal{R}_m$, de forma que $T_\lambda x_m$ pertence à $\mathcal{R}_{m+1}$ e como $n > m$ também $T_\lambda x_n + \lambda x_n \in \mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{m+1}$. Voltando à equação em que reescrevemos T_λ, temos:

$$Tx_m - Tx_n = \lambda(x_m - x)$$

e usando as propriedades da sequência:

$$||Tx_m - Tx_n|| = |\lambda|||(x_m - x)|| \leqq \frac{1}{2}|\lambda| > 0.$$

(x_n) é limitada e T é compacta, portanto (Tx_n) possui uma subsequência convergente. Mas isso contradiz a conclusão que acabamos de obter assumindo que $\mathcal{R}_s$ não é igual à $\mathcal{R}_{s+1}$ para nenhum s, isso prova portanto que $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_{s+1}$ para algum s. Seja q o menor s que satisfaz essa condição. Então se $q > 0$ as inclusões declaradas no lema são todas próprias. Além disso, $\mathcal{R}_{q+1} = \mathcal{R}_q$ significa que T_λ mapeia $\mathcal{R}_q$ em si mesma, essa aplicação consecutiva de T_λ gera $\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n$ para todo $n > q$.

■

(Teorema: 8.4-3) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X e seja λ diferente de zero. Então existe o menor número inteiro $n = r$ para o qual:

$$\mathcal{N}({T_\lambda}^r) = \mathcal{N}({T_\lambda}^{r+1}) = \mathcal{N}({T_\lambda}^{r+2}) = ...$$

e

$${T_\lambda}^r(X) = {T_\lambda}^{r+1}(X) = {T_\lambda}^{r+2}(X) = ...$$

Se esse r for maior que zero, as inclusões:

$$\mathcal{N}({T_\lambda}^0) \subset \mathcal{N}({T_\lambda}^1) \subset ... \subset \mathcal{N}({T_\lambda}^r).$$

e

$${T_\lambda}^0(X) \supset {T_\lambda}^1(X) \supset ... \supset {T_\lambda}^r(X).$$

São todas próprias.

Prova:

Os lemas 8.4-1 e 8.4-2 provam as quatro afirmações feitas, nos resta provar que $q = r$, para isso vamos provar que $q \geqq r$ e depois que $q \leqq r$.

Usaremos as duas abreviações de notação que usamos anteriormente, $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}({T_\lambda}^n)$ e $\mathcal{R}_n = {T_\lambda}^n(X)$.

Para a primeira parte, sabemos que $\mathcal{R}_{q+1} = \mathcal{R}_q$ baseado em 8.4-2, isso significa que $T_\lambda(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_q$, usando isso sabemos que se um y pertence à $\mathcal{R}_q$, então esse y é T_λ aplicado à algum x pertencente à $\mathcal{R}_q$, em suma:

$$y \in \mathcal{R}_q \implies y = T_\lambda x \text{ Para algum } x \in \mathcal{R}_q.$$

Suponhamos que $T_\lambda x = 0$ para algum x diferente de zero, nesse caso a afirmação anterior com $y = x_1$ rende $x_1 = T_\lambda x_2$ para algum $x \in \mathcal{R}_q$, similar para $x_2 = T_\lambda x_3$ e assim em diante. Para cada n obtemos então:

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = ... = {T_\lambda}^{n-1} x_n \quad \text{Mas} \quad 0 = T_\lambda x_1 = ... = {T_\lambda}^{n-1} x_n$$

Assim $x_n \notin \mathcal{N}_{n-1}$ mas $x_n \notin \mathcal{N}_n$. Mas por 8.4-1 sabemos que $\mathcal{N}_{n-1} \subset \mathcal{N}_n$, ou seja, chegamos a uma contradição assumindo somente que podemos ter $T_\lambda x = 0$ para algum x diferente de zero, assim $T_\lambda x = 0$ implica que $x = 0$.

Lembrando que $\mathcal{R}_{q+1} = \mathcal{R}_q$, provamos que $\mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$. Isso então implica que $q \geqq r$ usando 8.4-1. Já que r é o menor inteiro para o qual temos a igualdade. Temos $\mathcal{N}_{q+1} \supset \mathcal{N}_q$ 8.3-4. Provamos que $\mathcal{N}_{q+1} \subset \mathcal{N}_q$, isso é, $T_\lambda^{q+1} x = 0$ implica que $T_\lambda^q x = 0$ Suponhamos que isso não é verdade, então para algum x_0

$$y = {T_\lambda}^q x_0 \neq 0 \quad \text{Mas} \quad T_\lambda y = {T_\lambda}^{q+1} x_0 = 0.$$

Com isso $y \in \mathcal{R}_q$, $y \neq 0$ e $T_\lambda y = 0$. Mas isso contradiz a conclusão anterior de que assim $T_\lambda x = 0$ implica que $x = 0$, já que $y = x$. Dessa forma $\mathcal{N}_{q+1} \subset \mathcal{N}_q$ e $\mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$ e $q \geqq r$.

Na segunda parte da prova mostramos que $q \leqq r$. Se q é 0 isso já é verdade. Seja $q \geqq 1$, mostramos que $\mathcal{N}_{q-1}$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}_q$, isso vai implica $q \leqq r$ já que r é o menor inteiro para o qual $\mathcal{N}_r = \mathcal{N}_{r+1}$. A inclusão $\mathcal{R}_q \subset \mathcal{R}_{q-1}$ é própria por 8.4-2. Seja $y \in \mathcal{R}_{q-1} - \mathcal{R}_q$. Então y pertence à $\mathcal{R}_{q-1}$ de forma que $y = T_\lambda^{q-1} x$ para algum x. Mas $T_\lambda y \in \mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{q+1}$ implica que $T_\lambda y = T_\lambda^{q+1} z$ para algum z. Como $T_\lambda^q z \in \mathcal{R}_q$ mas $y \notin \mathcal{R}_q$ temos:

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) = y - T_\lambda^q z \neq 0.$$

Assim $x - T_\lambda z \notin \mathcal{N}_{q-1}$ mas $x - T_\lambda z \in \mathcal{N}_q$ porque

$$T_\lambda^q (x - T_\lambda z) = T_\lambda y - T_\lambda y = 0.$$

Com isso $\mathcal{N}_{q-1} \neq \mathcal{N}_q$ de forma que $\mathcal{N}_{q-1}$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}_q$ e por isso $q \leqq r$. Como $q \leqq r$ e $q \geqq r$ então $q = r$.

■

(Teorema: 8.4-4) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador compacto e linear em um espaço de Banach X. Então todo valor espectral não nulo de T é um autovalor de T.

Prova:

Se $\mathcal{N}(T_\lambda) \neq \{0\}$, então λ é um autovalor de T. Suponhamos que $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$, com $\lambda \neq 0$. Então sobre $T_\lambda x = 0$ implica que $x = 0$ e $T_\lambda^{-1} : T_\lambda X \longrightarrow X$ existe, como $\{0\} = \mathcal{N}(I) = \mathcal{N}(T_\lambda^0) = \mathcal{N}(T_\lambda$, temos $r = 0$ por 8.4-3. Como $X = T_\lambda^0(X) = T_\lambda(X)$ também por 8.4-3. Juntando esses fatos segue que T_λ é bijetiva e sua inversa é limitada por 4.12-2 já que X é completo e $\lambda \in \rho(T)$.

■

(Teorema: 8.4-5) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador compacto e linear em um espaço de Banach X. Então o espaço X pode ser representado como:

$$X = \mathcal{N}({T_\lambda}^r) \bigoplus {T_\lambda}^r(X).$$

Prova:

Vamos considerar um $x \in X$. Precisamos mostrar que x tem uma representação única na forma $x = y + z$, com $y \in \mathcal{N}_n$ e $z \in \mathcal{R}_n$). Seja $z = {T_\lambda}^r x$, então $z \in \mathcal{R}_r$ mas como $\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{2r}$ então $z \in \mathcal{R}_{2r}$, isso é, $z = {T_\lambda}^{2r} x_1$ para algum $x_1 \in X$. Seja $x_0 = {T_\lambda}^r x_1$, então $x_0 \in \mathcal{R}_r$ e

$${T_\lambda}^r x_0 = {T_\lambda}^{2r} x_1 = z = {T_\lambda}^r x.$$

Essa equação mostra que ${T_\lambda}^r(x - x_0) = 0$ e por isso $(x - x_0)$ pertence ao espaço nulo r $\mathcal{N}_r$. Podemos escrever $x = (x - x_0) + x_0$. Por construção x_0 pertence à $\mathcal{R}_r$ e $(x - x_0)$ pertence à $\mathcal{N}_r$. Portanto escrevemos um elemento geral de x em termos de elementos dos dois conjuntos que queríamos. Dada a unicidade dessa representação, fica provado o teorema. Para provar a unicidade, vamos adicionar uma equação semelhante à $x = (x - x_0) + x_0$:

$$x = (x - \tilde{x_0}) + \tilde{x_0}.$$

Onde $v_0 = x_0 - \tilde{x_0}$. Com essa construção $v_0 \in \mathcal{R}_r$ e podemos escrever v_0 como ${T_\lambda}^r v$ para algum $v \in X$. Podemos adicionar x escrevendo:

$$v_0 = (x - \tilde{x_0}) - (x - x_0).$$

Ambos os parenteses pertencem à $\mathcal{N}_r$, então $v_0 \in \mathcal{N}_r$. Juntando as duas ultimas equações:

$${T_\lambda}^{2r} v = {T_\lambda}^r v_0 = 0.$$

$v \in \mathcal{N}_r = \mathcal{N}_{2r}$ e com isso:

$$v_0 = {T_\lambda}^r v = 0.$$

Se $v_0 = 0$ então $x_0 = \tilde{x_0}$ e portanto à representação é única. A soma $\mathcal{N}_r + \mathcal{R}_r$ portanto é direta.

■

2.2.2 As operações envolvendo operadores investigadas por Fredholm

As propriedades estudadas em operadores compactos até agora são de suma importância ao investigar equações envolvendo estes operadores como veremos nas investigações de Fredholm sobre elas.

Para os próximos enunciados seguintes, temos como base as equações à seguir:

Para um operador linear compacto $T : X \longrightarrow X$ num espaço normado X, definimos o operador adjunto usando a notação $T^{\times} X' \longrightarrow X'$. Com isso temos equação (1):

$$Tx - \lambda x = y.$$

Sua forma homogênea, equação (2):

$$Tx - \lambda x = 0.$$

E as versões envolvendo o operador adjunto, equação (3):

$$T^{\times} f - \lambda f = g.$$

E sua versão homogênea, equação (4):

$$T^{\times} f - \lambda f = 0.$$

(Teorema: 8.5-1 Soluções de (1).) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X seja λ um numero diferente de zero. Nesse caso, (1) tem uma solução x se e somente se y é tal que

$$f(y) = 0.$$

para todo $f \in X'$ que satisfaz (4).

Prova:

Suponhamos umas solução para (1) $x = x_0$, isso é:

$$y = Tx_0 - \lambda x_0 = T_\lambda x_0.$$

Seja f uma solução qualquer de (4), primeiro temos:

$$f(y) = f(Tx_0 - \lambda x_0) = f(Tx_0) - \lambda f(x_0).$$

Mas usando a propriedade $f(Tx_0) = (T^{\times} f)(x_0)$ do operador adjunto, em (4) temos:

$$f(y) = (T^{\times} f)(x_0) - \lambda f(x_0) = 0$$

.

No sentido contrario assumimos que em (1), y satisfaz $f(y) = 0$ para qualquer solução de (4) e mostramos que assim (1) tem solução. Suponha que (1) não possua solução, então não há um x para o qual $y = T_\lambda x$ e assim $y \notin T_\lambda(X)$ como $T_\lambda(X)$ é fechado por 8.3-5, a distancia δ de y até $T_\lambda(X)$ é positiva. Pelo Lema 4.6-7 existe um $\tilde{f} \in X'$ tal que $\tilde{f}(y) = \delta$ e $\tilde{f}(z) = 0$ para todo $z \in T_\lambda(X)$. Como $z \in T_\lambda(X)$ temos $z = T_\lambda x$ para algum $x \in X$, de forma que $\tilde{f}(z) = 0$ se torna:

$$\tilde{f}(T_\lambda x) = \tilde{f}(Tx) - \lambda \tilde{f}(x)$$

$$\tilde{f}(T_\lambda x) = (T^\times \tilde{f})(x) - \lambda \tilde{f}(x)$$

Isso é válido para qualquer x já que z foi escolhido arbitrariamente no alcance de T_λ. Dessa forma $\tilde{f}$ é uma solução para (4) que por construção satisfaz (5), $\tilde{f}(y) = 0$. Mas antes disso tínhamos $\tilde{f}(y) = \delta$ com $\delta > 0$. Consequentemente (1) deve ter uma solução e com isso as duas vias ficam provadas.

■

Lema 8.5-2 Limite para soluções de (1) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X seja λ um numero dado diferente de zero. Então existe um numero real $c > 0$ independente de y em (1), com o qual para todo y em que (1) tem solução, pelo menos uma delas satisfaz: para $x = \tilde{x}$

$$||\tilde{x}|| \leqq c||y||.$$

onde $y = T_y \tilde{x}$.

Prova:

Primeiro: Se (1) tem alguma solução então o conjunto que contem essas solução possui um elemento com a norma miníma: Seja x_0 uma solução de (1), se x tiver qualquer outra solução o valor $x - x_0 = z$ vai satisfazer (2). Dessa forma, qualquer solução de (1) pode ser escrita como:

$$x = x_0 + z$$

onde z pertence à $\mathcal{N}(T_\lambda)$ e no sentido oposto qualquer solução de pode ser escrita em termos de $x_0 + z$. Para um x_0 fixo a norma de x depende de z, podemos escrever isso como:

$$p(z) = ||x_0 + z|| \quad \text{com} \quad k = \inf_{z \in \mathcal{N}(T_\lambda)} p(z).$$

Pela definição do ínfimo, $\mathcal{N}(T_\lambda)$ possui uma sequencia (z_n) tal que:

$$p(z_n) = ||x_0 + z_n|| \longrightarrow k$$

conforme $n \longrightarrow \infty$. Como $(p(z_n))$ converge, é limitada. Já que T é compacto (Tz_n) possui uma subsequencia convergente, mas $z_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, ou seja, $T_\lambda z_n = 0$ implicando em $Tz_n = \lambda z_n$ com algum λ não nulo. Por isso (z_n) também possui uma subsequencia convergente:

$$z_{n_j} \longrightarrow z_0$$

Sendo que z_0 também pertence à $\mathcal{N}(T_\lambda)$ e

$$p(z_{n_j}) \longrightarrow p(z_0)$$

porque p é contínua. Com isso voltamos à definição de p e temos:

$$p(z_0) = ||x_0 + z_0|| = k$$

Isso mostra que se (1) tiver soluções dado um y, o conjunto dessas soluções contém $x_0 + z_0 = \tilde{x}$ com norma mínima. Segundo: Existe um $c > 0$ tal que $||\tilde{x}|| \leqq c||y||$ é válido para o $\tilde{x}$ de menor norma em $y = T_\lambda \tilde{x}$ para o qual há solução de (1):

Suponhamos que essa afirmação seja falsa, então existe uma sequencia y_n tal que

$$\frac{||\tilde{x_n}||}{||y_n||}$$

onde $\tilde{x_n}$ é de norma mínima e satisfaz $T_\lambda \tilde{x_n} = y_n$, podemos multiplicar em ambos os lados por um α mostrando que $\alpha\tilde{x_n}$ corresponde a uma solução $\alpha\tilde{y_n}$ de norma mínima

■

(Teorema: 8.5-3 Soluções de (3)) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X seja λ um numero dado diferente de zero. então (3) possui solução se e comente se $g(x) = 0$ para todo $x \in X$ que satisfaz (2)

Prova:

Se (3) tem uma solução f e x satisfaz (2), então $g(x)$ é verdade porque:

$$g(x) = (T^\times f)(x) - \lambda f(x) = f(Tx - \lambda x) = f(0) = 0$$

Para o sentido contrario, vamos considerar um $x \in X$ qualquer e definir $y = T_\lambda x$. Então y pertence à $T_\lambda(X)$ e definimos um funcional f_0 como:

$$f_0(y) = f_0(T_\lambda x) = g(x).$$

f_0 Será linear e podemos mostrar que é limitado usando o lema anterior que implica que para todo $y \in T_\lambda(X)$ pelo menos um x satisfaz $||x|| \leqq c||y||$, com isso:

$$f_0(y) = |g(x)| \leqq ||g|| \; ||x|| \leqq c||g|| \; ||y||.$$

f_0 é com isso, limitado. Usando o teorema de Hahn-Banach, o funcional f_0 possui uma extensão f em X que é um funcional linear limitado definido em todo o X e por definição $f(T_\lambda x) = f_0(T_\lambda x) = g(x)$. Reescrevendo usando o operador adjunto:

$$f(T_\lambda x) = f(Tx - \lambda x) = (T^\times f)(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

Com isso voltamos à (3)

■

(Teorema: 8.6-1) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X e um $\lambda \neq 0$, então:

(a) A equação (1) possui uma solução x para todo $y \in X$ se e somente se a equação (2) só possui a solução trivial $x = 0$. Nesse caso a solução de (1) é única e T_λ possui uma inversa limitada.

(b) A equação (3) possui uma solução f para todo $g \in X'$ se e somente se a equação (4) só possui a solução trivial $f = 0$. Nesse caso a solução de (3) é única.

Prova:

(a) Provamos que para todo $y \in X$ a equação (1) é solucionável então $x = 0$ é a única solução para (2). Do contrario (2) teria uma solução $x_1 \neq 0$. Como (1) com qualquer y é solucionável a expressão $T_\lambda x = y = x_1$ vai ter uma nova solução x_2: $T_\lambda x_1 = x_2$. Sob a mesma justificativa temos para todo $k = 2, 3, ...$

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = {T_\lambda}^2 x_3 = ... = {T_\lambda}^{k-1} x_k$$

Com $0 = T_\lambda x_1 = {T_\lambda}^k x_k$. Ou seja, $x_k \in \mathcal{N}({T_\lambda}^k)$ mas $x_k \notin \mathcal{N}({T_\lambda}^{k-1})$. Isso quer dizer que $\mathcal{N}({T_\lambda}^{k-1})$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}({T_\lambda}^k)$ para todo k. Mas isso contradiz 8.4-3 que diz que $\mathcal{N}({T_\lambda}^k)$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}({T_\lambda}^{k-1})$, então $x = 0$ deve ser a única solução de (2). **(b)** Segue de maneira completamente análoga usando o fato de que $T^\times$ é compacta (8.2-5: Se T é compacto, seu adjunto também é) e partindo de uma $f_1 \neq 0$.

No outro sentido da afirmação **(a)**, suponhamos que $x = 0$ é a única solução de (2). Nesse caso (3) é solucionável para qualquer g pelo teorema 8.5-3. Agora $T^\times$ é compacta (8.2-5). Provamos que $f = 0$ é a única solução para (4). Com isso segue de (8.5-1: condições iniciais para que (1) e (3) tenham soluções) que (1) é solucionável para todo y tal que $f(y) = 0$. A unicidade resulta do fato de que qualquer outra solução de (1) é uma solução de (2) e com isso a única solução $x = {T_\lambda}^{-1} y$ é a de miníma norma e vemos a limitação de ${T_\lambda}^{-1}$ usando (8.5-2):

$$||x|| = ||{T_\lambda}^{-1} y|| \leqq c||y||.$$

■

(Teorema: 8.6-2 Lema: Sistema bi-ortogonal) Dado um conjunto linearmente independente $f_1, ..., f_m$ no espaço dual X' de um espaço normado X, existem elementos $z_1, ..., z_m$ em X tais que: $f_j(z_k) = \delta_{jk}$

Prova:

Como a ordem dos f_j não importa, é suficiente mostrar que existe um z_m tal que:

$$f_m(z_m) = 1, \quad f_j(z_m) = 0$$

Quando $m = 1$ temos $f_1 \neq 0$ (caso contrario o conjunto não seria linearmente independente), nesse caso $f_1(x_0) \neq 0$ para algum x_0 e podemos definir z_1 como $z_1 = 1/f_1(x_0)$ e com isso $f_1(z_1) = 1$.

Agora seja $m > 1$ e vamos à hipótese de indução de que o lema é valido para $m - 1$, isso é, X contém elementos $z_1, ..., z_{m-1}$ tais que $f_k(z_k) = 1$ e $f_n(z_k) = 0$ para

$k, n = 1, ..., m-1$. Seja M um conjunto $M = \{x \in X | f_1(x) = 0, ..., f_{m-1}(x) = 0\}$, mostramos que M contém uma sequencia $\tilde{z_m}$ tal que $f_m(\tilde{z_m}) = \beta \neq 0$ o que retorna o resultado desejado com $z_m = \beta^{-1}\tilde{z_m}$. Caso contrario, $f_m(x) = 0$ para todo $x \in M$, então tomamos um $x \in X$ qualquer e o representamos como:

$$\tilde{x} = x - \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) z_j.$$

usando a condição da indução para $k \leqq m-1$

$$f(\tilde{x}) = f_k(x) - \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) f_k(z_j) = f_k(x) - f_k(x) = 0.$$

e dessa forma $\tilde{x} \in M$ de forma que $f_m(\tilde{x}) = 0$ e usando a representação para $\tilde{x}$ temos:

$$f_m(x) = f_m(\tilde{x} + \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) z_j)$$

$$f_m(x) = f_m(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) f_m(z_j)$$

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j f_j(x)$$

Como a escolha de x foi arbitraria essa é uma representação de f_m como uma combinação linear dos termos de $\{f_1, ..., f_{m-1}\}$ e isso contradiz a independência linear de $\{f_1, ..., f_m\}$. Como $f_m(x) = 0$ para todo x é impossível então z_m deve conter algum z_m tal que

$$f_m(z_m) = 1, \quad f_j(z_m) = 0$$

seja válido.

■

(Teorema: 8.6-3 espaços vazios de T_λ e $T_\lambda{}^\times$) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X com um $\lambda \neq 0$. Então as equações (2) e (4) tem o mesmo número de soluções linearmente independentes. **Prova:**

Sejam $\dim \mathcal{N}(T_\lambda) = n$ e $\dim \mathcal{N}(T_\lambda{}^\times) = m$. Se $n = 0$ então a única solução para (2) é $x = 0$ e por 8.5-3 (3) é solucionável para qualquer g. 8.6-1 vai implicar que $f = 0$ é a única solução de (4) e portanto $m = 0$, valendo também o caminho contrario.

Agora sejam m e n são maiores que zero. Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma base de $\mathcal{N}(T_\lambda)$, claramente x_1 não pertence à um Y_1 que é o alcance de $\{x_2, ..., x_n\}$. Pelo teorema 4.6-7 existe um $\tilde{g_1}$ que é nulo para todo elemento de Y_1 e $\tilde{g_1}(x_1) = \delta$, com $\delta > 0$ a distancia de x_1 à Y_1. Com isso um $g_1 = \delta_{-1}\tilde{g_1}$ satisfaz $g_1(x_1) = 1$ e $g_1(x_2) = 0, ..., g_1(x_n) = 0$. Repetindo esse processo podemos obter um g_2 tal que $g_2(x_2) = 1$ e $g_2(x_1) = 0, ..., g_2(x_n) = 0$. Dessa forma X' contêm $g_1, ..., g_n$ tais que:

$$g_k(x_j) = \delta_{jk}$$

Além disso, se $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T_\lambda{}^\times)$ por 8.6-2 existem elementos $z_1, ..., z_m$ de X tais que :

$$f_j(z_k) = \delta_{jk}$$

Mostremos que $n > m$ é impossível. Seja $S : X \longrightarrow X$ um operador definido por

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) z_j$$

Nessa definição S é compacta e queremos mostrar que se $S_\lambda x_0 = Sx_0 - \lambda x_0 = 0$ teremos $x_0 = 0$. Partindo de $S_\lambda x_0 = 0$ temos $f_k(S_\lambda x_0) = f_k(0) = 0$ então voltando à base de $\mathcal{N}(T_\lambda{}^\times)$ temos 0

■

(Teorema: 8.6-4 autovalores) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X. Se T tem valores espectrais não nulos então cada um desses valores deve ser um autovalor de T

2.2.3 A Alternativa de Fredholm

Definição (Alternativa de Fredholm): Um operador linear limitado $A : X \longrightarrow X$ em um espaço normado X satisfaz a Alternativa de Fredholm se uma das duas alternativas a seguir é obedecida:

I. As equações não homogêneas

$$Ax = y \qquad A^\times f = g$$

Possuem soluções x e f para todo $y \in X$ e $g \in X'$ (Com $A^\times : X' \longrightarrow X'$ o operador adjunto de A). Essas soluções sendo únicas. As equações homogêneas correspondentes

$$Ax = 0 \qquad A^\times f = 0$$

possuem somente as soluções triviais $x = 0$ e $f = 0$

II. As equações homogêneas

$$Ax = 0 \qquad A^\times f = 0$$

Possuem o mesmo numero de soluções linearmente independentes $x_1, ..., x_n$ e $f_1, ..., f_n$. Essas soluções sendo únicas. Nesse caso as equações não homogêneas

$$Ax = y \qquad A^\times f = g$$

não são solucionáveis para todo y e g, elas possuem solução se e somente se y e g são tais que:

$$f_k(y) = 0 \qquad g(x_k) = 0$$

para todo $1 \leqq k \leqq n$

(Teorema: Alternativa de Fredholm) Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto em um espaço normado X e seja $\lambda \neq 0$. Então $T_\lambda = T - \lambda I$ satisfaz a alternativa de Fredholm.

2.3 Extensões, Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos

Nesse momento, reescrevemos alguns conceitos que abordados durante o texto e adicionamos algumas particularidades importantes para, em seguida, nos voltarmos para um exemplo real: uma partícula de massa m em um poço de potencial infinito. Em primeira vista o problema de mecânica quântica pode parecer usual, mas uma análise um pouco cuidadosa segundo (GOPALAKRISHNAN, 2006) e (BONNEAU J. FARAUT, 2000) gera conclusões importantes.

2.3.1 Operadores lineares e suas Extensões

Definição: Um operador linear A ou transformação A é o mapeamento linear de um subconjunto $\mathcal{D}(A)$ de $\mathcal{H}$ para um subconjunto $\mathcal{R}(A)$ que é o alcance de A. Tanto o domínio $\mathcal{D}(A)$ quanto o alcance $\mathcal{R}(A)$ são variedades lineares.

Definição: Um operador A' é extensão de um operador A se:

- $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A')$.
- $A\,u = A'\,u$ para todo u no domínio de A.

Teorema da extensão 2.7-11: Um operador T limitado possui uma extensão única $\tilde{T}$ cujo domínio é o fecho de $\mathcal{D}(T)$ com $||\tilde{T}|| = ||T||$. Em particular, se $\mathcal{D}(T)$ for denso então $\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{H}$. O final desse teorema está intrinsecamente ligado com a definição de densidade presente no apêndice 1.

Prova:

Consideremos um $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$, existe uma sequência (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como T é linear e limitado, temos:

$$||T\,x_n - T\,x_m|| = ||T\,(x_n - x_m)|| \leqq ||T||\,||x_n - x_m||$$

isso mostra que Tx_n é cauchy porque x_n converge. Seja então $Tx_n = y$, com isso definimos $\tilde{T}x = y$. Para mostrar que essa escolha independe da sequência x_n suponhamos duas sequencias que convergem para o mesmo valor: $x_n \longrightarrow x$ e $z_n \longrightarrow x$. Baseado nessas duas sequencias escrevemos uma v_m:

$$= (x_1, z_1, x_2, z_2, ...).$$

dessa forma Tv_m converge por continuidade e suas duas subsequencias x_n e z_n devem ter o mesmo limite. Isso prova que $\tilde{T}$ é definido unicamente para cada $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Com essa construção, $\tilde{T}$ é único, linear e $\tilde{T}x = Tx \forall x \in \mathcal{D}(T)$ fazendo de $\tilde{T}$ uma extensão de T. Usamos $||Tx_n|| \leqq ||T||||x_n||$ e levamos n ao infinito, então $Tx_n \longrightarrow y = \tilde{T}x$. Como o mapeamento $x \longmapsto ||x||$ é contínuo temos:

$$||\tilde{T}x|| \leqq ||T||||x||$$

ou seja, $\tilde{T}$ é limitado e sua norma é menor que a norma de T. Mas $||\tilde{T}|| \geqq ||T||$ porque a norma definida por um supremo não pode diminuir uma extensão. Finalmente $||\tilde{T}|| = ||T||$

■

2.3.2 Operadores Adjuntos e Auto adjuntos

(Definição inicial de um operador adjunto): Se T é um operador limitado definido no espaço de Hilbert H então existe um operador linear e limitado $T^{\times}$ com o mesmo domínio que é o adjunto de T tal que: $||A^{\times}|| = ||A||$ e $(T^{\times}u, v) = (u, Tv)$ para todo $u, v \in H$. Além disso :

- para dois operadores A e B nesses moldes temos $(AB)^{\times} = A^{\times}B^{\times}$.
- $(A^{\times})^{\times}$ ou somente $A^{\times\times}$ é igual a A .

Prova:
Para um u fixo qualquer (u, Tv) é um funcional linear $l(v)$, tomamos $T^{\times}u$ como um elemento único cuja existência é assegurada pelo teorema de representação de forma que $l(v) = (T^{\times}u, v)$ para todo v. $T^{\times}$ depende linearmente de u portanto $T^{\times}$ é um operador linear em H. Para achar seu limite escrevemos:

$$|(T^{\times}u, v)| = |(u, Tv)| \leq ||u||||Tv|| \leq ||u||||T||||v||.$$

Se escolhemos $v = T^{\times}u$:

$$||T^{\times}u||^2 \leq ||u||||T||||T^{\times}u||.$$

ou seja, $||T^{\times}|| \leq ||T||$ para qualquer u. Poderíamos repetir o mesmo argumento trocando T e $T^{\times}$ o que nos daria $||T^{\times}|| \geq ||T||$ juntando os dois só podemos ter $||T^{\times}|| = ||T||$.
■

Observações:

- Uma definição mais geral do operador adjunto não requer que ele seja definido em todo o espaço de Hilbert nem limitado, requer somente que o operador seja linear com um domínio denso em H e que se ache os pares $\{v, w\}$ que satisfazem $(w, u) = (v, Tu)$, onde $T^{\times}v = w$.

- Se $T^{\times} = T$ ele é dito auto adjunto e isso implica em $(Tv, u) = (v, Tu)$ mas o contrario não é necessariamente verdade.
- Se T tem uma única extensão auto adjunta ele é dito essencialmente auto adjunto e via de regra é mais simples lidar com T do que com $\tilde{T}$.
- Se um operador U for linear e possuir uma inversa com o domínio de ambas sendo todo o espaço H então temos $(Uv, Uw) = (v, w)$ para todo $v, w \in H$ e $U^{-1} = U^{\times}$.

2.3.3 Exemplos no espaço de sequencias

1. Seja $\xi = (x_1, x_2, ...)$ um elemento qualquer em l^2. Definindo $A\xi = (x_2, x_3, ...)$ ou seja: omitindo o primeiro elemento de ξ e diminuindo os índices em 1, temos: $\mathcal{D}(A) = l^2$. Para um $\eta = (y_1, y_2, ...)$ vemos que $A\eta = (0, y_1, y_2, ...)$ mantém o domínio $\mathcal{D}(A^{\times}) = l^2$ e a norma $||A^{\times}\eta|| = ||\eta|| \forall\eta$, mas $||A\eta|| \geq ||\eta||$. $A^{\times}$ não é unitária pois sua inversa não está definida em todo H.

2. Seja $\xi = (x_1, x_2, ...)$. Definindo $A\xi = (x_2, x_1, x_6, x_3, x_8, ..., x_{2n+2}, x_{2n-1}, ...)$, temos A unitário.

3. Seja M uma matriz $n \times n$ qualquer, seja $\xi = (x_1, x_2, ...)$ e $A\xi = (w_1, w_2, ...)$ segundo:

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} M_{jk} x_k \quad \text{Para j = 1, 2, ..., n.}$$
$$w_j = x_j \quad \text{Para j > n.}$$

$\mathcal{D}(A)l^2$, A é auto adjunta e Hermitiana e A é unitária para todo M unitário.

2.3.4 Operadores integrais:

Seja $K(x, y)$ uma núcleo contínuo para x, y no intervalo $[a, b]$. Seja o domínio de uma função A o conjunto de funções $\phi(x)$ contínuas no intervalo $[a, b]$. Para um ϕ qualquer, definimos $A\phi$ por:

$$A\phi = [A\phi](x) = \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy.$$

Usando a desigualdade de Schawarz, para um x fixo:

$$\left| \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy \right|^2 \leq \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \int_a^b |\phi(y)|^2 dy.$$

integrando com respeito a x temos:

$$||A\phi||^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy ||\phi||^2.$$

Ou seja, A é um operador limitado cujo domínio é dendo em $H = L^2(a, b)$ de acordo com o teorema da extensão. A possui uma extensão linear única $\tilde{A}$ com $\mathcal{D}(\tilde{A}) = H$. Se o núcleo $K(a, b)$ satisfaz $K(a, b) = \overline{K(a, b)}$ então A é simétrica e $\tilde{A}$ é auto adjunta.

Operadores desse tipo podem ser generalizados tirando os limites do núcleo $K(a, b)$ ou do intervalo (a, b) ou aumentando o número de variáveis independentes. Se a integral anterior for finita então ela é do tipo Hilbert-Schmidt, uma propriedade que pode ser interessante mais a frente. No entanto um operador integral não precisa ser desse tipo para ser limitado. Por exemplo, o operador Transformada de Fourier dado em L^2 pelas equações:

$$\mathcal{D}(F) = C_0^\infty.$$

$$(F\phi)(x) = (2n)^{-n/2} \int ... \int e^{ix \cdot y} \phi(y) dy_1 ... dy_n.$$

é definido de maneira densa e tem limite $||F||$ igual a 1, mas futuramente veremos que ele não é do tipo Hilbert-Schmidt. A extensão $\tilde{F}$ para todo o conjunto L^2 é um mapeamento unitario de todo o conjunto L^2 para ele mesmo.

2.3.5 Operadores diferenciais via Teoria de Distribuição

Seja um operador T definido em $H = L^2(a, b)$ pelas equações:

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in L^2 : f' \in L^2 \text{ e } f(a) = f(b) = 0\}.$$

$$Tf = -if'.$$

onde f' é entendido como o a derivada de distribuição de f. Nesse caso T é simétrico porque a integração por partes é permitida para distribuições em L^2 e essa mesma integração por partes desaparece devido às condições de contorno, isto é:

$$(Tf, g) = \int_a^b \overline{-if'} g dx = i\overline{f}g\Big|_a^b - i \int_a^b \overline{f} g' dx = (f, Tg).$$

para encontrar a adjunta $T^\times$ deve-se procurar por pares de elementos $\{g, h\}$ de L^2 que obedecem:

$$(Tf, g) = (f, h) \;\; \forall f \in \mathcal{D}(T).$$

O conjunto de todos os elementos g é o domínio $\mathcal{D}(T^\times)$ e para qualquer par $\{g, h\}$, $T^\times g = h$ em particular:

$$i(\overline{\phi'}, g) = (\overline{\phi}, h) \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(a, b).$$

A bibliografia fornece mais alguns exemplos nessa seção, alguns genéricos e um referente ao teorema de Sturm-Liouville. No entanto estes exemplos foram deixados como uma adição possível para trabalho posterior.

2.3.6 Operadores fechados e o Gráfico de um operador

Seja A um operador linear cujo domínio $\mathcal{D}(A)$ é não fechado e seja ξ um ponto do fecho $\tilde{\mathcal{D}}(A)$ que não está em $\mathcal{D}(A)$ em si. É interessante saber se $A\xi$ pode ser definido de alguma forma razoável. Isso é sempre possível se A é limitado segundo o teorema da extensão em **7.1**. De fato, se $\{u_n\}$ é uma sequência de pontos em $\mathcal{D}(A)$ tal que essa sequência converge para ξ conforme n vai para infinito, então $\{Au_n\}$ é uma sequência de Cauchy e $A\xi$ pode ser definido como o limite de $\{Au_n\}$ com n indo para infinito.

Se A não for limitado o procedimento anterior não tem sucesso, uma vez que $\{Au_n\}$ pode não ter limite mesmo que $\{u_n\}$ tenha. No entanto, suponhamos que para qualquer sequência $\{u_n\}$ com as propriedades:

(i) $u_n \in \mathcal{D}(A)$ para todo n .

(ii) lim u_n existe para $n \to \infty$.

(iii) lim Au_n existe para $n \to \infty$.

temos $\lim u_n$ dentro de $\mathcal{D}(A)$ e $A(\lim u_n) = \lim(Au_n)$. Nesse caso A é um operador fechado.

Um operador não limitado pode ou não ter uma extensão fechada, se tiver ele é dito fechável e a menor extensão que satisfaz isso é dita o fecho de A, denotado por $\tilde{A}$. A é fechável se e somente se tiver a propriedade de que sempre que duas sequencias $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ convergem para o limite ξ então $\{Au_n\}$ e $\{Av_n\}$ também convergem para o mesmo limite, digamos η. Nesse caso obtemos $\tilde{A}$ definindo $\tilde{A}\xi = \eta$ para um par ξ, η nesse padrão. $\tilde{A}$ é a menor extensão fechada de A no que diz respeito a domínio, se A_1 é qualquer outra extensão fechada de A então A_1 também é extensão de $\tilde{A}$. Se A é por si só fechada então $\tilde{A} = A$.

O fecho e outras propriedades de um operador podem ser interpretadas em termos de seu gráfico se o construirmos de maneira conveniente. Dito isso, o gráfico de um operador A é denotado por $\Gamma(A)$ e é o subconjunto do espaço $H \times H$ (que é o espaço de todos os pares ordenados $\{u, v\}$ onde $u, v \in H$) que contém todos os pares da forma $\{u, Au\}$ para $u \in \mathcal{D}(A)$. Vale a pena destacar que o produto escalar entre dois elementos (u_1, u_2) e (v_1, v_2) deste espaço é definido como

$$(\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

onde os termos a direita são os produtos escalares como definido usualmente.

O gráfico $\Gamma(A)$ é um subconjunto ou variedade linear de $H \times H$ se A é linear. Se A é fechado então o gráfico é um subconjunto fechado.

Se A' é uma extensão de A então seu gráfico $\Gamma(A')$ contém $\Gamma(A)$.

2.3.7 Operadores Hermitianos e Auto-adjuntos

Como dito no Apêndice, um operador H é dito Hermitiano se para todo $f, g \in \mathcal{D}(H)$ temos

$$(f, Hg) = (Hf, g).$$

Esses operadores possuem autovalores reais e autofunções ortogonais, contudo existem uma serie de propriedades que não estão necessariamente associadas à esta classe.

Observando o problema para uma partícula de massa m em um poço de potencial unidimensional de largura L:

$$V(x) = 0, -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}; \quad V(x) = \infty, |x| \geqq \frac{L}{2}.$$

Nessas condições, a hamiltoniana será:

$$H = -\frac{\hbar}{2m} D^2.$$

Com D o operador derivada d/dx. O domínio para H será:

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ \phi,\ H\phi \in L^2\left(-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right),\ \phi\left(\pm\frac{L}{2}\right) \right\}.$$

Com autofunções pares $\Phi_n = \frac{2}{L}\sin\left[\frac{2n\pi x}{L}\right]$ e ímpares $\Psi_n = \frac{2}{L}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right]$.

A primeira questão à ser explorada é: A hamiltoniana é auto-adjunta? para visualizar isso vamos observar a função de onda

$$\Psi(x) = -\sqrt{\frac{30}{L^5}}\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right).$$

Podemos calcular

$$H\Psi = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{30}{L^5}}.$$

E com isso o valor médio para energia

$$\langle E \rangle = (\Psi, H\Psi) = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{30}{L^5}} \int_{-L/2}^{L/2} \left[x^2 - \frac{L^2}{2}\right] = \frac{5\hbar^2}{mL^2}.$$

Poderíamos obter o mesmo resultado para $\langle E \rangle$ usando os autovalores do poço infinito:

$$\langle E \rangle = \sum_n |(\Psi, \phi_n)|^2 E_n$$

O problema aparece porque esses dois métodos dão valores diferentes para E^2:

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \sum_n |(\Psi, \phi_n)|^2 E_n^2 = \frac{30\hbar^4}{m^2 L^4}$$

mas

$$(\Psi, H^2\Psi) = 0.$$

o segundo resultado é claramente inviável, uma vez que sugere um ΔE imaginário. Essa divergência fica mais clara uma vez que comparamos as contas:

$$\begin{aligned}\left\langle E^2\right\rangle &= \sum_n |(\Psi,\phi_n)|^2 E_n^2\\ &= \sum_n E_n(\phi_n,\Psi)(\Psi,\phi_n)E_n\\ &= \sum_n (E_n\phi_n,\Psi)(\Psi,E_n\phi_n)\\ &= \sum_n (H\phi_n,\Psi)(\Psi,H\phi_n)\\ &= \sum_n (\phi_n,H\Psi)(H\Psi,\phi_n)\\ &= (H\Psi,H\Psi)\\ &= (\Psi,H^\times H\Psi) \neq (\Psi,H^2\Psi)\end{aligned}$$

o problema nesse caso é que $H\Psi$ está no domínio de $H^\times$, já que $(H\Psi, H\phi)$ está bem definida, mas não no domínio de H, já que ela não desaparece nas pontas do poço. Isso trás uma importante conclusão:

Definição: O domínio de um operador adjunto $H^\times$ é todo ϕ tal que $(H\Psi,\phi)$ faça sentido para um $\Psi \in \mathcal{D}(H)$.
Mesmo com essa diferença de domínios, ainda é fundamental explicitar a importância da densidade desses domínios, uma vez que essa propriedade garante a unicidade da definição de $H^\times$. Feitas essas considerações, a próxima definição lógica é

Definição: Um operador Auto-adjunto é um operador hermitiano que possui o mesmo domínio que seu adjunto.

É importante, por uma variedade de razões, que nossas hamiltonianas sejam auto-adjuntas. Como de forma geral $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(H^\times)$, hamiltonianas não auto-adjuntas devem ser estendidas para atender à essa qualificação. Para construir essas extensões é conveniente primeiro estudar os subespaços de deficiência para um operador qualquer:

2.3.8 Índices de Deficiência

Definição: Os subespaços positivo N_+ e negativo N_- de deficiência de um operador H são os auto-espaços gerados pelos autovetores de $H^\times$ com autovalores $+i$ e $-i$, respectivamente. os índices de deficiência n_+ e n_- são as respectivas dimensões desses espaços. Qualquer $\chi \in \mathcal{D}(H^\times)$ pode ser escrito de maneira única na forma:

$$\chi = a\phi + b\Psi_+ + c\Psi_-$$

Onde $\phi \in \mathcal{D}(H)$ e $\Psi_\pm \in N_\pm$. A depender de algumas condições que serão abordadas à seguir, poderemos esses espaços linearmente independentes para definir uma extensão H_θ

que terá a mesma ação de $H^{\times}$. Sobre essas condições para existência de uma extensão H_θ:

Teorema Se $n_+ = n_- = 0$, então H é auto-adjunto ou possui uma extensão auto-adjunta única.

Isso pode ser provado definindo uma H_θ geral:

$$H_\theta \chi = H\phi + i \sum_{k=1}^{n_+} \lambda_k (\Psi_{+k} + U_{\theta kj} \Psi_{+j})$$

com domínio

$$\mathcal{D}(H_\theta) = \{\phi + (\Psi_+ + V_\theta \Psi_-)\}$$

onde U_θ e V_θ são matrizes unitárias. Assumindo uma extensão dessa forma e supondo $n_+ \neq 0$ poderíamos chegar à uma contradição da independência linear desses conjuntos, provando o teorema.

Teorema Se $n_+ \neq n_- = 0$, então H não possui extensões auto-adjuntas.

Essas conclusões são valiosas uma vez que a pergunta sobre a existência e sobre o domínio da adjunta passar se tornar uma pergunta sobre soluções normalizáveis de $H\phi = \pm\phi$.

Nestes moldes, as hamiltonianas de vários sistemas conhecidos são auto-adjuntas ou possuem extensões que são, dentre elas:

- A hamiltoniana da partícula livre ao longo dos números reais é auto-adjunta.
- A hamiltoniana da partícula livre ao longo do conjunto $[-L, L]$ possui índices (2, 2) e uma de suas extensões alto adjuntas é a partícula numa caixa.
- A hamiltoniana com potencial coulombiana em três dimensões é auto-adjunta, mas sua forma radial não é.
- O operador momento em R^+ possui índices (0, -1) e não pode ser feito auto-adjunto

É conveniente observar que hamiltonianas da forma $\nabla^2 + V$ com um V razoavelmente comportado geralmente possuem extensões auto adjuntas, assim

Teorema Se H comuta com a conjugação complexa, como por exemplo $\overline{H\psi} \equiv = H\overline{\psi}$, então H possui índices de deficiência iguais.

Conclusão

Neste trabalho foram abordados os temas fundamentas para a construção da teoria espectral, partindo de conceitos mais simples estudados e dispostos no apêndice desse documento. Dentre os assuntos abordados, os principais foram:

- Teoria de autovalores e autovetores.
- Definições para Resolvente de um operador e seu espectro.
- Propriedades do espectro e dos conjuntos relacionados em operadores limitados.
- Operadores lineares compactos e as equações os envolvendo.
- A alternativa de Fredholm.
- Operadores Adjuntos, Auto-adjuntos e suas extensões.
- Índices de deficiência.

Sendo estes, com ênfase nos finais, os que mais se traduzem em aplicações diretas para problemas em aberto atualmente.

Um próximo passo seria escolher um problema especifico como o Modelo de Landau-Lifshitz, já abordado pelo professor orientador deste trabalho, e aplicar os conceitos estudados aqui além de vários outros num nível além.

Referências

BONNEAU J. FARAUT, G. V. G. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. American Journal of Physics, 2000. Citado na página 44.

FOLLAND, G. *Real analysis*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.

GOPALAKRISHNAN, S. Self-adjointness and the renormalization of singular potentials. Department of Physics of Amherst College, 2006. Citado na página 44.

KOLMOGOROV, S. F. A. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.: s.n.], 1978. Citado 6 vezes nas páginas 3, 6, 7, 9, 59 e 60.

RICHTMYER, R. D. *Principles of Advanced Mathematical Physics*. [S.l.: s.n.], 1978. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 9.

ROYDEN, H. *Real analysis*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.

SIMON, M. R. B. *Methods of modern mathematical physics*. [S.l.: s.n.], 1981. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.

TETA, A. *A Mathematical Primer on Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.

Apêndices

APÊNDICE A – Apêndice: Assuntos anteriores ao trabalho:

A.0.1 Sobre o Apêndice

Os assuntos desenvolvidos neste trabalho possuem um conjunto de conhecimentos que os precede na construção da teoria exposta neste trabalho. Como seria inviável deixar todos estes conteúdos registrados com precisão, este apêndice dedica-se aos conteúdos mencionados diretamente durante o corpo do texto e às seções com teoremas de maior importância tal qual o Teorema de Hahn Banach.

A.0.2 Assuntos anteriores ao capítulo 7 de (KREYSZIG, 1978)

Dentre os assuntos anteriores ao texto sobre espaços métricos e normados, a propriedade de compacticidade será importante. Portanto, seguem a definição e algumas adições úteis.

O espaço L^2: O espaço L^2 é o espaço de todas as funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ que obedecem

$$\int_b^a |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

compreendendo todas as funções de onda normalizáveis. O produto interno consistindo de $(f, g) = \int \overline{f(x)} g(x) \, dx$.

Ortogonalidade para funções: Se $(f, g) = 0$ dizemos que essas funções são ortogonais. Dizemos que f é ortogonal à um conjunto A se ela é ortogonal à toda função pertencente à A.

Densidade de conjuntos: Este conceito pode ser definido de duas formas:

I. Um subconjunto M de X é dito denso em X se todo o fecho de M, ou seja $\overline{M}$, é o próprio X.

II. Um subconjunto A de $\mathcal{H}$ é dito denso se todo ponto em H é o limite de uma sequência em A.

Teorema de aproximação de Stone-Weiertrass $C_0^\infty(I)$, o conjunto de todas as funções limitadas e infinitamente diferenciáveis em I é denso em $L^2(I)$.

Definição: (2.5-1: Compacticidade) Um espaço métrico X é dito compacto se toda sequência em X tem uma subsequencia convergente. Um subconjunto M é dito compacto se toda sequência em M tem uma subsequencia convergente cujo limite é um elemento de M

Operadores limitados: Um operador A é dito limitado se existe um número λ tal que $||Af|| \leqq \lambda||f||$ para todas as funções em $D(A)$

Teorema de Hellinger-Toeplitz: Um operador Hermitiano é definido em qualquer lugar em que ele seja limitado.

Operadores Hermitianos: Um operador hermitiano H possui a propriedade de que para todo $f, g \in \mathcal{D}(H)$, $(f, Hg) = (Hf, g)$

Lemma (2.6-11): Sejam $T : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow Z$ dois operadores bijetores, com X, Y, Z espaços vetoriais. Então: A inversa $(ST)^{-1} : Z \longrightarrow X$ do produto (ST) existe e é:

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

Prova:

Como S e T são bijetivas, ST também será. Como ST é bijetiva então sua inversa $(ST)^{-1}$ existe.

Com isso temos $ST\ (ST)^{-1} = I_z$, onde I_Z é a identidade em Z. Aplicando S^{-1} temos:

$$S^{-1}\ ST\ (ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}$$

Aplicando T^{-1} temos:

$$T^{-1}\ T\ (ST)^{-1} = (ST)^{-1} = S^{-1}T^{-1}I_Z = S^{-1}T^{-1}$$

Chegamos no que queríamos:

$$(ST)^{-1} = S^{-1}T^{-1}I_Z = S^{-1}T^{-1}$$

■

Equação 7 - seção 2.7

$$||T_1T_2|| \leqq ||T_1||||T_2||, \qquad ||T^n|| \leqq ||T||^n$$

Válido para operadores $T_2 : X \longrightarrow Y$, $T_1 : Y \longrightarrow Z$, $T : X \longrightarrow X$.

A.0.3 Capítulo 4 (KREYSZIG, 1978):

Este capítulo da bibliografia é de suma importância para os desenvolvimentos expostos no texto. Para referencia e eficiência ele estará documentado aqui, embora com menos rigor no que diz respeito às provas dos teoremas e afirmações.

Definição: (4.1-1) Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto M onde existe uma ordem parcial. Isto é, uma relação binária escrita como $\leqq$ que satisfaz as condições:

- (P01) $a \leqq a$ para todo $a \in M$
- (P02) Se $a \leqq b$ e $b \leqq a$ então $a = b$
- (P03) Se $a \leqq b$ e $b \leqq c$ então $a \leqq c$

"Parcialmente"ordenado significa que M pode conter elementos a e b para os quais nem $a \leqq b$ nem $b \leqq a$ são afirmações verdadeiras, nesse caso a e b são ditos incomparáveis. Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto em que quaisquer dois elementos são comparáveis.

(4.1-6: Lema de Zorn) Seja $M \neq \varnothing$ um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia $C \subset M$ tem um limite superior então M tem pelo menos um elemento maximal.

(4.2-1: Teorema de Hahn-Banach) Seja X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X. Além disso, seja f um funcional linear definido num subespaço Z de X que satisfaz:

$$f(x) \leqq p(x)$$

Então f tem uma extensão $\tilde{f}$ de Z para X que satisfaz:

$$\tilde{f}(x) \leqq p(x)$$

Ou seja, $\tilde{f}$ é um funcional linear em X, satisfaz $f(x) \leqq p(x)$ em X e $\tilde{f}(x) = f(x)$

(4.3-1: Teorema de Hahn-Banach Generalizado) Seja X um espaço vetorial real ou complexo e p um funcional subaditivo que retorna valores reais em X, isto é, para todo $x,\ y\ \in X$ p verifica:

$$p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$$

e

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

Com um p que satisfaz essas condições, conferimos que um funcional linear f definido num subespaço Z de X que obedece

$$|f(x)| \leqq p(x)$$

possui uma extensão linear $\tilde{f}(x)$ de Z para X que também satisfaz

$$|\tilde{f}(x)| \leqq p(x)$$

(4.3-2: Teorema de Hahn-Banach para espaços normados) Seja f um funcional linear limitado num subespaço Z de um X. Então existe um funcional linear $\tilde{f}$ em X que é uma extensão linear de f em X e tem a mesma norma

$$||f||_X = ||f||_Z$$

onde $||f||_X = \sup|\tilde{f}(x)|$ para $x \in X$, $||x|| = 1$

(4.3-3: Funcionais lineares limitados) Seja X um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um elemento qualquer desse espaço. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em X tal que:

$$||\tilde{f}|| = 1 \quad , \quad \tilde{f}(x_0) = ||x_0||$$

Definição: (4.5-1: Operador adjunto) Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado, com X e Y espaços normados. Então o operador adjunto $T^\times : Y' \longrightarrow X'$ de T é definido por:

$$f(x) = (T^\times g)(x) = g(Tx)$$

onde X' e Y' são os espaços duais de X e Y.

Teorema: (4.5-2: norma de um operador adjunto)

$$||T^\times|| = ||T||$$

Definição: (4.6-1) para todo x fixo em um espaço normado X, o funcional g_x definido como $g_x(f) = f(x)$ é um funcional linear em X', de forma que $g_x \in X''$ e tem norma:

$$||g_x|| = ||x||$$

Definição: (4.6-2: Mapeamento canônico) O mapeamento canônico C dado por:

$$C : X \longrightarrow X''$$

$$x \longmapsto g_x$$

é um isomorfismo do espaço normado X até o espaço normado $\mathcal{R}(C)$, o alcance de C

Definição: (4.6-3: reflexividade) Um espaço normado X é dito reflexivo se:

$$\mathcal{R}(C) = X''$$

Tal qual o mapeamento canônico de (4.6-2).

Teorema: (4.6-4: completeza) Se um espaço normado X é reflexivo então ele também é completo, portanto um espaço de Banach.

Teorema: (4.6-5) Todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo.

Teorema: (4.6-6) Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Teorema: (4.6-8: Separabilidade) Se o espaço dual X' de um espaço X normal é separável, então X em si é separável.

Definição: (4.7-1)Categorias: Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito:

- **raro** em X se o fecho $\overline{M}$ não tem pontos interiores.
- **escasso** em X se M é a união de um numero contável de conjuntos raros em em X.
- **não escasso** em X se M não é escasso X.

Teorema: (4.7-2: Teorema de categorias Baire) Se um espaço métrico $X \neq \varnothing$ ele é não escasso. Ou seja, se $X \neq \varnothing$ é completo e

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

então pelo menos um A_k contém um subconjunto aberto e não vazio.

Teorema: (4.7-3) Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares limitados $T_n : X \longrightarrow Y$ de um espaço de Banach X em um espaço normado Y tal que

$$(||T_n x||)$$

é limitado para todo $x \in X$, ou seja:

$$||T_n x|| \leqq c_x$$

com c_x um numero real. Então a sequência das normas de $||T_n||$ é limitada, isto é, existe um c tal que para qualquer n:

$$||T_n|| \leqq c$$

Definição: (4.8-1) uma sequência (x_n) num espaço normado X é dita fortemente convergente se existe um $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$$

Em função da norma

Definição: (4.8-2) uma sequência (x_n) num espaço normado X é dita fracamente convergente se existe um $x \in X$ tal que para todo $f \in X'$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Em função de um funcional linear

Lemma (4.8-3) Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente em um espaço normado X, $x_n \xrightarrow{w} x$, então:

- o limite fraco x de (x_n) é único
- toda subsequencia de (x_n) converge fracamente para x
- a sequência
$$(||x_n||)$$
é limitada

Teorema: (4.8-4) Seja (x_n) uma sequência num espaço normado X, então:

- Convergência forte implica em convergência fraca sob o mesmo limite.
- A recíproca do item anterior geralmente não é verdadeira
- Se X for de dimensão finita então convergência fraca implica em convergência forte

Lemma (4.8-7) Em um espaço normado X temos $x_n \xrightarrow{w} x$ se e somente se:

- a sequência
$$(||x_n||)$$
é limitada
- para cada elemento f de um subconjunto $M \subset X'$ temos $f(x_n) \to f(x)$

Definição: (4.9-1) Sejam X e Y espaços normados. Uma sequência (T_n) de operadores $T_n \in B(X,Y)$ é dita:

- uniformemente convergente se (T_n) converge na norma em $B(X,Y)$:
$$||T_n - T|| \longrightarrow 0$$
- fortemente convergente se (T_nx) converge fortemente em Y para todo $x \in X$:
$$||T_nx - Tx|| \longrightarrow 0$$
- fracamente convergente se (T_nx) converge fracamente em Y para todo $x \in X$:
$$|f(T_nx) - f(Tx)| \longrightarrow 0$$

Definição: (4.9-4) Seja (f_n) uma sequência de funcionais limitada num espaço normado X. Então:

- Convergência forte de (f_n) significa que existe um $f \in X'$ tal que $||f_n - f|| \longrightarrow 0$
$$f_n \longrightarrow f$$

- Convergência fraca de (f_n) significa que existe um $f \in X'$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

Lemma (4.9-5) Seja $T_n \in B(X,Y)$ com X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Se (T_n) é um operador fortemente convergente com limite T então $T \in B(X,Y)$.

Teorema: (4.9-6) Uma sequência de operadores $T_n \in B(X,Y)$ com ambos X e Y espaços de Banach é dita fortemente convergente se e somente se:

- A sequência $(||T_n||)$ é limitada
- A sequência $(T_n x)$ é cauchy em Y para todo x em um subconjunto total de X

Corolário(4.9-7) A sequência (f_n) de funcionais lineares limitados num espaço de Banach X é fracamente convergente para um funcional linear limitado em X se e somente se:

- A sequência $(||f_n||)$ é limitada
- A sequência $(f_n(x))$ é cauchy em Y para todo x em um subconjunto total de X

Definição: (4.12-1) Sejam X e Y espaços métricos. Então $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$ é dito um mapeamento aberto se para cada conjunto aberto em $\mathcal{D}(T)$ a imagem é um conjunto aberto em Y.

(4.12-2: Teorema do mapeamento aberto): Um operador linear limitado T que atua entre espaços de Banach X e Y é um mapeamento aberto. Se T for bijetora então T_{-1} é contínua e com isso limitada.

Lemma (4.12-3 : Bola aberta unitária) Um operador linear limitado T de um espaço de Banach X para um espaço de Banach Y tem a propriedade de que a imagem $T(B_0)$ da bola aberta unitária $B_0 = B(0;1) \subset X$ contem uma bola aberta sobre 0 em Y.

Teorema: (4.13-1) Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D} \longrightarrow Y$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Então T será dito um operador linear fechado se seu gráfico:

$$\mathcal{G}(T) = \{(x,y) \mid x \in \mathcal{D}(T),\ y = Tx\}$$

for fechado no espaço normado $X \times Y$, onde as operações algébricas (soma e multiplicação por escalar) são definidas como usualmente.

(4.13-2: Teorema do gráfico fechado): Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D} \longrightarrow Y$ um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Então se $\mathcal{D}(T)$ é fechado em X, T será limitado.

Teorema: (4.13-3) Seja $T : \mathcal{D} \longrightarrow Y$ um operador linear com $\mathcal{D}(T) \subset X$ com X e Y espaços normados. T será fechado se, e somente se, obedecer a propriedade:

$$\text{Se } x_n \longrightarrow x, \text{ com } x_n \in \mathcal{D}(T), \text{ e } Tx_n \longrightarrow y, \text{ então: } x \in \mathcal{D}(T) \text{ e } Tx = y$$

Lema: (4.13-5) Seja $T : \mathcal{D} \longrightarrow Y$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$ e com X e Y espaços normados. Então:

- Se $\mathcal{D}(T)$ é um subconjunto fechado de X, T é fechado.
- Se T é fechado e Y é completo então $\mathcal{D}(T)$ é um subconjunto fechado de X