

Universidade de Brasília

Instituto de Física

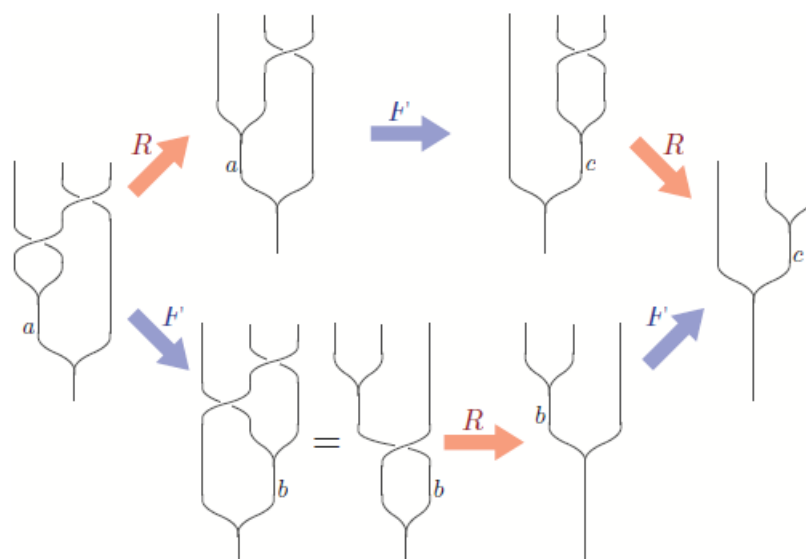


TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO:

Categorias, Teorias Topológicas de Campos e
Computação Quântica Topológica

Autor: Enio de Sousa Santos

Orientador: Prof. Dr. Arsen Melikyan



Brasília
6 de maio de 2022

Agradecimentos

Aqui expresso agradecimento a minha equipe de professores, particularmente agradeço professor Dr. Arsen Melikyan por me ensinar toda a física matemática avançada que aprendi durante a graduação e toda a ajuda concedida ao longo dos projetos que trabalhamos. Agradeço ao professor Dr Aleksandr Pinzul por ser o professor mais difícil da minha graduação e dessa maneira me possibilitar muito aprendizado em física matemática e teoria de campos. A professora Dr Carolina Matté Gregory agradeço por me motivar e me ajudar a corrigir meus muitos erros ao longo da escrita deste texto. (Imagem acima é creditada a referencia [\[55\]](#))

Resumo

Neste projeto discutiremos a ferramenta matemática da teoria de categorias e suas aplicações na teoria quântica de campos topológicas. Essas teorias podem ser vistas como um funtor monoidal simétrico com uma categoria de cobordismos para a categoria de espaços vetoriais. Para tanto analisamos uma descrição da equação fundamental da teoria quântica de campos escrita em termos de invariantes topológicos e definida sobre os cobordismos, que são os morfismos da categoria **nCob**. Aproveitamos para analisar o caso específico das teorias quânticas de campos bidimensionais pois temos invariantes topológicos e geométricos que caracterizam as superfícies bidimensionais de forma que conseguimos uma equivalência entre a categoria das álgebras de Frobenius com a categoria das teorias quânticas de campos topológicas. Em três dimensões essas teorias são classificadas por categorias monoidais modulares. Avaliamos uma poderosa técnica de cálculo gráfico que nos facilita trabalhar com as categorias, que podem ser utilizadas como uma generalização dos diagramas de Feynman. O método é introduzido junto da estrutura algébrica necessária para descrever-lo.

Como uma Aplicação mais concreta de todos os conceitos desenvolvidos revisamos no final alguns resultados sobre computação quântica topológica, como a sua viabilidade através de modelos de anyons não abelianos, que teoricamente podem ser obtidos em sistemas de Hall quânticos fracionais (apesar dessas partículas ainda não terem sido diretamente observadas em laboratório), nesses sistemas tiramos vantagem do fato a Hamiltoniana do sistema $H \equiv 0$ e portanto toda a informação contida no sistema pode ser muito bem preservada e “processada” via um processo de trançamento das quase-partículas do sistema e no final fundimos essas quase-partículas de volta para lermos o resultado dessa simulação de um sistema quântico regido por uma TQCT.

Abstract

In this project we will discuss a mathematical tool of category theory and its applications in topological quantum field theory. These theories can be seen as a symmetric monoidal functor with a category of cobordisms to a category of vector spaces. Then we analyze a description of the fundamental equation of quantum field theory written in terms of topological invariants and defined on the cobordisms, which are the morphisms of the category **nCob**. We took advantage of the specific case of two-dimensional quantum field theories for analysis because we have topological and geometric invariants that characterize as two-dimensional surfaces so that we can find an equivalency between the category of Frobenius algebras to the category of topological quantum field theories. In three dimensions these theories can be classified by modular categories, but we do not discuss this case in this project. We evaluated a powerful graphical calculus technique that makes it easier for us to work with categories, which can be used as a generalization of Feynman diagrams. The method is aggregated from the algebraic structure needed to define it.

As a more concrete application of all the concepts developed, we review at the end some results on topological quantum computing, such as its feasibility through non-abelian anyon models, which theoretically can be obtained in fractional quantum Hall systems (although these particles have not yet been directly observed in the laboratory), in these systems we take advantage of the fact the Hamiltonian of the system $H \equiv 0$ and therefore all the information contained in the system can be very well preserved and “processed” via a process of braiding the quasi-particles of the system and in the end we merge these quasi-particles back together to read the result of this simulation of a quantum system governed by a TQFT.

Conteúdo

1	Introdução e Contexto Histórico	5
1.1	Teoria de Chern-Simons	5
1.2	A perspectiva funtorial da teoria quântica de campos	6
1.3	Contexto Histórico	8
1.4	Computação Quântica Topológica	8
2	Introdução à linguagem das categorias	10
2.1	Definições	10
2.1.1	Composição de Funtores	11
2.1.2	Funtores Especiais	11
2.1.3	Dualidade: Categoria dual ou oposta	12
2.1.4	Cobordismos e categoria $n\text{Cob}$	12
2.2	Transformação Natural	13
2.3	O produto de categorias	14
2.4	A propriedade universal do mapeamento	15
2.5	Categorias Quocientes	18
2.6	Construção do Produto Tensorial: Livre de coordenadas	19
3	Categorias Monoidais	21
3.1	Noções Preliminares	21
3.2	Categoria Monoidal	22
3.3	Funtores Monoidais e seus morfismos	28
3.4	Teoremas de Mac Lane e categorias estritas	30
3.5	Categorias monoidais Rígidas e Pareamentos	30
3.6	Calculo Gráfico	33
3.7	Categorias Ribbon	37
4	Teorias Quânticas de Campos Topológicas	41
4.1	Definição das teorias topológicas de campos	41
4.1.1	Definição de Atiyah	41
4.1.2	Propriedades formais das TQCTs	42
4.2	Geradores da categoria 2Cob	44
4.2.1	Genus e característica de Euler para superfícies	44
4.2.2	'Forma normal' de uma superfície conectada	45
4.2.3	Relações	45
5	Álgebras de Frobenius	48
5.1	Álgebras e módulos	48
5.2	A categoria das álgebras de Frobenius	51
6	Computação Quântica	52
6.1	Modelo do Circuito Quântico	52
6.2	Framework Quântico	53
6.3	Qubits	54
6.4	n -qubits e problemas de computação	55
6.4.1	Conjunto universal de portas lógicas	55
6.5	Modelo do Circuito Quântico	56
6.6	Simulando a Física Quântica	57

7	Categorias de Fusão de Fitas	59
7.1	Regras de fusão e categorias de fusão	59
7.2	Calculo Gráfico de CFFs (Categorias de fusão de fitas)	62
7.3	Categorias unitárias de fusão	65
7.4	Invariantes de Link e de Variedades 3-dimensionais	66
7.5	Indicadores de Frobenius-Schur	68
7.6	Categorias Monoidais Modulares	69
7.7	Duplas quânticas	70
8	Computação Quântica com Anyons não Abelianos	71
8.1	Fases Topológicas da Matéria	71
8.1.1	Estatísticas não Abelianas de tranças	71
8.1.2	Anyons Emergentes	73
8.1.3	Estados de Hall quânticos não Abelianos	74
8.1.4	Possíveis Estados não-Abelianos	75
8.2	Teoria de Chern-Simons	76
8.2.1	TQCTs e propriedades de quase-partículas	78
8.2.2	Surgimento do termo de Chern-Simons no FQHE	80
8.3	Computação Quântica Topológica	85
8.3.1	Computadores Quânticos Anyonicos	86
8.3.2	Computador quântico de Ising	88
8.3.3	Computador quântico de Fibonacci	89
8.3.4	Universalidade dos computadores quânticos anyonicos	90
9	Conclusão	91
A	Apendice: Teorias de Campos Conformes	92
A.1	Definições Preliminares	92
A.2	O semigrupo ξ	92
A.3	Definição da CFT	93
A.4	O morfismo ρ_q e a função de partição	94

1 Introdução e Contexto Histórico

Um dos grandes temas da física teórica contemporânea é a união da teoria geral da relatividade e a mecânica quântica. Este problema enfrenta diversas dificuldades que datam desde a época da concepção da mecânica quântica e persistem até hoje. Apesar das muitas alternativas desenvolvidas até hoje para uma teoria de gravitação quântica mas nenhuma até agora conseguiu resolver todos os problemas de maneira consistente e fisicamente possível, existe o sentimento de que, algum nível de verdade pertence a todas essas alternativas que tem nos trazido cada vez mais próximos de uma teoria fundamental ou pelo menos as ferramentas para uma.

O que estaremos avaliando neste trabalho é uma teoria físico-matemática que está se mostrando uma linguagem de grande utilidade na descrição da física teórica contemporânea, especialmente para o mundo quântico onde a maior parte dos problemas de consistência teórica se concentram.

Esta linguagem foi inspirada em grande medida por trabalhos de matemáticos tais como Segal, Atiyah, Baez, e Freed, e alguns físicos teóricos como Witten, Dijkgraaf, Fuchs e Moore (para citar poucos), cujos trabalhos tem exposto profundas relações entre topologia, teoria quântica, relatividade geral e teoria de categorias. Claramente estas afirmações são muito fortes então vamos começar o estudo contextualizando algumas das ideias que serão desenvolvidas ao longo do trabalho.

1.1 Teoria de Chern-Simons

Considere a seguinte integral de caminho, que serve como um exemplo motivador para estabelecer os conceitos que serão discutidos em seções posteriores:

$$J_k(K) = \langle K \rangle_k \equiv \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \text{Tr} \left(P \exp \oint_K A ds \right) \exp \frac{ik}{4\pi} \int_{S^3} \text{Tr} (A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \quad (1)$$

Esse equação 1 foi inicialmente escrita por Witten em 1989 em um artigo chamado “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial” [61], e é uma dos motivos que o levou a receber a medalha Fields de matemática em 1990. Este foi de certa forma o ponta pé inicial para o tópico das ‘Teorias Quânticas de Campos Topológicas’. Para entendermos o que está acontecendo na equação 1, interpretamos esta como uma teoria quântica de campos topológica com o polinômio de Jones $J(K)$ como um invariante da teoria para K nós mergulhados em S^3 , o que mostra o valor do polinômio de Jones como o valor esperado da holonomia da conexão ao redor do nó (operador laço de Wilson/Wilson Loops), onde a ação é a ação de Chern-Simons,

$$S[A] = \exp \frac{1}{4\pi} \int_{S^3} \text{Tr} (A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A). \quad (2)$$

Aqui A é o pullback de uma conexão com valores em $SU(2)$ em um fibrado principal $SU(2)$ sobre S^3 - uma 1-forma com valores em (2) em S^3 - ou em termos físicos, um campo de calibre de $SU(2)$. k é um inteiro, que traduzimos como uma raiz da unidade q no plano complexo pondo $q^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{\pi i}{k+2})$. O traço é tomado na representação fundamental de (2) . Uma vez tomado o traço, ficamos com uma 3-forma em S^3 , isto é, uma forma de volume. Em outras, palavras a ação de Chern-Simons (diferentemente da ação de Yang-Mills) nos dá uma forma de volume definida sem dependência da métrica. Em coordenadas a ação tomaria a seguinte forma,

$$S[A] = \exp \frac{1}{4\pi} \int_{S^3} d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{Tr} \left(A_\mu(x) \partial_\nu A_\alpha(x) + \frac{2}{3} A_\mu(x) A_\nu(x) A_\alpha(x) \right). \quad (3)$$

onde os A_μ são campos vetoriais cujos valores se dão como matrizes, $A_\mu(x) = A_\mu^\alpha(x)\sigma^\alpha/2i$.

A equação 1 pode ser posta em contexto da seguinte forma [5]. Em 1984 o matemático Vaughan Jones anunciou sua primeira descoberta de um novo link invariante, que rapidamente levou a uma profusão de generalizações. Dado um nó K mergulhado em S^3 , que é, um mergulho suave de S^1 em S^3 , o polinômio de Jones resulta em um polinômio em $q^{\frac{1}{2}}$. Dois nós não podem ser suavemente deformados de um para o outro (i.e., não são equivalentes) se seu polinômio de Jones for diferente, apesar do inverso não ser verdade. Por esta descoberta, Jones também recebeu a medalha Fields, junto de Witten, em 1990.

Estes polinômios não tem a priori nenhuma relação com geometria ou teoria quântica de campos. Jones os descobriu ao investigar a teoria de subfatores, o estudo de como varias álgebras de Von-Neumann podem ser encaixadas em conjunto. Atiyah [39], entretanto, conjecturou que deviriam existir uma definição intrinsecamente tridimensional desses invariantes usando teoria de calibre. A equação 1 confirmou esta conjectura. Este resultado implica que pode-se calcular os polinômios de Jones ao considerar todas as conexões A em S^3 : Para cada conexão calcula-se um certo numero (a holonomia ao redor do nó, ou laço de Wilson), e então soma-se todas as conexões. Como a ação é dependente do nível k , os polinômios de valor esperado $q^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{\pi i}{k+2})$ - estes são precisamente os polinômios de Jones. Esta foi a descoberta de Witten: uma interpretação, na teoria de campos, de objetos (polinômio de Jones) que manifestam estruturas geométricas (nós em S^3), mas que entretanto tinham uma definição puramente algébrica. Alguém poderia dizer que Jones descobriu seu polinômio, enquanto Witten o explicou.

Esta exposição de contexto histórico e físico majoritariamente segue o conteúdo disposto na tese [9] e em geral tentaremos com este trabalho explorar alguns dos resultados obtidos nesta tese e em outros trabalhos relacionados aos temas da teoria quântica de campos topológica e teoria de categorias, especialmente também os trabalhos de Baez [5], [6] e ainda avaliaremos algumas aplicações praticas dessas teorias na física da matéria condensada, em particular no estudo de anyons seguindo a exposição em [10].

1.2 A perspectiva funtorial da teoria quântica de campos

A importância fundamental da integral de caminho sugere que pode ser útil simplificarmos o estudo tirando de vista o observável de nó K e estudar apenas as funções de partição da teoria, consideradas sobre espaço-tempos arbitrários. Isto é, consideremos a seguinte integral de caminho:

$$Z(M) = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp\left(i \int_M S[A]\right) \quad (4)$$

onde M é uma variedade tridimensional arbitraria, i.e., compacta e sem fronteira, e $S[A]$ é a ação de Chern-Simons (2). Como a ação é topológica, imediatamente vemos que o numero $Z(M)$ associado a variedade M deve ser um invariante topológico de M . Dessa forma podemos produzir invariantes topológicos de maneira eficiente e sistematizada. Diferente das variedades bidimensionais fechadas que são classificadas pelos seu genus, a classificação de variedades tridimensionais fechadas é altamente não trivial, e é portanto um problema não resolvido. Uma conjectura famosa por Poincaré é então imediatamente relevante:

Conjectura de Poincaré

Se M é uma variedade tridimensional fechada, cujo grupo fundamental $\pi_1(M)$, e todos os grupos de homologia $H_i(M)$ são iguais aos de S^3 , então M é homeomórfico à S^3 .

Dessa forma pode-se ver a simplicidade do uso de invariantes topológicos na teoria quântica de campos, que segue a seguinte prescrição.

1. Dotando o espaço de uma estrutura geométrica adicional na forma de uma conexão (alternativamente a um campo, uma seção de um fibrado linear, um mergulho sobre o espaço tempo,...).
2. Calcule o número dessa variedade dotada de conexão (a ação).
3. Some sobre todas as conexões.

Este procedimento pode ser visto como uma extensão da prática geral usada na matemática de classificar estruturas através de várias outras estruturas que podem ser adicionadas àquela estrutura. De fato, a lagrangiana de Chern-Simons foi originalmente introduzida na matemática exatamente assim. A teoria de Chern-Weil dá acesso aos grupos de cohomologia¹ (invariantes topológicos) da variedade M ao introduzir uma conexão A em M , e então associando à A uma forma fechada (como por exemplo, com a lagrangiana de Chern-Simons), cuja classe de cohomologia, é independente da escolha inicial arbitrária da conexão A . A Teoria quântica de campos associa à conexão A o próprio valor numérico da ação (usualmente obtido integrando sobre M) - este número certamente depende da conexão, mas a teoria de campos resolve esse problema somando sobre todas as conexões.

A teoria quântica de campos, no entanto, nos permite ainda expressar a amplitude de probabilidade de uma dada configuração de campo evoluir para outra. Para isso consideramos uma variedade tridimensional M (espaço-tempo) com componentes da fronteira sendo Σ_1 e Σ_2 (espaço), e considere M como a evolução do espaço desde configuração inicial Σ_1 até sua configuração final Σ_2 : Isto é conhecido na matemática como um *cobordismo* de Σ_1 para Σ_2 . Para uma variedade fe-

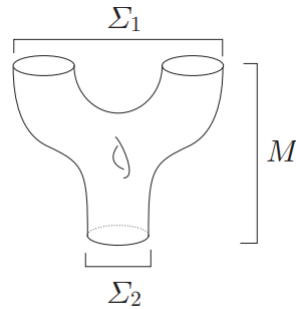


Figura 1: Evolução espaço-temporal das configurações de campo Σ_1 para Σ_2 . Fonte: [9]

chada Σ associamos o espaço de campos $\mathcal{A}(\Sigma)$ (neste caso, de conexões) sobre Σ . Um estado físico Ψ corresponde a um funcional neste espaço de campos. Esta é a formulação de Schrodinger para a teoria quântica: Se $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$, então $\Psi(A)$ representa a probabilidade que o estado conhecido como Ψ será encontrado no campo A . Tal estado evolui com o tempo pela dinâmica da teoria; $\Psi(A) \rightarrow \Psi(A, t)$. O espaço de estados tem base natural, que consiste de funcionais delta \hat{A} - estes são estados satisfazendo $\langle \hat{A}, \hat{A}' \rangle = \delta(A - A')$. Qualquer estado arbitrário Ψ pode ser expresso como uma superposição desses estados de base. A integral de caminho nos instrui a calcular a evolução temporal dos estados, primeiramente expandindo em termos da base \hat{A} , e especificando que a amplitude para um sistema \hat{A}_1 em um espaço Σ_1 ser encontrado no estado \hat{A}_2 no espaço Σ_2 é dada por

$$\langle \hat{A}_2 | U | \hat{A}_1 \rangle = \int_{A|_{\Sigma_1} = A_1}^{A|_{\Sigma_2} = A_2} \mathcal{D}A \exp iS[A] \quad (5)$$

¹veja [45] capítulo 6 para uma exposição sobre os grupos de cohomologias

Esta equação é a formula fundamental da teoria quântica de campos. Esta formula nos dá o operador de evolução temporal U associado ao cobordismo M .

Desta forma vemos que, a formula fundamental da mecânica quântica e teoria quântica de campos, é uma que associa a cada variedade Σ , do tipo espaço, um espaço de Hilbert de campos espaciais $\mathcal{A}(\Sigma)$, e para cada cobordismo M de Σ_1 para Σ_2 um operador de evolução temporal $U(M) : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. Para especificar uma teoria quântica de campos devemos apenas dar as regras para a construção de espaços de Hilbert $\mathcal{A}(\Sigma)$ e as regras (funções de correlação) para o calculo dos operadores de evolução temporal $U(M)$. *Isto, equivale a afirmação de que uma teoria quântica de campos é um funtor de uma categoria de cobordismos $n\mathbf{Cob}$ para uma categoria de espaços de Hilbert \mathbf{Hilb} !* Esta observação foi feita por Segal [52] em seu artigo ‘The definition of Conformal Field Theory’.

1.3 Contexto Histórico

Chegamos em uma descrição de uma teoria de campos como um funtor de uma categoria de cobordismos para a categoria dos espaços de Hilbert. Originalmente Segal foi quem promoveu essa linha de pesquisa em 1989, no caso de teorias de campos conformes. Segal criou um manuscrito inacabado sobre o assunto que circulou por anos na comunidade matemática. Finalmente ele publicou o artigo, ainda que de forma inacabada, em [52].

A categoria de cobordismos para a teoria de campos conforme é de fato muito mais complexa pois tem mais resolução do que no caso topológico. Nesta situação os cobordismos só são equivalentes se forem conformalmente equivalentes, i.e., tendo a mesma estrutura complexa. Isto nos levaria a considerar espaços modulares, etc. Foi Atiyah que decidiu reformular as ideias de Segal em termos de um conjunto de axiomas para uma teoria topológica de campos.

Na física, distingue-se entre uma teoria topológica de campos do tipo de *Schwarz* ou *Chern-Simons* e do tipo de *Witten* ou *co-homológica*. Nas teorias do tipo de Schwarz a ação é independente da métrica,

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (6)$$

Exemplos dessas teorias são as teorias de Chern-Simons, e teorias *BF*. Infelizmente, muitas dessas teorias não são puramente topológicas já que, em algum lugar, na formulação ou no processo de renormalização, uma dependência na métrica ou na estrutura complexa surge. Pode-se ver esse fenômeno até em um caso simples da teoria de Chern-Simons. Ao renormalizarmos a integral de caminho 2 precisa-se incluir um sistema de referencia para o nó, algo não imediatamente obvio da ação. No caso de espaços de Hilbert de dimensão finita, poderemos dizer que a maior probabilidade é que tenhamos uma teoria quântica de campos no estilo das de Atiyah. Se isso não ocorrer, a teoria não poderá ser uma verdadeira teoria topológica [9].

1.4 Computação Quântica Topológica

Os fatores de um inteiro podem ser rapidamente calculados por um computador quântico. Desde descoberta desse algoritmo de fatoração eficiente por P. Shor em 1994 [53], muitos tem trabalhado na construção dessas maquinas. Uma dessas pessoas, Dr. Zhenghan Wang, se juntou a estação Q da Microsoft em Santa Barbara para pesquisar com uma abordagem topológica sobre o tema, em 2005. Seu sonho era de “trançar” anyons não Abelianos. Dedicou-se muitas horas imaginando quasipartículas em FQHL (fractional quantum Hall liquids).

Vale se questionar se haverá algum beneficio de tais maquinas quânticas além de saber fatorar grandes números inteiros. Uma das razões para que sim é a ideia original de R. Feynman: “ Um computador quântico é um simulador eficiente da mecânica quântica”. Ele fez essa sugestão em

seu artigo original [20]. Mais tarde, uma simulação eficiente das teorias quânticas de campos foi dada por M. Freedman, A. Kitaev, e Z. Wang [23]. Estes resultados dão suporte à ideia de que computadores quânticos podem eficientemente simular teorias quânticas de campos, apesar de resultados rigorosos dependem de formulações matemáticas de teorias quânticas de campos.

A computação quântica topológica é um paradigma para construir um computador quântico de grande escala baseado em fases topológicas da matéria. Nesse método, a informação é armazenada nos estados de menor energia de sistemas de muitos anyons, e processados por “tranças” de anyons não Abelianos. A resposta computacional é obtida ao juntar anyons e observando o resultado. A computação quântica topológica está colocada unicamente na interface da topologia quântica, da física quântica e da computação quântica. Dois trabalhos surgidos por volta de 1997 inspiraram essa pesquisa, um foi a ideia de Kitaev da computação quântica, tolerante a falhas, por anyons [33]; A outra foi o programa de Freedman para entender o poder computacional das teorias topológicas de campos [22]. As duas ideias acabam tendo muitas similaridades: A teoria algébrica dos anyons e os dados algébricos das teorias quânticas de campos topológicas são ambas categorias modulares monoidais. O modelo de computação quântica topológica é eficientemente equivalente a outros modelos de computação quântica, como o modelo de circuito quântico, no sentido de que todos os modelos resolvem a mesma classe de problemas em tempo polinomial [[23],[24], [21]].

Além do apelo estético, o mérito prático do método topológico está no seu hardware que hipoteticamente minimizaria os erros: as fases topológicas evitam falhas algorítmicas ou ignoram a maior parte dos “barulhos” no sistema, e portas lógicas unitárias são implementados com acurácia exponencial. Existem modelos Hamiltonianos locais semi-realísticos cujos estados fundamentais são comprovadamente códigos corretores de erros tal como o celebrado código tórico.

Ainda não foram obtidos nenhum qubit topológico até agora. Já que escalabilidade não é realmente um problema na computação quântica topológica - o verdadeiro problema é controlar mais anyons no sistema - segue que demonstrar um único qubit topológico é bem próximo de construir um computador quântico topológico. O melhor esforço atual de construir um computador quântico topológico é computação quântica Hall fracional. Existe evidencia tanto experimental como numérica que anyons não Abelianos existem em certos sistemas bidimensionais de elétrons que exibem o efeito Hall quântico fracional. Outras realizações experimentais podem se obtidas em sistemas como bósons rotacionais, junções de Josephson, e insulantes topológicos.

Na última seção deste projeto revisamos alguns resultados avaliados em [58], em particular com relação ao seu capítulo 7 sobre a universalidade de alguns modelos de computação quântica anyonica, e seu capítulo 8 sobre modelos matemáticos das fases topológicas da matéria.

2 Introdução à linguagem das categorias

2.1 Definições

Definição 2.1 (Categoria). Uma **Categoria** \mathcal{C} consiste no seguinte:

1. (**Objetos**) Uma classe $\mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ cujos elementos são chamados de **objeto**. É costume escrever $A \in \mathcal{C}$ no lugar de $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$.
2. (**Morfismos**) Para cada par de objetos (não necessariamente distintos) $A, B \in \mathcal{C}$, um conjunto $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, chamado **hom-set** para o par (A, B) . Os elementos de $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ são chamados **morfismos**, **mapas de flechas** de A to B . Se $f \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, também escrevemos

$$f : A \rightarrow B \text{ ou } f_{AB}$$

O objeto $A = \mathbf{dom}(f)$ é chamado de **domínio** de f e o objeto $B = \mathbf{codom}(f)$ é chamado de **codomínio** de f .

3. Hom-sets distintos são disjuntos, isto é, $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ são disjuntos exceto se $A = C$ e $B = D$.
4. (**Composição**) Para $f \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ existe um morfismo $g \circ f \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, chamado de **composição** de g e f . Além disso, a composição é associativa:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

sempre que for bem definida.

5. (**Morfismo identidade**) Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe um morfismo $1_A \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado de **morfismo identidade** para A , com a propriedade de que se $f_{AB} \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ então

$$1_B \circ f_{AB} = f_{AB} \text{ e } f_{AB} \circ 1_A = f_{AB}$$

a classe de todos os morfismos de \mathcal{C} é denotada $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$.

Definição 2.2 (Funtor). Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Um **funtor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um par de funções (de costume usamos o mesmo simbolo F para ambas funções):

1. A **parte objeto** do funtor

$$F : \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Obj}(\mathcal{D})$$

mapeia objetos em \mathcal{C} para objetos em \mathcal{D} .

2. A **parte morfismo**

$$F : \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$$

mapeia morfismos de \mathcal{C} para morfismos em \mathcal{D} da seguinte maneira:

(a) Para um **funtor covariante**,

$$F : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$$

para todo $A, B \in \mathcal{C}$, isto é F mapeia um morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} para um morfismo $Ff : FA \rightarrow FB$ em \mathcal{D} .

(b) Para um **funtor contravariante**,

$$F : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(FB, FA)$$

para todo $A, B \in \mathcal{C}$, isto é, F mapeia um morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} para um morfismo $Ff : FB \rightarrow FA$ em \mathcal{D} .

Nos referimos a restrição de F ao $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ como a **parte local dos morfismos** de F .

3. Identidade e composição são preservadas, isto é,

$$F1_A = 1_{FA},$$

para um funtor covariante,

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$$

e para um funtor contravariante,

$$F(g \circ f) = Ff \circ Fg$$

sempre que todas as composições estiverem bem definidas.

2.1.1 Composição de Funtores

Funtores podem ser compostos da seguinte maneira. Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ forem funtores, então $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ é definido por

$$(G \circ F)(A) = G(FA)$$

para todo $A \in \mathcal{C}$ e

$$(G \circ F)(f) = G(Ff)$$

para $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

2.1.2 Funtores Especiais

Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor.

1. F é **cheio** se sua parte de morfismos for sobrejetiva.
2. F é **fiel** se sua parte de morfismos for injetiva.
3. F é **totalmente fiel** se sua parte de morfismos for bijetiva.
4. F é um **mergulho** de \mathcal{C} em \mathcal{D} se for totalmente fiel e sua parte objeto for injetiva.

2.1.3 Dualidade: Categoria dual ou oposta

Para toda categoria \mathcal{C} , podemos formar uma nova categoria \mathcal{C}^{op} , chamada **categoria oposta** ou de **categoria dual** dos quais os objetos são os mesmos de \mathcal{C} , mas tem seus morfismos “revertidos”, isto é,

$$\text{hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

Por exemplo, na categoria **Set**^{op} os morfismos de A à B são os conjuntos de morfismos de B à A .

A regra de composição nessa categoria \mathcal{C}^{op} , que denotamos por \circ_{op} , é definida da seguinte maneira: Se $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$ e $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C)$, então

$$g \circ_{op} f \in \text{hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$$

é o morfismo $f \circ g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$. Brevemente

$$g \circ_{op} f = f \circ g$$

Como $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$ então toda categoria é uma categoria dual.

2.1.4 Cobordismos e categoria nCob

A categoria que será fundamental para as teorias quânticas de campos é chamada **nCob**, a categoria dos cobordismos n -dimensionais. **nCob** é uma categoria cujos objetos são variedades Σ $(n - 1)$ -dimensionais orientadas e fechadas, e os morfismos são cobordismos $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ variedades M , n -dimensionais compactas e orientadas. A composição de cobordismos $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ e $N : \Sigma' \rightarrow \Sigma''$ é definida colando M e N pela variedade Σ' .

Seja M uma variedade n dimensional orientada e com fronteira ∂M . Então colocamos uma orientação induzida nas componentes conectadas Σ de ∂M pelo seguinte procedimento. Para $x \in \Sigma$, seja $(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ uma base positiva para $T_x M$ escolhida de forma que $(v_1, \dots, v_{n-1}) \in T_x \Sigma$. Nos perguntamos se v_n aponta para fora ou para dentro de M . Se apontar para dentro, então uma orientação para Σ é definida especificando que (v_1, \dots, v_{n-1}) é uma base positiva para $T_x \Sigma$.

Se Σ e Σ' variedades fechadas orientadas $(n - 1)$ -dimensionais. Um cobordismo de Σ para Σ' é uma variedade M compacta orientada n -dimensional junto com mapas suaves

$$\Sigma \xrightarrow{i} M \xleftarrow{i'} \Sigma' \quad (7)$$

onde i é um difeomorfismo que preserva orientação de Σ sobrejetivo em $i(\Sigma) \subset \partial M$, i' é um difeomorfismo que reverte a orientação de Σ' sobrejetivo em $i'(\Sigma') \subset \partial M$, tal que $i(\Sigma)$ e $i'(\Sigma')$ (chamados de fronteiras para dentro e para fora respectivamente) são disjuntas e exaurem ∂M . Observe que o conjunto vazio \emptyset pode ser considerado como uma variedade $(n - 1)$ -dimensionais.

Definição 2.3 (Categoria **nCob**). *Para um dado n , podemos construir uma categoria de cobordismos suaves **nCob**. Objetos são variedades Σ $(n - 1)$ - dimensionais fechados e orientados, e morfismos $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ são cobordismos. De forma que façamos essa categoria bem definida com morfismos identidade, devemos fazer um quociente sobre cobordismos difeomorfos. Especificamente, sejam M e M' cobordismos de Σ a Σ' :*

Então são considerados equivalentes se existir um difeomorfismo preservador de orientação $\psi : M \xrightarrow{\sim} M'$ fazendo o seguinte diagrama comutar

Depois de identificar os cobordismos equivalentes, os cilindros $\Sigma \times [0, 1]$ é o morfismo identidade para Σ .

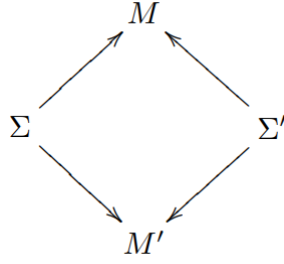


Figura 2: Fonte [9]

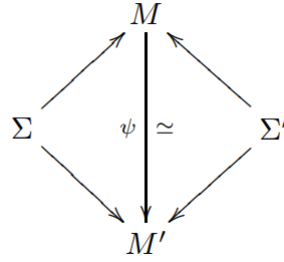


Figura 3: Fonte [9]

A categoria dos cobordismos é uma categoria geométrica que captura a forma com que variedades n -dimensionais são coladas. Poderíamos usar diferentes definições para estes conceitos mas para as dimensões $n = 2, 3$ todas as definições coincidem. Diferentemente que para variedades topológicas quadridimensionais, que sabemos não ter necessariamente estruturas suaves.

2.2 Transformação Natural

Sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores sobre categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} . Diremos que uma transformação natural entre F e G é a seguinte família de morfismos em \mathcal{D} :

- (1) $\varphi := \{\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)\}$ para todo $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$
- (2) $\varphi_Y F(f) = G(f) \varphi_X$; para todo $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ e para toda $f \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$

de forma que o diagrama da figura 4 comuta.

Definição 2.4 (Isomorfismo Natural). *A transformação natural $\varphi : F \rightarrow G$ é inversível se $\varphi_X \in \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$ é isomorfismo para todo $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$. Nesse caso chamaremos φ de isomorfismo natural.*

Adicionalmente, diremos ainda que dados dois funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, definidos sobre categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} , serão ditos isomorfos se existir um isomorfismo natural $\varphi : F \rightarrow G$. Além disso

Definição 2.5. *Diremos que um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é isomorfismo se:*

- (1) *existe um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$*
- (2) *$G \circ F = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$*

onde o funtor identidade atua da maneira esperada: $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$; $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para qualquer $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ e para todo $f \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$. Diremos então que duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} são isomorfas se existir um funtor isomorfismo entre ambas.

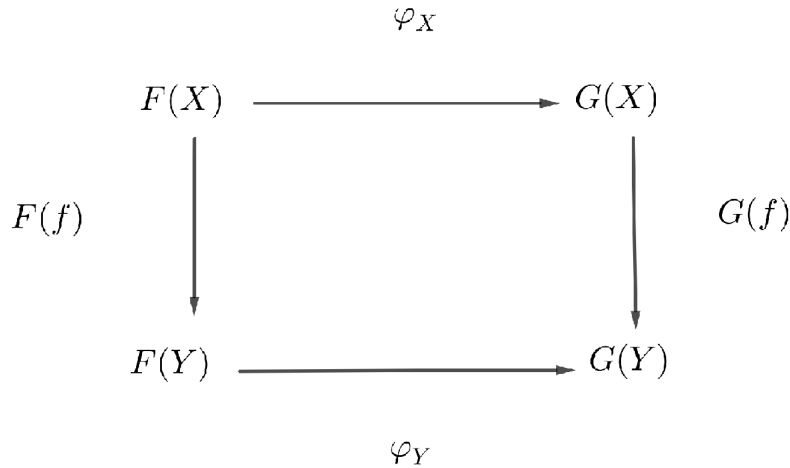


Figura 4: Transformação Natural

Por fim podemos definir a noção de equivalência entre funtores e categorias:

Definição 2.6. *Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor entre as categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} . Diremos que é uma equivalência se*

- (1) *existe um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$*
- (2) *$G \circ F \simeq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G \simeq \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$*

Aqui por isomorfismo de funtores nos referimos a existência de um isomorfismo natural entre os funtores em questão. Além disso diremos que categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} serão equivalentes se existir uma equivalência $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

2.3 O produto de categorias

Se \mathcal{B} e \mathcal{C} forem categorias, podemos formar a **categoria produto** $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, da maneira esperada. De fato, os objetos de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ são pares ordenados (B, C) , onde B é um objeto de \mathcal{B} e C é um objeto de \mathcal{C} . Um morfismo de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ à $\mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$ é um par de morfismos, onde $f : B \rightarrow B'$ e $g : C \rightarrow C'$. A composição é feita componente a componente:

$$(f, g) \circ (h, k) = (f \circ h, g \circ k)$$

Um funtor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ da categoria produto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ à outra categoria é chamado de **bifuntor**. O elemento identidade do produto $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ é

$$id_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} := (id_{\mathcal{A}}, id_{\mathcal{B}}); \quad \forall A \in \mathcal{A} \ \& \ \forall B \in \mathcal{B}$$

o que pode ser verificado diretamente.

Definição 2.7. *Seja \mathcal{C} uma categoria e $A, B \in \mathcal{C}$, como é mostrado na figura 5. Um produto de A e B é um trio*

$$(A \times B, \rho_1 : A \times B \rightarrow A, \rho_2 : A \times B \rightarrow B)$$

onde $A \times B$ é um objeto em \mathcal{C} e ρ_1 e ρ_2 são morfismos em \mathcal{C} com a propriedade de que para qualquer trio

$$(X, f : X \rightarrow A, g : X \rightarrow B)$$

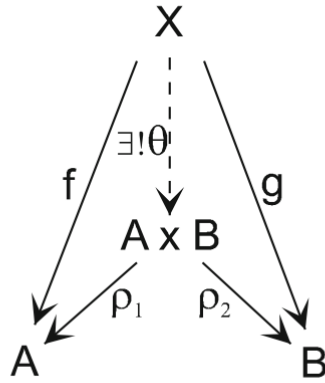


Figura 5: Categoria Produto. Fonte - [51]

onde $X \in \mathcal{C}$, existe um único mapa $\theta : X \rightarrow A \times B$, chamado de **morfismo mediador** para o qual o diagrama 5 comuta, isto é, para o qual

$$\rho_1 \circ \theta = f \text{ e } \rho_2 \circ \theta = g$$

Os mapas ρ_1 e ρ_2 são chamados de **mapas de projeção**.

2.4 A propriedade universal do mapeamento

Nosso objetivo aqui é motivar a introdução das categorias monoidais através de uma generalização do produto tensorial para espaços vetoriais como elementos da categoria **Vect** cujos morfismos são transformações lineares. Para tanto devemos primeiro definir apropriadamente a propriedade universal de mapeamento.

Categoria Vírgula

Se $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ for um funtor e $C \in \mathcal{C}$ é um objeto, então a categoria vírgula $(C \rightarrow G)$ é a categoria cujos objetos são os pares

$$(U, u : C \rightarrow GU) \tag{8}$$

para $U \in \mathcal{D}$. Além disso, um morfismo

$$\tau : (U, u : C \rightarrow GU) \rightarrow (D, f : C \rightarrow GD) \tag{9}$$

entre objetos vírgula é essencialmente apenas um morfismo $\tau : U \rightarrow D$ em \mathcal{D} para o qual

$$G\tau \circ u = f. \tag{10}$$

Essa propriedade podemos destacar da seguinte forma:

Propriedade universal de mapeamento: Um par $(U, u_C : C \rightarrow GU)$ tem a propriedade universal de mapeamento se para todo morfismo $f : C \rightarrow GD$, existe um único morfismo $\tau_f : U \rightarrow D$ em \mathcal{D} para o qual o triângulo na figura 6 comuta, isto é, para o qual

$$G\tau_f \circ u_C = f \tag{11}$$

Vale notar que a presença do funtor G restringe os codomínios dos mapas em questão para a imagem $G\mathcal{D}$.

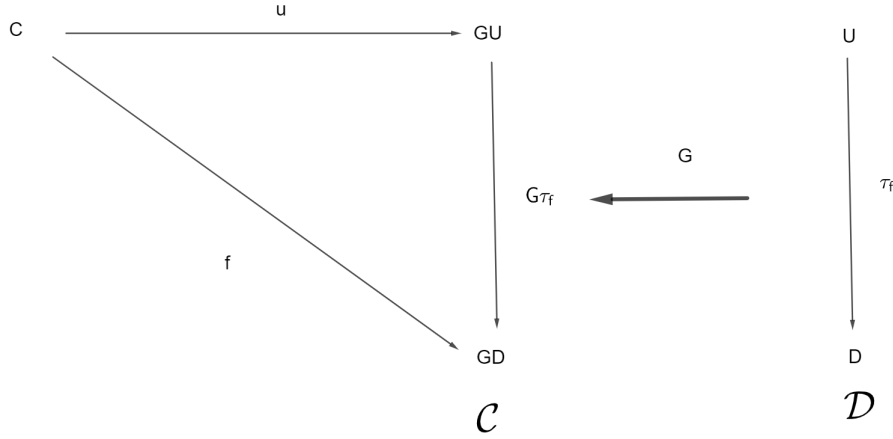


Figura 6: Par Universal

O objeto U é conhecido como **objeto universal**, o mapa u é um **mapa universal** e um par $(U, u_C : C \rightarrow GU)$ é um **par universal** para (C, G) .

Definição 2.8. *Seja $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor e seja*

$$\mathcal{U} = (U, u_C : C \rightarrow GU)$$

*um par universal de (C, G) . Então o **mapa mediador** para \mathcal{U} é o mapa*

$$\tau_{C,D} : \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(U, D)$$

definido para todo $f : C \rightarrow GD$ como

$$\tau_{C,D}(f) = \tau_f$$

Teorema 2.1. *Um mapa*

$$\tau_{C,D} : \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(U, D)$$

é o mapa mediador para o par universal

$$\mathcal{U} = (U, u_C : C \rightarrow GU)$$

se e somente se $\tau_{C,D}$ for bijeção e

$$\tau_{C,D}^{-1}(h) = Gh \circ u_C \tag{12}$$

Demonstração. Se $\tau_{C,D}$ for uma bijeção dada por 12, então para qualquer $f : C \rightarrow GD$, temos

$$G\tau_{C,D}(f) \circ u_C = f$$

e se

$$Gh \circ u_C = f$$

para qualquer $h : U \rightarrow D$, aplicando a bijeção $\tau_{C,D}$ resulta

$$\tau_{C,D}(f) = \tau_{C,D}(Gh \circ u_C) = \tau_{C,D}(\tau_{C,D}^{-1}(h)) = h$$

Então, $\tau_{C,D}(f) = \tau_f$ é o único mapa mediador para f e então $\tau_{C,D}$ é mapa mediador.

Para a primeira implicação, notamos que a definição e unicidade do mapa mediador implica que

$$G\tau_{C,D}(f) \circ u_C = f \text{ e } \tau_{C,D}(Gh \circ u_C) = h$$

para todo $f : C \rightarrow GD$ e todo $h : U \rightarrow D$ então o mapa mediador é uma bijeção, como mapa inverso 12 para todo $h : U \rightarrow D$. Note ainda que o mapa universal é dado em termos do mapa mediador da forma

$$u_C = \tau_{C,U}^{-1}(1_U). \tag{13}$$

■

Exemplo 1. O par

$$(V_{\mathcal{B}}, j : \mathcal{B} \rightarrow V_{\mathcal{B}})$$

onde j , o mapa de inclusão, é o morfismo mediador para (\mathcal{B}, G) , $G : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}$ é o funtor em questão e \mathcal{B} é um conjunto base de um espaço vetorial. Para notar isso, perceba que a condição que $g : \mathcal{B} \rightarrow G\mathcal{B} = V_{\mathcal{B}}$,

$$g = \tau \circ j$$

é equivalente à dizer que $\tau v = gv$ para cada vetor da base \mathcal{B} . Mas isso univocamente define uma transformação linear τ .

De fato, a condição de universalidade do par $(V_{\mathcal{B}}, j)$ equivale ao fato que uma transformação linear τ qualquer é determinada pela atribuição de seus valores com relação aos elementos da base \mathcal{B} , e a transformação g fazendo a atribuição arbitraria nesse caso.

Teorema 2.2. *Seja S um subespaço de V e seja $\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ satisfazendo $S \subseteq \ker(\sigma)$. Então, como na figura 7, vemos que $(V, \pi_S : V \rightarrow V/S)$ é um par universal. Logo*

$$\tau_\sigma \circ \pi_S = \sigma$$

Além disso, $\ker(\tau_\sigma) = \ker(\sigma)/S$ e $\text{im}(\tau_\sigma) = \text{im}(\sigma)$.

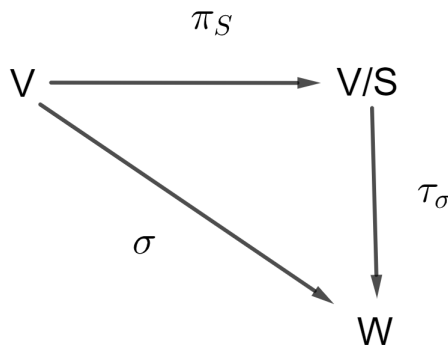


Figura 7: Propriedade Universal para Quocientes

Demonstração. Não temos escolha se não definir τ_σ pela condição do mapa mediador $\tau_\sigma \circ \pi_S = \sigma$, isto é,

$$\tau_\sigma(v + S) = \sigma(v)$$

Essa função é bem definida se e somente se

$$v + S - u + S \implies \tau_\sigma(v + S) - \tau_\sigma$$

que é equivalente às seguintes proposições:

$$v + S = u + S \implies \sigma v = \sigma u$$

$$v - u \in S \implies \sigma(v - u) = 0$$

$$x \in S \implies \sigma x = 0$$

$$S \subseteq \ker(\sigma)$$

Logo, $\tau_\sigma : V/S \rightarrow W$ é bem definido. Além disso,

$$\text{im}(\tau_\sigma) = \{\tau_\sigma(v + S) | v \in V\} = \{\sigma v | v \in V\} = \text{im}(\sigma)$$

e

$$\ker(\tau_\sigma) = \{v + S | \tau_\sigma(v + S) = 0\}$$

$$= \{v + S | \sigma v = 0\}$$

$$= \{v + S | v \in \ker(\sigma)\}$$

$$= \ker(\sigma)/S$$

A unicidade de τ_σ é evidente. ■

Agora já temos quase todas as peças para demonstrar o teorema sobre a propriedade universal de produtos tensoriais, só resta agora mostrar que de fato podemos tomar categorias quocientes para nossa formulação sem problemas de definição.

2.5 Categorias Quocientes

Para podermos mostrar o teorema seguinte que facilitará o tratamento de diversos exemplos nas próximas seções, primeiro relembremos a definição do que entenderemos por uma relação no produto cartesiano $X \times Y$ de conjuntos X, Y .

Definição 2.9. *Sejam $X, Y \in \mathbf{Set}$, então diremos que um subconjunto R de $X \times Y$ é uma relação. Além disso para denotar seus elementos $(x, y) \in R$ escreveremos xRy ou $x \sim_R y$. Diremos ainda que uma relação com as seguintes propriedades:*

(a) *(Simetria) Sempre temos xRx para qualquer $x \in X$*

(b) *(Reflexividade) Sempre que tivermos xRy então temos ainda yRx*

(c) *(Transitividade) Caso ocorra de xRy e yRz então necessariamente temos xRz .*

é uma relação de equivalência.

Podemos gerar novas categorias usando geradores e relações, da seguinte maneira:

Teorema 2.3. *Para uma dada categoria \mathcal{C} , seja R uma função que relaciona para cada par de elementos A, B de \mathcal{C} uma relação binária $R_{A,B}$ no hom-set $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Então existe uma categoria \mathcal{C}/R e um funtor $Q = Q_R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/R$ tal que*

(i) *Se $f R_{A,B} f'$ em \mathcal{C} , então $Qf = Qf'$;*

(ii) *Se $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é algum funtor de \mathcal{C} para o qual $f R_{A,B} f'$ implica que $Hf = Hf'$ para todo f e f' , então existe um único funtor $H' : \mathcal{C}/R \rightarrow \mathcal{D}$ com $H' \circ Q_R = H$.*

Além disso, o funtor Q_R é uma bijeção em objetos.

Para uma demonstração e mais sobre esse tema de categorias quocientes, aplicações em outras categorias e outros teoremas relacionados pode ser encontrado em [38].

2.6 Construção do Produto Tensorial: Livre de coordenadas

Agora podemos definir o que entenderemos por um **produto tensorial** de espaços vetoriais.

Definição 2.10. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um campo \mathbb{F} . Qualquer par universal $(T, t : U \times V \rightarrow T)$ é chamado de **produto tensorial** de U e V . O espaço vetorial T é denotado $U \otimes V$ e chamado em si de produto tensorial. O mapa t é chamado de **mapa tensorial** e os elementos de $U \otimes V$ são chamados de **tensores**.*

É de costume usar o símbolo \otimes para denotar a imagem de qualquer par ordenado (u, v) sobre a ação do mapa tensorial, isto é,

$$u \otimes v = t(u, v)$$

para qualquer $u \in U$ e $v \in V$.

Seja $U \times V_{\mathbb{F}}$ um espaço vetorial sobre \mathbb{F} com base $U \times V$. Seja S o subespaço de $U \times V_{\mathbb{F}}$ gerado pelos vetores da forma

$$r(u, w) + s(v, w) - (ru + sv, w) \quad (14)$$

e

$$r(u, v) + s(u, w) - (u, rv + sw) \quad (15)$$

onde $r, s \in \mathbb{F}$ e u, v e w estão nos espaços apropriados.

Consideramos agora o espaço quociente

$$T := \frac{U \times V_{\mathbb{F}}}{S}$$

Os elementos de T tem a forma

$$(u, v) + S$$

Assim definimos o mapa tensorial $t : U \times V \rightarrow T$ da seguinte maneira

$$t(u, v) = (u, v) + S = u \otimes v$$

Este mapa é bilinear, já que

$$\begin{aligned} t(au + bv, w) &= (ru + sv, w) + S \\ &= [r(u, v) + s(v, w)] + S \\ &= [r(u, w) + S] + [s(v, w) + S] \\ &= rt(u, w) + st(v, w) \end{aligned}$$

similarmente para a segunda coordenada.

Agora provamos que o par $(U \otimes V, t : U \times V \rightarrow U \otimes V)$ é o produto tensorial de U e V .

Teorema 2.4. *Sejam U e V espaços vetoriais. O par*

$$(U \otimes V, t : U \times V \rightarrow U \otimes V)$$

onde $U \otimes V = \frac{U \times V_{\mathbb{F}}}{S}$, é o produto tensorial de U e V .

Demonstração. Considere o seguinte diagrama 8. Aqui $U \times V_{\mathbb{F}}$ é o espaço vetorial sobre o campo \mathbb{F} com base $U \times V$.

Como

$$\pi \circ j(u, v) = \pi(u, v) = (u, v) + S = u \otimes v = t(u, v)$$

temos

$$t = \pi \circ j$$

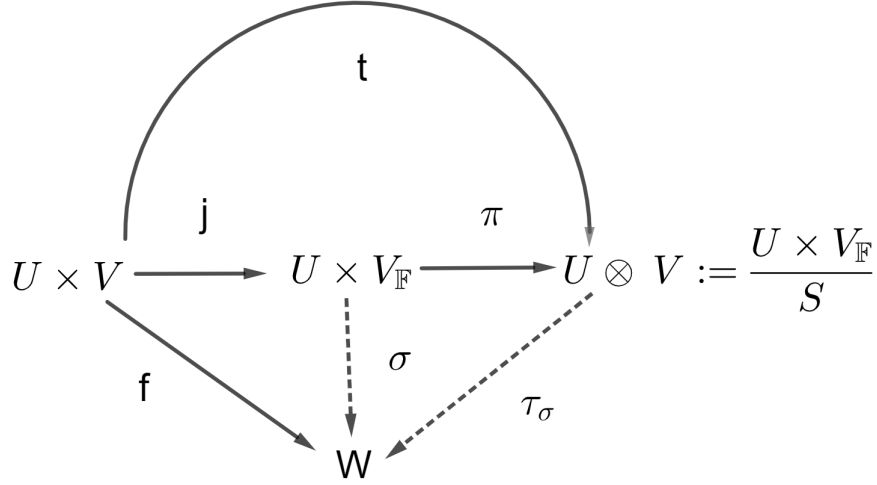


Figura 8: Produto Tensorial

A propriedade universal de espaços vetoriais mostrada no exemplo da seção 1 implica que existe uma única transformação linear $\sigma : U \times V_{\mathbb{F}} \rightarrow W$ para a qual

$$\sigma \circ j = f$$

Observe que se f for bilinear então teremos $S \subseteq \ker(\sigma)$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \sigma[rj(u, w) + sj(v, w) - j(ru + sv, w)] &= \\ &= \sigma[rj(u, w) + sj(v, w) - j(ru + sv, w)] \\ &= r\sigma j(u, w) + s\sigma j(v, w) - \sigma j(ru + sv, w) \\ &= rf(u, w) + sf(v, w) - f(ru + sv, w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e similarmente para a segunda coordenada. Logo, o teorema 2.2 implica que existe uma única transformação linear $\tau_{\sigma} : U \otimes V \rightarrow W$ para qual

$$\tau_{\sigma} \circ \pi = \sigma$$

Então,

$$\tau_{\sigma} \circ t = \tau_{\sigma} \circ \pi \circ j = \sigma \circ j = f$$

Perceba que em diferentes diagramas devemos tomar W como imagem do functor $G : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}$ e em outro diagrama pensamos nele como imagem do functor quociente $Q_S : \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Vect}/\mathbf{S}$. Para mostrar unicidade, se $\tau'_{\sigma} \circ t = f$, então

$$\tau'_{\sigma}[(u, v) + S] = f(u, v) = \tau_{\sigma}[(u, v) + S]$$

e como as co-classes $(u, v) + S$ geram o quociente $\frac{U \times V_{\mathbb{F}}}{S}$ conclui-se que $\tau'_{\sigma} = \tau_{\sigma}$. Assim, τ_{σ} é o morfismo mediador e $(U \otimes V, t)$ é par universal. ■

(b) Seja \mathcal{D} uma categoria, junto com funtores:

$$H_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A} \text{ e } H_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$$

Se para qualquer categoria \mathcal{C} e funtores

$$G_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \text{ e } G_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$$

existir um único funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que o diagrama 10a seja comutativo

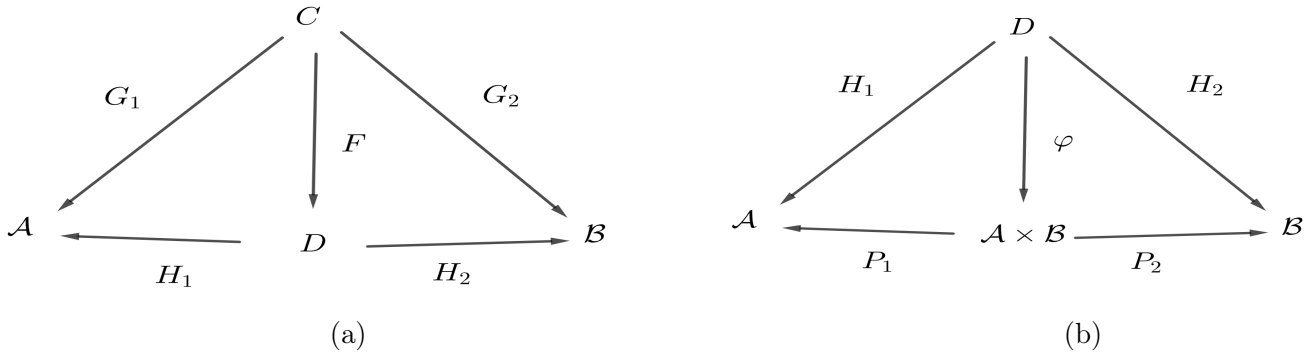


Figura 10

Então existe isomorfismo $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, e

$$P_1 \circ \varphi = H_1 \text{ e } P_2 \circ \varphi = H_2$$

tornando o diagrama 10b comutativo.

Agora lembramos a definição de Monoide da teoria de grupos para podermos contextualizar a próxima definição, da categoria monoidal.

Definição 3.3 (Monoide). Diremos que um par (M, \star) com as seguintes propriedades é um monoide:

- (a) $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$; para todo $x, y, z \in M$
- (b) existe um elemento $1 \in M$: $x \star 1 = 1 \star x = x$; para todo $x \in M$.

3.2 Categoria Monoidal

Agora temos todas as ferramentas que precisamos em disposição para definirmos as categorias monoidais:

Definição 3.4. Seja \mathcal{C} uma categoria, junto das seguintes propriedades

1. Seja $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor de forma que

$$\otimes (X, Y) := X \otimes Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \tag{16}$$

$$\otimes (f, g) := f \otimes g \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \tag{17}$$

2. Existe um objeto ‘unitário’ $I \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

3. Para todos objetos $X, Y, Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ temos a seguinte transformação natural

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$$

que é um isomorfismo natural.

4. Para qualquer objeto $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ temos a seguinte transformação natural

$$\lambda_X : I \otimes X \rightarrow X$$

que é um isomorfismo natural.

5. Para todo $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ temos a transformação

$$\rho_X : x \otimes I \rightarrow X$$

que também é isomorfismo natural.

Além dessas propriedades também precisaremos que estas transformações naturais obedecem a comutatividade dos seguintes diagramas:

(a) Para todo $X, Y, Z, W \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, o diagrama da figura 11 é comutativo.

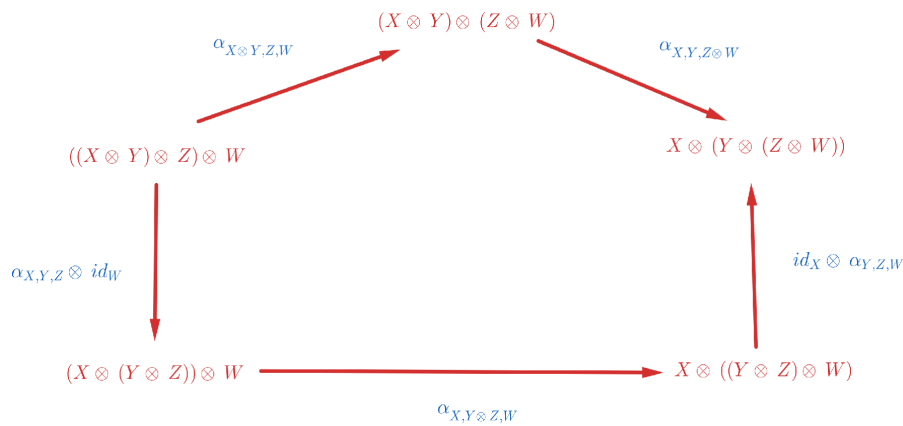


Figura 11: Equação do Pentágono

(b) Para todo $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, o diagrama da figura 12 é comutativo.

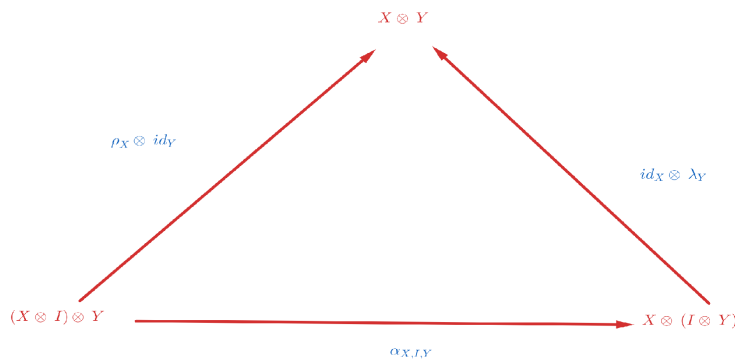


Figura 12: Equação do Triângulo

Para melhor contextualizar os conceitos introduzidos avaliamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1. Seja $\mathcal{C} = \mathbf{Hilb}$ a categoria dos espaços de Hilbert, isto é, espaços vetoriais com produto interno sobre o corpo dos complexos e completo na métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ para quaisquer elementos $x, y \in \mathcal{C} \in \mathbf{Hilb}$. Aqui os Morfismos serão mapas lineares limitados, isto é, dado $f : X \rightarrow Y$ deve existir $d \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|f(x)\| \leq d\|x\|$ para todo $x \in X$, e $X, Y \in \mathbf{Hilb}$. A composição aqui é a composição de mapas, e assim naturalmente associativa. O mapa identidade é id_X para qualquer $X \in \mathbf{Hilb}$. Nesta categoria tomamos o objeto “unitário” como $I = \mathbb{C} \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Hilb})$. O funtor tensorial será o produto tensorial usual para espaços vetoriais $\otimes(H, K) = H \otimes K$. Aqui podemos tomar o mapa $\alpha_{H,K,M} : (H \otimes K) \otimes M \rightarrow H \otimes (K \otimes M)$ como a identidade já que o produto tensorial para espaços vetoriais é associativo. Os mapas “unitários” serão definidos da seguinte forma:

$$\lambda_H : \mathbb{C} \otimes H \rightarrow H; \quad \lambda_H(z \otimes h) = zh$$

e o mapa

$$\rho_H : H \otimes \mathbb{C} \rightarrow H; \quad \rho_H(h \otimes z) = hz$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ e $h \in H$. Perceba que aqui devemos introduzir relações de equivalência \sim_1 tal que $h \otimes z \sim_1 u \otimes w$ caso $hz = uw$ para todo $h, u \in H \in \mathbf{Hilb}$ e $z, w \in \mathbb{C}$, e \sim_2 tal que $z \otimes h \sim_2 w \otimes u$ sempre que $zh = wu$ para todo $h, u \in H \in \mathbf{Hilb}$ e $z, w \in \mathbb{C}$, então consideramos o quociente $\mathbf{Hilb}/(\sim_1 \sim_2) := (\mathbf{Hilb}/\sim_1)/\sim_2$ que pelo teorema 2.3 é ainda uma categoria que com os mesmos mapas definidos anteriormente é uma categoria monoidal.

Agora podemos usar essa categoria junto de sua regra de composição e produto tensorial para construir alguns morfismos complicados. Suponhamos os seguintes processos: Para $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, a

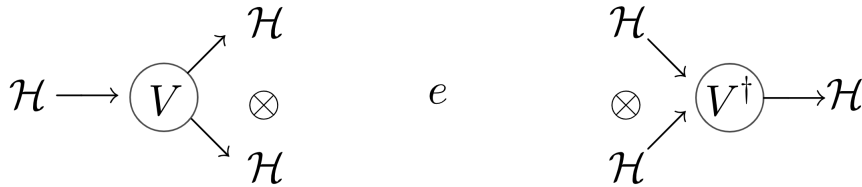


Figura 13: Fonte [10]

ação de V poderia ser, por exemplo,

$$\begin{aligned} V|0 \rangle &= |01 \rangle, \\ V|1 \rangle &= \frac{|00 \rangle + |11 \rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Podemos usar esse formalismo de redes tensoriais para descrever vários processos “atômicos” compondo diagramas com linhas em serie e em paralelo, e.g.. O ponto marcado aqui demarca o cruzamento de duas linhas no diagrama. Ainda não definimos o que esse processo significa; Este será o tópico das próximas subseções na qual discutiremos categorias trançadas, mas antes provaremos ainda alguns teoremas sobre as categorias monoidais.

Teorema 3.1. *Seja \mathcal{C} um categoria monoidal. As seguintes identidades valerão:*

- (1) $id_X \otimes id_Y = id_{X \otimes Y}$, para todo $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$
- (2) $(g \otimes g') \circ (f \otimes f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f')$, para todos os morfismos $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $f' : X' \rightarrow Y'$, $g' : Y' \rightarrow Z'$ em \mathcal{C} , sempre que as composições fizerem sentido.

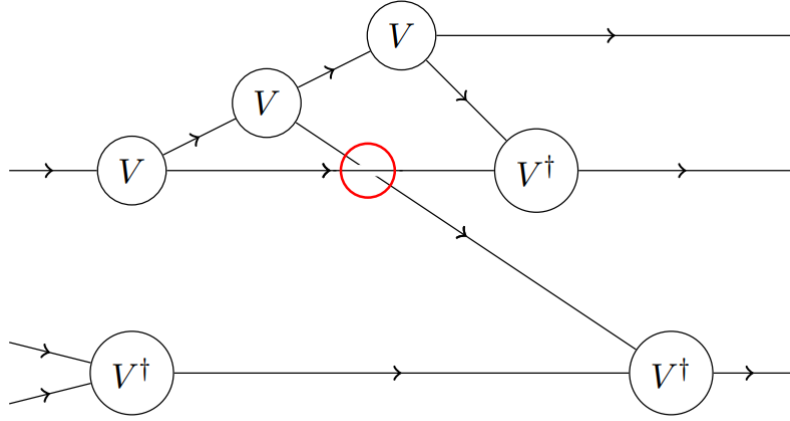


Figura 14: Redes tensoriais de processos atômicos. Fonte - [10]

Demonstração. Demonstramos cada item separadamente:

1. Pela definição do funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

$$\otimes(X, Y) = X \otimes Y$$

$$\otimes(f, g) = f \otimes g$$

então tomando $f = id_X$, $g = id_Y$ e como $(id_X, id_Y) = id_{(X,Y)}$ temos o seguinte

$$id_X \otimes id_Y = \otimes(id_X, id_Y) = \otimes id_{(X,Y)} = id_{\otimes(X,Y)} = id_{X \otimes Y}.$$

2. Para um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de \mathcal{C} a uma outra categoria \mathcal{D} temos

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

assim seja $F = \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ e fixando

$$\otimes((g, g') \circ (f, f')) = \otimes(g, g') \circ \otimes(f, f') = (g \otimes g') \circ (f \otimes f') \quad (18)$$

mas como $((g, g') \circ (f, f')) = (g \circ f, g' \circ f')$ temos

$$\otimes(g \circ f, g' \circ f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f') \quad (19)$$

comparando (18) e (19) temos o resultado desejado. ■

Teorema 3.2. *Seja $(\mathcal{C}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ um categoria monoidal. Então para morfismos $f, g : X \rightarrow X'$ em \mathcal{C} temos: $f = g$ se e somente se $id_I \otimes f = id_I \otimes g$ ou $f \otimes id_I = g \otimes id_I$.*

Demonstração. Utilizando a naturalidade dos mapas λ e ρ obtemos a seguinte relação

$$f \circ \lambda_X = \lambda_{X'} \circ (id_I) \otimes f$$

e

$$f \circ \rho_X = \rho_{X'} \circ (f \otimes id_I)$$

e o mesmo para $g : X \rightarrow X'$. Desta forma obtemos as seguintes relações

$$f = \lambda_{X'} \circ (id_I \otimes f) \circ \lambda_X^{-1}; \quad f = \rho_{X'} \circ (f \otimes id_I) \circ \rho_X^{-1}$$

e

$$g = \lambda_{X'} \circ (id_I \otimes g) \circ \lambda_X^{-1}; \quad g = \rho_{X'} \circ (g \otimes id_I) \circ \rho_X^{-1}$$

Com essas relações podemos provar a segunda implicação, sendo a primeira trivial. ■

Teorema 3.3. *Seja $(\mathcal{C}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ uma categoria monoideal. Então para todo $Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ teremos a seguinte identidade $id_I \otimes \lambda_Y = \lambda_{I \otimes Y}$.*

Demonstração. Usando a naturalidade de λ para um morfismo $f : X \rightarrow Y$, temos a relação $f \circ \lambda_X = \lambda_Y \circ (id_I \otimes f)$. Assim tomando $f = \lambda_Y : I \otimes Y \rightarrow Y$,

$$\lambda_Y \circ (id_I \otimes \lambda_Y) = \lambda_Y \circ \lambda_{I \otimes Y}$$

assim temos o resultado após aplicar λ_Y^{-1} no lado esquerdo da equação anterior

$$id_I \otimes \lambda_Y = \lambda_{I \otimes Y}$$

■

Agora podemos provar um dos teoremas clássicos para a teoria de categorias monoideais:

Teorema 3.4. *Seja $(\mathcal{C}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ uma categoria monoideal. Neste caso sempre teremos a seguinte identidade: $\lambda_I = \rho_I$.*

Demonstração. Para realizarmos esta demonstração precisaremos demonstrar a seguinte relação:

$$\lambda_{X \otimes Y} = (\lambda_X \otimes id_Y) \circ \alpha_{I, X, Y}^{-1} \quad (20)$$

Para mostrar tal relação consideramos o diagrama da figura 15. Sob cuidadosa avaliação pode-se

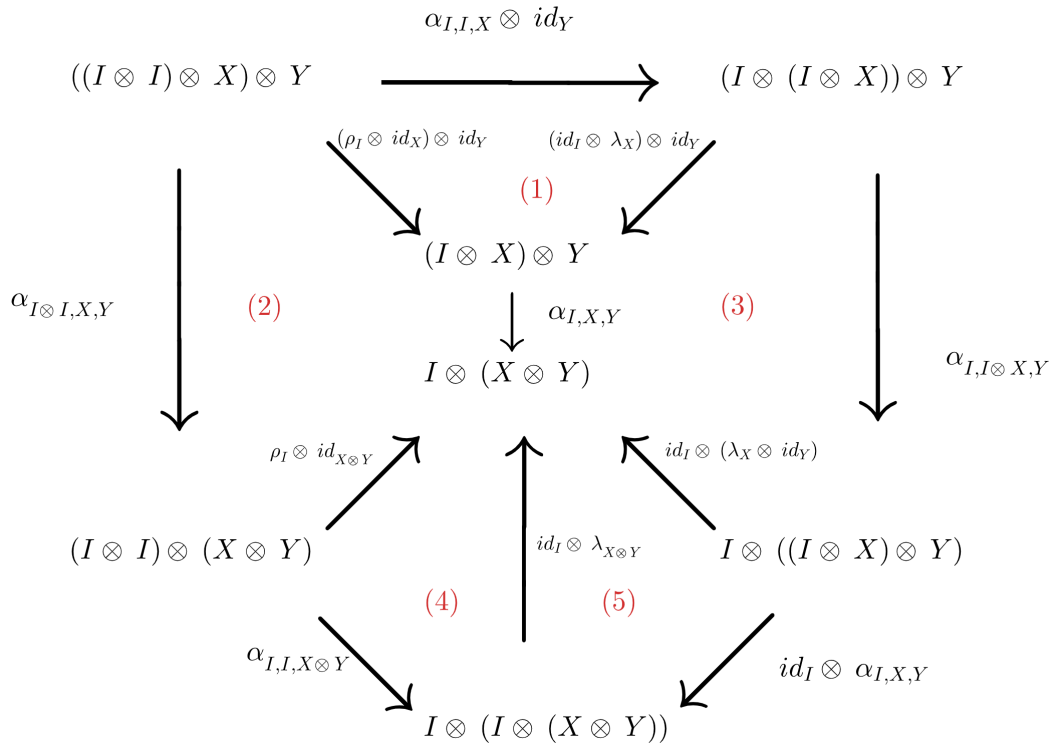


Figura 15

observar que os diagramas (1) e (4) seguem da equação do triângulo 12. Além disso observa-se que os diagramas (2) e (3) seguem da naturalidade do morfismo α . Por fim a comutatividade do diagrama do pentágono junto da comutação dos diagramas (1), (2), (3) e (4) implicam na comutação do diagrama (5). Assim com a comutatividade do diagrama (5) obtemos a seguinte relação

$$id_I \otimes (\lambda_X \otimes id_I) = (id_I \otimes \lambda_{X \otimes Y}) \circ (id_I \otimes \alpha_{I, X, Y})$$

e sabemos que podemos isolar o termo id_I do lado esquerdo da equação por conta do lema 3.1, então temos

$$id_I \otimes (\lambda_X \otimes id_Y) = id_I \otimes (\lambda_{X \otimes Y} \circ \alpha_{I, X, Y})$$

Dessa relação podemos ver claramente que $\lambda_X \otimes id_Y = \lambda_{X \otimes Y} \circ \alpha_{I, X, Y}$ portanto invertendo o morfismo natural α obtemos a relação desejada

$$\lambda_{X \otimes Y} = (\lambda_X \otimes id_Y) \circ \alpha_{I, X, Y}^{-1}$$

Usando o diagrama (4) para $X = Y = I$ e o lema 3.3 obtemos a seguinte relação:

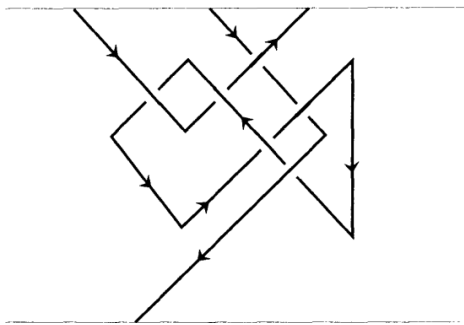
$$\rho_I \circ id_I = (id_I \otimes \lambda_I) \circ \alpha_{I, I, I} = ((\lambda_I \otimes id_I) \circ \alpha_{I, I, I}^{-1}) \circ \alpha_{I, I, I} = \lambda_I \otimes id_I$$

Assim usando o lema 3.2 devemos ter a igualdade dos mapas na equação anterior, portanto temos o resultado $\rho_I = \lambda_I$. ■

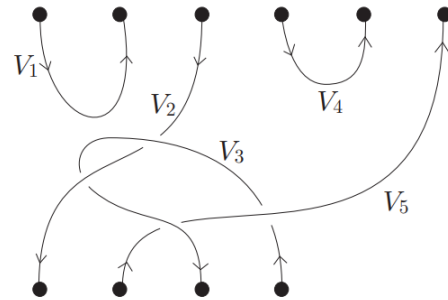
Antes de partirmos partirmos para definição de funtores monoidais e categorias monoidais estritas podemos ainda fazer mais um exemplo relevante sobre as categorias monoidais.

Exemplo 2. Seja $S_{m,n}$ uma união disjunta de m círculos \mathbb{R}/\mathbb{Z} e n intervalos $[0, 1]$. Um emaranhamento é um mergulho suave $f : S_{m,n} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ tal que mapas de fronteira mapeiam à fronteira e mapas de interior mapeiam ao interior. Usaremos ainda o termo emaranhamento para a imagem de f .

Sejam x, y, z coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. Qualquer emaranhamento tem entradas (pontos da imagem de f com $z = 0$) e saídas (pontos da imagem de f com $z = 1$). Para inteiros $p, q \geq 0$, seja $\tilde{T}_{p,q}$ um conjunto de todos os emaranhamentos tendo p entradas e q saídas, todos com coordenadas y zerando. Seja $T_{p,q}$ um conjunto de classes de isotopia (caminhos contínuos de homeomorfismos conectando os emaranhamentos de p entradas e q saídas) de elementos de $\tilde{T}_{p,q}$; então, durante uma isotopia, as entradas e saídas poderão se mover (preservando a condição $y = 0$), mas não podem se encontrar. Podemos então definir um mapa de composição canônica $T_{p,q} \times T_{q,r} \rightarrow T_{p,r}$, induzido pela concatenação de emaranhamentos. De fato, se $s \in T_{p,q}$ e $t \in T_{q,r}$, podemos escolher representativos $\tilde{s} \in \tilde{T}_{p,q}, \tilde{t} \in \tilde{T}_{q,r}$ tal que as entradas de \tilde{t} coincidem com as saídas de \tilde{s} , concatenamo-os, e com uma reparametrização apropriada, e re-escalando $z \rightarrow z/2$. O emaranhamento obtido representará a desejada composição ts . Podemos agora definir uma



(a) Emaranhamento poligonal. Fonte: [32].



(b) Emaranhamento com quatro pontos de entrada e cinco de saída. Fonte: [9]

categoria monoidal \mathcal{T} chamada categoria de emaranhamentos. Os objetos dessa categoria são inteiros não negativos, e os morfismos são definidos como $Hom_{\mathcal{T}}(p, q) = T_{p,q}$, com a composição acima. O elemento identidade é dado por $id_p \in T_{p,p}$ representados por p intervalos verticais e sem círculos (em particular, se $p = 0$, o morfismo identidade id_p é o emaranhamento vazio).

$$\begin{array}{ccc}
& & \alpha'_{F(X),F(Y),F(Z)} \\
& & \longrightarrow \\
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \\
\downarrow J_{X,Y} \otimes' id_{F(Z)} & & \downarrow id_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z} \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \\
\downarrow J_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow J_{X, Y \otimes Z} \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F(\alpha_{X,Y,Z})} & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{array}$$

Figura 17: Axioma de estrutura monoidal

Agora definimos a estrutura monoidal sobre a categoria \mathcal{T} . O produto tensorial é definido como $m \otimes n = m + n$. O produto de morfismos será induzido pela união de emaranhamentos. Dessa forma, se $t_1 \in \mathcal{T}_{p_1, q_1}$ e $t_2 \in \mathcal{T}_{p_2, q_2}$, pegamos representantes $\tilde{t}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_{p_1, q_1}$ e $\tilde{t}_2 \in \tilde{\mathcal{T}}_{p_2, q_2}$ de forma que qualquer ponto de \tilde{t}_1 está a esquerda de qualquer ponto de \tilde{t}_2 (i.e., tem coordenada x menor). Então $t_1 \otimes t_2$ é representado por um emaranhamento $\tilde{t}_1 \cup \tilde{t}_2$.

Com essas definições vemos que o produto tensorial $t_1 \otimes t_2$ é bem definido e o isomorfismo associativo simplesmente representa a associatividade das uniões das classes de isotopia que são separadas espacialmente na coordenada x. Além disso os mapas unitários são identidades do emaranhamento de intervalos verticais com emaranhamentos genéricos (não necessariamente nessa ordem) simplesmente eliminando os intervalos verticais ficando apenas com os emaranhamentos arbitrários.

3.3 Funtores Monoidais e seus morfismos

Como já explicado, a noção de categoria monoidal é a categorificação da noção de monoide. Agora podemos definir a categorificação dos morfismos entre monoides, isto é, os funtores monoidais.

Definição 3.5. *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ e $(\mathcal{C}', \otimes', I', \alpha', \lambda', \rho')$ duas categorias monoidais. Um functor monoidal de \mathcal{C} à \mathcal{C}' será um par (F, J, φ) , onde $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um functor, e*

$$J_{X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y) \quad (21)$$

é um isomorfismo natural, tal que $F(I)$ é isomorfo à I' e o diagrama deverá ser comutativo para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Diremos ainda que um functor monoidal F será uma equivalência de categorias monoidais se for uma equivalência de categorias ordinárias. Além disso os diagramas das figuras 18 e 19 também deverão ser comutativos para todo $X \in \mathcal{C}$: Além disso, se os morfismos ϕ e J forem isomorfismos diremos que F é functor monoidal forte.

A partir de agora consideraremos $F(I) = I'$ e $\varphi = id_{I'}$, assim como identificaremos $I \otimes X$ e $X \otimes I$ com X e assumiremos $\lambda_X = \rho_X = id_X$. Estas suposições farão parte da definição para

$$\begin{array}{ccc}
I' \otimes' F(X) & \xrightarrow{\lambda'_{F(X)}} & F(X) \\
\downarrow \varphi \otimes' id_{F(X)} & & \downarrow F(\lambda_X)^{-1} \\
F(I) \otimes' F(X) & \xrightarrow{J_{I,X}} & F(I \otimes X)
\end{array}$$

Figura 18

$$\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes' I' & \xrightarrow{\rho'_{F(X)}} & F(X) \\
\downarrow id_{F(X)} \otimes' \varphi & & \downarrow F(\rho_X)^{-1} \\
F(X) \otimes' F(I) & \xrightarrow{J_{X,I}} & F(I \otimes X)
\end{array}$$

Figura 19

categorias estritas, mas veremos com o teorema de Mac Lane que estas são sempre monoidalmente equivalentes à suas correspondentes categorias monoidais não estritas.

Os funtores monoidais entre categorias monoidais formam em si uma categoria. Nesta categoria os objetos seriam os funtores monoidais e os morfismos serão as seguintes transformações naturais.

Definição 3.6. *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ e $(\mathcal{C}', \otimes', I')$ duas categorias monoidais, e digamos que (F, J, φ) e (G, K, ψ) são dois funtores monoidais de \mathcal{C} à \mathcal{C}' . Um morfismo (ou transformação natural) de funtores monoidais $\eta : (F, J, \varphi) \rightarrow (G, K, \psi)$ é uma transformação natural $\eta : F \rightarrow G$ tal que η_I é um isomorfismo, e o diagrama comuta para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.*

$$\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes' F(Y) & \xrightarrow{J_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\
\downarrow \eta_X \otimes' \eta_Y & & \downarrow \eta_{X \otimes Y} \\
G(X) \otimes' G(Y) & \xrightarrow{K_{X,Y}} & G(X \otimes Y)
\end{array}$$

Figura 20

3.4 Teoremas de Mac Lane e categorias estritas

Como já havíamos decidido simplificar a teoria considerando os mapas de associatividade e unitários como identidades, agora definimos a categoria com essas propriedades.

Definição 3.7. *Uma categoria monoidal \mathcal{C} é dita estrita quando para todos os objetos X, Y, Z em \mathcal{C} valem as igualdades $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ e $X \otimes I = I \otimes X = X$, e os mapas de associatividade e unitários são identidades.*

Teorema 3.5. *Qualquer categoria monoidal é equivalente a uma categoria monoidal estrita.*

Agora podemos mostrar o teorema de coerência, que basicamente nos mostrará que isomorfismos entre produtos tensoriais de uma sequencia ordenadas de objetos X_1, \dots, X_n , onde estes objetos são em geral distintos em \mathcal{C} .

Para $n = 3$, o isomorfismo de associatividade dá uma identificação canônica de dois possíveis parenteses, $(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3$ e $X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$. Um argumento combinatorial mostra que pode-se identificar quaisquer dois parenteses de produtos X_1, \dots, X_n , $n \geq 3$, usando uma cadeia de isomorfismos de associatividade. Entretanto para $n \geq 4$ podem existir duas cadeias diferentes de isomorfismos de associatividade conectando dois produtos com parenteses, e à priori não sabemos se estes provem a mesma identificação.

Teorema 3.6 (Coerência). *Seja $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}$. Sejam P_1, P_2 quaisquer dois produtos com parenteses de X_1, \dots, X_n (nesta ordem) com inserções arbitrárias do objeto unitário I . Sejam $f, g : P_1 \rightarrow P_2$ dois isomorfismos, obtidos por composições de isomorfismos associativos e unitários e seus inversos possivelmente tensorialmente multiplicados por morfismos identidade. Então $f = g$.*

Para as demonstrações dos teoremas de Mac Lane fazemos referencia à literatura utilizada [38] e [18].

3.5 Categorias monoidais Rígidas e Pareamentos

Definição 3.8 (Pareamento). *Um pareamento entre objetos X, Y de uma categoria monoidal \mathcal{C} é um morfismo $X \otimes Y \rightarrow I$ em \mathcal{C} . Um pareamento $\omega : X \otimes Y \rightarrow I$ é não degenerado se existe um morfismo $\Omega : I \rightarrow Y \otimes X$ em \mathcal{C} tal que*

$$(id_Y \otimes \omega)(\Omega \otimes id_Y) = id_Y \text{ e } (\omega \otimes id_X)(id_X \otimes \Omega) = id_X. \quad (22)$$

tal que um morfismo Ω é chamado de inverso de ω e é determinado por ω unicamente.

De fato, se $\Omega' : I \rightarrow Y \otimes X$ é outro morfismo com as mesmas propriedades, então

$$\begin{aligned} \Omega' &= id_{Y \otimes X} \Omega' = (id_Y \otimes id_X) \Omega' = (id_Y \otimes (\omega \otimes id_X)(id_X \otimes \Omega)) \Omega' \\ &= (id_Y \otimes \omega \otimes id_X)(\Omega' \otimes \Omega) = ((id_Y \otimes \omega)(\Omega' \otimes id_Y) \otimes id_X) \Omega \\ &= (id_Y \otimes id_X) \Omega = id_{Y \otimes X} \Omega = \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Note a seguinte propriedade dos pareamentos não degenerados $\omega : X \otimes Y \rightarrow I$: para qualquer $Z, T \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, o mapa

$$Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y \otimes T) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes Z, T), \alpha \mapsto (\omega \otimes id_T)(id_X \otimes \alpha) \quad (24)$$

é uma bijeção. O mapa inverso carrega qualquer $\beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes Z, T)$ para o morfismo $(id_Y \otimes \beta)(\Omega \otimes id_Z)$, onde Ω é o inverso de ω . Similarmente, o mapa

$$Hom_{\mathcal{C}}(Z, T \otimes X) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(Z \otimes Y, T), \alpha \mapsto (id_T \otimes \omega)(\alpha \otimes id_Y) \quad (25)$$

é uma bijeção cujo inverso carrega qualquer $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \otimes Y, T)$ para $(\beta \otimes id_X)(id_Z \otimes \Omega)$.

Funtores monoidais transformam pareamentos não degenerados para pareamentos não degenerados da seguinte forma.

Teorema 3.7. *Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor monoidal forte entre categorias monoidais \mathcal{C}, \mathcal{D} e $\omega : X \otimes Y \rightarrow I$ é um pareamento não degenerado em \mathcal{C} , então o pareamento*

$$\omega^F = \varphi^{-1}F(\omega)J_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \rightarrow I$$

com inverso não degenerado

$$\Omega^F = J_{Y,X}^{-1}F(\Omega)\varphi : I \rightarrow F(Y) \otimes F(X),$$

onde $\Omega : I \rightarrow Y \otimes X$ é o inverso de ω .

Demonstração. Usando a definição de funtor monoidal, obtemos

$$\begin{aligned} (id_{F(Y)} \otimes \omega^F)(\Omega^F \otimes id_{F(Y)}) &= (id_{F(Y)} \otimes \varphi^{-1}F(\omega)J_{X,Y})(J_{Y,X}^{-1}F(\Omega)\varphi \otimes id_{F(Y)}) \\ &= (id_{F(Y)} \otimes \varphi^{-1}F(\omega))(id_{F(Y)} \otimes J_{X,Y})(J_{Y,X}^{-1} \otimes id_{F(Y)})(F(\Omega)\varphi \otimes id_{F(Y)}) \\ &= (id_{F(Y)} \otimes \varphi^{-1}F(\omega))J_{Y,X \otimes Y}^{-1}J_{Y \otimes X, Y}(F(\Omega)\varphi \otimes id_{F(Y)}) \\ &= (id_{F(Y)} \otimes \varphi^{-1})J_{Y, I}^{-1}F(id_Y \otimes \omega)F(\Omega \otimes id_Y)J_{I, Y}(\varphi \otimes id_{F(Y)}) \\ &= F((id_Y \otimes \omega)(\Omega \otimes id_Y)). \end{aligned} \tag{26}$$

Pelas suposições sobre ω e Ω , a ultima expressão nos dá $F(id_Y) = id_{F(Y)}$. A formula

$$(\omega^F \otimes id_{F(X)})(id_{F(X)} \otimes \Omega^F) = id_{F(X)}$$

é provada similarmente. ■

Agora podemos discutir a dualidade nas categoria monoidais e introduzir categorias rígidas.

Definição 3.9 (Categorias Rígidas). *Um objeto dual esquerdo de um objeto X de uma categoria monoidal \mathcal{C} é um par $({}^\vee X, \omega_X)$, onde ${}^\vee X$ é um objeto de \mathcal{C} e $\omega_X : {}^\vee X \otimes X \rightarrow I$ é um pareamento não degenerado. O pareamento ω_X é chamado de avaliação esquerda e sua inversa $\Omega_X : I \rightarrow X \otimes {}^\vee X$ a co-avaliação esquerda. O dual esquerdo de um objeto X , se existir, é único exceto por isomorfismos únicos preservando o pareamento de avaliação. Mais precisamente, se $(Y, e : Y \otimes X \rightarrow I)$ é outro dual esquerdo de X , então*

$$(e \otimes id_{{}^\vee X})(id_Y \otimes \Omega_X) : Y \rightarrow {}^\vee X$$

é o único isomorfismo $a : Y \rightarrow {}^\vee X$ tal que $e = \omega_X(a \otimes id_X)$.

Uma dualidade esquerda em uma categoria monoidal é uma família $\{({}^\vee X, \omega_X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ onde, para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, o par $({}^\vee X, \omega_X)$ é um dual esquerdo de X . Uma categoria rígida esquerda é uma categoria monoidal admitindo uma dualidade esquerda. Uma categoria rígida esquerda com uma dualidade esquerda distinguida é uma categoria rígida dotada de uma dualidade esquerda.

Similarmente, um dual direito de $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ é um par $(X^\vee, \tilde{\omega}_X)$ onde $X^\vee \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $\tilde{\omega} : X \otimes X^\vee \rightarrow I$ é um pareamento não degenerado. O pareamento $\tilde{\omega}_X$ é chamada de avaliação direita com inversa $\tilde{\Omega}_X : I \rightarrow X^\vee \otimes X$ a co-avaliação direita. Um dual direita de um objeto de \mathcal{C} , se existir, é único exceto por isomorfismos preservando o pareamento de avaliação.

Uma dualidade direita de uma categoria monoidal \mathcal{C} é uma família $\{(X^\vee, \tilde{\omega}_X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ onde, para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, o par $(X^\vee, \tilde{\omega}_X)$ é um dual direito de X . Uma categoria é rígida direita se

é uma categoria monoidal admitindo uma dualidade de direita. Uma categoria rígida direita com uma dualidade direita distinguida é uma categoria rígida direita com uma dualidade direita.

Uma categoria rígida é uma categoria monoidal que é tanto rígida de esquerda como rígida direita, isto é, admite dualidade esquerda e dualidade direita. Uma categoria rígida com uma dualidade distinguida é uma categoria rígida dotada de uma dualidade esquerda e direita.

Uma dualidade esquerda em uma categoria rígida esquerda \mathcal{C} determina um funtor

$${}^\vee F : \mathcal{C}^{rev} = (\mathcal{C}^{op}, \otimes^{op}, I) \rightarrow \mathcal{C}$$

que carrega cada $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) = \mathbf{Ob}(\mathcal{C}^{rev})$ para ${}^\vee X$ e carrega cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} (que é um morfismo $Y \rightarrow X$ em \mathcal{C}^{rev}) para o dual esquerda

$${}^\vee f = (\omega_Y \otimes id_{{}^\vee X})(id_{{}^\vee Y} \otimes f \otimes id_{{}^\vee X})(id_{{}^\vee Y} \otimes \Omega_X) : {}^\vee Y \rightarrow {}^\vee X.$$

O funtor ${}^\vee F$ é um funtor monoidal forte com os vínculos ${}^\vee \varphi = \Omega_I : I \rightarrow {}^\vee I$ e ${}^\vee J_{X,Y} : {}^\vee X \otimes {}^\vee Y \rightarrow {}^\vee(Y \otimes X)$ definida por

$${}^\vee J_{X,Y} = (\omega_X \otimes id_{{}^\vee(Y \otimes X)})(id_{{}^\vee Y} \otimes \omega_Y \otimes id_{X \otimes {}^\vee(Y \otimes X)})(id_{{}^\vee X \otimes {}^\vee Y} \otimes \Omega_{Y \otimes X})$$

O funtor ${}^\vee F$ é chamado de funtor dual esquerdo associado com uma dualidade esquerda dada. A unicidade dos duais esquerdos de objetos implica que funtores duais esquerdos associados com diferentes dualidades esquerdas são monoidalmente isomorfos de uma forma canônica.

Uma dualidade direita em uma categoria rígida direita \mathcal{C} determina um funtor $F^\vee : \mathcal{C}^{rev} \rightarrow \mathcal{C}$ carregando cada objeto X de \mathcal{C} para X^\vee e cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} para cada dual direito

$$f^\vee = (id_{X^\vee} \otimes \tilde{\omega}_Y)(id_{X^\vee} \otimes f \otimes id_{Y^\vee})(\tilde{\Omega}_X \otimes id_{Y^\vee}) : Y^\vee \rightarrow X^\vee.$$

O funtor F^\vee é monoidal forte, com vínculos $\varphi^\vee = \tilde{\Omega}_I : I \rightarrow I^\vee$ e $J_{X,Y}^\vee : X^\vee \otimes Y^\vee \rightarrow (Y \otimes X)^\vee$ definido por

$$J_{X,Y}^\vee = (id_{(Y \otimes X)^\vee} \otimes \tilde{\omega}_Y)(id_{(Y \otimes X)^\vee} \otimes \tilde{\omega}_X \otimes id_{Y^\vee})(\tilde{\Omega}_{Y \otimes X} \otimes id_{X^\vee \otimes Y^\vee}).$$

O funtor F^\vee é chamado funtor dual direito associado com a dada dualidade direita. Os funtores duais direitos associados com diferentes dualidades são monoidalmente isomorfos de maneira canônica.

Definição 3.10 (Categorias Pivotalis). *Uma categoria pivotal é uma categoria rígida com uma dualidade distinguida tal que os funtores duais de direita e esquerda induzidos:*

$$F^l(X) = ((\omega_X)^F \otimes id_{{}^\vee F(X)})(id_{{}^\vee F(X)} \otimes \Omega_{F(X)}) : F({}^\vee X) \rightarrow {}^\vee F(X)$$

e

$$F^r(X) = (id_{F(X)^\vee} \otimes (\tilde{\omega}_X)^F)(\tilde{\Omega}_{F(X)} \otimes id_{F(X)^\vee}) : F(X^\vee) \rightarrow F(X)^\vee$$

coincidem com os funtores monoidais. Em outras palavras, uma categoria pivotal é uma categoria monoidal \mathcal{C} dotada de uma dualidade pivotal, isto é, uma família de trios

$$\{(X^*, \omega_X, \tilde{\omega}_X)\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})},$$

onde

- X^* é um objeto de \mathcal{C} chamado dual de X ,
- $\omega_X : X^* \otimes X \rightarrow I$ é um pareamento não degenerado em \mathcal{C} ,

- $\tilde{\omega}_X : X \otimes X^* \rightarrow I$ é pareamento não degenerado em \mathcal{C} ,

tal que o funtor dual de esquerda associado com a dualidade de esquerda $\{(X^*, \omega_X)\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$ e o funtor dual de direita associado com a dualidade de direita $\{(X^*, \tilde{\omega}_X)\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$ coincidem com os funtores monoidais. Os pareamentos ω_X e $\tilde{\omega}_X$ são chamados avaliação de esquerda e de direita, respectivamente. Deixamos $\Omega_X : I \rightarrow X \otimes X^*$ e $\tilde{\Omega}_X : I \rightarrow X^* \otimes X$ denotarem os pareamentos inversos. Estes morfismos são chamados de co-avaliação de esquerda e co-avaliação de direita, respectivamente.

A igualdade dos funtores duais de direita e esquerda significa que:

- (i) Para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} f^* &= (\omega_Y \otimes id_{X^*})(id_{Y^*} \otimes f \otimes id_{X^*})(id_{Y^*} \otimes \Omega_X) \\ &= (id_{X^*} \otimes \tilde{\omega}_Y)(id_{X^*} \otimes f \otimes id_{Y^*})(\tilde{\Omega}_X \otimes id_{Y^*}) : Y^* \rightarrow X^*; \end{aligned}$$

- (ii) $\varphi^* = \Omega_I = \tilde{\Omega}_I : I \rightarrow I^*$;

- (iii) Para todo $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, temos a seguinte igualdade de morfismos de $X^* \otimes Y^*$ para $(Y \otimes X)^*$:

$$\begin{aligned} J_{X,Y}^* &= (\omega_X \otimes id_{(Y \otimes X)^*})(id_{X^*} \otimes \omega_Y \otimes id_{X \otimes (Y \otimes X)^*})(id_{X^* \otimes Y^*} \otimes \Omega_{Y \otimes X}) \\ &= (id_{(Y \otimes X)^*} \otimes \tilde{\omega}_Y)(id_{(Y \otimes X)^* \otimes Y} \otimes \tilde{\omega}_Y \otimes id_{Y^*})(\tilde{\Omega}_{Y \otimes X} \otimes id_{X^* \otimes Y^*}). \end{aligned}$$

3.6 Cálculo Gráfico

Nessa subsecção, essencialmente delineamos parcialmente o calculo gráfico já exposto nas referências [9],[32] e [57].

No caso de Categorias

Dada uma categoria \mathcal{C} , a identidade id_X de um objeto X de \mathcal{C} , um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , e a composição de morfismos pode ser representada graficamente da seguinte maneira: Chamamos

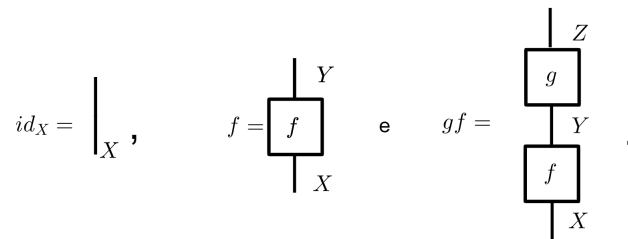


Figura 21: Fonte: [57]

X, Y, Z de cores dos correspondentes diagramas e chamamos f, g de cores das caixas.

$$f \otimes g = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline g \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U \\ \hline \end{array} \end{array} .$$

Figura 22: Fonte: [57]

$$\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \otimes C \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline X \otimes Y \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \otimes B \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array} .$$

Figura 23: Fonte: [57]

No caso de categorias monoidais

Suponha que \mathcal{C} é uma categoria monoidal. O produto monoidal de dois morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : U \rightarrow V$ em \mathcal{C} é representado por justaposição: Também podemos usar caixas para morfismos entre produtos tensoriais. Por exemplo, seja $f : X \otimes Y \rightarrow A \otimes B \otimes C$ com $X, Y, A, B, C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ pode ser representado das diversas maneiras: Como discutiremos principalmente categorias monoidais estritas, esquecemos os parenteses aqui. Convencionaremos ainda que o objeto unitário não é representado por nenhum segmento, apenas deixamos as caixas no lugar. Por exemplo, morfismos $\alpha : I \rightarrow I, \beta : I \rightarrow X, \gamma : X \rightarrow I$ com $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ podem ser representados por diagramas. Por considerarmos particularmente categorias monoidais, ignoramos os morfismos unitários.

$$\begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \\ \hline X \\ \hline \end{array} .$$

Figura 24: Fonte: [57]

Podemos puxar caixas para cima e para baixo usando o lema 3.1. Por exemplo considere $f : X \rightarrow Y$ e $g : U \rightarrow V$ quaisquer morfismos em uma categoria monoidal estrita \mathcal{C} . Então a equação abaixo é representada pela troca de caixas 25

$$f \otimes g = (id_Y \otimes g)(f \otimes id_U) = (f \otimes id_V)(id_X \otimes g).$$

Considere também o pareamento não degenerado $\omega : X \otimes Y \rightarrow I$ em \mathcal{C} com inversa Ω . As

$$\begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline g \\ \hline \end{array} \\ \hline U \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline g \\ \hline \end{array} \\ \hline U \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline g \\ \hline \end{array} \\ \hline U \\ \hline \end{array}$$

Figura 25: Trocando caixas de posição, [57]

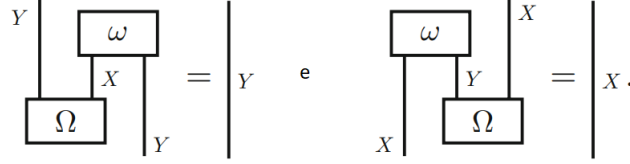


Figura 26: Fonte: [57]

equações de inversão para os pareamentos ficam representadas por

Exemplo 3. (Categorias Trançadas). Seja \mathcal{C} uma categoria tensorial estrita. Denotaremos σ o isomorfismo natural que para todo par de objetos $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$

$$\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X \quad (27)$$

tal que o quadrado

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\sigma_{X,Y}} & Y \otimes X \\ f \otimes g \downarrow & & \downarrow g \otimes f \\ X' \otimes Y' & \xrightarrow{\sigma_{X',Y'}} & Y' \otimes X' \end{array} \quad (28)$$

comuta para todo morfismo f, g .

O isomorfismo natural σ satisfará a comutação dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\sigma_{X,Y \otimes Z}} & Y \otimes Z \otimes X & X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\sigma_{X \otimes Y,Z}} & Z \otimes X \otimes Y \\ \sigma_{X,Y} \otimes id_Z \downarrow & & \downarrow id_Y \otimes \sigma_{X,Z}; id_X \otimes \sigma_{Y,Z} & \downarrow & & \downarrow \sigma_{X,Z} \otimes id_Y \\ Y \otimes X \otimes Z & \xrightarrow{id_Y \otimes \sigma_{X \otimes Z}} & Y \otimes X \otimes Z & X \otimes Z \otimes Y & \xrightarrow{id_{X \otimes Z} \otimes \sigma_Y} & X \otimes Z \otimes Y \end{array} \quad (29)$$

para todos os objetos X, Y, Z da categoria.

Definição 3.11 (Categoria Trançada). *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ uma categoria monoidal estrita.*

(a) *Uma trança em \mathcal{C} é um isomorfismo natural satisfazendo os diagramas 29.*

(b) *Uma categoria monoidal trançada $(\mathcal{C}, \otimes, I, \sigma)$ é uma categoria monoidal com uma trança.*

Perceba que se σ é uma trança em \mathcal{C} , então a inversa σ^{-1} também o é. A comutatividade dos diagramas 29 é equivalente as relações:

$$\sigma_{X,Y \otimes Z} = (id_Y \otimes \sigma_{X,Z})(\sigma_{X,Y} \otimes id_Z) \quad (30)$$

e

$$\sigma_{X \otimes Y,W} = (\sigma_{X,Z} \otimes id_Y)(id_X \otimes \sigma_{Y,Z}). \quad (31)$$

Diretamente da definição da trança vemos que atuando sobre o objeto unitário ela se torna o morfismo identidade $\sigma_{I,X} = \sigma_{X,I} = id_X$.

Teorema 3.8 (Equação de Yang-Baxter). *Sejam X, Y, Z objetos em uma categoria monoidal trançada. Então a trança σ obedece a relação:*

$$(\sigma_{Y,Z} \otimes id_X)(id_Y \otimes \sigma_{X,Z})(\sigma_{X,Y} \otimes id_Z) = (id_Z \otimes \sigma_{X,Y})(\sigma_{X,Z} \otimes id_Y)(id_X \otimes \sigma_{Y,Z}). \quad (32)$$

Esta relação implica que a transformação natural $\sigma_{X,X}$ é uma solução da equação de Yang-Baxter para qualquer objeto X de uma categoria trançada. Para um sistema quântico unidimensional isto significaria que a solução da equação resulta em um sistema integrável.

Demonstração. Basta escrevermos o diagrama de naturalidade da trança

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\sigma_{X \otimes Y, Z}} & Z \otimes X \otimes Y \\ \sigma_{X,Y} \otimes id_Z \downarrow & & \downarrow id_Z \otimes \sigma_{X,Y} \\ Y \otimes X \otimes Z & \xrightarrow{\sigma_{Y \otimes X, Z}} & Z \otimes Y \otimes X. \end{array} \quad (33)$$

então obtemos

$$\sigma_{Y \otimes X, Z}(\sigma_{X,Y} \otimes id_Z) = (id_Z \otimes \sigma_{X,Y})\sigma_{X \otimes Y, Z} \quad (34)$$

daí usando a equação 31 obtemos o resultado desejado. ■

Este resultado pode ser visualizado pelo cálculo gráfico da seguinte maneira:

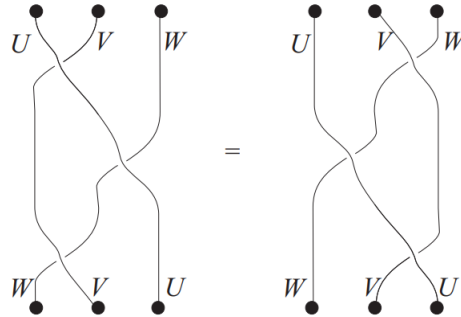


Figura 27: Visualização da equação de Yang-Baxter, [9]

Um caso especial da categoria monoidal trançada é a categoria monoidal simétrica.

Definição 3.12 (Categoria Monoidal Simétrica). *Uma categoria monoidal trançada será dita simétrica se sua trança tiver a propriedade:*

$$\sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y} = id_{X \otimes Y} \quad (35)$$

para todo objeto X, Y da categoria. Dizemos, nesse caso, que σ é uma trança simétrica para a categoria.

3.7 Categorias Ribbon

Vamos agora usar o calculo gráfico de forma a representar objetos e morfismos de categorias monoidais estritas com estruturas duais. Seja \mathcal{C} uma categoria monoidal estrita. Representaremos um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} por uma caixa e duas flechas orientadas.

$$\begin{array}{c} \downarrow Y \\ \boxed{f} \\ \downarrow X \end{array} \tag{36}$$

Representaremos a dualidade os objetos e morfismos da seguinte maneira. Os morfismos $\omega_X :$

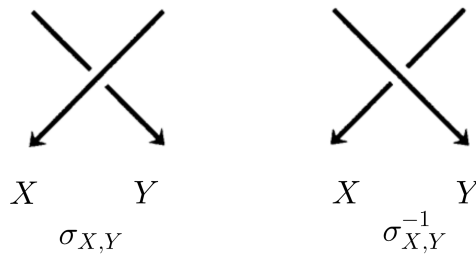


Figura 28: Trança $\sigma_{X,Y}$ e sua inversa, [32]

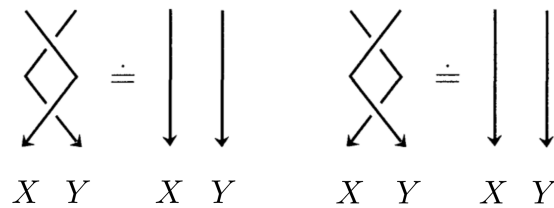


Figura 29: Invertendo $\sigma_{X,Y}$, [32]

$$\begin{array}{c} \downarrow \vee Y \\ \boxed{f} \\ \downarrow \vee X \end{array} \doteq \begin{array}{c} \uparrow Y \\ \boxed{f} \\ \downarrow \vee X \end{array} \doteq \begin{array}{c} \downarrow \vee Y \\ \boxed{f} \\ \uparrow X \end{array} \doteq \begin{array}{c} \uparrow Y \\ \boxed{f} \\ \uparrow X \end{array}$$

Figura 30: Um morfismo $f : \vee X \rightarrow \vee Y$, [32]

$\vee X \otimes X \rightarrow I$ e $\Omega : I \rightarrow X \otimes \vee X$ representaremos como que obedecem as relações

$$(id_X \otimes \omega_X)(\Omega_X \otimes id_X) = id_X e(\omega_X \otimes id_{\vee X})(id_{\vee X} \otimes \Omega_X) = id_{\vee X}. \tag{37}$$

que são representadas na figura 32. Além disso definiremos o dual esquerdo $\vee f : \vee Y \rightarrow \vee X$ de um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C}

$$\vee f = (\omega_Y \otimes id_{\vee X})(id_{\vee Y} \otimes f \otimes id_{\vee X})(id_{\vee Y} \otimes \Omega_X). \tag{38}$$

que será representado da seguinte maneira (fig 33).

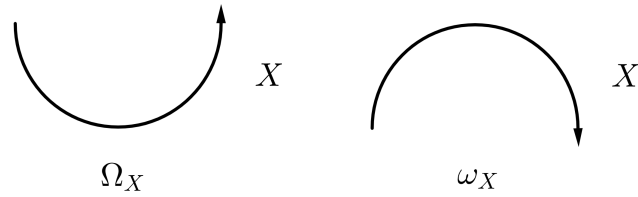


Figura 31: Morfismos Ω_X e ω_X

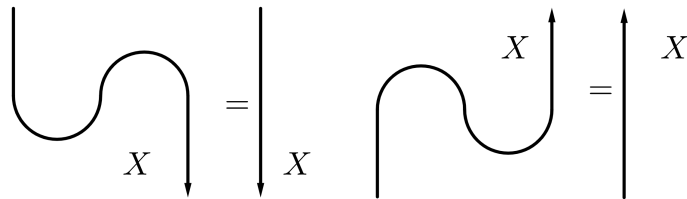


Figura 32: Relações 37

Teorema 3.9. *Seja \mathcal{C} uma categoria monoidal com uma dualidade esquerda.*

(a) *Se $f : X \rightarrow W$ e $g : Y \rightarrow X$ são morfismos em \mathcal{C} , então temos $\vee(f \circ g) = \vee g \circ \vee f$, e $\vee id_X = id_{\vee X}$ para qualquer objeto X .*

(b) *Para qualquer família X, Y, W de objetos \mathcal{C} , temos uma família de bijeções naturais*

$$Hom(X \otimes Y, W) \simeq Hom(X, W \otimes \vee Y)$$

e

$$Hom(\vee X \otimes Y, W) \simeq Hom(Y, X \otimes W).$$

(c) *Para qualquer par X, Y de objetos de \mathcal{C} , $\vee(X \otimes Y)$ e $\vee Y \otimes \vee X$ são objetos isomorfos.*

Para uma demonstração usando cálculo gráfico fazemos referência a literatura em [32]. No caso de uma categoria com dualidade esquerda e direita acontece de

$$\vee(X^\vee) \simeq X \simeq (\vee X)^\vee \tag{39}$$

para qualquer objeto X . Para uma demonstração desse fato sugerimos a literatura [31].

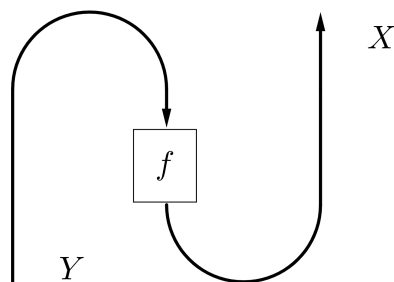


Figura 33: Transposta $\vee f$

Teorema 3.10. *Seja \mathcal{C} uma categoria monoidal estrita. Suponha que é trançada e tem uma dualidade esquerda. Seja X e Y objetos da categoria. A seguinte maneira de expressar a trança $\sigma_{\vee X, Y}$ para um objeto dual ${}^{\vee}X$ em termos da trança $\sigma_{X, Y}$*

$$\sigma_{\vee X, Y} = (\omega_X \otimes id_{Y \otimes \vee X})(id_{\vee X} \otimes \sigma_{X, Y}^{-1} \otimes id_{\vee X})(id_{\vee \otimes Y} \otimes \Omega_X). \quad (40)$$

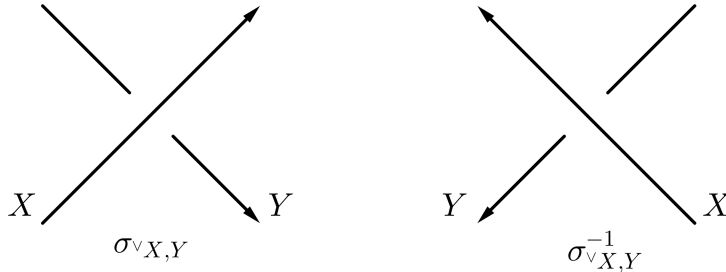


Figura 34: $\sigma_{\vee X, Y}$ e sua inversa

O resultado do teorema implica a relação gráfica da figura 35 cuja a demonstração gráfica é bastante clara.

Agora já podemos ir adiante e definir o conceito de torção e da categoria ribbon:

Definição 3.13. *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, I, \sigma_{X, Y}, \omega_X)$ uma categoria monoidal estrita e trançada com uma dualidade esquerda.*

(a) *Uma torção (twist) é uma família $\theta_X : X \rightarrow X$ de isomorfismos naturais indicados pelos objetos X de \mathcal{C} tal que*

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y)\sigma_{Y, X}\sigma_{X, Y} \quad (41)$$

e

$$\theta_{\vee X} = {}^{\vee}(\theta_X) \quad (42)$$

para todo objeto X, Y de \mathcal{C} .

(b) *Uma categoria ribbon é uma categoria monoidal estrita trançada com uma dualidade esquerda e com uma torção.*

Teorema 3.11. (a) *Dados objetos V e W de \mathcal{C} tem-se*

$$\theta_{V \otimes W} = \sigma_{W, V}\sigma_{V, W}(\theta_V \otimes \theta_W) = \sigma_{W, V}(\theta_W \otimes \theta_V)\sigma_{V, W}. \quad (43)$$

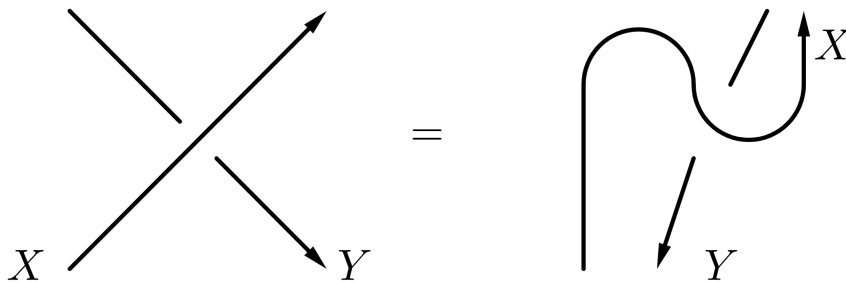


Figura 35: Igualdade do teorema

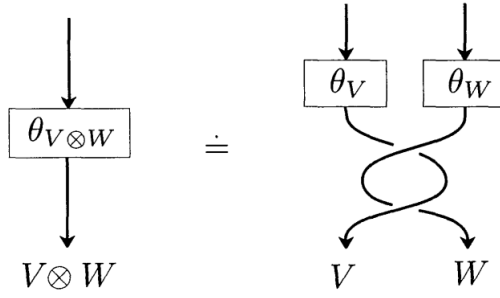


Figura 36: Relação 41, [32]

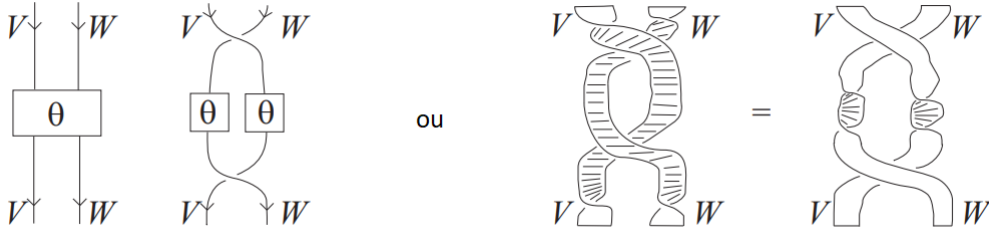


Figura 37: Visualização da torção [9]

(b) Também temos $\theta_I = id_I$

Dessa forma deveríamos ver θ realmente como uma torção de 2π , então ao invés de linhas deveríamos representar fitas (ribbons) como na figura 37. Agora já podemos introduzir uma estrutura de dualidade direita para a categoria ribbon que surge naturalmente da sua estrutura esquerda, nos levando a concluir que a categoria ribbon é bi-dual. Usando a trança e a torção, definimos morfismos $\omega'_X : X \otimes {}^\vee X \rightarrow I$ e $\Omega'_X : I \rightarrow {}^\vee X \otimes X$ para qualquer objeto X da categoria de ribbons \mathcal{C}

$$\omega'_X = \omega_X \sigma_{X, {}^\vee X} (\theta_X \otimes id_{{}^\vee X}) \quad (44)$$

e

$$\Omega'_X = (id_{{}^\vee X} \otimes \theta_X) \sigma_{X, {}^\vee X} \Omega_X \quad (45)$$

Teorema 3.12. *Com as suposições anteriores, temos*

$$(\omega'_X \otimes id_X)(id_X \otimes \Omega'_X) = id_X \quad (46)$$

e

$$(id_{{}^\vee X} \otimes \omega'_X)(\Omega'_X \otimes id_{{}^\vee X}) = id_{{}^\vee X}. \quad (47)$$

Assim todo objeto da categoria ribbon possui, além de uma estrutura de dualidade esquerda, também uma estrutura de dualidade direita e portanto ${}^\vee X = X^\vee$. Dessa forma obtemos como corolário o resultado que a categoria ribbon é bi-dual, isto é,

$${}^{\vee\vee} X \simeq X \simeq X^{\vee\vee} \quad (48)$$

isso pois, como já discutido, temos a propriedade ${}^\vee(X^\vee) \simeq X \simeq ({}^\vee X)^\vee$ que junto do teorema 3.12 implica no resultado 48.

4 Teorias Quânticas de Campos Topológicas

4.1 Definição das teorias topológicas de campos

Consideremos novamente a formula fundamental da teoria quântica de campos:

$$\boxed{\langle \hat{A}_2 | U | \hat{A}_1 \rangle = \int_{A|\Sigma_1=A_1}^{A|\Sigma_2=A_2} \mathcal{D}\mathcal{A} \exp(iS[A])} \quad (49)$$

Agora já temos a linguagem matemática para entender esta equação. Ela nos diz que uma teoria quântica de campos é um funtor monoidal simétrico $Z : \mathbf{nCob}_{g_{\mu\nu}} \rightarrow \mathbf{Vect}$. É possível que uma teoria seja independente da métrica, e portanto definimos uma teoria quântica de campos *topológicas* (TQCT) como um funtor monoidal simétrico:

$$\tilde{Z} : \mathbf{nCob} \rightarrow \mathbf{Vect}. \quad (50)$$

Uma TQCT é então uma representação de \mathbf{nCob} em termos de espaços vetoriais de mapas lineares. Em particular, podemos considerar uma variedade² n dimensional fechada M como um cobordismo $M : \emptyset \rightarrow \emptyset$, que sobre TQCT vai para um mapa $Z(M) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, que simplesmente é uma função complexa. Isto é, as TQCT nos dão invariantes topológicos - que são simplesmente as funções de partição das teorias quânticas de campos.

Esta não é a definição original de Atiyah [39], que evita o uso de cobordismos e trabalha diretamente com as variedades.

4.1.1 Definição de Atiyah

Atiyah [39] definiu uma teoria quântica de campos d -dimensional (TQCT) Z , consistindo do seguinte:

- (a) Um espaço vetorial $Z(\Sigma)$ associada para cada variedade Σ fechadas $(d - 1)$ -dimensionais.
- (b) Um vetor $Z(M) \in Z(\partial M)$ associadas para cada variedade orientada d -dimensional M com fronteira ∂M .
- (c) Z é funtorial com relação a difeomorfismos preservando orientação de Σ e M .
- (d) Z é involutório, i.e. $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$ onde Σ^* é Σ com orientação oposta e $Z(\Sigma)^*$ é o espaço dual à $Z(\Sigma)$.
- (e) Z é multiplicativo.
- (f) $Z(\emptyset) = \mathbb{C}$, onde \emptyset é visto como uma variedade $d - 1$ dimensional fechada.
- (g) $Z(\emptyset) = 1$, onde \emptyset é interpretada como uma variedade d dimensional.

Estes axiomas devem ser entendidos da seguinte maneira. O axioma da functorialidade (c) significa que um difeomorfismo preservando orientação $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ induz um isomorfismo $Z(f) : Z(\Sigma) \rightarrow Z(\Sigma')$ e que $Z(gf) = Z(g)Z(f)$ para $g : \Sigma' \rightarrow \Sigma''$. Além disso se f estende para um difeomorfismo preservador de orientação $M \rightarrow M'$, com $\partial M = \Sigma, \partial M' = \Sigma'$, então $Z(f)$ leva um elemento $Z(M)$ para $Z(M')$. O axioma de involutóriedade (d) está bem claro, mas também serve para mostrar

²Para uma exposição completa sobre variedades suaves veja o capítulo 5 da referencia [45]

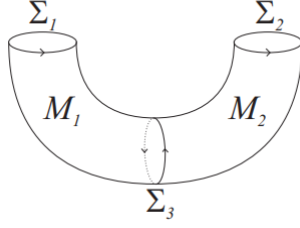


Figura 38: Fonte [9]

que podemos considerar TQCTs cujo alvo é alguma categoria monoidal rígida simétrica, já que é a única estrutura usada aqui. O axioma da multiplicatividade (e) afirma que, para uniões disjuntas,

$$Z(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2). \quad (51)$$

Além disso se $\partial M_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma_3^*$, $\partial M_2 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3^*$ e $M = M_1 \cup_{\Sigma_3} M_2$ é uma variedade obtida colando a variedade em comum Σ_3^* : Então requerimos:

$$Z(M) = \langle Z(M_1), Z(M_2) \rangle \quad (52)$$

onde \langle, \rangle denota um pareamento natural do mapa de dualidade,

$$Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_3)^* \otimes Z(\Sigma_3) \otimes Z(\Sigma_2) \xrightarrow{id \otimes \omega_X \otimes id} Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2). \quad (53)$$

Este é um poderoso axioma que nos permite calcular $Z(M)$ de varias maneiras diferentes cortando a variedade M com variedades Σ_3 .

4.1.2 Propriedades formais das TQCTs

nCob é uma categoria rígida, monoidal e simétrica para todas as dimensões n . O produto tensorial de duas variedades de dimensão $(n-1)$ Σ_1 e Σ_2 é sua união disjunta $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$. O elemento unitário é a variedade vazia na dimensão $(n-1)$ \emptyset . A simetria $\sigma_{\Sigma_1, \Sigma_2} : \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 \sqcup \Sigma_1$ é o cobordismo homeomórfico à $(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) \times I$ junto de mapas injetivos que trocam Σ_1 e Σ_2 . O elemento dual Σ^* é definido como Σ com a orientação invertida. Os pareamentos $\Omega_\Sigma : \emptyset \rightarrow \Sigma \sqcup \Sigma^*$ e $\omega_\Sigma : \Sigma^* \sqcup \Sigma \rightarrow \emptyset$ podem ser representados da seguinte maneira para variedades n -dimensionais: e as

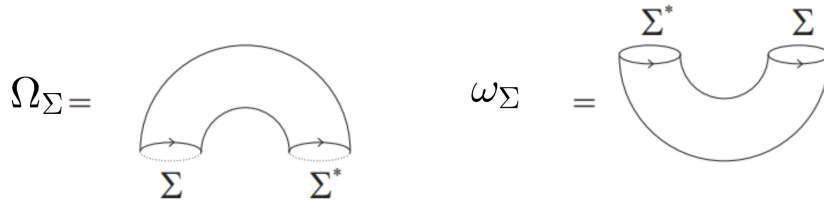


Figura 39: Fonte [9]

relações dos pareamentos são representadas colando cilindros. É claro que esses mapas de dualidade são bem definidos para toda dimensão n ; as representações acima são somente esquemáticas.

nCob é também é uma categoria Hermitiana. A transposta hermitiana de um cobordismo $M : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é simplesmente o cobordismo $M^\dagger : \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$ obtido ao se reverter a orientação em M (e portanto também em sua fronteira ∂M). Esta operação pode ser vista como a inversão temporal.

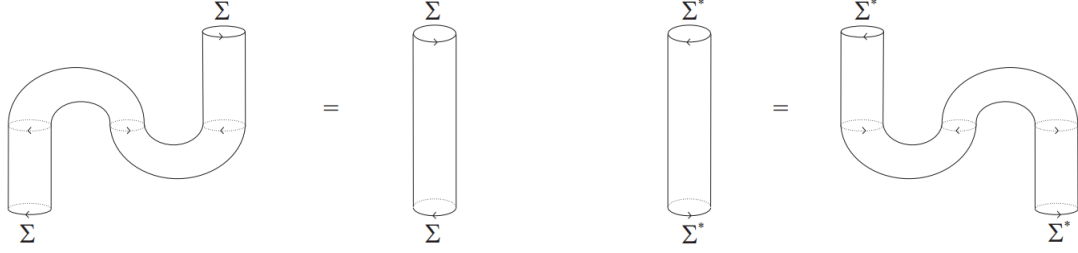


Figura 40: Fonte [9]

Ação do grupo de mapeamento

Dado um difeomorfismo $f : \Sigma_1 \xrightarrow{\sim} \Sigma_2$, podemos construir um cobordismo canônico $M_f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ pela construção do cilindro:

$$\Sigma_1 \xrightarrow{id} M \times I \xleftarrow{f^{-1}} \Sigma_2 \quad (54)$$

temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Dois difeomorfismos $\Sigma_1 \xrightarrow[f']{f} \Sigma_2$ induz a mesma classe de cobordismo $M : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ se e somente se forem homotópicos.*

Demonstração. Supondo que temos dois difeomorfismos homotópicos $\Sigma_1 \xrightarrow[f']{f} \Sigma_2$. Seja F uma homotopia, i.e. F é um mapa do cilindro $\Sigma_1 \times I$ para Σ_2 que iguala f em um lado e com f' do outro. Isto simplesmente nos dá uma equivalência entre os cobordismos M_f e $M_{f'}$ ■

Para uma variedade fechada Σ , o seu grupo de mapeamento $\Gamma(\Sigma)$ é definida como o grupo de classes de isotopia de difeomorfismos $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma$. Este resultado nos mostra que a correspondência $[f] \rightarrow M_f$, considerado o mapa $\Gamma(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{nCob}}(\Sigma, \Sigma)$, bem definido e injetivo. Assim vemos que uma TQCT $Z : \mathbf{nCob} \rightarrow \mathbf{Vect}$ nos dá uma representação do grupo de mapeamento para cada $(n - 1)$ -variedade Σ .

Interpretação física das TQCTs

O fato de um functor Z (i.e. $Z(M'M) = Z(M')Z(M)$ e $Z(\Sigma \times I) = id$) significa que a passagem de tempo correspondente a um cobordismo M , seguida pela passagem de tempo correspondente ao cobordismo M' , tem o mesmo efeito que a passagem de tempo do cobordismo $M'M$. Além disso a passagem de tempo que não tem alteração na topologia não tem efeito no estado do universo - TQCTs não tem graus de liberdade locais.

O fato de Z ser monoidal significa que o espaço de estados correspondendo a dois sistemas que não interagem é dado pelo produto tensorial dos espaços de estados associados a cada sistema individual, uma regra conhecida da mecânica quântica.

O fato de Z ser simétrico está relacionado com a estatística das partículas em questão. Significa que se trocarmos dois estados φ e ψ , então no espaço vetorial isso corresponde a troca $\varphi \otimes \psi \rightarrow \psi \otimes \varphi$. Em outras palavras, estamos lidando com bósons. Podemos utilizar férmions ao permitir números de grassmann em espaços vetoriais. Matematicamente, isso significa que quando passamos da categoria de espaços vetoriais V para a categoria \mathbf{grVect} consistindo dos espaços gradeados $V = \bigoplus_n V_n$ onde o gradeamento tem grau fermiônico. O mapa simétrico, ao invés de $\varphi \otimes \psi \rightarrow \psi \otimes \varphi$, será dado por

$$\varphi \otimes \psi \rightarrow (-1)^{pq} \psi \otimes \varphi, \quad (55)$$

onde $\deg(\varphi) = p$ e $\deg(\psi) = q$. Isto é, uma TQCT fermiônica é um funtor monoidal simétrica $Z : \mathbf{nCob} \rightarrow \mathbf{grVect}$. No caso de estatísticas como a dos anyons, precisamos considerar uma versão mergulhada de \mathbf{nCob} como $\mathbf{TubeCob}$ (que podemos definir posteriormente), que não é mais simétrica porem ainda trançada. Nesse caso consideraríamos uma TQCT como um funtor monoidal trançado $Z : \mathbf{TubeCob} \rightarrow \mathbf{Vect}_q$ onde o numero q é o parâmetro anyonico que nos dá a forma que a trança atua em \mathbf{Vect}_q :

$$\varphi \otimes \psi \rightarrow e^{2\pi i q} \psi \otimes \varphi \quad (56)$$

O fato de Z ser unitário significa que o operador de evolução correspondendo a reversão temporal deve ser o conjugado T^\dagger do operador de evolução temporal correspondendo ao processo original. O que não significa que o operador de evolução temporal é unitário. Em categorias Hermitianas, podemos definir morfismos $f : x \rightarrow y$ unitários se $f^\dagger f = id_x$ e $f f^\dagger = id_y$. Em \mathbf{Hilb} , esta é a definição normal dos mapas unitários. Em \mathbf{nCob} , é claro que cobordismos que são cilindros sobre uma variedade espacial Σ será unitário. Para dimensões $n \leq 3$ esses são todos de fato cobordismos unitários, mas incrivelmente, existem cobordismos unitários sem a forma de cilindros para dimensões $n \geq 4$. Uma TQCT unitária então mapeia morfismos unitário em \mathbf{nCob} para operadores em \mathbf{Hilb} - de outra forma, se não houver mudanças topológicas, então a evolução temporal é unitária. Em geral, entretanto, a evolução temporal é dada por um operador não unitário.

4.2 Geradores da categoria $2\mathbf{Cob}$

No caso da categoria dos cobordismos bidimensionais $2\mathbf{Cob}$, relacionadas as TQCTs bidimensionais, temos um conjunto simples de cobordismos fundamentais importantes que podem gerar toda a categoria:

Teorema 4.2. *A categoria monoidal $2\mathbf{Cob}$ é gerada pelas composições (colagens em série) e uniões disjuntas dos seguintes seis cobordismos:*

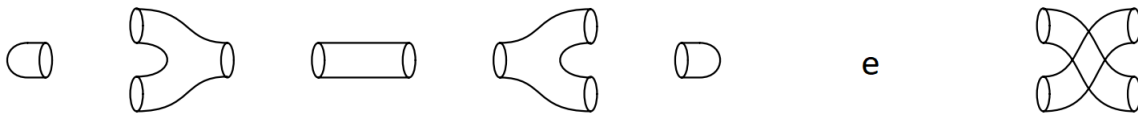


Figura 41: Geradores de $2\mathbf{Cob}$, [36]

Duas demonstrações dessa proposição podem ser encontradas em [36].

Agora podemos dar ainda mais um teorema para a classificação de superfícies bidimensionais que facilitará o nosso entendimento de suas topologias.

4.2.1 Genus e característica de Euler para superfícies

O genus de uma superfície compacta, conectada, e orientada é intuitivamente o numero de buracos. Assim uma esfera tem genus 0, e o torus tem genus 1. Um dos problemas, entretanto, com o genus é que não é capaz de detectar qualquer coisa sobre a fronteira da superfície, se houver. Portanto, visando algum invariante geométrico para classificar as superfícies nos voltamos para a característica de Euler.

Uma maneira de definir a característica de Euler é em termos de triangulações: Se V, L, F forem os números de vértices, lados e faces de uma triangulação de uma superfície M então a característica de Euler é

$$\chi(M) = V - L + F$$

Dessa forma a característica de Euler de um disco é 1, e a de uma esfera é 2. A relação entre a característica de Euler e o genus g de uma superfície é

$$\chi(M) + k = 2 - 2g$$

onde k é o número de componentes de fronteira.

A característica de Euler tem ainda uma propriedade de corte: se $M = A \cup B$ então $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. Isto é conveniente se M for um cobordismo bidimensional. Então decompondo $M = M_0 M_1$ corresponde a corta-lo em círculos S^1 , e temos $\chi(S^1) = 0$, então ficamos com

$$\chi(M) = \chi(M_0) + \chi(M_1).$$

O resultado clássico para a classificação de superfícies sem fronteira é (cf. Hirsch [30], teorema 9.3.5.):

Teorema 4.3. *Duas superfícies conectadas, compactas, orientadas e sem fronteira são difeomórficas se e somente se tiverem o mesmo genus (ou de outra forma a mesma característica de Euler).*

Se uma superfície compacta e orientada tiver fronteira então podemos classificar essas superfícies adicionando um requisito de igualdade das fronteiras observando-se suas orientações:

Teorema 4.4. *Duas superfícies conectadas, compactas, orientadas e com fronteiras são difeomórficas se e somente se tiverem o mesmo genus e o mesmo numero de fronteiras para dentro e para fora.*

Aqui definimos fronteiras para dentro e para fora dependendo da direção da “normal” definida pela regra da mão direita aplicada sobre a orientação da fronteira, se essa “normal” estiver apontando para “dentro” da superfície diremos que a fronteira está para dentro, caso contrario a fronteira está para fora³.

4.2.2 ‘Forma normal’ de uma superfície conectada

É conveniente introduzir a forma normal das superfícies conectadas com m fronteiras para dentro, n fronteiras para fora e genus g . Nada mais é do que a decomposição de uma superfície em um conjunto de cobordismos elementares. A forma normal tem três partes: A primeira parte é um cobordismo $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{1}$; A segunda parte é o cobordismo $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$; e a terceira parte é $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n}$.

Um exemplo dessa descrição pode ser visualizado com o diagrama da figura 42, para um caso com $m = 5, g = 4$ e $n = 4$.

4.2.3 Relações

Com o calculo gráfico e todas as relações entre morfismos desenvolvidas na seção anterior podemos entender as seguintes relações das figuras 43-48 (cf. [36]).

Novamente citamos a referencia [36] para uma demonstração da suficiência dessas relações na geração dos elementos da categoria **2Cob** e sua relação com a classificação das superfícies bidimensionais.

Para mais referencias nos tópicos discutidos nessa e na próxima subseção podemos ainda indicar [1], [2], e [3].

³Para uma discussão completa da orientação de variedades com fronteira pode-se referir a literatura em [16] e [45]

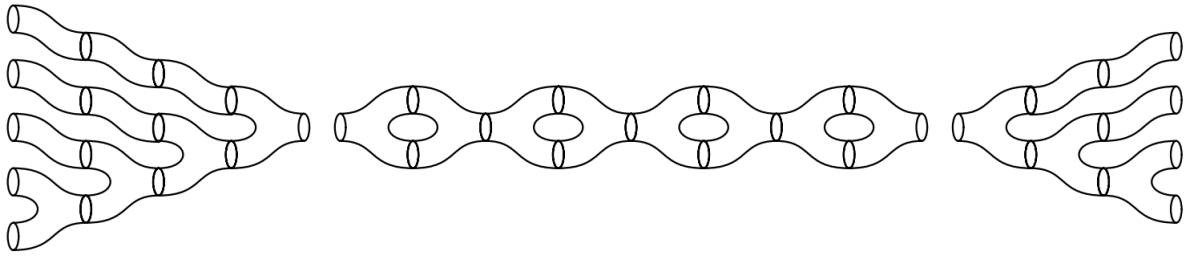


Figura 42: Forma Normal, [36]

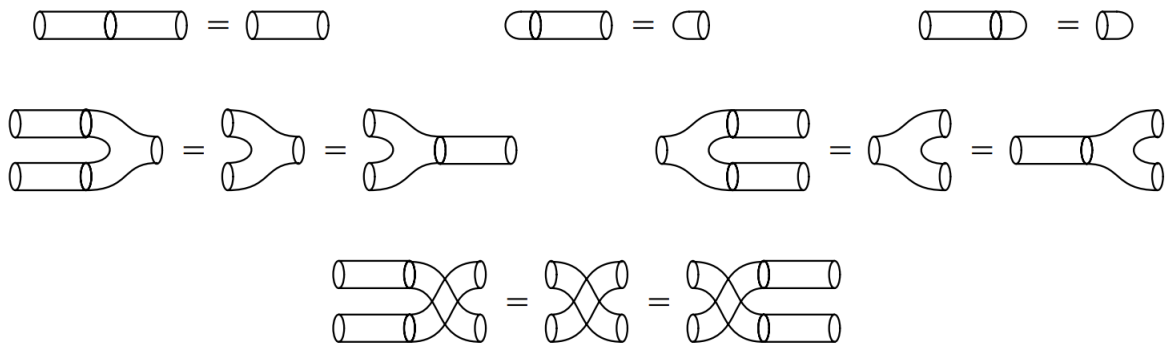


Figura 43: Relações dos cobordismos identidade; Fonte [36]



Figura 44: Tampando buracos; Fonte [36]

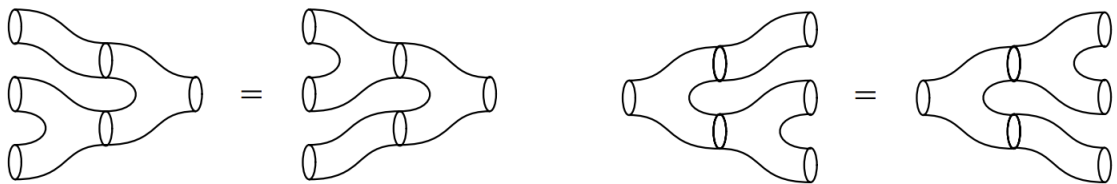


Figura 45: Associatividade; Fonte [36]



Figura 46: Comutatividade; Fonte [36]

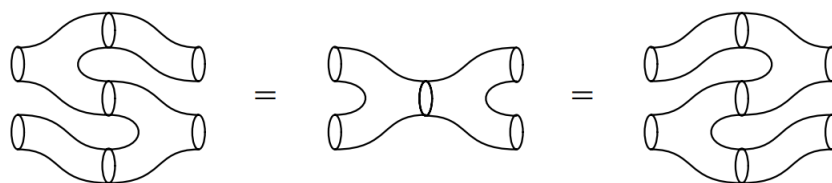


Figura 47: A Relação de Frobenius; Fonte [36]

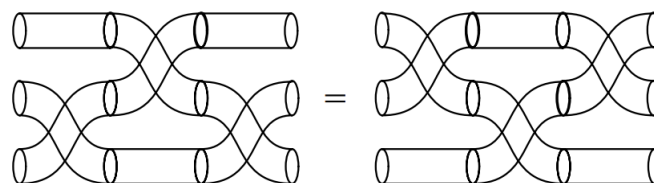


Figura 48: Equação de Yang-Baxter para a categoria $\mathbf{2Cob}$, similar aos famosos movimentos de Reidemeister, veja [36]

5 Álgebras de Frobenius

Agora vamos definir a categoria das álgebras de Frobenius que como mostraremos será a descrição mais geral das teorias topológicas de campos bidimensionais.

5.1 Álgebras e módulos

Uma \mathbb{K} -álgebra é um \mathbb{K} -espaço vetorial A junto de dois mapas \mathbb{K} -lineares

$$\mu : A \otimes A \rightarrow A, \quad \eta : \mathbb{K} \rightarrow A$$

(chamados de multiplicação e mapa unitário) tais que os seguintes diagramas comutam:

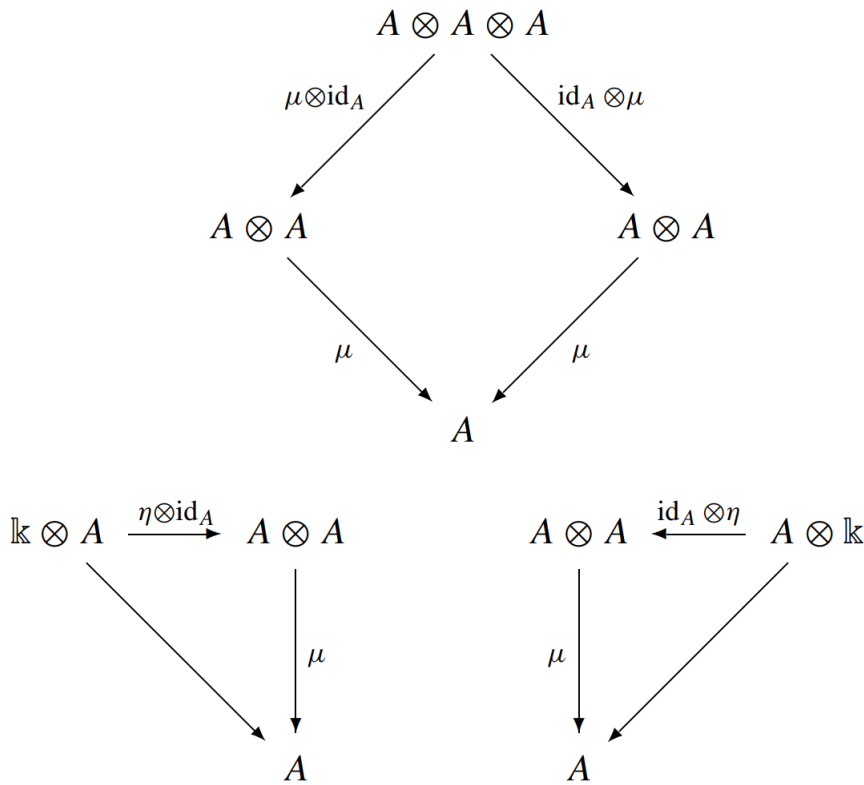


Figura 49: Fonte [36]

Definição 5.1 (A -módulos de direita). Um A -módulo de direita é um espaço vetorial M junto de um mapa \mathbb{K} -linear (chamado de ação direita de A em M)

$$\alpha : M \otimes A \rightarrow M$$

que satisfaz a comutação dos seguintes diagramas

De maneira similar também podemos definir os A -módulos de esquerda. Definiremos ainda o dual de um módulo da seguinte forma: Suponha que M seja um A -módulo de direita. Então o espaço vetorial dual $M^* := Hom(M, \mathbb{K})$ tem uma estrutura de A -módulo de esquerda dada por

$$A \otimes M^* \rightarrow M^* \\ a \otimes \Lambda \rightarrow a.\Lambda := [x \mapsto (x.a)\Lambda].$$

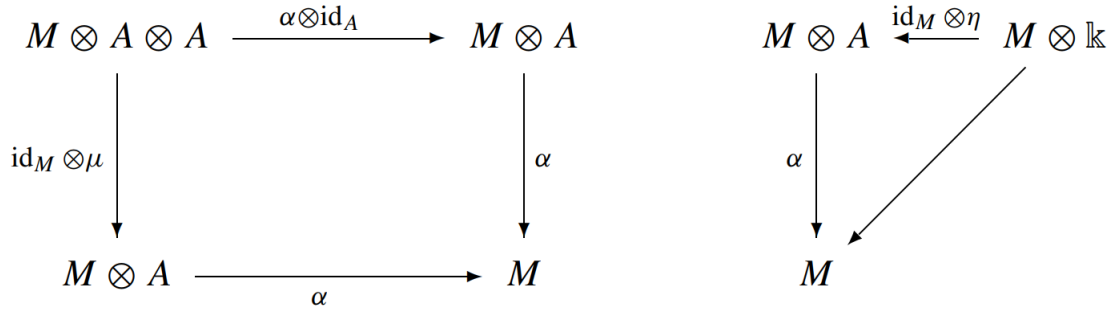


Figura 50: Fonte [36]

Similarmente, se M for um A -módulo de esquerda, então M^* se torna um A -módulo de direita pela regra $x(\Lambda.a) = (a.x)\Lambda$ (com $\Lambda \in M^*$, $a \in A$, $x \in M$). Isto nos trás o seguinte resultado sobre mapas duais sobre A -módulos de direita: Sejam M e N A -módulos de direita, e seja $\varphi : M \rightarrow N$ um A -homomorfismo de direita ($(x.a)\varphi = (x\varphi).a$). Então o mapa dual

$$\begin{aligned}
\varphi^* : N^* &\rightarrow M^* \\
\Lambda &\mapsto \varphi\Lambda
\end{aligned}$$

é um A -homomorfismo de esquerda ($(x\varphi)(a.\Lambda) = (x.a)\varphi\Lambda$). Aqui ainda poderemos definir uma noção de pareamentos os quais serão associativos: Um pareamento $\beta : M \otimes N \rightarrow \mathbb{k}$ é dito associativo se o seguinte diagrama comutar: Em outras palavras, o pareamento $x \otimes y \mapsto \langle x|y \rangle$ é

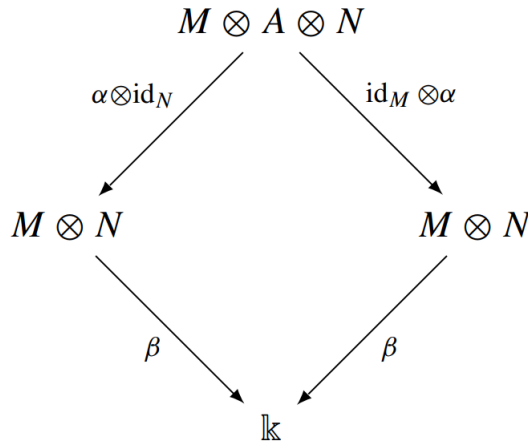


Figura 51: Fonte [36]

associativo quando

$$\langle xa|y \rangle = \langle x|ay \rangle \text{ para todo } x \in M, a \in A, y \in N.$$

Além disso os duais de produtos tensoriais terão a seguinte propriedade: Seja N um A -módulo de direita, e M um espaço vetorial. Então o mapa

$$\begin{aligned}
N^* \otimes M^* &\rightarrow (M \otimes N)^* \\
\psi \otimes \varphi &\mapsto [x \otimes y \mapsto (x\varphi)(y\psi)]
\end{aligned}$$

é A -linear de esquerda.

Definição 5.2 (Álgebra de Frobenius). *Uma álgebra de Frobenius é uma \mathbb{k} -álgebra A de dimensão finita, munida de um funcional linear $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{k}$ cujo nullspace ($\text{Null}(\varepsilon) := \{x \in A | x\varepsilon = 0\}$)*

não contém nenhum ideal de esquerda não trivial. O funcional $\varepsilon \in A^*$ é chamado forma de Frobenius.

A condição imposta sobre o $Null(\varepsilon)$ é equivalente a não ter nenhum ideal principal de esquerda em $Null(\varepsilon)$. Podemos escrever isso da forma

$$(Ay)\varepsilon = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Esta definição é bastante conveniente pois a condição imposta sobre $Null(\varepsilon)$ é equivalente à termos o pareamento associativo $\langle | \rangle$ não degenerado (cf. [36] Lema 2.2.4). Dessa forma poderíamos ter definido a álgebra de Frobenius como uma \mathbb{K} -álgebra A de dimensão finita e tendo um pareamento associativo não degenerado.

Definição 5.3 (Álgebra de Frobenius Simétrica). *Diremos que uma Álgebra de Frobenius é simétrica se seu pareamento associativo $\langle | \rangle$ for simétrico (i.e. $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle$ para todo $a, b \in A$).*

Outra estrutura que será ainda importante definirmos é a noção das co-álgebras nos dando o ultimo morfismo elementar para a categoria **2Cob** que será $\delta : A \rightarrow A \otimes A$. Então definimos uma co-álgebra da seguinte maneira:

Definição 5.4 (Co-álgebra). *Uma co-álgebra sobre \mathbb{K} é um espaço vetorial A munido de dois mapas \mathbb{K} -lineares*

$$\delta : A \rightarrow A \otimes A, \quad \varepsilon : A \rightarrow \mathbb{K}$$

tais que os diagramas da figura 52 comutam.

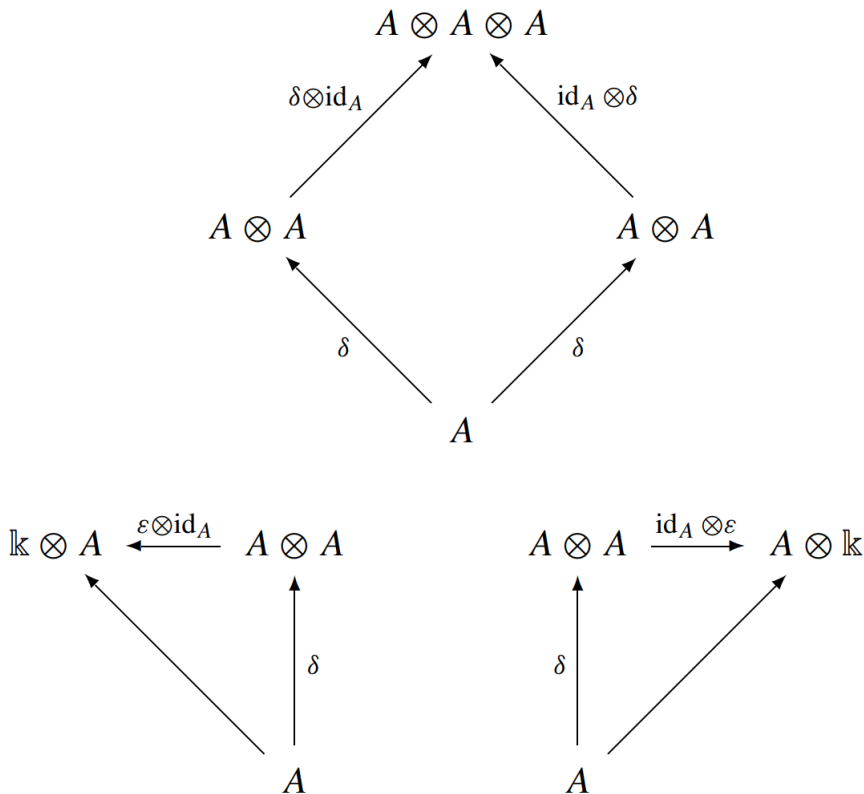


Figura 52: Co-álgebras [36]

Com os mapas definidos para as álgebras de Frobenius e Co-álgebras temos todos os morfismos necessários para entender os cobordismos fundamentais da categoria **2Cob** discutidos na subseção anterior.

5.2 A categoria das álgebras de Frobenius

Um homomorfismo de álgebras de Frobenius $\varphi : (A, \varepsilon) \rightarrow (A', \varepsilon')$ entre álgebras de Frobenius é um homomorfismo de álgebras e ao mesmo tempo um homomorfismo de co-álgebras. Em particular, preserva a forma de Frobenius, no sentido de que $\varepsilon = \varphi\varepsilon'$. Denotaremos $\mathbf{FA}_{\mathbb{K}}$ a categoria das álgebras de Frobenius sobre \mathbb{K} e homomorfismos de álgebras de Frobenius, e denotaremos $\mathbf{cFA}_{\mathbb{K}}$ a subcategoria completa com todas as álgebras de Frobenius comutativas. Esta equivalência pode ser resumida na figura 53. Dessa forma temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2Cob} &\longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \\
 \mathbf{1} &\longmapsto A \\
 \mathbf{n} &\longmapsto A^n \\
 \text{Cylinder} &\longmapsto [\text{id}_A : A \rightarrow A] \\
 \text{Crossing} &\longmapsto [\sigma : A^2 \rightarrow A^2]. \\
 \text{Cap} &\longmapsto [\eta : \mathbb{K} \rightarrow A] \\
 \text{Cup} &\longmapsto [\mu : A^2 \rightarrow A] \\
 \text{Cap} &\longmapsto [\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{K}] \\
 \text{Cup} &\longmapsto [\delta : A \rightarrow A^2].
 \end{aligned}$$

Figura 53: Identificação dos morfismos de $\mathbf{2Cob}$ com mapas de \mathbf{cFA} [36]

Teorema 5.1. *Existe uma equivalência canônica entre as categorias*

$$\mathbf{2TQCT}_{\mathbb{K}} \simeq \mathbf{cFA}_{\mathbb{K}}.$$

onde $\mathbf{2TQCT}_{\mathbb{K}}$ é a categoria dos funtores Z das $TQCTs$.

6 Computação Quântica

Nesta e em próximas seções discutiremos algumas aplicações físicas de todas as teorias e ferramentas matemáticas discutidas nas seções anteriores. Para tanto revisaremos os resultados e temas discutidos na referencia [58], em particular seu capítulo 2 referente ao modelo do circuito quântico; capítulo 4 sobre categorias de fusão de fitas; capítulo 5 sobre TQFTs em (2+1)-dimensões; capítulo 6 sobre a teoria algébrica dos anyons e FQHE; e finalmente capítulo 7 sobre computadores quânticos topológicos.

6.1 Modelo do Circuito Quântico

Aqui introduzimos o modelo do circuito quântico mostrando sua universalidade e utilidade na simulação de sistemas da física quântica.

A informática é o estudo do armazenamento, processamento e comunicação de informação. O tratamento matemático da informação começa com linhas de bits $\{0, 1\}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Z}_2^n$. Aqui consideraremos apenas linhas de bits finitas, ou seja, vetores no espaço vetorial \mathbb{Z}_2^n .

Um dos principais conceitos na informática é a noção de complexidade, uma medida da dificuldade de recursos dependentes. Classes de complexidade computacional são definidas relativas à recursos como o tempo, espaço e acurácia. Assim como linhas de código $x \in \mathbb{Z}_2^n$ codificam informação, também famílias de mapas Booleanos de linhas de código para linhas de código

$$f(x) = \{f_n(x) : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m\}$$

codificam problemas computacionais. A teoria da computabilidade seleciona classes de problemas que são algorítmicamente computáveis. O processamento de informação pode ser pensado da seguinte maneira:

- A entrada inicial x é codificada em algum sistema físico.
- A evolução do sistema físico processa x .
- O resultado computacional $f(x)$ é lido através de uma medida do sistema.

O sistema usado para o processamento dos dados iniciais x pode ser clássico ou quântico, determinando se o processamento é clássico ou teoria de informação quântica. Como antes dito, o poder computacional da teoria quântica de campos presumivelmente é o mesmo da mecânica quântica. Além disso, o problema de compatibilidade não é preocupante pois computadores quânticos e computadores clássicos resolvem a mesma classe de problemas. Somente estamos interessados em máquinas que possam processar informação mais eficientemente.

Pergunta-se como calcular de forma quântica? Por simplicidade, seja dado um mapa $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$ que precisamos calcular. Escolhemos um sistema quântico com espaço de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \mathbb{C}[\mathbb{Z}_2^n]$. Para cada entrada $x \in \mathbb{Z}_2^n$, representamos x como um estado base $|x\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$. Então idealmente gostaríamos de aplicar uma matriz unitária U_x em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ para que $U_x |x\rangle = |f(x)\rangle$.

Entretanto não sabemos quais U_x seriam eficientes em mandar $|x\rangle$ para $|f(x)\rangle$ ou até mesmo simplesmente passar perto de $|f(x)\rangle$ explicitamente (problema do algoritmo quântico), e se U_x existe, como implementar U_x no laboratório (problema de engenharia). Para alguns poucos problemas como fatoração, temos algoritmos clássicos eficientes que nos dão circuitos quânticos para U_x .

A unidade de informação é o bit e o recurso de informação é modelado por uma variável aleatória X . Consideraremos apenas variáveis aleatórias discretas. Uma variável aleatória X é uma função definida em um espaço de eventos S : todas os possíveis resultados. Associamos a

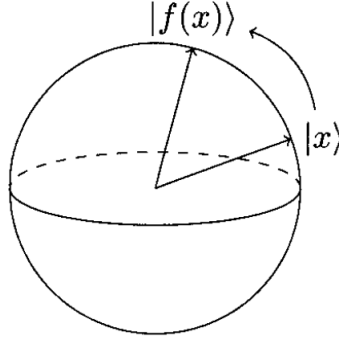


Figura 54: Processamento Quântico [58]

variável aleatória $X : S \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ a distribuição de probabilidade $p(X)$. A função $p(X)$ leva os valores de X para os reais não negativos. O valor $p(X = x_i) = p_i$ é a probabilidade que a variável aleatória X assumo o valor x_i . Note que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i \geq 0$.

Definição 6.1. O conteúdo informacional de uma variável aleatória X com distribuição de probabilidade $p(X = x_i) = p_i$ é $I(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$.

Se toda mensagem for codificada por alguma linha de código em \mathbb{Z}_2^n , e toda linha de n bits são igualmente possíveis, de outra forma, a distribuição de probabilidade é a função constante 2^{-n} em \mathbb{Z}_2^n , então quando recebemos uma entrada x , o ganho de informação $I(p) = -\sum_{i=1}^n 2^{-n} \log_2 2^{-n} = n$ bits. Por outro lado, se já sabemos que a mensagem será $11\dots 1 \in \mathbb{Z}_2^n$, a quantidade de informação recebida ao recebermos a mensagem de fato fica $p(11\dots 1) = 1$ e todos os outros valores sendo zero, resulta em $I(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$, de fato $I(p) = 0$. Dessa forma informação mede uma certa incerteza ou ignorância sobre o sistema.

6.2 Framework Quântico

A teoria quântica nos dá um conjunto de regras para associarmos variáveis aleatórias à estados e observáveis de um sistema quântico. Dessa forma sistemas quânticos são recursos naturalmente informacionais. De acordo com os axiomas da mecânica quântica podemos inferir o seguinte:

1. *Espaço de estados:* O espaço de estados \mathcal{H} é um espaço de Hilbert. Qualquer classe de vetores $\lambda |v\rangle$, $\lambda \in (\mathbb{C} - 0)$ não nulo representa um estado físico.

Computação quântica faz uso de espaços de Hilbert de dimensão finita \mathbb{C}^m , cujos estados correspondem a $\mathbb{C}P^{m-1}$. Dessa forma a informação é armazenada em vetores de estado, mais precisamente, em pontos de $\mathbb{C}P^{m-1}$.

2. *Evolução:* Se um sistema quântico é governado por uma Hamiltoniana H , então seu vetor de estado $|\psi\rangle$ evolui de acordo com a equação de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle$. Quando o espaço de estados é de dimensão finita, a solução é $e^{-\frac{i}{\hbar} t H} |\psi_0\rangle$ para algum estado inicial $|\psi_0\rangle$. Já que H é Hermitiana, $e^{-\frac{i}{\hbar} t H}$ é uma transformação unitária.

Na computação quântica, aplicaremos transformações unitárias aos vetores de estado $|\psi\rangle$ para processar as informações codificadas em $|\psi\rangle$. Dessa forma o processamento de informação na computação quântica é multiplicação por matrizes unitárias.

3. *Medição*: Uma medição de um sistema é dada por um operador Hermitiano M . Se seus autovalores forem par a par diferentes dizemos que M é completo. Para operadores completos podemos escrever qualquer que seja o vetor de estado $|\psi\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle$ em termos da base de auto-vetores $|e_i\rangle$ do operador M , e ainda a probabilidade do estado colapsar no estado $|e_i\rangle$ após a medição é $|a_i|^2$.

Uma medição interrompe a evolução unitária determinística e resulta em uma variável aleatória $X : \{e_i\} \rightarrow \{\lambda_i\}$ com função de probabilidade $p(X = \lambda_i) = |a_i|^2$, mostrando assim a razão da natureza probabilística da computação quântica.

4. *Sistemas Compostos*: Se dois espaços de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 forem juntos, então o espaço do sistema conjunto é $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Estes espaços possuem estados emaranhados.

6.3 Qubits

Enquanto bits são modelados em botões ligado-desligado, qubits modelam sistemas quânticos de dois níveis. Os estados de um bit são $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, e os estados de um qubit podem ser representados por $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]$. Essa relação $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]$ estende a n -qubits $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$, resultando no grupo algébrico $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2^n]$ de \mathbb{Z}_2^n . Dessa forma linhas de bits são vetores de base para qubits.

Uma noção abstrata de um qubit pode evoluir com o modelo teórico de um sistema quântico de dois níveis. Na formulação de espaços de Hilbert da teoria quântica, um qubit é definido como: Um espaço de Hilbert $\equiv \mathbb{C}^2$ representando estados de qubits, evolução de estados por matrizes $U(2)$, medições por 2×2 operadores Hermitianos, e a interpretação probabilística de medições.

Matematicamente, um estado de qubit é dado por um vetor não nulo $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$. Já que a classe $\{\lambda |\psi\rangle\}$, $\lambda \neq 0$ representa o mesmo estado, um estado de qubit é uma classe de equivalência de vetores, i.e., um ponto na esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1$. A esfera de Riemann representando todos os estados de qubits é chamada esfera de Bloch. Dessa forma estados de qubits estão em uma correspondência 1-1 com pontos na esfera de Bloch.

Uma medição M de um qubit é dado por uma matriz Hermitiana 2×2 . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os autovalores estão entre ± 1 . Se ambos autovalores forem iguais, então $M = \pm Id$, e portanto a medição não faz nada. Se M for completa então é equivalente a uma das formas $v \cdot \sigma = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$, onde $v = (x, y, z) \in S^2$ e $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, onde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Se enviássemos um qubit, um ser quântico receberia uma quantidade infinita de informação. Entretanto seres clássicos somente podem receber um bit de informação. O resultado deve ser uma variável aleatória com apenas duas possíveis formas. Dessa forma a quantidade infinita de informação contida em um qubit não é acessível por criaturas clássicas. Nesse sentido um estado de qubit contem ao mesmo tempo mais do que e menos do que um bit.

Teorema 6.1. *Dado um estado de qubit desconhecido $|\psi\rangle$, na média somente $\frac{1}{2\ln 2}$ bits de informação podem ser obtidos por uma única medição completa.*

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada tanto em [14] como em [58]. ■

A situação é diferente para um estado de qubit conhecido. Se um estado de qubit é conhecido, então este pode ser preparado repetidamente e medido de maneiras diferentes. Então dado um estado de qubit e um número $0 \leq \alpha \leq 1$, então podemos obter α bits de informação ao escolher

uma medição apropriada. Em geral, dado um qubit $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^m$, $m \geq 3$, a média de informação que será obtida ao se fazer uma única medição é $\frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2}^m 1/k$. Se m for suficientemente grande, a média de informação é aproximadamente $\log_2 m - \frac{1-\gamma}{\ln 2}$, onde $\gamma = 0.57722\dots$ é a constante de Euler.

6.4 n-qubits e problemas de computação

Um estado n -qubit é uma classe de vetores não nulos, par a par múltiplos, em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$. Os elementos da base de $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ estão em correspondência um para um com linhas de n -bits em \mathbb{Z}_2^n . Essa linha de código base é chamada de base computacional, e pode ser visualizada como os vértices de um cubo n -dimensional. Essa conexão nos permite incluir a computação clássica na computação quântica: o processamento clássico de informação usa apenas os vetores base dos qubits.

Um problema computacional é um mapa Booleano $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$, onde $\{0, 1\}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Z}_2^n$, apresentada na forma de Garey-Johnson. Um problema de decisão é simplesmente um problema de computação entre $\{0, 1\}$.

- Problema: Primalidade
- Exemplo: Um inteiro $N > 0$.
- Pergunta: N é primo?

Como um mapa Booleano, primalidade é a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é a expansão binária de um número composto,} \\ 1 & \text{se } x \text{ é a expansão binária de um número primo.} \end{cases}$$

Um algoritmo clássico eficiente para a determinação de primos foi descoberto recentemente.

- Problema: Fatoração
- Exemplo: um inteiro $N > 0$.
- Pergunta: Qual é o maior fator primo de N ?

Nenhum algoritmo clássico é eficiente em fatoração. Entretanto uma descoberta animadora na computação quântica é o algoritmo de fatoração de Shor.

6.4.1 Conjunto universal de portas lógicas

Um conjunto de portas lógicas \mathcal{S} é um conjunto de operações elementares que aplicaremos continuamente para completar o problema computacional. Cada aplicação de um portão é considerada um passo, então o número de aplicações de cada portão em um algoritmo representa tempo consumido, e é uma medida de complexidade. Um conjunto de portas lógicas deve ser fisicamente realizável e complicado o suficiente para realizar qualquer computação dado tempo suficiente. Matematicamente é impossível dizer quando um conjunto de portas lógicas é físico já que no fim das contas a resposta vem da realização física. Considerando essa restrição física, requer-se que todas as entradas das matrizes de portas lógicas sejam números algébricos quando definimos classes de complexidade dependendo do conjunto de portas lógicas. Em geral, um conjunto de portas \mathcal{S} é uma coleção qualquer de matrizes unitárias em $\bigcup_{n=1}^{\infty} U(2^n)$. Nossa escolha será

$$\mathcal{S} = \{H, \sigma_z^{\pm 1/4}, \text{CNOT}\}$$

onde

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz Hadamard,

$$\sigma_z^{\pm 1/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm \pi i/4} \end{pmatrix}$$

chamadas de portas $\pi/8$,

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

na base de dois qubits $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

É chamado de “controlled-NOT” porque o primeiro qubit é bit de controle, de forma que quando o estado é $|0\rangle$, nada acontece com o segundo qubit, mas quando está em $|1\rangle$, o portão NOT é aplicado ao segundo qubit.

Definição 6.2.

1. Um circuito quântico de n -qubit sobre um conjunto de portas \mathcal{S} é chamado de mapa $U_L : (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ composto com um número finito de matrizes da forma $Id_p \otimes g \otimes Id_q$ onde $g \in \mathcal{S}$ e q, p podem ser 0.
2. Um conjunto de portas lógicas é dito universal se a coleção de todos os circuitos de n -qubits formam um subconjunto denso de $SU(2^n)$ para qualquer n .

O conjunto de portas lógicas $\mathcal{S} = \{H, \sigma_z^{\pm 1/4}, \text{CNOT}\}$ será chamado de conjunto padrão de portas.

Teorema 6.2.

1. O conjunto de portas padrão é universal
2. Toda matriz em $U(2^n)$ pode ser aproximada de forma eficiente, a menos de alguma fase, por um circuito com \mathcal{S} .

A prova de (1) é o design do circuito quântico: A implementação de portas combinado com o conhecimento de subgrupos finitos de $SU(2)$. A (2) segue da (1) pelo algoritmo de Kitaev-Solovay. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada em [58].

6.5 Modelo do Circuito Quântico

Definição 6.3. Seja \mathcal{S} um conjunto de portas padrão. Um problema $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ (representado por $f_n : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^{m(n)}$) é solúvel eficientemente por um computador quântico (BQP) se existirem polinômios $a(n), g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfazendo $n + a(n) = m(n) + g(n)$ e existe um algoritmo clássico de tempo $\text{poly}(n)$ para dar o mapa $\delta(n) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$ descrevendo um circuito quântico $U_{\delta(n)}$ sobre \mathcal{S} de tamanho $O(\text{poly}(n))$ tal que:

$$U_{\delta(n)} |x, 0^{a(n)}\rangle = \sum_I a_I |I\rangle$$

$$\sum_{|I|=|f(x)z} |a_I|^2 \geq 3/4, \quad \text{onde } z \in \mathbb{Z}_2^{g(n)}$$

Os qubits $a(n)$ são auxiliares para trabalhar o problema, para que inicializemos a entrada $|x\rangle$ pondo $a(n)$ zeros a sua direita e identificando a linha de bits resultante como vetor base em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes(n+a(n))}$. Os qubits $g(n)$ são irrelevantes. O algoritmo clássico pega como entrada o tamanho n e retornando a descrição de um circuito quântico $U_{\delta(n)}$. Para um dado $|x\rangle$, a probabilidade que os primeiros $m(n)$ bits resultantes sejam iguais a $f_n(x)$ é $\geq 3/4$.

A classe de problemas quânticos computáveis é independente da escolha de conjunto de portas lógicas desde que o conjunto seja computável eficientemente. A margem $3/4$ pode ser substituída por qualquer constante entre $1/2$ e 1 . Nessa definição de BQP, o circuito quântico $U_{\delta(n)}$ é uniforme em todas as entradas $|x\rangle$ de tamanho n . No algoritmo de Shor, o circuito quântico para um n fixo depende da entrada $|x\rangle$, mas existe um algoritmo clássico eficiente para converter o algoritmo de Shor para a nossa formulação de BQP [35].

6.6 Simulando a Física Quântica

O modelo do circuito quântico é um sistema quântico abstrato imbuído de localidade explicitamente. A decomposição tensorial nos permite escolher somente transformações unitárias locais para a evolução do sistema.

Hamiltonianas quânticas realísticas também possuem a propriedade de localidade, então é natural que QCM simulem Hamiltonianas locais. Uma Hamiltoniana H é k -local se para algum inteiro k se $H = \sum_{i=1}^L H_i$ tal que cada H_i atua não trivialmente em no máximo k subsistemas, e L é uma constante.

Definição 6.4. *Uma Hamiltoniana está contente quando $[H_i, H_j] = 0$ para qualquer i, j . Do contrário é frustrada.*

- Problema: Simulação Quântica
- Fixe um $k \geq 2$, uma Hamiltoniana k -local $H = \sum_{i \in L} H_i$ em um sistema de n -qubit, um estado inicial $|\psi_0\rangle$, um tempo de evolução t , e uma margem de erro $\delta > 0$.
- Pergunta: encontre o estado $|\tilde{\psi}_f(t)\rangle$ tal que

$$|\langle \tilde{\psi}_f(t) | e^{-\frac{it}{\hbar} H} |\psi_0\rangle|^2 \geq 1 - \delta$$

Teorema 6.3. *Existe um algoritmo quântico de tempo de execução $\text{poly}(1/\delta)$ para resolver o problema da simulação quântica.*

Esse teorema foi conjecturado por Feynman e provado por S. Lloyd [37].

O algoritmo é baseado na formula de Trotter. Sejam A, B operadores Hermitianos. Então para qualquer tempo t ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{it}{n} A} e^{\frac{it}{n} B})^n = e^{it(A+B)}$$

Para ilustrar, considere a Hamiltoniana contente $H = \sum_{i=1}^L H_i$. Então

$$e^{-\frac{it}{\hbar} H} = e^{-\frac{it}{\hbar} H_1} e^{-\frac{it}{\hbar} H_2} \dots e^{-\frac{it}{\hbar} H_L}$$

para todo t . Se escolhermos um $\delta t > 0$ tal que $|\langle \tilde{\psi}_f | e^{-\frac{in\delta t}{\hbar} H} |\psi_0\rangle|^2 \geq 1 - \delta$ para algum $n \sim \text{poly}(1/\delta)$ e $n\delta t \sim t$, então com $\{e^{-\frac{i\delta t}{\hbar} H_i}\}$ como conjunto de portas, uma simulação eficiente é óbvia.

Para o caso frustrado, selecionamos δt e um método de aproximação com a acurácia prescrita. Usando

$$e^{i\delta t(A+B)} = e^{i\delta t A} e^{i\delta t B} + O(\delta t^2) \quad \text{ou}$$

$$e^{i\delta t(A+B)} = e^{\frac{i\delta t}{2} A} e^{i\delta t B} e^{\frac{i\delta t}{2} A} + O(\delta t^3)$$

então implementamos $e^{-i\delta t H}$ por um circuito de qubits sobre $\{e^{-i\delta t H_i}\}$ e iteramos j passos, até $j\delta t \sim t_f$.

Entretanto no caso frustrado, não será sempre possível garantir que os termos de maior ordem na decomposição de Baker-Campbell-Hausdorff serão dominados pelos termos de menor ordem e portanto o erro na formula de Trotter para essa situação pode ser arbitrariamente grande dependendo dos comutadores das Hamiltonianas como demonstrado em [15].

Teorema 6.4 (Erro de Trotter com escala de comutadores). *Seja $H = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} H_{\gamma}$ um operador consistindo de Γ termos, e seja $t \geq 0$. Seja $\mathcal{S}(t) := \prod_{\nu=1}^{\nu} \prod_{\gamma=1}^{\Gamma} e^{t a_{(\nu, \gamma)} H_{\pi_{\nu}(\gamma)}}$. Definimos $\tilde{\alpha}_{comm} = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}=1}^{\Gamma} \|[H_{\gamma_{p+1}}, \dots, [H_{\gamma_2}, H_{\gamma_1}] \dots]\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma espectral. Então o erro aditivo $\mathcal{A}(t)$ e o erro multiplicativo $\mathcal{M}(t)$, definidos respectivamente como, $\mathcal{S}(t) = e^{tH} + \mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{S}(t) = e^{tH}(I + \mathcal{M}(t))$, podem ser limitados assintoticamente por*

$$\|\mathcal{A}(t)\|, \|\mathcal{M}(t)\| = \mathcal{O}(\tilde{\alpha}_{comm} t^{p+1} e^{4t\nu \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \|H_{\gamma}\|}). \quad (58)$$

Além disso, se as H_{γ} forem anti-Hermitianas, correspondendo a Hamiltonianas físicas, teremos

$$\|\mathcal{A}(t)\|, \|\mathcal{M}(t)\| = \mathcal{O}(\tilde{\alpha}_{comm} t^{p+1}). \quad (59)$$

TQCTs tem Hamiltonianas constantes H , que podem ser normalizadas para $H \equiv 0$, então o algoritmo de simulação de Lloyd não se aplica. Mas simulações eficazes de TQCTs existem. Enquanto TQCTs não tem nenhuma evolução continua exceto por uma fase abeliana geral, tornando seus estados fundamentais perfeitos para o armazenamento de memória, eles não tem nenhuma evolução discreta.

Teorema 6.5. *Fixamos uma TQCT(V, Z). Dado uma superfície orientada Σ , com fronteira possivelmente indiciada, e um elemento b nos geradores padrões da classe de mapeamentos $\mathcal{M}(\Sigma)$, existe um circuito quântico para simular, a menos de uma fase, a matriz representativa $\rho(b)$ de b em V dados $\text{poly}(|b|)$ passos, onde $|b|$ é o tamanho de b nos geradores padrões.*

Uma boa ilustração desse teorema faz uso do grupo de tranças detalhado em [23].

7 Categorias de Fusão de Fitas

Neste parte introduzimos as categorias de fusão de fitas. Adicionando uma condição de não degenerescência para a trança, são chamadas de categorias tensoriais modulares. Categorias tensoriais modulares unitárias são o modelo algébrico dos anyons e das TQCTs unitárias.

7.1 Regras de fusão e categorias de fusão

A teoria de grupos é uma abstração de simetria, que é fundamental para a matemática e física. Grupos finitos podem ser usados na classificação de cristais. Categorias de fusão podem ser entendidas como a generalização quântica de grupos finitos. Os grupos finitos mais simples são Abelianos. Seguindo essa lógica, podemos dizer que as categorias de fusão de fitas são generalizações quânticas de grupos finitos Abelianos.

Definição 7.1.

1. Um conjunto de índices L é um conjunto finito com um elemento distinto 1 e uma involução $\hat{\cdot} : L \rightarrow L$ tal que $\hat{\hat{1}} = 1$. Elementos de L chamaremos de índices, 1 é chamado de índice trivial, as vezes escrito como 0 , e $\hat{\cdot}$ é chamado de dualidade.
2. Uma regra de fusão em um conjunto de índices L é uma operação binária $\otimes : L \times L \rightarrow \mathbb{N}^L$, onde \mathbb{N}^L é um conjunto de todos os mapas de L para $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ satisfazendo as seguintes condições. Dados $a, b \in L$, escreveremos formalmente $a \otimes b = \bigoplus N_{ab}^c c$ onde $N_{ab}^c = (a \otimes b)(c)$. Quando não houver confusão, escreveremos apenas $a \otimes b$ simplesmente como ab . Então as condições sobre \otimes são: para todo $a, b, c, d \in L$,

- (i) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$, i.e., $\sum_{x \in L} N_{ab}^x N_{xc}^d = \sum_{x \in L} N_{bc}^x N_{ax}^d$
- (ii) $N_{a1}^c = N_{1a}^c = \delta_{ca}$
- (iii) $N_{ab}^1 = N_{ba}^1 = \delta_{b\hat{a}}$

Dizemos que um trio de índices (a, b, c) é admissível se $N_{ab}^c \neq 0$. Em tempos diremos que um exemplo da equação $a \otimes b = \bigoplus N_{ab}^c c$ é uma regra de fusão, apesar de tecnicamente \otimes ser a regra de fusão de fato.

Exemplo 1. Um grupo finito G é um conjunto de índices cujos índices são os próprios elementos de G , índice trivial 1 , e $\hat{g} = g^{-1}$. Uma regra de fusão em G é $g \otimes h = gh$, i.e., $(g \otimes h)(k) = \delta_{gh,k}$.

Exemplo 2. (Tambara-Yamagami[54]). Dado um grupo finito G , o conjunto de índices $L = G \sqcup \{m\}$, onde $m \notin G$, com a regra de fusão

$$g \otimes h = gh, \quad m \otimes g = g \otimes m, \quad m^2 = \bigoplus_{g \in G} g$$

para $g, h \in G$. Quando $G = \mathbb{Z}_2$, esta é a regra de fusão de Ising.

Exemplo 3. Regra de fusão fermiônica de Moore-read: o conjunto de índices é

$$L = \{1, \alpha, \psi, \alpha', \sigma, \sigma'\}$$

Se o subconjunto $\{1, \alpha, \psi, \alpha'\}$ é identificado $\{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4$, então a regra de fusão para $\{1, \alpha, \psi, \alpha'\}$ concorda com \mathbb{Z}_4 . As outras são:

$$\begin{aligned} \sigma\sigma' &= \sigma'\sigma = 1 \oplus \psi & \sigma^2 &= (\sigma')^2 = \alpha \oplus \alpha' \\ \sigma\psi &= \psi\sigma = \sigma & \sigma'\psi &= \psi\sigma' = \sigma' \\ \sigma\alpha &= \sigma\alpha' = \alpha\sigma = \alpha'\sigma = \sigma' & \sigma'\alpha &= \sigma'\alpha' = \alpha\sigma' = \alpha'\sigma' = \sigma \end{aligned}$$

Definição 7.2. Uma regra de fusão é dita livre de multiplicidade se $N_{ab}^c \in \{0, 1\}$ para todo a, b, c .

Definição 7.3. (Símbolos $6j$). Dada uma regra de fusão em um conjunto de índices L , um símbolo $6j$ é um mapa $F : L^6 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as condições enumeradas abaixo. Diremos que uma lista de índices (a, b, c, d, n, m) é admissível se (a, b, m) , (m, c, d) , (b, c, n) , e (a, n, d) forem admissíveis. Escrevemos $F_{d;nm}^{abc}$ para $F(a, b, c, d, n, m)$, e F_d^{abc} para a matriz com entradas (n, m) $F_{d;nm}^{abc}$, onde os índices n, m varrem todos os índices (a, b, c, d, n, m) admissíveis.

1. Admissibilidade:

(i) Se (a, b, c, d, n, m) não é admissível, então $F_{d;nm}^{abc} = 0$.

(ii) Cada matriz F_d^{abc} é invertível.

2. Axioma do pentágono: para todo $a, b, c, d, f, p, q, n, m \in L$

$$\sum_n F_{q;pn}^{bcd} F_{f;qe}^{and} F_{e;nm}^{abc} = F_{f;qm}^{abp} F_{f;pe}^{mcd}$$

$F_{d;nm}^{abc}$ é chamado símbolo $6j$; F_d^{abc} é chamado de matriz F . Perceba que nessa convenção uma matriz F pode ser vazia, i.e., a matriz 0×0 .

Um símbolo $6j$ leva a uma operação binária \otimes em espaços vetoriais L -gradeados com uma associatividade consistente, mas não necessariamente a uma categoria monoidal ou de fusão. Uma categoria monoidal precisa de unidade, além de um axioma triangular apresentado abaixo. Uma categoria de fusão precisa ainda de uma dualidade consistente - rigidez.

Definição 7.4. Um sistema $6j$ de fusão é um símbolo $6j$ satisfazendo

1. Axioma do triângulo: $F_d^{abc} = Id$ sempre que um dos a, b, c for trivial.

2. Rigidez: Para qualquer $a \in L$, seja $G_a^{\hat{a}\hat{a}}$ a matriz inversa de $F_a^{\hat{a}\hat{a}}$, com entrada (m, n) $G_{\hat{a};mn}^{\hat{a}\hat{a}}$. Então $F_{\hat{a};11}^{\hat{a}\hat{a}} = G_{\hat{a};11}^{\hat{a}\hat{a}} \neq 0$.

Figura 55: Definição diagramática do símbolo $6j$ [58]

Definição 7.5. Dois sistemas de fusão $6j$ F e \tilde{F} com conjunto de índices L são equivalentes por calibre se houver uma função $f : L^3 \rightarrow \mathbb{C} : (a, b, c) \rightarrow f_c^{ab}$, chamada uma transformação de calibre, tal que:

1. $f_c^{ab} \neq 0$ se e só se (a, b, c) for admissível.

2. $f_a^{1a} = f_a^{a1} = 1$ para todo $a \in L$

3. *Axioma do retângulo: para todo $a, b, c, d, n, m \in L$,*

$$f_n^{bc} f_d^{an} F_{d;nm}^{abc} = \tilde{F}_{d;nm}^{abc} f_m^{ab} f_d^{mc}$$

Definição 7.6.

1. *Um automorfismo de uma regra de fusão é um índice de permutação α satisfazendo $N_{\alpha(x)\alpha(y)}^{\alpha(z)} = N_{xy}^z$ para todo x, y, z .*
2. *Dois sistemas de fusão 6j com os mesmos conjuntos de índices são equivalentes se forem equivalentes por calibre, a menos de uma permutação de índice. Perceba que essa permutação é necessariamente um automorfismo.*

Teorema 7.1.

1. *Sistemas de fusão 6j, a menos de uma equivalência, estão em correspondência um para um com categorias de fusão a menos de equivalências monoidais \mathbb{C} -lineares.*
2. *(Rigidez de Ocneanu) Existe um número finito de classes de equivalência de categorias de fusão para uma dada regra de fusão.*

O primeiro item está provado em [62]. Para o segundo, [[19],[34],[27]].

Exemplo 4. Seja G um grupo abeliano finito, visto como uma regra de fusão. Então sistemas de fusão 6j a menos de equivalência de calibre estão em correspondência 1-1 com $H^3(G; \mathbb{C}^\times)$. Pelo teorema 7.1, o numero de categorias de fusão é o numero de orbitas de $H^3(G; \mathbb{C}^\times)$ sobre os automorfismos de G . Se $G = \mathbb{Z}_m$, então $H^3(G; \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}_m$. Um gerador é dado pelo 3-co-ciclo $f : G^3 \rightarrow \mathbb{C}^\times$

$$f(a, b, c) = e^{2\pi i \bar{a}(\bar{b} + \bar{c} - \overline{b+c})/m^2} \quad (60)$$

onde $\bar{x} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ é o resíduo de x modulo m . O co-ciclo f corresponde a um sistema de fusão F dado por $F_{abc;bc,ab}^{a,b,c} = f(a, b, c)$. Para $m = 3$, os co-ciclos f e f^2 são equivalentes por permutação de G , então existem apenas duas categorias de fusão com regra de fusão \mathbb{Z}_3 .

Definição 7.7. *Uma trança em um sistema de simbolo 6j com conjunto de índice L é uma função $L^3 \rightarrow \mathbb{C} : (a, b, c) \rightarrow R_c^{ab}$ tal que*

1. $R_c^{ab} \neq 0$ se (a, b, c) é admissível.
2. *Axioma do Hexágono: Para todo $a, b, c, d, e, m \in L$,*

$$\begin{aligned} R_e^{ac} F_{d;em}^{bac} R_m^{ab} &= \sum_n F_{d;en}^{bca} R_d^{an} F_{d;nm}^{abc} \\ (R_e^{ca})^{-1} F_{d;em}^{bac} (R_m^{ba})^{-1} &= \sum_n F_{d;en}^{bca} (R_d^{na})^{-1} F_{d;nm}^{abc} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ c \end{array} = R_c^{ab} \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ c \end{array}$$

Figura 56: Trança em um sistema de fusão $6j$ [58]

7.2 Cálculo Gráfico de CFFs (Categorias de fusão de fitas)

Na linguagem de categorias, uma categoria de fusão \mathcal{C} é uma categoria monoidal rígida semi-simples \mathbb{C} -linear com uma classe finita de isomorfismos de objetos simples tais que unidade monoidal é simples [19]. Lembrando que um objeto é simples se $\text{Hom}(x, x) \simeq \mathbb{C}$. Segue que o espaço dos morfismos $\text{Hom}(x, y)$ entre objetos x, y é um espaço vetorial de dimensão finita. O cálculo gráfico de uma CFF é um cálculo de bases desses espaços de morfismos. Links coloridos de teorias unitárias tem uma interpretação direta como trajetórias de anyons em espaços tempo $(2+1)$, e invariantes quânticos de links se tornam amplitudes de processos físicos.

O conjunto de índices de um sistema de fusão $6j$ é um conjunto de classes de isomorfismos de objetos simples em uma categoria de fusão. O produto tensorial de índices induzidos por qualquer conjunto representativo de objetos simples é dado por uma regra de fusão. A matriz F, F_d^{abc} é uma matriz de mudança de base de $\text{Hom}(d, a \otimes b \otimes c)$ já que a nossa categoria de fusão é estrita. Vamos usar gráficos para representar morfismos especiais entre produtos tensoriais e somas diretas de objetos simples.

Nessa convenção o fluxo de tempo segue para cima. A semi-simplicidade implicará que precisaremos apenas considerar morfismos trivalentes. Por exemplo, onde $\theta(a, b, c) = \sqrt{d_a d_b d_c}$ é chamado

$$\begin{array}{c} | \\ a \end{array} \begin{array}{c} | \\ b \end{array} = \sum_j \frac{N_{ab}^j \cdot d_j}{\theta(a, b, j)} \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array}$$

Figura 57: Fonte [58]

de símbolo θ . Os gráficos

$$\left\{ \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \diagdown \quad \diagup \\ m \\ \diagup \quad \diagdown \\ d \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \\ \diagup \quad \diagdown \\ d \end{array} \right\}$$

Figura 58: [58]

são duas bases do espaço vetorial $\text{Hom}(d, a \otimes b \otimes c)$, relacionadas pela matriz F, F_d^{abc} . A unidade é simplesmente representada pelo vazio ou por um ponto nomeado por 1. Para representar a rigidez direita, escrevemos $\Omega_x \in \text{Hom}(1, x \otimes x^*)$ e $\omega_x \in \text{Hom}(x^* \otimes x, 1)$ e graficamente

Para podermos definir estruturas como os traços quânticos precisamos adicionar uma estrutura pivotal.



Figura 59: [58]

Definição 7.8.

1. Se existirem isomorfismos $\phi_x : x \rightarrow x^{**}$ tal que

(i) $\phi_{x \otimes y} = \phi_x \otimes \phi_y$

(ii) $f^{**} = f$

então a categoria de fusão será pivotal.

2. Em uma categoria pivotal podemos definir um traço direito e um traço esquerdo, apesar de não necessariamente serem iguais. Dado $f : x \rightarrow x$,

$$\begin{aligned} tr^r(f) &= \omega_{x^*} \circ (\phi_x \otimes id_{x^*}) \circ (f \otimes id_{x^*}) \circ \Omega_x \\ tr^l(f) &= \omega_x \circ (\omega_{x^*} \otimes f) \circ (id_{x^*} \otimes \phi_x^{-1}) \circ \Omega_{x^*} \end{aligned} \tag{62}$$

3. Se $tr^r(f) = tr^l(f)$ para todo f , então a categoria pivotal é esférica.

Em [19] é conjecturado que toda categoria de fusão é pivotal. Se a categoria for ainda trançada teremos um isomorfismo $\psi_x : x^{**} \rightarrow x$ dado por

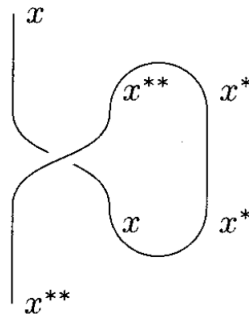


Figura 60: [58]

que usualmente não satisfaz $\psi_{x \otimes y} = \psi_x \otimes \psi_y$.

Definição 7.9.

1. Uma trança é compatível com uma estrutura pivotal ϕ_a se o isomorfismo $\theta_a = \psi_a \phi_a$ satisfizer $\theta_{a^*} = \theta_a^*$.

2. Uma CFF é uma categoria de fusão pivotal com uma trança compatível.

No calculo gráfico θ_a é dado por com o entendimento que ϕ_a é aplicado. As CFFs também podem ser definidas com símbolos $6j$



Figura 61: [58]

Proposição 1.

1. Uma categoria de fusão dada por um sistema de fusão $6j$ é pivotal se existir uma escolha de raiz da unidade t_α para cada índice a satisfazendo os axiomas pivotais:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 1 \\
 t_{a^*} &= t_a^{-1} \\
 t_a^{-1} t_b^{-1} t_c &= F_{1;a^*,c}^{a,b,c^*} F_{1;b^*,a^*}^{b,c^*,a} F_{1;c,b^*}^{c^*,a,b}
 \end{aligned} \tag{63}$$

para cada trio admissível (a, b, c) . Os $\{t_a\}$ são chamados de coeficientes pivotais.

2. A estrutura pivotal é esférica se todos os $t_a = \pm 1$.
3. Uma categoria trançada esférica é de fitas.

Quando uma categoria de fusão trançada tem multiplicidade, não se sabe se sempre haverá uma escolha de bases dos espaços $V_c^{ab} = \text{Hom}(c, a \otimes b)$ tal que as tranças em V_c^{ab} sejam todas diagonais. Resumindo, definimos as CFFs em termos de símbolos $6j - \{F_{d;nm}^{abc}\}$, tranças $\{R_c^{ab}\}$, e

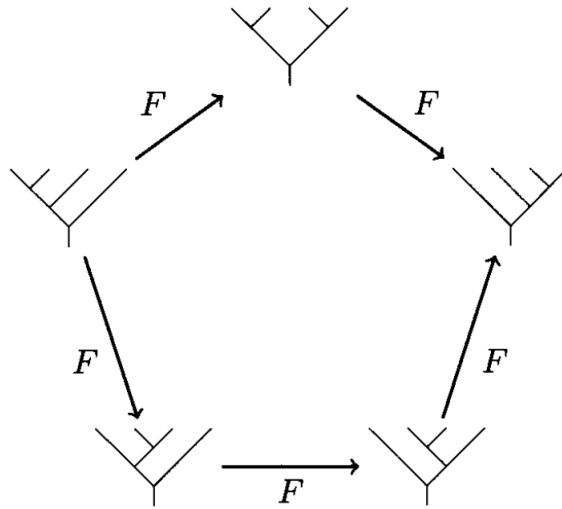


Figura 62: Axioma do Pentágono para categorias de fusão [58]

coeficientes pivotais $\{t_i\}$.

Teorema 7.2. Uma CFF com regra de fusão sem multiplicidade é uma coleção de números $\{F_{d;nm}^{abc}\}, \{R_c^{ab}\}, \{t_i = \pm 1\}$ satisfazendo os axiomas do pentágono, triângulo, rigidez, hexágono, e pivotal.

Um teorema similar vale para CFFs com multiplicidades. No caso geral, tranças também possuem liberdade de calibre.

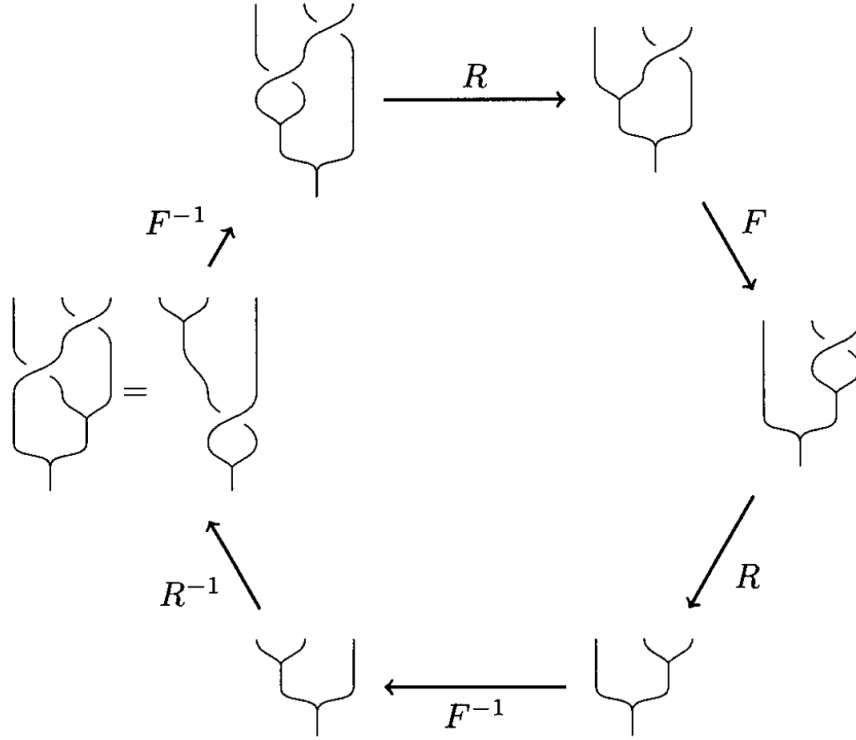


Figura 63: Axioma do Hexágono para categorias de fusão [58]

7.3 Categorias unitárias de fusão

Uma categoria é rígida, isto é, tem ambos objetos direitos e esquerdos. A definição de categorias unitárias de fusão vem do [41], e a definição de CFF unitária vem de [56].

Definição 7.10.

1. Uma conjugação em uma categoria de fusão é uma família de mapas lineares conjugados $Hom(y, x) \rightarrow Hom(x, y)$, escrevendo $f \rightarrow \bar{f}$, satisfazendo

$$\bar{\bar{f}} = f, \quad \overline{f \otimes g} = \bar{f} \otimes \bar{g}, \quad \overline{f \circ g} = \bar{g} \circ \bar{f}.$$

2. Uma categoria de fusão é unitária se existe uma conjugação tal que $f = 0$ sempre que $\bar{f} \circ f = 0$.
3. Uma CFF é Hermitiana se existe uma conjugação tal que:

$$(i) \quad \overline{\Omega_x} = \tilde{\omega}_x \text{ e } \overline{\omega_x} = \tilde{\Omega}_x$$

$$(ii) \quad \overline{\sigma_{x,y}} = \sigma_{x,y}^{-1}$$

$$(iii) \quad \overline{\theta_x} = \theta_x^{-1}$$

4. Uma CFF é unitária se for Hermitiana e $tr(f\bar{f}) \geq 0$ para todo f .

Proposição 2.

1. Categorias de fusão unitárias são esféricas [[62],[35]].
2. Categorias de fusão pivotal bi-dual são esféricas [27].

Conjectura: Uma CFF com todas as dimensões quânticas $d_i > 0$ é unitária.

7.4 Invariantes de Link e de Variedades 3-dimensionais

A importância das CFFs é que elas definem invariantes de links coloridos e variedades 3-dimensionais. Dada uma CFF \mathcal{C} , as cores são objetos de \mathcal{C} ; colorir um link L é uma correspondência de objetos com componentes de L . Dado qualquer link colorido de fitas, representa-se L como um diagrama de link L_D em um plano. Assim L_D define um morfismo $\in \text{Hom}(1, 1)$, então $\langle L_D \rangle \text{id}_1$ para algum escalar $\langle L_D \rangle$ é um invariante de L_D a menos de movimentos de Reidemeister do tipo *RII* e *RIII*. Tais invariantes são chamados de invariantes de links de fitas. Em geral $\langle L_D \rangle$ não é invariante sobre *RI* devido ao twist. Dada uma CFF, escolha um conjunto de representativos

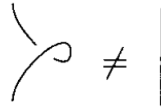


Figura 64: Fonte [58]

$\{x_i\}_{i \in L}$ de classes de isomorfismos de objetos simples, onde L é um conjunto de índices. O invariante de link depende apenas nas classes de isomorfismos de objetos, então colorimos links por índices.

Definição 7.11. Dada uma CFF \mathcal{C} com conjunto de índices L ,

1. Para todo i , $d_i = \bigcirc_i$ é chamado de dimensão quântica do índice i . Seja $D^2 = \sum d_i^2$. Então D é chamado de dimensão quântica global de \mathcal{C} . Existem duas escolhas de D . Sempre escolheremos D como positivo. Escolhendo $-D$, mudamos o invariante $Z(X)$ por um fator de $(-1)^{b_1(X)-1}$.
2. Para todo i, j , seja $\tilde{S} = (\tilde{s}_{i,j})$ é chamado de matriz \tilde{S} modular, e $S = \frac{1}{D}\tilde{S}$ é chamada de

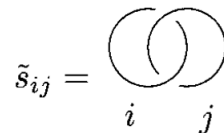


Figura 65: Fonte [58]

matriz S modular.

3. Uma CFF é dita modular se $\det S \neq 0$.
4. Seja $p_{\pm} = \sum_i \theta_i^{\pm 1} d_i^2$. Se \mathcal{C} é modular então $p_+ p_- = D^2$, e $p_+ / D = e^{\frac{\pi i}{4} c}$ para algum número racional c , cujo resíduo modulo 8 será chamado de carga topológica de \mathcal{C} . Escolhendo $-D$ também muda a carga topológica central por 4.

Posteriormente veremos que toda categoria monoidal modular \mathcal{C} leva a uma $(2+1)$ -TQCT. Em particular os funtores $Z_{\mathcal{C}}$ que definem as TQCTs serão invariantes de variedades 3-dimensionais fechadas. Em verdade, invariantes para variedades 3-dimensionais podem ser definidos sem a condição de modularidade. Seja $w_0 = \frac{1}{D^2} \sum_{i \in L} d_i \cdot i$ uma soma formal de todos os índices. Dado um link L , escrevemos $w_0 * L$ para um invariante de link de fitas dado ao colocar w_0 em cada componente de L , expandindo formalmente em uma combinação linear de links coloridos, e então avaliando o invariante de link colorido.

Teorema 7.3. Dada uma CFF com $p_+ \neq 0$ e uma variedade 3-dimensional M^3 obtida de cirurgia em um link de fitas L de m componentes,

$$\tau_{\mathcal{C}}(M^3) = D^{m-1} \left(\frac{D}{p_+} \right)^{\sigma(L)} \langle w_0 * L \rangle \quad (64)$$

é um invariante topológico de variedades 3-dimensionais, onde $\sigma(L)$ é a assinatura de um link de fitas (L_{ij}) com qualquer orientação em L . Onde L_{ii} é o referencial da componente L_i , e L_{ij} é o numero de link entre as componentes L_i e L_j .

Demonstração. Podemos simplesmente mostrar que $\langle w_0 * L \rangle$ é um invariante sobre a passagem de objetos. Então com o fator multiplicativo, $\tau_{\mathcal{C}}(M^3)$ é um invariante:

Figura 66: Fonte [58]

■

Essa fórmula mágica vem de [[49],[56]]. É bastante conhecido que um invariante de uma variedade 3-dimensional vindo de uma TQCT tem uma anomalia medida pela carga topológica central c_{top} . Em geral um invariante de uma variedade 3-dimensional é bem definido somente para variedades com algumas estruturas extras como bi-referenciais. Entretanto no teorema anterior, não há menção de escolha de referenciais. Esta formula para $Z_{\mathcal{C}}(M^3)$ implicitamente usa os referenciais canônicos.

Uma CFF determina muito mais: um operador invariante para qualquer emaranhamento, em particular uma representação do grupo de tranças para qualquer objeto simples.

Teorema 7.4. Em uma CFF,

1. $d_i d_j = \sum_k N_{ij}^k d_k$.
2. $\tilde{s}_{ij} = \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \sum_k N_{ij}^k d_k \theta_k$.
3. A matriz S é simétrica e unitária.
4. Se $\det S = 0$, então a primeira coluna de S é proporcional a alguma outra coluna, então a degenerescência de S é a degenerescência de tranças duplas.

As demonstrações de (1) – (2) estão em [[56],[7]], (3) [19], (4) [13].

7.5 Indicadores de Frobenius-Schur

Como uma aplicação do cálculo gráfico podemos olhar para os indicadores de Frobenius-Schur em categorias de fusão pivotais. Na teoria de representação de grupos finitos, os indicadores de Frobenius-Schur surgem para representações irredutíveis auto-duais. Supondo que V é uma representação irredutível de um grupo finito G . Então existe um isomorfismo $\phi_V : V^* \rightarrow V$, que pode ser considerado um elemento de $V^{**} \otimes V \simeq V \otimes V$. Além disso $V \otimes V$ tem uma ação \mathbb{Z}_2 para a qual ϕ_V é sempre um autovetor. Os autovalores $\in \{\pm 1\}$ é o indicador clássico de Frobenius-Schur, que denotaremos $\nu(V)$. Se $\nu(V) = 1$, dizemos que V é bi-dual simetricamente, ou real. Se $\nu(V) = -1$, dizemos que V é bi-dual assimetricamente ou pseudo-real.

Se a é um objeto bi-dual simples em uma categoria pivotal, escolha um vetor não nulo $x_a \in \text{Hom}(a \otimes a, 1)$ e represente como

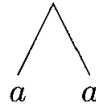


Figura 67: Fonte [58]

atuando em x_a por dualidade resulta em mais um segundo vetor não nulo:

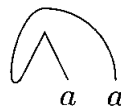


Figura 68: Fonte [58]

Como $\dim \text{Hom}(a \otimes a, 1) = \dim \text{Hom}(a^*, a) = 1$, esses vetores são proporcionais:

$$\text{Diagrama de Figura 68} = \nu_a \text{ Diagrama de Figura 67}$$

Figura 69: Fonte [58]

Definição 7.12. *Seja a um objeto simples em uma categoria de fusão pivotal.*

1. Se a é bi-dual, então ν_a é chamado de indicador de Frobenius-Schur. Do contrario definimos $\nu_a = 0$.

2. Uma categoria pivotal é unimodal se tiver indicador de Frobenius-Schur trivial, i.e., $\nu_a = 1$ para todo objeto a simples bi-dual.

Teorema 7.5.

1. $\nu_a = \pm 1$
2. $\nu_a = t_a$ se a for bi-dual, onde t_a é um coeficiente pivotal.
3. $\nu_a = \theta_a R_1^{aa}$ em uma CFF
4. $\nu_a = \frac{1}{D^2} \sum_{ij} N_{ia}^j d_i d_j \theta_i^2 / \theta_j^2$ em uma categoria monoidal modular.

Esse tópico aparece inicialmente em [56], assim como unimodalidade.

7.6 Categorias Monoidais Modulares

Quando S é singular, as representações do grupo de tranças não podem ser estendidas para representações de grupos de classes de mapeamentos de superfícies com número maior de genus, e então a CFF não leva a uma TQCT. Ocorre que a degenerescência da matriz S é a única obstrução. Qualquer CMM leva a uma TQCT, então possui representação projetivas de todos os grupos de classes de mapeamentos.

Teorema 7.6. *Considere uma CMM de rank n com conjunto de índices L e matriz de fusão N_i dada por $(N_i)_{jk} = N_{ij}^k$. Seja S uma matriz modular e $T = (\theta_i \delta_{ij})$ a matriz de twist. Então*

1. *Formula de Verlinde:*

$$N_i \tilde{S} = \tilde{S} \Lambda_i$$

para todo $i \in L$, onde $\Lambda_i = (\delta_{ab} \lambda_{ia})_{ab}$ é diagonal e $\lambda_{ia} = \tilde{s}_{ia} / \tilde{s}_{1a}$. Então a entrada (j, k) , temos

$$N_{ij}^k = \sum_{r \in L} \frac{s_{ir} s_{jr} \bar{s}_{kr}}{s_{1r}^2}$$

implicando em muitas simetrias como N_{ij}^k : $N_{ij}^k = N_{ji}^k = N_{ij}^{\hat{k}} = N_{i\hat{k}}^j$. Pela formula de Verlinde, as entradas diagonais de Λ_i são autovalores de N_i , e as colunas de \tilde{S} são os autovetores correspondentes.

2. *Representação Modular: S e T satisfazem*

(i) $(ST)^3 = e^{\frac{\pi i}{4} c} S^2$.

(ii) $S^2 = C$, onde $C = (\delta_{ij})_{ij}$ é a matriz de conjugação de carga.

3. *A representação modular de $SL(2, \mathbb{Z})$ é uma representação matricial. O kernel projetivo é um subgrupo de congruência de $SL(2, \mathbb{Z})$. Em particular, a representação modular tem imagem finita.*

4. *Teorema de Vafa: Seja $A_{ij} = 2n N_{ii}^j N_{ij}^i + N_{ii}^j N_{ji}^i$. Então $\prod_j \theta_j^{A_{ij}} = \theta_i^{\frac{4}{3} \sum A_{ij}}$. Segue que θ_i é uma raiz da unidade.*

5. *Seja $K = \mathbb{Q}(\tilde{s}_{ij})$ a extensão de Galois de \mathbb{Q} de entradas de \tilde{S} . Então o grupo de Galois G é abeliano. Além disso $\mathbb{Q}(\tilde{s}_{ij}, D) \subset \mathbb{Q}(\theta_j)$, que também é uma extensão abeliana de Galois de \mathbb{Q} .*

6. G pode ser identificado com o subgrupo S_n . Para cada $\sigma \in G$, então existe $\epsilon_{i,\sigma} \in \{\pm 1\}$ para cada $i \in L$ tal que:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{j,k} &= \epsilon_{\sigma(j),\sigma} \epsilon_{k,\sigma} \tilde{s}_{\sigma(j),\sigma^{-1}(k)} \\ \epsilon_{\sigma^{-1}(k),\sigma^{-1}} &= \epsilon_{\sigma(1),\sigma} \epsilon_{1,\sigma} \epsilon_{k,\sigma}\end{aligned}$$

7. Em uma CMM, os coeficientes pivotais $\{t_a\}$ são determinados por S, T .

A formula de Verlinde, teorema de Vafa, e as propriedades aritméticas das CMM todas originam das teorias de campos conformes. O conceito de CMM e todas as suas propriedades vem de [56]. A propriedade do subgrupo de congruência vem de [8], [48].

7.7 Duplas quânticas

Definição 7.13. Seja \mathcal{C} uma categoria monoidal e $x \in \mathcal{C}$. Uma Meia-trança e_x por x é uma família de isomorfismos $\{e_x(y) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(xy, yx)\}_{y \in \mathcal{C}}$ satisfazendo

(i) *Naturalidade:* para todo $f \in \text{Hom}(y, z) : (f \otimes id_x) \circ e_x(y) = e_x(z) \circ (id_x \otimes f)$.

(ii) *Meia-trança:* para todo $y, z \in \mathcal{C} : e_x(y \otimes z) = (id_y \otimes e_x(z)) \circ (e_x(y) \otimes id_z)$.

(iii) *Propriedade unitária:* $e_x(1) = id_x$.

Definição 7.14. A dupla quântica ou centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de uma categoria monoidal \mathcal{C} tem pares de objetos (x, e_x) , onde $x \in \mathcal{C}$ e e_x é uma meia-trança. Os morfismos são dados por

$$\begin{aligned}\text{Hom}((x, e_x), (y, e_y)) &= \\ \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \mid (id_z \otimes f) \circ e_x(z) &= e_y(z) \circ (f \otimes id_z) \forall z \in \mathcal{C}\}.\end{aligned}$$

O produto tensorial de objetos é dado por $(x, e_x) \otimes (y, e_y) = (xy, e_{xy})$, onde

$$e_{xy}(z) = (e_x(z) \otimes id_y) \circ (id_x \otimes e_y(z)).$$

A unidade tensorial é $(1, e_1)$ onde $e_1(x) = id_x$. A composição e produto tensorial de morfismos são herdados de \mathcal{C} . A trança é dada por $c_{(x, e_x), (y, e_y)} = e_x(y)$.

Teorema 7.7. Se \mathcal{C} é uma categoria esférica de fusão, então $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ é modular.

Esse teorema é devido a M. Munger [42].

8 Computação Quântica com Anyons não Abelianos

Nesta seção faremos uso de algumas das técnicas desenvolvidas ao longo do texto, em especial sobre as categorias de fusão de fitas para caracterizar sistemas de Anyons não Abelianos. Para entendermos esses sistemas também precisaremos entender o conceito de fases topológicas da matéria já que o fenômeno dos Anyons são quasipartículas formadas pelo “trançamento” de partículas em sistemas espacialmente bidimensionais. Veremos ainda que a computação quântica topológica só poderá se tornar uma realidade se um sistema físico for condensado em uma fase topológica não abeliana. Nos focaremos em uma sequencia de classes universais de fases topológicas associadas as teorias de Chern-Simons $SU(2)_k$. O primeiro membro de interesse dessa sequencia, $k = 2$, ocorre em modelos teóricos para o $\nu = 5/2$ estado quântico de Hall fracional.

Em seguida veremos como quasipartículas em fases topológicas podem ser usadas para computação quântica. Discutiremos porque o “trançamento” de quasipartículas não é suficiente para computação quântica universal e como contornar essa complicação no caso do estado $\nu = 5/2$. A teoria que será capaz de realizar a computação quântica universal será a dos Anyons de Fibonacci.

Os tópicos explorados aqui são um pequeno resumo baseados no artigo [46] pelos autores Nayak, Chetan and Simon, Steven H and Stern, Ady and Freedman, Michael and Sarma, Sankar Das.

8.1 Fases Topológicas da Matéria

Um sistema tem uma fase topológica se, em baixas temperaturas e energias, e comprimentos de onda longos, todas as propriedades observáveis forem invariantes sobre deformações suaves das variedades de espaço tempo na qual os sistemas vivem. De forma equivalente, todas as propriedades observáveis são independentes da escolha das coordenadas espaço-temporais, que não necessariamente são inerciais. Equivalentemente, podemos dizer que um sistema está em uma fase topológica se sua teoria de campos efetiva de baixas energias for uma teoria topológica de campos. Surpreendentemente, invariância topológica não implica em uma física trivial de baixas energias.

8.1.1 Estatísticas não Abelianas de tranças

Uma condição necessária para a computação quântica topológica usando anyons não Abelianos é a existência de sistemas onde anyons não Abelianos possam ser encontrados, manipulados, e lidos de forma conveniente. Apesar dos vários trabalhos teóricos na área, os únicos sistemas físicos reais que pelo menos indicam indiretamente a possibilidade de anyons não Abelianos existirem são os sistemas de Hall quânticos em duas dimensões (gases de elétrons 2D) em campos magnéticos fortes.

Primeiramente é útil claramente definirmos a noção de anyons não Abelianos. Suponha que tenhamos um sistema de n partículas idênticas em duas dimensões espaciais. Então quando uma partícula é trocada com a outra de maneira “anti-horária”, a função de onda pode ser transformada por uma fase arbitraria,

$$\psi(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n) \rightarrow e^{i\theta} \psi(r_1, \dots, r_j, \dots, r_i, \dots, r_n) \quad (65)$$

a fase não é necessariamente \pm no caso (2+1)D já que uma segunda troca anti-horária pode não levar ao sistema inicial mas sim em uma fase não trivial

$$\psi(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n) \rightarrow e^{2i\theta} \psi(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n) \quad (66)$$

Os casos particulares nos quais $\theta = 0, \pi$ correspondem aos bósons e férmions, respectivamente. Partículas com outros valores do ‘ângulo estatístico’ θ chamaremos de anyons [59].

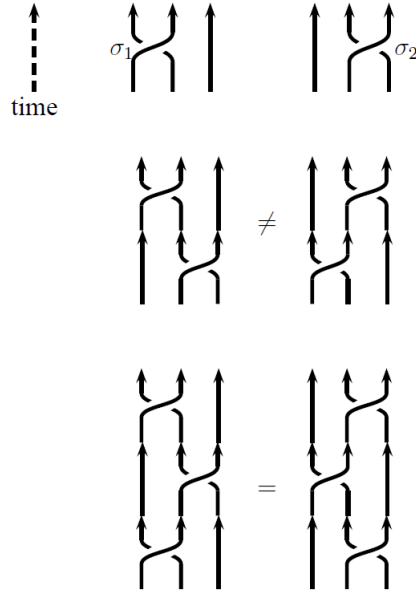


Figura 70: Apresentação diagramática dos elementos do grupo de tranças σ_1 e σ_2 . Pode se ver que $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$ logo o grupo de tranças não é abeliano. Por ultimo vemos a ultima relação do grupo de tranças $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Fonte [46].

Podemos agora olhar para o caso de estatísticas não abelianas de tranças, que estão associadas a representações de dimensões maiores do grupo de tranças. Essas representações podem ocorrer quando existe um conjunto degenerado de estados g com partículas fixas em posições R_1, \dots, R_n . Definindo bases ortonormais $\psi_\alpha, \alpha = 1, \dots, g$ desses estados degenerados. Então um elemento do grupo de tranças - digamos σ_1 , que troca a partícula 1 com a 2 - é representada por uma matriz unitária $g \times g$ $\rho(\sigma_1)$ atuando nesses estados.

$$\psi_\alpha \rightarrow [\rho(\sigma_1)]_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (67)$$

Entretanto, se trocarmos a partícula 2 com a 3 teremos:

$$\psi_\alpha \rightarrow [\rho(\sigma_2)]_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (68)$$

Ambas $\rho(\sigma_1)$ e $\rho(\sigma_2)$ são $g \times g$ matrizes unitárias, que definem transformações unitárias no espaço dos estados fundamentais degenerados. Se $\rho(\sigma_1)$ e $\rho(\sigma_2)$ não comutarem, $[\rho(\sigma_1)]_{\alpha\beta} [\rho(\sigma_2)]_{\beta\gamma} \neq [\rho(\sigma_2)]_{\alpha\beta} [\rho(\sigma_1)]_{\beta\gamma}$, as partículas obedecem estatística não abeliana. A menos que comutem para a troca de partículas, caso do qual a estatística de tranças das partículas seria abeliana, trançar quasipartículas causa rotações não triviais no espaço de Hilbert degenerado das muitas quasipartículas. Além disso, será basicamente verdade que em baixas energias que a única maneira de realizar transformações unitárias não triviais nesse espaço degenerado será trançando quasipartículas. Essa afirmação é equivalente a dizer que nenhuma perturbação local pode ter elementos de matriz não nulos nesse espaço degenerado.

Um sistema com partículas anyônicas devem em geral ter múltiplos tipos de anyons. Por exemplo, em um sistema com anyons Abelianos e estatística θ , um estado limitante para tais partículas tem estatística 4θ . Mesmo que não existam tais estados limitantes, podemos querer juntar esses anyons longe de todas as outras partículas. Então ambos anyons podem ser aproximados por uma única partícula cujos números quânticos são obtidos pela combinação dos números quânticos das outras duas partículas incluindo os números topológicos. Como resultado, uma descrição completa do sistema deve incluir, essas especies de partículas ‘maiores’. Por exemplo, se existirem $\theta = \pi/m$

anyons no sistema, então também existem $\theta = 4\pi/m, 9\pi/m, \dots, (m-1)^2\pi/m$. Já que o parâmetro estatístico é somente bem definido até 2π , $\theta = (m-1)^2\pi/m = -\pi/m$ para m par e $\pi - \pi/m$ para m ímpar. A formação de um novo anyon devido a união de dois anyons é chamado de fusão. Quando uma partícula de estatística $\theta = \pi/m$ é fundida com uma de estatística $-\pi/m$, a estatística resultante é $\theta = 0$. Podemos chamar essa de partícula trivial. Ao que concerne a topologia, tal partícula bosônica é tão útil como o vazio, e portanto a consideraremos como o vácuo.

Com anyons Abelianos que são formados pela composição sucessiva de partículas π/m , a regra de fusão é: $\frac{n^2\pi}{m} \otimes \frac{k^2\pi}{m} = \frac{(n+k)^2\pi}{m}$. Entretanto, com anyons não abelianos, a situação não é tão simples. Assim como com números quânticos ordinários, pode ser que não haja uma única maneira de combinar números quânticos topológicos (e.g. duas partículas de spin-1/2 podem combinar para formar tanto uma de spin-0 ou uma de spin-1). As diferentes possibilidades são chamadas de canais de fusão. Denotaremos essas regras de fusão por

$$\varphi_a \otimes \varphi_b = \sum_c N_{ab}^c \varphi_c. \quad (69)$$

representando o fato de que a fusão de duas partículas de espécies a e b podem resultar em uma de espécie c se $N_{ab}^c \neq 0$. Aqui consideraremos apenas regras de fusão livres de multiplicidade. Aqui a involução $\hat{}$ nos dará a antipartícula de uma dada espécie a . Quando a e \hat{a} se fundem, sempre terão uma forma de se tornarem 1 (vácuo); no caso não Abeliano, elas poderão ou não se fundir para formar outras partículas ainda.

8.1.2 Anyons Emergentes

Nessas últimas considerações mostramos que estatísticas exóticas de tranças são possibilidades teóricas em $(2+1)$ -D, mas essas mesmas não nos dizem onde que poderiam ocorrer na natureza. Elétrons, prótons, átomos, e fótons, são todos ou férmions ou bósons mesmo quando são confinados a se moverem em um plano bidimensional. Entretanto, se um sistema de muitos elétrons (ou bósons, átomos, etc.) confinados a um plano bidimensional tiverem excitações que são perturbações localizadas dos seus estados fundamentais, conhecidas como quase-partículas, então essas quase-partículas podem ser anyons. Quando um sistema tem excitações de quase-partículas acima de seu estado fundamental, é uma fase topológica da matéria.

Vejamos como anyons podem aparecer como uma propriedade emergente de um sistema de muitas partículas. Considere o estado fundamental de um sistema $(2+1)$ -D de elétrons, cujas coordenadas são (r_1, \dots, r_n) . Assumiremos que o estado fundamental está separado dos estados excitados por um gap de energia, como é a situação nos estados de Hall quânticos fracionários em sistemas de elétrons 2D. As excitações eletricamente carregadas de mais baixas energias são conhecidos como quase-partículas ou quase-buracos, dependendo no sinal da sua carga elétrica. Essas quase-partículas são perturbações locais da função de onda dos elétrons correspondendo a uma quantidade quantizada da carga total.

Agora podemos introduzir à Hamiltoniana do sistema um potencial escalar composto de vários “buracos” locais, cada um capaz de confinar apenas uma quase-partícula. Esses buracos podem ser criados por impurezas, pequenas portas, ou pelo potencial criado por efeito de microscópios. Denotaremos as posições desses buracos por (R_1, \dots, R_k) , e assumiremos que essas posições são bem espaçadas umas das outras comparado com escalas microscópicas. Um estado com quase-partículas nessas posições pode ser visto como um estado excitado da Hamiltoniana do sistema sem os buracos.

Nesse sistema nos concentramos no efeito de passar essas quase-partículas em volta umas das outras. Imaginamos fazer as coordenadas dessas partículas $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_k)$ adiabaticamente dependente do tempo. Em particular, consideramos uma trajetória em que a configuração final

de quase-partículas é apenas uma permutação da configuração inicial. Se a função de onda do estado fundamental valor único valor com relação as variáveis (R_1, \dots, R_k) , e se houver apenas um estado fundamental para um dado conjunto de R'_i s, então o estado fundamental final após entrelaçamento das quase-partículas é idêntico ao inicial a menos de uma fase. Parte dessa fase é simplesmente a fase dinâmica que depende da energia do estado das quase-partículas e o tempo levado no processo. No limite adiabático, isso é $\int dt E(R(t))$. Também ocorre uma fase geométrica que não depende de quanto o processo demora. Esta é a fase de Berry [11]

$$\alpha = i \oint d\mathbf{R} \cdot \langle \psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \psi(\mathbf{R}) \rangle \quad (70)$$

onde $|\psi(\mathbf{R})\rangle$ é o estado fundamental com as quase-partículas nas posições \mathbf{R} , e onde a integral é tomada ao longo da trajetória $\mathbf{R}(t)$. É dependente somente na trajetória tomada pelas partículas e não no quão longa essa trajetória pode ser.

Essa fase α possui uma parte que depende apenas na geometria do caminho percorrido (tipicamente proporcional a área encoberta pelos laços percorridos), e uma parte θ que depende somente na topologia dos laços criados. Se $\theta \neq 0$, então as excitações de quase-partículas do sistema são anyons. Em particular, se considerarmos o caso onde apenas duas quase-partículas são trocadas de lugar no sentido horário (sem passar ao redor de outras quase-partículas), θ é o angulo estatístico das quase-partículas.

Os requerimentos para que quase-partículas obedecem estatística não Abelianas são três: Primeiro, o estado fundamental das N -quase-partículas deve ser degenerado. Em geral, a degenerescência não será exata, mas deve desaparecer exponencialmente quando aumentamos a distancia de separação entre as quase-partículas. Segundo, a troca adiabática das quase-partículas aplica uma transformação unitária no estado fundamental, cuja parte não Abelianas é determinada somente pela topologia da trança, enquanto sua parte não topológica é Abelianas. Terceiro, a única maneira de se realizar operações unitárias no espaço de estados fundamentais degenerados, desde que as partículas sejam mantidas distantes umas das outras, é por trançamento.

A degenerescência do estado fundamental de N -quase-partículas depende das quase-partículas estarem a uma certa distancia umas das outras. Quando as quase-partículas são colocadas próximas de mais, a degenerescência termina. Em outras palavras, os diferentes canais de fusão são divididos em energia. Essa dependência é análoga a forma como a energia de sistemas de spins depende dos números quânticos internos, quando os spins são aproximados o acoplamento se torna significativo. A divisão entre os vários canais de fusão pode ser usado na medição do estado quântico interno, medição que é importante no contexto da computação quântica.

8.1.3 Estados de Hall quânticos não Abelianos

Agora podemos voltar a nossa discussão dos sistemas de Hall quânticos como possíveis sistemas de anyons não-abelianos. O efeito de Hall quântico realizado em sistemas eletrônicos bidimensionais sobre atuação de um forte campo magnético, é caracterizado por um gap entre o estado fundamental e os estados excitados (incompressibilidade); uma resistividade longitudinal dispersível $\rho_{xx} = 0$, que implica num fluxo de corrente sem dissipação; e a quantização da resistividade de Hall para valores $\rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$, com ν sendo um inteiro (efeito Hall quântico inteiro), ou fracional (efeito de Hall quântico fracional). Esses valores para a resistividade implicam em valores depressíveis para a condutividade longitudinal $\sigma_{xx} = 0$ e uma condutividade quantizada de Hall $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$.

Para o efeito Hall quantizado, começamos ignorando as interações de Coulomb elétron-elétron, então os auto-estados de energia da Hamiltoniana de um elétron na presença de campo magnético é $H_0 = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_i))^2$ se dividem em um conjunto de níveis equidistantes chamados níveis de

Landau. Em um calibre simétrico, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x}$, uma base das funções de onda de uma partícula única no nível mais baixo de Landau é dado por $\varphi_m(z) = z^m \exp(-|z|^2/4l_0^2)$, onde $z = x + iy$. Se os elétrons forem confinados a um disco de área A perfurado por um fluxo magnético $B \cdot A$, então existem $N_\Phi = BA/\Phi_0 = BAe/hc$ estados no nível mais baixo de Landau (e em cada nível subsequente), onde B é o campo magnético; h , c , e e são a constante de Planck, velocidade da luz, e carga do elétron, respectivamente; e $\Phi_0 = hc/e$ é o fluxo quântico. Na ausência de desordem, esses estados de partículas únicas são todos precisamente degenerados. Quando o potencial químico está entre o nível de Landau ν e o $\nu + 1$, a condutância de Hall toma o valor quantizado de $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ e $\sigma_{xx} = 0$. A densidade bidimensional do elétron, n , está relacionada a ν pela fórmula $n = \nu eB/(hc)$. Na presença de potenciais periódicos e/ou desordem (e.g. impurezas), os níveis de Landau se expandem em bandas.

Desprezar as interações de Coulomb é justificável quando um número inteiro de níveis de Landau estão preenchidos, desde que a energia entre os níveis de Landau, $\hbar\omega_c = \frac{\hbar eB}{mc}$ é muito maior que a escala da energia de Coulomb $\frac{e^2}{l_0}$, onde $l_0 = \sqrt{hc/eB}$ é o comprimento magnético. Quando a densidade eletrônica é tal que um nível de Landau está somente parcialmente preenchido, as interações de Coulomb podem voltar a ser importantes.

Na ausência de desordem, um nível de Landau parcialmente preenchido possui conjuntos de estados de multi-partículas altamente degenerados. Essa degenerescência é quebrada pela interação elétron-elétron. Por exemplo, quando o número de elétrons for $N = N_\Phi/3$, i.e. $\nu = 1/3$, o estado fundamental é não degenerado e existe um gap para todas as excitações. Quando elétrons interagem através da repulsão de Coulomb, o estado de Laughlin

$$\Psi = \prod_{i>j} (z_i - z_j)^3 e^{\sum_i |z_i|^2/4l_0^2} \quad (71)$$

é uma aproximação do estado fundamental. Tais estados podem até sobreviver mesmo com desordem desde que seja fraca o suficiente comparada com o gap para os estados excitados.

Excitações de quasipartículas acima dos estados de Hall quânticos fracionais, tais como o estado de Laughlin com $\nu = 1/3$ são exemplos de anyons emergentes. Explicitamente calculando a fase de Berry mostra que em excitações de quasipartículas acima dos estados de Laughlin $\nu = 1/k$ tem carga e/k e ângulo estatístico $\theta = \pi/k$ ([4]).

Os estados de Laughlin, com $\nu = 1/k$, são os estados de Hall fracionários quânticos, tanto teoricamente como experimentalmente. Para explicar as frações mais complexas, com ν não na forma $\nu = 1/k$, Haldane e Halperin ([28],[29]) usaram uma construção hierárquica na qual partículas com estados $\nu = 1/k$ podem se condensar para formar estados quantizados. Dessa forma estados de Hall quantizados podem ser construídos de a partir de qualquer fração com denominador em ν ímpar. Todos esses estados tem estatística Abelianas fracional.

8.1.4 Possíveis Estados não-Abelianos

A descoberta de estados de Hall com o denominador no fator de preenchimento [60], o $\nu = 5/2$, foi o a primeira indicação de que nem todos os estados de Hall podem ser descritos pela construção hierárquica. Independentemente foi descoberto por Fubini e Lutken [26]; Moore e Read [40] que teorias de campos conformes dão uma diversidade de formas de escrever funções de onda de teste para estados de Hall quânticos. Dessa forma, a chamada função de onda Pfaffian de Moore-Read foi construída

$$\Psi_{\text{Pf}} = \text{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \prod_{i<j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_i |z_i|^2/4l_0^2} \quad (72)$$

onde o Pfiffian é a raiz quadrada do determinante de uma matriz anti-simétrica, ou de forma equivalente, a soma anti-simetrizada sobre pares:

$$\text{Pf}\left(\frac{1}{z_j - z_k}\right) = \mathcal{A}\left(\frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} \dots\right) \quad (73)$$

Para m par, este é um estado de Hall quântico com denominador par no nível de Landau mais baixo. Em 1991 Moore e Read, sugeriram que as excitações das quasipartículas desses estados exibiriam estatística não Abelianas [40]. Essa função de onda é o estado fundamental exato de uma interação de 3 corpos repulsiva; também são uma aproximação para o estado fundamental de interações mais realísticas. Em particular, as excitações de quasipartículas no estado acima possuem uma matriz de transformação entre os vários estados degenerados, $\psi_a \rightarrow M_{ab}\psi_b$,

$$\begin{aligned} M_{ab} &= \mathcal{P}\exp\left(i \oint d\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^{2\pi} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n [\dot{\mathbf{R}}(s_1) \cdot \mathbf{m}_{aa_1}(\mathbf{R}(s_1)) \dots \dot{\mathbf{R}}(s_n) \cdot \mathbf{m}_{a_nb}(\mathbf{R}(s_n))] \end{aligned} \quad (74)$$

($m_{ab} = \langle \psi_a(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \psi_b(\mathbf{R}) \rangle$ onde os $|\psi_a(\mathbf{R})\rangle$ são os g estados fundamentais degenerados com $a = 1, \dots, g$) onde somente sua parte topológica será não abeliana, i.e., a regra de troca de estados fundamentais degenerados dependerá puramente da topologia das tranças realizadas na troca de partículas. Existem 2^{n-1} estados com $2n$ quase-buracos em posições fixas, dessa forma estabelecendo a degenerescência dos estados de muitas quase-partículas que é necessária para estatísticas não Abelianas [47].

8.2 Teoria de Chern-Simons

Considerando o exemplo mais simples de TQCT, a teoria de Chern-Simons abeliana, que é relevante para o caso dos estados de Laughlin com frações de preenchimento $\nu = 1/k$, com k ímpar. É útil analisar esses estados em termos de uma teoria efetiva de baixas energias. Como os sistemas de Hall quânticos tem gaps, devemos ser capazes de descrever o sistema por uma teoria de campos com poucos graus de liberdade. Para tanto, consideramos a ação

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int dt \int d^2\mathbf{r} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \quad (75)$$

onde k é um inteiro e ε é o tensor anti-simétrico. Aqui, a é um campo de calibre $U(1)$ e os índices μ, ν, ρ tomam valores 0 para a direção temporal e 1, 2 para o espaço. Essa ação representa os graus de liberdade de baixas energias do sistema, que são puramente topológicos.

O campo de calibre de Chern-Simons a nessa ação é um grau de liberdade emergente que codifica a física de baixas energias no sistema de Hall quântico. Apesar de nesse caso particular, este calibre está associado a densidade de cargas eletrônicas, também consideraremos sistemas nos quais os campos de calibre de Chern-Simons emergentes não podem ser relacionados de forma simples aos graus de liberdade eletrônicos.

Na presença de um campo magnético externo e quase-partículas, a ação toma a forma:

$$S = S_{CS} - \int dt \int d^2\mathbf{r} \left(\frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho + j_\mu^{qp} a_\mu \right) \quad (76)$$

onde j^{qp} é a corrente de quase-partículas, $j^{qp} = \rho^{qp}$ é a densidade de quase-partículas, $j^{qp} = (j_1^{qp}, j_2^{qp})$ é a componente espacial da corrente de quase-partículas, e A_μ é um campo eletromagnético externo. Assumimos que as quase-partículas não são dinâmicas, mas ao invés movem-se ao longo de uma trajetória clássica fixa que determina j_μ^{qp} . A corrente elétrica é:

$$j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho \quad (77)$$

Como a ação é quadrática, é completamente solúvel, e podemos integrar o campo a_μ para obter a resposta da corrente ao campo magnético externo. O resultado de tal cálculo é precisamente a condutividade de Hall quantizada $\sigma_{xx} = 0$ e $\sigma_{xy} = \frac{1}{k} e^2/h$.

A equação de movimento obtida ao variar o a_0 é o vínculo de Chern-Simons:

$$\frac{k}{2\pi} \nabla \times \mathbf{a} = j_0^{qp} + \frac{1}{2\pi} B \quad (78)$$

De acordo com essa equação, cada quase-partícula tem fluxo de Chern-Simons com um fator de $2\pi/k$ (Assumimos que o campo magnético é mantido fixo). Consequentemente, tem uma carga elétrica $1/k$. Devido ao fluxo de Chern-Simons, outra quase-partícula se movendo nesse campo de Chern-Simons absorve uma fase de Aharonov-Bohm. A ação associada a mover uma quase-partícula ao redor da outra é da forma

$$\frac{1}{2} k \int dt \int d^2 \mathbf{r} \mathbf{j} \cdot \mathbf{a} = kQ \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \quad (79)$$

onde Q é a carga da quase-partícula e a integral final é apenas o fluxo de Chern-Simons que passa pela área encoberta pelo caminho. As fases geradas nesse processo dão as quase-partículas dessa teoria de Chern-Simons uma estatística $\theta = \pi/k$ abeliana de tranças.

Podemos agora olhar para a teoria de Chern-Simons não Abelianas. Essa TQCT descreve anyons não abelianos. A ação pode ser escrita sobre uma variedade \mathcal{M} arbitrária da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_{CS}[a] &= \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{tr} \left(a \wedge da + \frac{2}{3} a \wedge a \wedge a \right) \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(a_\mu^a \partial_\nu a_\rho^a + \frac{2}{3} f_{abc} a_\mu^a a_\nu^b a_\rho^c \right) \end{aligned} \quad (80)$$

Nessa expressão, o campo de calibre toma valores na álgebra de Lie do grupo G . Os f_{abc} são constantes de estrutura da álgebra de Lie que são simplesmente ϵ_{abc} para o caso de $SU(2)$. Um campo de matéria transformando na representação de spin- j do grupo de calibre $SU(2)$ acoplarão a combinação $a_\mu^a x_a$, onde x_a são as três matrizes geradoras da álgebra $su(2)$ na representação spin- j . Para um grupo de calibre G e constante de acoplamento k , denotaremos tal teoria por G_k .

Para vermos que a teoria de Chern-Simons é uma TQCT, notamos primeiramente que a ação 80 é invariante sobre qualquer difeomorfismo de \mathcal{M} a si mesmo, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. A invariância sobre difeomorfismos ocorre devido a ausência do tensor métrico na ação de Chern-Simons.

Antes de analisarmos a física dessa ação, fazemos duas observações. Primeiramente, pela presença do tensor $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$, a ação muda de sinal sobre transformações de paridade ou reversão temporal. As fases topológicas que aparecem no efeito de Hall quântico fracional são chirais, i.e. quebram simetrias de paridade e reversão temporal devido ao forte campo magnético.

Segundo, a ação de Chern-Simons não é completamente invariante sobre transformações de calibre $a_\mu \rightarrow g a_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}$, onde $g : \mathcal{M} \rightarrow G$ é uma função qualquer na variedade tomando

valores no grupo G . Em uma variedade fechada, é invariante somente sobre transformações de calibre “pequenas”. Suponha que a variedade \mathcal{M} é a esfera S^3 . Então as transformações de calibre são mapas de $S^3 \rightarrow G$, que são classificadas topologicamente de acordo com o grupo de homotopia $\pi_3(G)$. Para qualquer grupo simples compacto G , $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$, então as transformações de calibre podem ser classificadas de acordo com o número de “winding”. Sobre as transformações com winding m ,

$$S_{CS}[a] \rightarrow S_{CS}[a] + 2\pi km \quad (81)$$

[17]. Enquanto a ação é invariante sobre “pequenas” transformações de calibre, que podem ser conectadas continuamente a identidade e tem $m = 0$, não é invariante sobre transformações “grandes” ($m \neq 0$). Entretanto basta que $\exp(iS)$ seja invariante sobre calibre, que será o caso desde que o k seja inteiro. O requerimento de que o nível k seja inteiro é um exemplo de uma estrutura específica das TQCTs. Uma pequena perturbação na Hamiltoniana microscópica não pode mudar o valor de k de forma contínua na teoria efetiva de baixas energias; somente uma perturbação forte o suficiente para mudar k por um inteiro pode fazer isso.

Para melhor estudar as teorias de Chern-Simons, é útil decompor a variedade \mathcal{M} do espaço tempo em um produto de uma superfície espacial e o tempo, $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$. Em tal variedade, a teoria de Chern-Simons é uma teoria dos estados fundamentais de um sistema topologicamente ordenado em Σ . Não existem estados excitados na teoria de Chern-Simons já que a Hamiltoniana desaparece. Isso é visto mais facilmente com o calibre $a_0 = 0$, onde o momento canonicamente conjugado a a_1 é $-\frac{k}{4\pi}a_2$, e o momento canonicamente conjugado a a_2 é $\frac{k}{4\pi}a_1$ de forma que

$$\mathcal{H} = \frac{k}{4\pi} \text{tr}(a_2 \partial_0 a_1 - a_1 \partial_0 a_2) - \mathcal{L} = 0 \quad (82)$$

Note que essa característica especial de uma ação apenas com termo de Chern-Simons. Se a ação tivesse tanto um termo de Chern-Simons como um termo de Yang-Mills, então a Hamiltoniana não desapareceria, e a teoria teria tanto estados fundamentais e excitados com o gap finito. No caso de energias menores que o gap podemos desconsiderar o termo de Yang-Mills e analisar apenas o termo de Chern-Simons.

Apesar da Hamiltoniana desaparecer, a teoria ainda não é trivial pois ainda é preciso resolver o vínculo que segue de variar a_0 . Considerando o caso $G = SU(2)$. Os vínculos resultam:

$$\epsilon_{ij} \partial_i a_j^a + f^{abc} a_1^b a_2^c = 0 \quad (83)$$

onde $i, j = 1, 2$. O lado esquerdo dessa equação é a força do campo de calibre a_i^a . Já que a força do campo deve ser nula, podemos sempre realizar uma transformação de calibre para que $a_i^a = 0$ localmente. Assim essa teoria não tem graus de liberdade locais. Entretanto, para algumas configurações de campo satisfazendo o vínculo, podem existir obstruções topológicas globais que nos previne de fazer o campo de calibre zero em todo o espaço. Claramente isso só pode ocorrer caso Σ seja não trivial topologicamente.

8.2.1 TQCTs e propriedades de quase-partículas

Antes de continuar com as teorias de Chern-Simons podemos rapidamente discutir algumas propriedades topológicas das quase-partículas. Olhando para a esfera com n furos, $\Sigma = S^2 - P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$, i.e. a esfera S^2 com os pontos P_1, \dots, P_n deletados, que é equivalente a $n - 1$ quase-partículas no plano (com o ultimo ponto sendo colocado no ∞). Isso nos permite estudar as propriedades topológicas das excitações de quase-partículas puramente através das propriedades do estado fundamental. Para vermos como tranças surgem dessa forma, é útil notar que difeomorfismos devem ter representações unitárias no espaço de Hilbert do estado fundamental

(devem comutar com a Hamiltoniana). Difeomorfismos que podem ser continuamente deformados para a identidade devem ter ação trivial no espaço de Hilbert da teoria já que não existe nenhum grau de liberdade local. Entretanto, difeomorfismos “grandes” podem ter representações unitárias não triviais no espaço de Hilbert da teoria. Tomando o quociente sobre mapas difeomorfos obtemos o grupo das classes de mapeamentos.

No caso de dipolos de partículas podemos considerar as trajetórias dessas partículas como fitas. Nas fitas o twist de Dehn não será necessariamente trivial (CFF). Aqui um twist de Dehn será um torção na fita. Engrossar a trajetória de uma partícula para uma fita é chamado de *framing*. Uma dada trajetória tem múltiplas escolhas de framing, correspondendo a quantas vezes a fita torce. O framing é essencial nas teorias de Chern-Simons já que o fluxo está junto da carga na formula para o vínculo. Colocar o fluxo e a carga em lados opostos da fita podemos associar uma fase bem definida a trajetória da partícula. Do contrario, não conseguiríamos saber quantas vezes a carga atravessou o fluxo.

Qualquer transformação atuando em uma partícula pode resultar apenas em uma fase; a fase correspondente é chamado parâmetro de torção Θ_a . Geralmente, escrevemos $\Theta_a \equiv e^{2\pi i h_a}$, onde h_a é chamado de spin topológico da partícula. Para anyons abelianos, é o parâmetro estatístico, $\theta = 2\pi i h_a$.

As propriedades do espaço fundamental em superfícies, incluindo a esfera com n furos e o torus, podem ser construídos a partir de modelos de espaços vetoriais mais primitivos da seguinte forma. Uma superfície fechada arbitraria pode ser dividida em uma coleção de esferas com 3 furos que são coladas em suas fronteiras. O espaço de Hilbert dessa configuração é denotado V_{ab}^c , se a, b e c são os tipos de partículas nos três furos. Se os a e b forem fundidos, sobrará uma esfera com dois furos. A dimensão do espaço de Hilbert será dado pelo fator de multiplicidade de fusão $N_{ab}^c = \dim(V_{ab}^c)$. O espaço de Hilbert obtido ao colar esferas de 3 furos é obtido pelo produto tensorial dos V 's somando sobre os tipos de partículas onde a colagem é feita.

O espaço de Hilbert de uma esfera com n buracos com carga topológica a em cada furo pode ser construída colando uma cadeia de $(n - 2)$ esferas de 3 furos. O espaço de Hilbert resultante $V_{a\dots a}^1 = \bigoplus_{b_i} V_{aa}^{b_1} V_{ab_1}^{b_2} \dots V_{ab_{n-3}}^a$. Uma notação gráfica simples para um conjunto de estados de base desse espaço de Hilbert é dado pela cadeia de fusão A dimensão desse espaço é $N_{aa}^{b_1} N_{ab_1}^{b_2} \dots N_{ab_{n-3}}^a$.

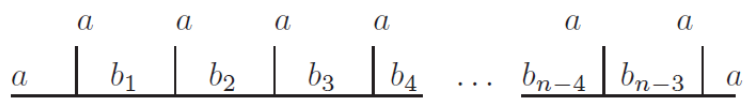


Figura 71: Fonte [46].

Podemos escrever esses fatores da seguinte maneira $(N_a)_b^c$, dessa forma vemos os números de multiplicidade como as entradas de uma matriz N_a associada a quase-partícula de especie a . Denotaremos o maior autovalor de uma matriz N_a por d_a . Então o espaço de Hilbert de M quase-partículas de tipo a tem dimensão d_a^{M-2} para M grande. Por esse motivo, d_a é chamado de dimensão quântica da quase-partícula a . Para partículas abelianas $d_a = 1$ já que o espaço de Hilbert de muitas partículas é unidimensional. Partículas não abelianas tem $d_a > 1$. Perceba que d_a não é em geral um inteiro, que é um sintoma da não localidade do espaço de Hilbert: este não é o produto tensorial de espaços de Hilbert d_a -dimensionais associados localmente com cada partícula.

8.2.2 Surgimento do termo de Chern-Simons no FQHE

Aqui, usando transmutação estatística baseada em um calibre de Chern-Simons, a teoria efetiva de um sistema de Hall quântico será discutida. Começamos com o problema de um sistema de N férmions. Assumiremos que devido ao efeito Zeemann todos os spins estão alinhados, e não consideraremos os graus de liberdade associados aos spins. Na primeira quantização, a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (84)$$

Aqui, \mathbf{A} e A_0 são os potenciais vetorial e escalar magnético. Já que estamos lidando com férmions, a função de onda Ψ no problema de autovalor,

$$\mathcal{H}\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (85)$$

deve ser anti-simétrico:

$$\begin{aligned} P\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \Psi(\mathbf{r}_{P(1)}, \dots, \mathbf{r}_{P(N)}) \\ &= (-1)^P \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (86)$$

Aqui, P atua em $(1, \dots, N)$ como um operador de permutação de índices $(P(1), \dots, P(N))$, e $(-1)^P$ é $+1$ no caso em que P puder ser escrito como um número par de permutações, e -1 no caso de número ímpar.

A seguir consideramos o problema bosônico. Entretanto aqui não usaremos a Hamiltoniana 84, então introduzimos um novo vetor potencial \mathbf{a} para escrevermos

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + e\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)]^2 + \sum_{i=1}^N eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j). \quad (87)$$

Aqui, $\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)$ é dada por

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \sum_{j(\neq i)} \nabla_i \alpha_{ij}, \quad (88)$$

com $\phi_0 = 2\pi/e$. O fator α_{ij} é o angulo entre o eixo x e o vetor $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$. Aqui, o valor é determinado apenas até 2π , mas quando atuando com ∇ , o resultado se torna não ambíguo. Esse angulo é dado explicitamente por

$$\alpha_{ij} = \tan^{-1} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \equiv \alpha(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (89)$$

e assim podemos escrever o potencial da forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \left(\frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \sum_{j(\neq i)} \frac{y_j - y_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}, -\frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \sum_{j(\neq i)} \frac{x_j - x_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} \right) \quad (90)$$

Como estamos lidando com bósons, a função de onda do problema de autovalor,

$$\mathcal{H}'\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = E'\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (91)$$

deve ser totalmente simétrica:

$$P\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (92)$$

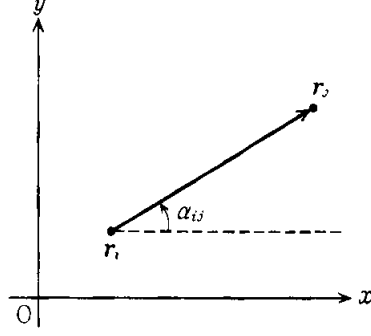


Figura 72: Definindo α_{ij} ; Fonte [43]

Para conectarmos o sistema fermiônico e o sistema bosônico descrito acima, introduzimos o operador unitário a seguir:

$$U = \exp \left[i \sum_{i < j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right]. \quad (93)$$

Como α_{ij} é uma função dos operadores $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, esse operador é independente de \mathbf{p}_i . Calculamos $U \mathbf{p}_i U^{-1}$ como

$$\begin{aligned} U \mathbf{p}_i U^{-1} &= U(-i \nabla_i U^{-1}) + U U^{-1}(-i \nabla_i) \\ &= \exp \left[i \sum_{i < j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right] \left(- \sum_{j(\neq i)} \frac{\theta}{\pi} \nabla_i \alpha_{ij} \right) \exp \left[- i \sum_{i < j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right] + \mathbf{p}_i \\ &= -e \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i. \end{aligned} \quad (94)$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned} U[\mathbf{p}_i + e \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + e \mathbf{a}(\mathbf{r}_i)]^2 U^{-1} &= \\ &= U[\mathbf{p}_i + e \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + e \mathbf{a}(\mathbf{r}_i)] U^{-1} U[\mathbf{p}_i + e \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + e \mathbf{a}(\mathbf{r}_i)]^2 U^{-1} \\ &= [\mathbf{p}_i + e \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2. \end{aligned} \quad (95)$$

Como U não contém \mathbf{p}_i , $A_0(\mathbf{r}_i)$ e $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ permanecem invariantes quando atuamos U e U^{-1} nos lados da equação. Dessa forma, as relações entre as Hamiltonianas fermiônica e bosônica a seguir valem:

$$\mathcal{H} = U \mathcal{H}' U^{-1} \quad \text{ou} \quad U^{-1} \mathcal{H} U = \mathcal{H}'. \quad (96)$$

Agora, suponha que o problema de autovalor do sistema bosônico esteja resolvido. Chamando essa solução de ϕ . Escreveremos

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = U \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (97)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \Psi &= \mathcal{H} U \phi = U (U^{-1} \mathcal{H} U) \phi = \\ &= U \mathcal{H}' \phi = U (E' \phi) = E' (U \phi) = E' \Psi. \end{aligned} \quad (98)$$

Concluimos que Ψ é uma autofunção da \mathcal{H} com o mesmo autovalor de energia E' . Podemos ainda provar que Ψ é uma função fermiônica. Para vermos isso, escrevemos partes de U dependendo de

\mathbf{r}_n e \mathbf{r}_l explicitamente (colocando $n < l$):

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) &= \\
&= \exp \left[i \sum_{i < j; \neq n, l}^N \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} + i \sum_{j=n+1; (j \neq l)}^{n-1} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{nj} + i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{in} + i \sum_{j=l+1}^N \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right. \\
&\quad \left. + i \sum_{i=1; (i \neq n)}^{l-1} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{il} + i \frac{\theta}{\pi} \alpha_{nl} \right]. \tag{99}
\end{aligned}$$

Escreveremos $i\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N)$ para a função aparecendo na exponencial. Examinaremos como a fase Φ muda ao mudarmos \mathbf{r}_n e \mathbf{r}_l forem trocados:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_{nl} &\equiv \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N) - \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) \\
&= \frac{\theta}{\pi} \sum_{m=n+1}^{l-1} [\alpha_{lm} - \alpha_{ml} + \alpha_{mn} - \alpha_{nm}] + \frac{\theta}{\pi} (\alpha_{ln} - \alpha_{nl}). \tag{100}
\end{aligned}$$

Fica claro da figura 72 que $\alpha_{ij} - \alpha_{ji}$ é a mudança no ângulo que surge ao trocarmos os lugares das partículas i e j , isto é

$$\alpha_{ij} - \alpha_{ji} = \pm\pi. \tag{101}$$

Aqui $+$ corresponde a trocarmos as partículas de forma anti-horária e $-$ ao trocarmos de forma horária. No caso em que

$$\theta = (2k + 1)\pi \tag{102}$$

obtemos,

$$\Delta\Phi_{nl} = \sum_{n+1}^{l-1} (2\pi \text{ ou } 0 \text{ ou } -2\pi) \frac{\theta}{\pi} \pm \theta \tag{103}$$

e o primeiro termo não contribui no expoente. Conclui-se que

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) &= \\
&= e^{i\Delta\Phi_{nl}} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N) \\
&= e^{i\pm\theta} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N) \\
&= -U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N) \tag{104}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) &= \\
&= U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) \\
&= -U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N) \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\
&= -\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N). \tag{105}
\end{aligned}$$

Usando o fato de que a função de onda para bósons é totalmente simétrica. Dessa forma, mostramos que para $\theta = (2k + 1)\pi$, $\Psi = U\phi$ é autofunção da Hamiltoniana do sistema fermiônico.

A partir dessa discussão, se torna claro que U contribui uma fase $e^{i\theta}$ quando as partículas são trocadas. O vetor de potencial $\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)$ interage com os bósons, e essa transformação de fase surge como o efeito Aharonov-Bohm. A equação para esse campo pode ser interpretada como um vetor de potencial criada por uma partícula em \mathbf{r}_j , atuando em uma partícula na posição \mathbf{r}_i .

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \left(\frac{-y}{|\mathbf{r}|^2}, \frac{x}{|\mathbf{r}|^2} \right) = \frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi r} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{106}$$

é o vetor potencial com força $\phi_0(\theta/\pi)$ na origem.

Para um caminho fechado C ao redor da origem, obtemos

$$\oint_C \mathcal{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\theta}{\pi} \int_0^{2\pi} r d\varphi \frac{1}{r} = \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \quad (107)$$

e devido ao teorema de Stokes

$$\oint_C \mathcal{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int d^2\mathbf{r} \nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}) \quad (108)$$

evidentemente, obtemos

$$\nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}) = \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \delta(\mathbf{r}) \hat{z}. \quad (109)$$

Assim o campo adicionado a Hamiltoniana bosônica pode ser escrito da forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \sum_{j(\neq i)} \mathcal{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (110)$$

A partícula na posição \mathbf{r}_j pode ser entendida como a fonte do fluxo magnético $\phi_0(\theta/\pi)$, criando um vetor potencial em \mathbf{r}_i .

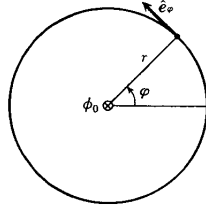


Figura 73: Vetor potencial ao redor do fluxo ϕ_0 ; Fonte [43]

Para descrevermos a componente temporal do campo de calibre a_0 , usamos o formalismo da segunda quantização. Nesse formalismo a Hamiltoniana 87 pode ser escrita como

$$\mathcal{H}' = \int d^2\mathbf{r} \phi^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{2m} [-i\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r}) + e\mathbf{a}(\mathbf{r})]^2 - \mu + eA_0(\mathbf{r}) \right) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (111)$$

Aqui, $\phi^\dagger(\mathbf{r})$ e $\phi(\mathbf{r})$ são os operadores de criação e aniquilação bosônica, respeitando a relação de comutação

$$[\phi(\mathbf{r}), \phi^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (112)$$

e $\rho(\mathbf{r}) = \phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})$ é a densidade de partículas. Dessa forma o campo se torna

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}' \mathcal{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (113)$$

Usando 109, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{r}) &\equiv \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathcal{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \\ &= \int d^2\mathbf{r}' \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \hat{z} \\ &= \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \rho(\mathbf{r}) \hat{z} \end{aligned} \quad (114)$$

Assim a densidade de fluxo é proporcional a densidade de partículas $\rho(\mathbf{r})$. Isso é, para cada partícula, um fluxo de calibre θ/π é colada, e a combinação de bósons com a corrente de fluxo de calibre corresponde ao um férmion.

Tomando a divergência de 113, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = 0. \quad (115)$$

Essa equação corresponde exatamente ao calibre de Coulomb. Finalmente, na presença de um campo externo A_μ , a integral de caminho do sistema é escrita

$$Z[A_\mu] = \int \mathcal{D}a_\mu \mathcal{D}\phi \exp \left[iS_a[a_\mu] + iS_\phi[A_\mu + a_\mu, \phi] \right], \quad (116)$$

onde S_a e S_ϕ são dadas por

$$S_a[a_\mu] = \int dt \int d^2\mathbf{r} \frac{\pi e}{\theta \phi_0} \epsilon_{\alpha\beta} a_0 \partial_\alpha a_\beta \quad (117)$$

$$\begin{aligned} S_\phi[A_\mu + a_\mu, \phi] = & \int dt \int d^2\mathbf{r} \left[\phi^\dagger (i\partial_t - e(A_0 + a_0) + \mu) \phi \right. \\ & \left. - \frac{1}{2m} |(-i\nabla + e(\mathbf{A} + \mathbf{a}))\phi|^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} \int dt \int d^2\mathbf{r} \int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (118)$$

Essas equações para a função de partição e ações de calibre e com termo bosônico são validas apenas no calibre de Coulomb, e o sistema como está não é invariante sobre calibre.

Em um calibre geral, o primeiro termo S_a tem que ser substituído pelo termo de Chern-Simons

$$S_{C.S.}[a_\mu] = \int dt \int d^2\mathbf{r} \frac{\pi e}{2\theta\phi_0} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda. \quad (119)$$

Resumindo, o sistema bidimensional fermiônico pode ser reformulado como um sistema bosônico usando a ação de Chern-Simons e a ação S_ϕ escolhendo um calibre e realizando a integral de caminho com relação ao campo de calibre e ao campo bosônico.

Agora podemos derivar $\sigma_{xy} = \nu(e^2/h)$. Para tanto consideramos um anel, onde o fluxo magnético Φ flui através do buraco no meio. Um campo magnético constante B atua no anel próprio. Consideramos as duas integrais seguintes ao redor de um caminho fechado C ao redor do anel:

$$I_a(C) = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}, \quad (120)$$

$$I_A(C) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (121)$$

Aqui o efeito de Meissner do sistema bosônico significa que “a quantização fluxo magnético” com respeito ao campo $\mathbf{A} + \mathbf{a}$ ocorre, e os mínimos da energia livre correspondendo a diferentes fluxos magnéticos são separados por barreiras de energia microscópicas. Portanto, mesmo quando Φ é mudado adiabaticamente, $I_a(C) + I_A(C)$ permanece constante durante o processo. Concluimos que

$$\frac{dI_A(C)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dI_a(C)}{dt} \quad (122)$$

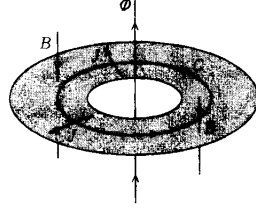


Figura 74: Configuração de Anel; Fonte [43]

e que $d\Phi/dt$ do fluxo de calibre de Chern-Simons penetrando a superfície envolvida pela linha de C é repelida por fora. Por outro lado, já que o calibre de Chern-Simons é proporcional a densidade de partículas pela 114, a corrente J que passa por C em uma unidade de tempo é dada por

$$J = (-e) \frac{\pi}{\phi_0 \theta} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (123)$$

Portanto, a diferença de potencial na linha C pode ser calculada usando a equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (124)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} [\Delta V]_C &= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_S (\nabla \times \mathbf{E})_z dS \quad (\partial S = C) \\ &= - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_z dS \\ &= -\frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (125)$$

Já que σ_{xy} é a razão de J por ΔV , finalmente obtemos

$$\sigma_{xy} = \frac{J}{[\Delta V]} = e \frac{\pi}{\phi_0 \theta} = \frac{\pi e^2}{\theta h} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (126)$$

Concluimos que o efeito Meissner ou a quantização do fluxo magnético leva a condutividade σ_{xy} através do campo de calibre de Chern-Simons.

8.3 Computação Quântica Topológica

Aqui podemos ver como anyons não abelianos podem ser usados na computação quântica, visando sua universalidade. Aproximações das avaliações de Jones podem ser vistas como um caso especial da aproximação de invariantes de Links mais gerais.

Cada tipo de anyon não abeliano leva um modelo de computação quântica anyonica. Informação é codificada em uma coleção de vários anyons em posições bem separadas. A falta de evolução contínua devido a $H \equiv 0$ naturalmente protege a informação codificada contra ruídos, e esta é processada pelo trançamento de anyons ao longo de caminhos predefinidos. O resultado computacional é codificado na amplitude do processo, que é acessada fundindo os anyons. A amplitude de criação de um conjunto de anyons, trança-los, e fundi-los de volta pro estado fundamental original do sistema é dado pelos invariantes quânticos de certos links coloridos. Assim computadores quânticos anyonicos aproximam invariantes de links, e são robustos contra erros locais.

8.3.1 Computadores Quânticos Anyonicos

Todo tipo anyonico não abeliano da origem a um modelo de computação quântica anyonica [21]. Portas quânticas são realizadas através de representações dos grupos de tranças. Compilação quântica topológica é a realização, através de tranças, de transformações unitárias desejadas para os algoritmos tais como o de fatoração de Shor [53].

De forma abstrata, um modelo de computação quântica consiste de

1. Uma sequencia de espaços de Hilbert V_n cujas dimensões são exponenciais em n . Para cada n , um estado $|\psi_0\rangle$ para inicializar a computação.
2. Uma coleção de matrizes unitárias em $U(V_n)$ que podem ser compiladas eficientemente classicamente.
3. Um esquema de leitura dos dados baseado na medição dos estados quânticos.

Considere uma CFF unitária com uma espécie de anyon não abeliana x . Seguindo [21], [24], escolhamos um subespaço computacional como

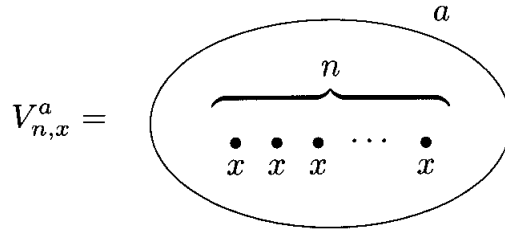


Figura 75: Fonte [58]

Suponhamos que $\Sigma_{g;a_1,\dots,a_l}$ a superfície orientada com genus g e l componentes de fronteira a_1, \dots, a_l . Então a formula de Verlinde,

$$\dim V(\Sigma_{g;a_1,\dots,a_l}) = \sum_{i \in L} s_{0i}^{\chi(\Sigma)} \prod_{j=1}^l s_{ia_j} \quad (127)$$

onde s_{ij} são as entradas da matriz S . Segue que

$$\dim V_{n,x}^a = D^{n-1} \sum_{i \in L} \frac{s_{ia}(s_{ix})^n}{d_i^{n-1}} \quad (128)$$

que é exponencial em n já que x é não abeliano. (Assumindo que $s_{00} = 1/D > 0$.)

Para simular um circuito quântico tradicional $U_L : (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ precisamos encontrar uma trança b fazendo com que o quadrado

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} & \xrightarrow{\iota} & V_{n,x}^a \\ U_L \downarrow & & \downarrow \rho(b) \\ (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} & \xrightarrow{\iota} & V_{n,x}^a \end{array} \quad (129)$$

comute, onde $\rho(b)$ é a matriz da trança e ι é um mergulho eficiente do espaço de n -qubits $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ para os estados fundamentais $V_{n,x}^a$. Isso é muito difícil de ocorrer. Assim tentamos encontrar uma trança que faça o quadrado acima comutar até uma determinada precisão. Para conseguirmos

universalidade para computação quântica, precisamos implementar um conjunto universal de matrizes unitárias. Então a questão de universalidade para computação quântica anyonica se torna a questão: conseguimos encontrar tranças b cujas $\rho(b)$'s aproximam-se de um conjunto universal de portas eficientemente com precisão arbitrária? Para anyons não abelianos, como os espaços de Hilbert sempre crescem exponencialmente, a universalidade é quase garantida se o grupo de representações de tranças dado pela CFF unitária tiver imagem densa nos grupos especiais unitário $SU(V_{n,x}^a)$.

Para ter portas computacionais explicitamente, usamos arvores de fusão como bases do espaço de Hilbert $V_{n,x}^a$. A base das arvores de fusão estão em correspondência 1 – 1 com os gráficos sujeito as regras de fusão em cada vértice trivalente. Os vértices trivalentes também precisam

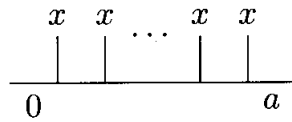


Figura 76: Fonte [58]

ser iniciados caso as regras de fusão não sejam livres de multiplicidade. Trançando dois anyons

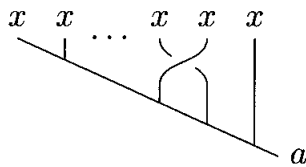


Figura 77: Fonte [58]

x em posições $i, i + 1$ em uma árvore de fusão pode ser representado como acima. A leitura do resultado se da ao fundir os anyons e ler as cargas topológicas resultantes. Essa procedimento pode ser representado da seguinte forma

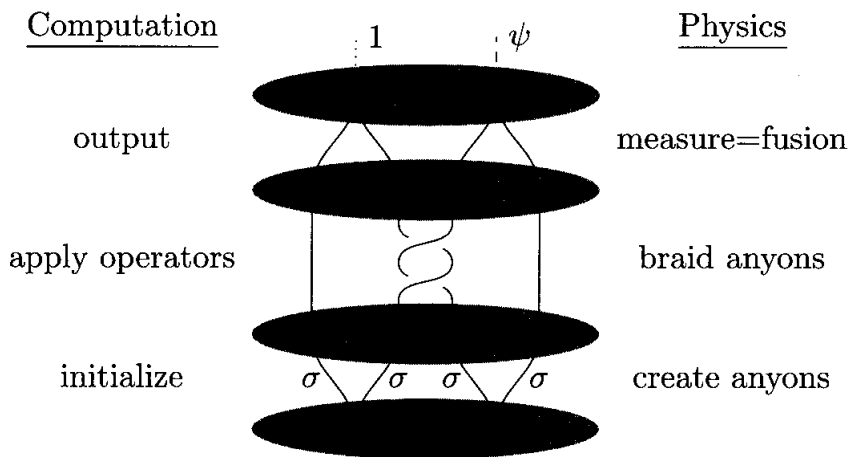


Figura 78: Computação topológica; Fonte [58]

8.3.2 Computador quântico de Ising

Existem três tipos de anyons em uma TQCT de Ising: $1, \sigma, \psi$. A única partícula não abeliana é a σ : $\sigma^2 = 1 \oplus \psi$. As regras de fusão para esse modelo são:

$$\begin{aligned} \sigma \otimes \sigma &= 1 \oplus \psi, & \sigma \otimes \psi &= \sigma, & \psi \otimes \psi &= 1, \\ 1 \otimes x &= x \text{ para } x = 1, \sigma, \psi \end{aligned} \quad (130)$$

A teoria de Ising é uma das coincidências onde as dimensões dos estados fundamentais multi- σ são potências de 2. Especificamente, onde $a = \sigma$ se n é ímpar, e $a = 1$ ou $a = \psi$ se n é par. Então

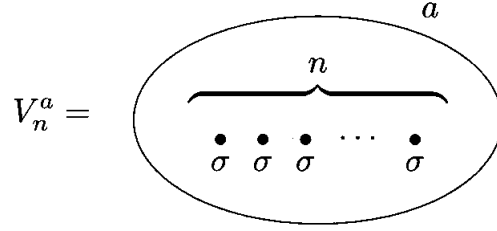


Figura 79: Fonte [58]

$$\dim V_n^a = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}-1} & \text{para } n \text{ par,} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (131)$$

Para construir nosso computador quântico, escolhamos nosso espaço computacional como V_n^1 , $n = \text{par}$. Uma base não normalizada é onde $a_i = \sigma$ e i é par e $a_i = 1$ ou $a_i = \psi$ se i for ímpar. Então

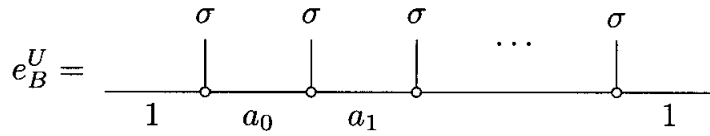


Figura 80: Fonte [58]

é naturalmente identificado com $(n/2 - 1)$ qubits. Nessa definição, precisamos 4σ 's para termos 1 qubit e 6σ 's por 2 qubit.

Portas quânticas serão matrizes unitárias na base escolhida $\{e_B^U\}$. Como um grupo abstrato, a imagem é conhecida $\mathbb{Z}_2^{\frac{n}{2}-1} \times S_n$ projetivamente.

Para um qubit, deixamos $|0\rangle = e_{1\sigma 1\sigma 1}$ e $|1\rangle = e_{1\sigma \psi \sigma 1}$. Então $\rho_4 : B_4 \rightarrow U(2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_1) &= \rho(\sigma_3) = e^{-\pi i/8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ \rho(\sigma_2) &= e^{-\pi i/8} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (132)$$

Surpreendentemente $\rho(\sigma_2^2) = e^{-\pi i/4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é o portão NOT a menos de uma fase. Para dois qubits, se permitirmos

$$\begin{aligned} |00\rangle &= e_{1\sigma 1\sigma 1\sigma 1} & |01\rangle &= e_{1\sigma \psi \sigma 1\sigma 1} \\ |10\rangle &= e_{1\sigma 1\sigma \psi \sigma 1} & |11\rangle &= e_{1\sigma \psi \sigma \psi \sigma 1} \end{aligned} \quad (133)$$

então $\rho(\sigma_3^{-1} \sigma_4 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_3^{-1}) = \text{CNOT}$ a menos de uma fase. O computador de Ising realiza muitas portas de Clifford exatamente, e aproxima o polinômio de Jones e links em 4-raízes da unidade.

8.3.3 Computador quântico de Fibonacci

Só existem dois tipos de anyons na teoria de Fibonacci, 1 e τ , e τ é não abeliano: $\tau^2 = 1 \oplus \tau$. A teoria de Fibonacci é a TQCT mais simples que é capaz de realizar computação quântica topológica universal apenas com tranças e regras de fusão, o que é maravilhoso, mas a confiança na existência de anyons τ é menor que na existência de anyons de Ising σ . A dimensão dos espaços de fusão será dada

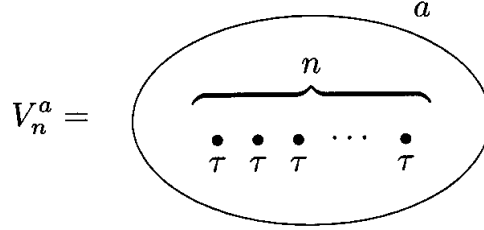


Figura 81: Fonte [58]

$$\dim V_n^a = \begin{cases} F_{n-2} & \text{se } a = 1, \\ F_{n-1} & \text{se } a = \tau, \end{cases} \quad (134)$$

onde F_n é o n -ésimo número de Fibonacci e $F_{-1} = 0$.

Com relação as matrizes F desse sistema, podemos ter apenas duas destas possivelmente não triviais que denotamos por

$$F_1^{\tau\tau\tau} = t \quad F_\tau^{\tau\tau\tau} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad (135)$$

onde $p, q, r, s, t \in \mathbb{C}$. Existem muitos pentágonos para as regras de fusão de Fibonacci dependendo nos quatro anyons a serem fundidos e suas cargas totais: a priori $2^5 = 32$. Mas um pentágono é automaticamente trivial se um dos anyons a serem fundidos for trivial, levando então a apenas dois pentágonos a serem resolvidos. Desenhando os diagramas das arvores de fusão, os pentágonos se tornam:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}^2 &= F_\tau^{\tau\tau\tau} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} F_\tau^{\tau\tau\tau} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_\tau^{\tau\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_\tau^{\tau\tau\tau} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & t & 0 \\ r & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_\tau^{\tau\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & t & 0 \\ r & 0 & s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (136)$$

Essas matrizes se expandem em treze equações polinomiais sobre as variáveis p, q, r, s, t , exemplos das equações de pentágono para sistemas de símbolos $6j$. Resolvendo elas e impondo unitariedade para as matrizes F , obtemos

$$F_1^{\tau\tau\tau} = 1, \quad F_\tau^{\tau\tau\tau} = \begin{pmatrix} \phi^{-1} & \bar{\xi}\phi^{-1/2} \\ \xi\phi^{-1/2} & -\phi^{-1} \end{pmatrix} \quad (137)$$

onde $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é a razão de ouro e ξ é uma fase arbitrária.

Com relação às matrizes R , novamente qualquer trança realizada com o vácuo é trivial e portanto $R_\tau^{\tau 1} = R_\tau^{1\tau} = R_1^{11} = 1$. Segue que um hexágono é trivial se um dos índices no topo for trivial, deixando apenas dois hexágonos a serem resolvidos:

$$\begin{aligned} (R_\tau^{\tau\tau})^2 &= R_1^{\tau\tau} \\ \begin{pmatrix} R_1^{\tau\tau} & 0 \\ 0 & R_\tau^{\tau\tau} \end{pmatrix} F_\tau^{\tau\tau\tau} \begin{pmatrix} R_1^{\tau\tau} & 0 \\ 0 & R_\tau^{\tau\tau} \end{pmatrix} &= F_\tau^{\tau\tau\tau} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\tau^{\tau\tau} \end{pmatrix} F_\tau^{\tau\tau\tau} \end{aligned} \quad (138)$$

Essas matrizes se expandem em cinco equações polinomiais. Usando o resultado obtido para as matrizes F , nossos sistemas polinomiais se reduzem a $R_1^{\tau\tau} = e^{4\pi i/5}$ e $R_\tau^{\tau\tau} = e^{-3\pi i/5}$.

O problema de vazamento surge pois os números de Fibonacci não são todos potências de um número inteiro particular, então não existe uma decomposição tensorial natural dos espaços computacionais.

Para um qubit, escolhamos V_4^1 e $|0\rangle = e_{1\tau 1\tau 1}$, $|1\rangle = e_{1\tau\tau\tau 1}$. Então

$$\rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} & 0 \\ 0 & e^{3\pi i/5} \end{pmatrix} \quad \rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \phi^{-1}e^{4\pi i/5} & \phi^{-1/2}e^{-3\pi i/5} \\ \phi^{-1/2}e^{-3\pi i/5} & -\phi^{-1} \end{pmatrix} \quad (139)$$

onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão de ouro. Para n qubits, escolhamos V_{2n+2}^1 e codificamos uma linha de código $i_1 \dots i_n$ como $e_{1\tau a_{i_1} \tau a_{i_2} \dots \tau 1}$, onde $a_0 = 1$ e $a_1 = \tau$.

Teorema 8.1. *Para qualquer circuito quântico $U_L : (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ em $SU(2^n)$ e $\delta > 0$, existe uma trança $\sigma \in B_{2n+2}$ tal que $|\rho(\sigma) - U_L| < \delta$, e σ pode ser construída por uma máquina de Turing em tempo $\text{poly}(n, 1/\delta)$.*

Esse resultado é uma combinação dos trabalhos [[24],[25]] e o algoritmo de Kitaev-Solovay.

Usamos quatro anyons τ para obtermos um qubit, e seis anyons τ para implementar dois qubits. Para implementar um portão de dois qubits, precisamos escolher subespaços 4-dimensionais de $V_6^1 \simeq \mathbb{C}^5$ e $V_6^\tau \simeq \mathbb{C}^8$. Os subespaços restantes, NC^1 de dimensão 1 e NC^4 de dimensão 4, são não computacionais. Suponha que implementemos CNOT em V_8^1 . Nosso espaço computacional $\mathbb{C}^8 \subset V_8^1 \simeq \mathbb{C}^{13}$ é gerado pelos

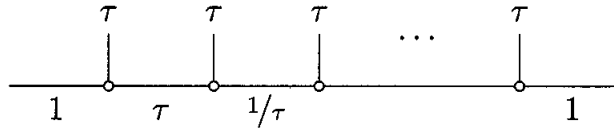


Figura 82: Fonte [58]

Se CNOT opera nos primeiros seis anyons τ , e então

$$V_8^1 \simeq ((\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \oplus \text{NC}^1) \oplus ((\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \oplus \text{NC}^4), \quad (140)$$

codificando informação em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \oplus (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \subset V_6^1 \oplus V_6^\tau$ pode vazar para $\text{NC}^1 \oplus \text{NC}^4$. O vazamento pode ser corrigido com um resultado de densidade mais forte: A representação de Jones não é densa apenas no setor irredutível, mas também independentemente densa em todos os setores irredutíveis. Assim podemos aproximar qualquer qualquer par $(A, B) \subset SU(5) \times SU(8)$ na representação $V_6^1 \oplus V_6^\tau$. Para evitar vazamentos, escolhamos uma trança que implemente $\text{CNOT} \oplus \text{id}_{\text{NC}^1} \oplus (\text{CNOT} \oplus \text{id}_{\text{NC}^4})$ a menos de fases.

Se fundirmos todos os anyons, o resultado é alguma avaliação de Jones colorida. Como uma variação, se fundirmos apenas o primeiro par, o resultado é dado pelo polinômio de Jones em alguma raiz da unidade de um certo link [21] [12].

8.3.4 Universalidade dos computadores quânticos anyonicos

Dada uma CFF unitária, existem anyons cujas tranças são universais para computação quântica?

Proposição 3. *(Conjectura) Se $D^2 \notin \mathbb{N}$, então existe um tipo de anyon não abeliano cujas representações dos grupos de tranças B_n são projetivamente densas.*

Essa conjectura vem de [44].

9 Conclusão

Neste projeto revisamos vários aspectos da teoria de categorias monoidais e vemos como descrever certas classes de teorias quânticas de campos como um funtor entre a categoria de classes difeomórficas de superfícies fechadas compactas orientadas e a categoria de espaços vetoriais. Dessa vemos como classificar teorias quânticas de campos topológicas bidimensionais através de álgebras de Frobenius. Para teorias $(2 + 1)$ -dimensionais podemos descrever-las com categorias monoidais modulares, que surgem das categorias de fusão de fitas quando a matriz S modular é não singular, cujas principais aplicações ocorrem na descrição de sistemas de partículas com estatística não abeliana. Chamamos essas partículas de anyons e os principais sistemas físicos onde poderíamos observar essas partículas são sistemas de efeito Hall quântico fracional que discutimos alguns detalhes na seção 8. O efeito Hall quântico fracional é um exemplo de sistema de fase topológica da matéria no qual mantemos baixas temperaturas e energias, em sistemas desse tipo temos o surgimento de termos topológicos na função de partição do sistema, como por exemplo a ação de Chern-Simons.

Apesar de ainda ser previsão teórica, em artigo de 1991 Moore & Reed argumentaram que poderiam descrever excitações de funções fermiônicas exibindo estatística não abeliana para sistemas de efeito Hall quântico com fator de preenchimento com denominador par. Uma conexão de todos esses tópicos e interessante aplicação da matemática de categorias de fusão é a computação quântica topológica que é uma ideia de usar esses sistemas de anyons não abelianos para simular sistemas regidos por teorias topológicas de campos onde existe a expectativa de aprender mais propriedades sobre essas teorias e possivelmente calcular invariantes topológicos de superfícies $(2 + 1)$ -dimensionais. Um dos fatos mais interessantes sobre a computação quântica topológica é que apesar de nos limitarmos a sistemas em baixas temperaturas sabemos que esse tipo de computação é tolerante a erros já que o sistema deve ficar extremamente isolado do ambiente. Terminamos o projeto revisando alguns dos modelos mais interessantes sobre a computação quântica topológica, como o exemplo do modelo de Fibonacci que apesar de haver baixa expectativa de encontrar sistemas regidos por esse modelo na natureza, é um dos modelos mais simples onde obtemos o que chamamos de computação quântica universal que ocorre quando podemos reproduzir qualquer operação imaginável para o sistema apenas através de representações do grupo de tranças aplicado as partículas do modelo.

Eu, autor do projeto, estou extremamente satisfeito por ter tido a oportunidade de ter estudado o amplo arranjo de tópicos explorados aqui, principalmente por ver como algumas técnicas avançadas em matemática podem se relacionar com fenômenos físicos de grande interesse na atualidade e poder ver alguns problemas em aberto com relação a esses tópicos. Embora ainda não tenha domínio particularmente alto de técnicas da teoria quântica de campos, como a descrição da teoria efetiva de Chern-Simons, a partir desse trabalho já consigo ter uma ideia e principalmente as referencias para saber por onde começar a estudar esses tópicos mais a fundo em futuros projetos como mestrados e doutorados. Nada do que foi feito neste projeto teria sido possível sem suporte e ensinamento do meu orientador Dr Arsen Melikyan a quem devo muita gratidão. Agradeço ainda a professor Dr Alexandr Pinzul por me ensinar os princípios da teoria de quântica de campos que com certeza foi bastante útil ao longo desse projeto. Agradeço a professora Dr Carolina Matté Gregory por me ajudar com erros durante a escrita desse texto e me lembrar de adicionar uma seção de conclusão que havia esquecido de adicionar. Em geral tenho grande gratidão a Universidade de Brasília e toda a equipe de docentes que me possibilitaram todo o aprendizado de física que tive durante os últimos anos. Espero continuar estudando e um dia poder contribuir para o grande corpo de conhecimento que é essa ciência.

A Apendice: Teorias de Campos Conformes

Aqui tentamos definir as teorias de campos conformes usando a teoria de categorias, seguindo a referencia [52], com o objetivo de tentar entender melhor aspectos dos estados de Moore-Read de acordo com a publicação original [40].

A.1 Definições Preliminares

Definição A.1. *A categoria \mathcal{C} :*

A categoria \mathcal{C} é definida da seguinte forma. Existe uma sequencia de objetos $\{C_n\}_{n \geq 0}$, onde C_n é a união disjunta do conjunto de n círculos parametrizados.

Um morfismo $C_n \rightarrow C_m$ é uma superfície de Riemann X com fronteira ∂X , junto com uma identificação $i : C_m - C_n \rightarrow \partial X$. (Identificamos morfismos $(X, i), (X', i')$ se existir um isomorfismo $f : X \rightarrow X'$ tal que $f \circ i = i'$. Perceba que a fronteira da superfície de Riemann é canonicamente orientada. As identificações i devem preservar orientação, e $C_m - C_n$ significa a união $C_m \sqcup C_n$ com a orientação revertida.)

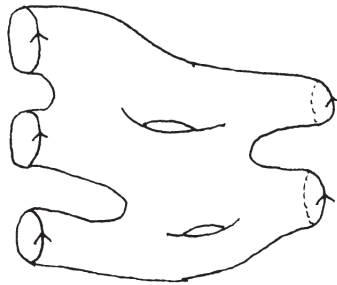


Figura 83: Morfismo entre $C_3 \rightarrow C_2$; Fonte [52]

Por Superfície de Riemann queremos dizer,

Definição A.2. *Uma superfície de Riemann é variedade complexa unidimensional, i.e. duas variedades suaves de dimensões reais com um conjunto maximal de cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{C}$ tal que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ é uma função holomórfica invertível de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ para $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ para todo α e β .*

A.2 O semigrupo ξ

O semigrupo de morfismos $C_1 \rightarrow C_1$ acaba se tornando componentes conexas correspondendo ao genus e numero de componentes conexas de X . A identidade de ξ é o espaço de superfícies que são cilindros, i.e. homeomorficas a $[0, 1] \times S^1$. A ideia aqui é mostrar que o semigrupo ξ deve representar a complexificação do semigrupo $\text{Diff}(S^1)$. (É um fato conhecido que não existe um grupo que é uma complexificação do $\text{Diff}(S^1)$.) Veremos momentaneamente porque $\text{Diff}(S^1)$ é a fronteira de Shilov de ξ . Um exemplo simples da relação que existe entre ξ e $\text{Diff}(S^1)$ é dada pelo semigrupo

$$\{g \in GL_n(\mathbb{C}) : \|g\| < 1\}$$

esse é o domínio limitado em \mathbb{C}^{n^2} cuja fronteira de Shilov é o grupo U_n . (Essa fronteira de Shilov diz respeito ao conjunto $S = \cap \{F : F \text{ é fronteira de } \mathcal{A}, \text{ i.e. } \max_{f \in \Delta \mathcal{A}} |f(x)| = \max_{f \in F} |f(x)|\}$).

Podemos dar uma descrição mais precisa de ξ . Seja

$$\begin{aligned} D_0 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \\ D_\infty &= \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| \geq 1\}. \end{aligned}$$

então ξ é o espaço dos pares (f_0, f_∞) , onde $f_0 : D_0 \rightarrow S^2$ são mergulhos holomórficos tais que

$$f_0(0) = 0, f_\infty(\infty) = \infty, f'_\infty(\infty) = 1, \quad (141)$$

e $f_0(D_0)$ e $f_\infty(D_\infty)$ são disjuntos. (Dizer que $f'_\infty(\infty) = 1$ significa que f_∞ tem resíduo 1 em $z = \infty$.)

Para ver isso, observe que para dado (f_0, f_∞) a superfície $S^2 - f_0(D_0) - f_\infty(D_\infty)$ é um cilindro com fronteira parametrizada; Por outro lado se X é um cilindro com fronteira parametrizada então podemos formar uma superfície fechada $\hat{X} = D_0 \cup X \cup D_\infty$, e o teorema de mapeamento de Riemann identifica isso com a esfera S^2 unicamente a menos de um elemento de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ que é fixo sobre a normalização 141.

ξ pode ser identificado com um conjunto aberto em um affine hyperplane em $F \oplus F$, onde F é o espaço vetorial de mapas holomórfico $f : D_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(0) = 0$. Esse conjunto aberto tem fronteira de Shilov que consiste do par (f_0, f_∞) tal que $f_0(S^1) = f_\infty(S^1)$. A fronteira é identificada com $\text{Diff}(S^1)$ por

$$(f_0, f_\infty) \rightarrow (f_\infty^{-1} \circ f_0|_{S^1}) \quad (142)$$

Existe um mapa holomórfico $q : \xi \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ cujo valor de fronteira é o numero de rotação

$$q : \text{Diff}(S^1) \rightarrow S^1. \quad (143)$$

De fato

$$q(X) = e^{2\pi i \tau}, \quad (144)$$

onde τ é o modulus do torus obtido por $X \in \xi$ ao identificar os círculos de fronteiras. (O modulus é bem definido a menos de um inteiro aditivo, e não só sobre ação de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$) no plano superior, porque o torus tem um gerador principal de π_1 .

A.3 Definição da CFT

Definição A.3. *Uma teoria de campos conforme é uma representação de \mathcal{C} , i.e. um funtor contínuo T de \mathcal{C} para espaços de Hilbert tais que*

- (i) $T(C_n) = \bigotimes_n H = H^{\otimes n}$ para algum espaço de Hilbert H ;
- (ii) Para cada morfismo $\xi : C_m \rightarrow C_n$ o operador $T(\xi) : H^{\otimes m} \rightarrow H^{\otimes n}$ é da classe de traços ($\text{Tr}T(\xi) = \sum_k \langle T(\xi)e_k, e_k \rangle < \infty$ independente da escolha de base (e_k)).
- (iii) T é um funtor-*, i.e. $T(\xi)^* = T(\bar{\xi})$ para cada $\xi : C_m \rightarrow C_n$, onde $\bar{\xi} : C_n \rightarrow C_m$, é definido como a superfície de Riemann complexa conjugada de ξ ;
- (iv) T tem uma propriedade de cruzamento que se um morfismo $\xi : C_m \rightarrow C_n$ é feito em um morfismo $\tilde{\xi} : C_{m-1} \rightarrow C_{n+1}$ ao reverter a orientação de um círculo de fronteira então $T(\xi)$ e $T(\tilde{\xi})$ são adjuntos (i.e. correspondem ao mesmo objeto de $H^{\otimes(m+n)}$);
- (v) T tem a propriedade de colapso que se um morfismo $\xi : C_{m+r} \rightarrow C_{n+r}$ é feito em um morfismo $\hat{\xi} : C_m \rightarrow C_n$ ao colar os primeiros r círculos entrando aos primeiros r círculos saindo, então $T(\hat{\xi}) = \text{tr}_{H^{\otimes r}} T(\xi)$.

A.4 O morfismo ρ_q e a função de partição

Se $q \in \mathbb{C}$ com $0 < |q| < 1$ então deixe ρ_q denotar o morfismo $C_1 \rightarrow C_1$ representado pelo anulus $\{z \in \mathbb{C} : |q| \leq |z| \leq 1\}$ com sua fronteira sendo círculos parametrizados por $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ e $\theta \rightarrow qe^{i\theta}$. A função ρ_q forma um sub-semigrupo de $\xi : \rho_{q_1}\rho_{q_2} = \rho_{q_1q_2}$.

Definição A.4. A função de partição Z_T da teoria T é definida como $Z_T(q) = \text{traço } T(\rho_q)$

Com a condição (v) trivialmente implica:

Proposição 4. Para qualquer teoria T a função de partição Z_T é modular, i.e. se $q = e^{2\pi iz}$ com $\text{Im}(z) > 0$ então $Z_T(q)$ é invariante quando z é transformado por $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Referências

- [1] Lowell Abrams. Two-dimensional topological quantum field theories and frobenius algebras. *Journal of Knot theory and its ramifications*, 5(05):569–587, 1996.
- [2] Lowell Abrams. Modules, comodules, and cotensor products over frobenius algebras. *Journal of Algebra*, 219(1):201–213, 1999.
- [3] Lowell Abrams. The quantum euler class and the quantum cohomology of the grassmannians. *Israel Journal of Mathematics*, 117(1):335–352, 2000.
- [4] Daniel Arovas, John R Schrieffer, and Frank Wilczek. Fractional statistics and the quantum hall effect. *Physical review letters*, 53(7):722, 1984.
- [5] John Baez. Quantum quandaries: a category-theoretic perspective. *The structural foundations of quantum gravity*, pages 240–265, 2006.
- [6] John Baez and Mike Stay. Physics, topology, logic and computation: a rosetta stone. In *New structures for physics*, pages 95–172. Springer, 2010.
- [7] Bojko Bakalov and Alexander A Kirillov. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21. American Mathematical Soc., 2001.
- [8] Peter Bantay. The kernel of the modular representation and the galois action in rcft. *Communications in mathematical physics*, 233(3):423–438, 2003.
- [9] Bruce H Bartlett. Categorical aspects of topological quantum field theories. *arXiv preprint math/0512103*, 2005.
- [10] Kerstin Beer, Dmytro Bondarenko, Alexander Hahn, Maria Kalabakov, Nicole Knust, Laura Niermann, Tobias J. Osborne, Christin Schridde, Stefan Seckmeyer, Deniz E. Stiegemann, and Ramona Wolf. From categories to anyons: a travelogue, 2018.
- [11] Michael Victor Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [12] Magnus Bordewich, Michael Freedman, László Lovász, and Dominic Welsh. Approximate counting and quantum computation. *Combinatorics, Probability and Computing*, 14(5-6):737–754, 2005.
- [13] Alain Bruguières. Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3. *Mathematische Annalen*, 316(2):215–236, 2000.
- [14] Carlton M Caves and Christopher A Fuchs. Quantum information: How much information in a state vector? *arXiv preprint quant-ph/9601025*, 1996.
- [15] Andrew M Childs, Yuan Su, Minh C Tran, Nathan Wiebe, and Shuchen Zhu. Theory of trotter error with commutator scaling. *Physical Review X*, 11(1):011020, 2021.
- [16] Lawrence Conlon. *Differentiable manifolds*, volume 2. Springer, 2001.
- [17] Stanley Deser, Roman Jackiw, and S Templeton. Three-dimensional massive gauge theories. *Physical Review Letters*, 48(15):975, 1982.

- [18] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205. American Mathematical Soc., 2016.
- [19] Pavel Etingof, Dmitri Nikshych, and Viktor Ostrik. On fusion categories. *Annals of Mathematics*, pages 581–642, 2005.
- [20] Richard P Feynman et al. Simulating physics with computers. *Int. j. Theor. phys*, 21(6/7), 1982.
- [21] Michael Freedman, Alexei Kitaev, Michael Larsen, and Zhenghan Wang. Topological quantum computation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(1):31–38, 2003.
- [22] Michael H Freedman. P/np, and the quantum field computer. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95(1):98–101, 1998.
- [23] Michael H Freedman, Alexei Kitaev, and Zhenghan Wang. Simulation of topological field theories by quantum computers. *Communications in Mathematical Physics*, 227(3):587–603, 2002.
- [24] Michael H Freedman, Michael Larsen, and Zhenghan Wang. A modular functor which is universal for quantum computation. *Communications in Mathematical Physics*, 227(3):605–622, 2002.
- [25] Michael H Freedman, Michael J Larsen, and Zhenghan Wang. The two-eigenvalue problem and density of jones representation of braid groups. *arXiv preprint math/0103200*, 2001.
- [26] S Fubini and CA Lütken. Vertex operators in the fractional quantum hall effect. *Modern Physics Letters A*, 6(06):487–500, 1991.
- [27] Tobias J Hagge. *Graphical calculus for fusion categories and quantum invariants for 3-manifolds*. PhD thesis, Indiana University, 2008.
- [28] F. D. M. Haldane. Fractional quantization of the hall effect: A hierarchy of incompressible quantum fluid states. *Phys. Rev. Lett.*, 51:605–608, Aug 1983.
- [29] Bertrand I Halperin. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized hall states. *Physical Review Letters*, 52(18):1583, 1984.
- [30] Morris W Hirsch. *Differential topology*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] André Joyal and Ross Street. Braided tensor categories. *Advances in Mathematics*, 102(1):20–78, 1993.
- [32] Christian Kassel. *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 1995.
- [33] A Yu Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1):2–30, 2003.
- [34] Alexei Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Annals of Physics*, 321(1):2–111, 2006.
- [35] Alexei Yu Kitaev, Alexander Shen, Mikhail N Vyalyi, and Mikhail N Vyalyi. *Classical and quantum computation*. Number 47. American Mathematical Soc., 2002.

- [36] Joachim Kock. *Frobenius algebras and 2-d topological quantum field theories*. Number 59. Cambridge University Press, 2004.
- [37] Seth Lloyd. Universal quantum simulators. *Science*, 273(5278):1073–1078, 1996.
- [38] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [39] F Michael. Atiyah. topological quantum field theory. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 68:175–186, 1988.
- [40] Gregory Moore and Nicholas Read. Nonabelions in the fractional quantum hall effect. *Nuclear Physics B*, 360(2-3):362–396, 1991.
- [41] Michael Müger. From subfactors to categories and topology i: Frobenius algebras in and morita equivalence of tensor categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 180(1-2):81–157, 2003.
- [42] Michael Müger. From subfactors to categories and topology ii: The quantum double of tensor categories and subfactors. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 180(1-2):159–219, 2003.
- [43] Naoto Nagaosa. *Quantum field theory in condensed matter physics*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [44] Deepak Naidu and Eric C Rowell. A finiteness property for braided fusion categories. *Algebras and representation theory*, 14(5):837–855, 2011.
- [45] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [46] Chetan Nayak, Steven H Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):1083, 2008.
- [47] Chetan Nayak and Frank Wilczek. 2n-quasihole states realize 2n- 1-dimensional spinor braiding statistics in paired quantum hall states. *Nuclear Physics B*, 479(3):529–553, 1996.
- [48] Siu-Hung Ng and Peter Schauenburg. Congruence subgroups and generalized frobenius-schur indicators. *Communications in Mathematical Physics*, 300(1):1–46, 2010.
- [49] Nicolai Reshetikhin and Vladimir G Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Inventiones mathematicae*, 103(1):547–597, 1991.
- [50] Steven Roman. *Advanced Linear Algebra*, volume 135 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2008.
- [51] Steven Roman. *The Language of Category Theory*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhauser Basel, 2017.
- [52] Graeme B Segal. The definition of conformal field theory. In *Differential geometrical methods in theoretical physics*, pages 165–171. Springer, 1988.
- [53] Peter W Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*, pages 124–134. Ieee, 1994.

- [54] Daisuke Tambara and Shigeru Yamagami. Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. *Journal of Algebra*, 209:692–707, 1998.
- [55] Simon Trebst, Matthias Troyer, Zhenghan Wang, and Andreas WW Ludwig. A short introduction to fibonacci anyon models. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 176:384–407, 2008.
- [56] Vladimir G Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. de Gruyter, 2016.
- [57] Alexis Virelizier Vladimir Turaev. *Monoidal Categories and Topological Field Theory*, volume 322 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Basel, 2017.
- [58] Zhenghan Wang. *Topological quantum computation*. Number 112. American Mathematical Soc., 2010.
- [59] Frank Wilczek. *Fractional statistics and anyon superconductivity*, volume 5. World scientific, 1990.
- [60] Robert Willett, James P Eisenstein, Horst L Störmer, Daniel C Tsui, Arthur C Gossard, and JH English. Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect. *Physical review letters*, 59(15):1776, 1987.
- [61] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3):351–399, 1989.
- [62] Shigeru Yamagami. Polygonal presentations of semisimple tensor categories. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 54(1):61–88, 2002.