

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

BRUNO RODRIGUES SOARES

**INVARIANTES DE NÓS  
E A TEORIA DE CHERN-SIMONS**

BRASÍLIA  
5 DE NOVEMBRO DE 2021



Bruno Rodrigues Soares

## **Invariantes de nós e a teoria de Chern-Simons**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

5 de novembro de 2021

---

Bruno Rodrigues Soares

Invariantes de nós  
e a teoria de Chern-Simons/ Bruno Rodrigues Soares. – Brasília, 5 de novembro  
de 2021-

97 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Arsen Melikyan

Monografia – Universidade de Brasília – UnB  
Instituto de Física, 5 de novembro de 2021.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III.  
Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

---

Bruno Rodrigues Soares

## **Invariantes de nós e a teoria de Chern-Simons**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 5 de novembro de 2021:

---

**Arsen Melikyan**  
Orientador

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Brasília  
5 de novembro de 2021



# Resumo

Neste trabalho apresentamos uma motivação ao estudo das teorias quânticas de campo topológicas através de sua aplicação à teoria dos nós. Começaremos com uma apresentação da teoria de conexões em fibrados principais, constituindo assim a base matemática às teorias de Yang-Mills. Em seguida discutiremos sobre a teoria matemática de nós e sobre a teoria física de campos conformes em duas dimensões. Por fim estabeleceremos a relação entre a teoria de Chern-Simons e os invariantes de Jones.

**Palavras-chaves:** Teoria de Nós. Fibrados. Teoria de Chern-Simons.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplos de diagramas de projeção de nós. . . . .	30
Figura 2 – Exemplos dos tipos de movimentos de Reidemeister. . . . .	30
Figura 3 – Exemplo da aplicação de movimentos de Reidemeister (fonte: (CHMU- TOV; DUZHIN; MOSTOVOY, 2012)). . . . .	31
Figura 4 – Definição do sinal de cruzamentos. . . . .	32
Figura 5 – Cruzamentos utilizados na definição axiomática do Bracket de Kauffman. . . . .	33
Figura 6 – Separações do tipo $x^{-1}$ e $x$ , à esquerda e à direita respectivamente. . . . .	34
Figura 7 – Exemplo de cruzamentos para um nó orientado. . . . .	35
Figura 8 – Exemplo de link reduzível . . . . .	36
Figura 9 – Exemplo de Nó alternado, juntamente com respectivo estado que ma- ximiza o grau do polinômio colchete. . . . .	36
Figura 10 – Exemplo de duas tranças de 3 cordas equivalentes. . . . .	38
Figura 11 – Produto de duas tranças genéricas de 3 cordas. . . . .	38
Figura 12 – Um exemplo do fecho de uma trança $t$ . . . . .	39
Figura 13 – Exemplos de movimentos de markov. . . . .	40
Figura 14 – Configurações em torno de um cruzamento, utilizadas em 2.35. . . . .	42
Figura 15 – Exemplos de nós que correspondem aos elementos de $\mathbf{A}_0$ , $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ . . . . .	43
Figura 16 – Configurações intermediárias, ao movimentar o segmento vertical, efe- tuando um giro em torno de um ponto duplo. . . . .	44
Figura 17 – Diagramas de Corda, equacionados em 2.40 . . . . .	44
Figura 18 – Exemplo de diagrama $D(K)$ com uma corda isolada. . . . .	44
Figura 19 – Exemplo de um link mergulhado em variedade $M$ . . . . .	70
Figura 20 – Esquematização da aplicação do difeomorfismo $\mathcal{B}$ . . . . .	71
Figura 21 – Exemplo de um link com emolduramento padrão. . . . .	72
Figura 22 – Mudança na função de partição relativa a dois tipos de torção. . . . .	72



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS TEORIAS DE CALIBRE</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1	O fibrado principal . . . . .	13
1.2	Conexão e Curvatura . . . . .	15
1.3	Teorias de Yang-Mills . . . . .	19
1.4	O teorema de Chern-Weil e Classes características . . . . .	21
1.4.1	Número de Instanton . . . . .	25
<b>2</b>	<b>POLINÔMIO DE JONES E INVARIANTES DE ORDEM FINITA</b> . . . . .	<b>29</b>
2.1	Nós e Movimentos de Reidemeister . . . . .	29
2.2	O polinômio de Jones . . . . .	32
2.3	Tranças e o Polinômio de Jones . . . . .	37
2.4	Polinômios HOMFLY . . . . .	40
2.5	Invariantes de Vassiliev e a integral de Kontsevich . . . . .	41
<b>3</b>	<b>TEORIA CONFORME DE CAMPOS</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1	O Grupo Conforme . . . . .	47
3.2	Grupo conforme em duas dimensões . . . . .	50
3.3	Formalismo de operadores . . . . .	51
3.3.1	Campos Primários e o Tensor Energia-Momento . . . . .	51
3.3.1.1	Ordenamento Normal e Correspondência Estado-Operador . . . . .	55
3.3.2	OPE's e Funções de Correlação . . . . .	57
3.4	O espaço de Hilbert . . . . .	59
3.4.1	Grupo de Simetria e Extensões Centrais . . . . .	59
3.4.2	Módulo de Verma . . . . .	61
<b>4</b>	<b>A TEORIA DE CHERN-SIMONS</b> . . . . .	<b>65</b>
4.1	Ação e Equações de Movimento . . . . .	65
4.2	Calibre Holomórfico e a Integral de Kontsevich . . . . .	67
4.3	Aspectos Functorias e o Polinômio de Jones . . . . .	70
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>77</b>

	<b>APÊNDICES</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE A – GRUPOS DE LIE</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>APÊNDICE B – POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS</b> . . . . .	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE C – HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE DE RHAM</b>	<b>91</b>
C.1	Homologia e Homotopia . . . . .	91
C.2	Cohomologia de De Rham . . . . .	94
	<b>APÊNDICE D – FORMALISMO FUNCIONAL EM TEORIA QUÂN-</b> <b>TICA DE CAMPOS</b> . . . . .	<b>95</b>

# Introdução

Um Nó nada mais é do que uma corda com as extremidades ligadas uma à outra. Se a corda não é entrelaçada, temos apenas um círculo, e dizemos que o nó é trivial. Um problema central na teoria de Nós consiste na classificação destes objetos, ou seja, compreender quando dois nós, por mais exóticos que possam parecer, são iguais a menos de deformações elásticas, como torcer ou esticar.

Apesar de terem uma definição simples, o estudo de classificação dos nós pode ser uma tarefa bastante complicada. Uma abordagem para tratar este problema consiste em criar funções do espaço de todos os nós com valores em algum conjunto, capazes de atribuir resultados iguais se, e somente se, os dois nós forem iguais. Mapas com esta propriedade são denominados Invariantes.

O interesse pela compreensão da teoria de Nós teve um impulso significativo no século XIX, quando o físico Lorde Kelvin propôs, em 1867, um modelo peculiar para os átomos (KRAUGH, 2002). Segundo Kelvin os átomos seriam tubos de vórtices no éter, logo a compreensão dos nós se tornaria necessária a medida em que considerássemos o entrelaçamento de tais tubos. Apesar de intuitiva, a teoria de Kelvin logo foi descartada, bem como a ideia de éter. O destino da teoria de nós foi bem diferente, pois eles permaneceram como uma área de interesse para alguns matemáticos. Conjecturas nesta área, atribuídas à Peter Guthrie Tait, um colaborador de Kelvin, demoraram quase um século para serem finalmente verificadas (MURASUGI, 1987), utilizando o recém descoberto polinômio de Jones. Mesmo como todo esse sucesso, o polinômio de Jones carecia de uma definição sem o auxílio de projeções.

Antes que você saia correndo daqui imaginando o quanto esta curiosidade matemática parece ser inútil para o resto da humanidade, observe que, através do escrutínio desse ramo exótico da Topologia, na década de 1980 foram descobertas interrelações surpreendentes entre a matemática, biologia e física. Como Wasserman e Cozzarelli explicam em (WASSERMAN; COZZARELLI, 1986), a modelagem de DNA por meio da teoria de Nós permite analisar suas propriedades quantitativas, bem como os mecanismos de atuação de enzimas nessas estruturas, as quais são responsáveis por codificar a característica genética dos seres vivos.

Foi então em 1988 que o físico Edward Witten propôs uma interpretação para o polinômio de Jones através de uma teoria quântica de campos, capaz de generalizar a definição desses invariantes à variedades tridimensionais arbitrárias (WITTEN, 1989). A teoria de Calibre em questão utiliza como Ação a integral de uma forma diferenciável proveniente dos trabalhos de Shiing-Shen Chern e James Harris Simons (CHERN; SIMONS,

1974), e portanto é intitulada Teoria de Chern-Simons. Em seu trabalho, Witten também conjectura relações profundas entre a quantização da ação de Chern-Simons e o espaço de funções de correlação de campos primários na teoria de campos conformes em duas dimensões (MURAYAMA, 1990).

Além da sua aplicabilidade à topologia, a lagrangeana de Chern-Simons pode ser usada na descrição de fenômenos físicos envolvendo férmions em  $(2+1)$ -dimensões, pois acoplando-a a campos de matéria ela se torna útil no estudo do efeito Hall quântico fracionário (DUNNE, 1998). É possível mostrar também o aparecimento de um termo massivo, invariante por transformações de gauge, quando adicionamos um termo de Chern-Simons à lagrangeana de Yang-Mills (DESER; JACKIW; TEMPLETON, 1982).

Tendo em vista essas considerações, no capítulo 1 apresentaremos algumas noções da geometria diferencial das teorias de calibre, analisando, por exemplo, como as transformações desses campos surgem naturalmente ao impormos condições de compatibilidade nas mudanças de coordenadas de um fibrado principal. No capítulo 2 vamos estudar os conceitos iniciais da teoria de Nós, onde trataremos dos polinômios de Jones e dos invariantes de Vassiliev. No capítulo 3 abordaremos os aspectos introdutórios da teoria de campos conformes em duas dimensões, focando no formalismo de operadores. Por fim, no capítulo 4 mostraremos como a quantização da ação de Chern-Simons resulta na relação de novelo que define o polinômio de Jones.

# 1 Geometria diferencial das teorias de calibre

A teoria de fibrados compreende uma descrição matemática para a teoria de calibre, e pode ser útil na análise de efeitos não-perturbativos na descrição destes campos. As seções dos fibrados estão relacionadas a campos de partículas, de modo que os grupos de calibre correspondem às interações fundamentais. Por exemplo, os grupos  $U(1)$  e  $SU(3)$  são os grupos de calibre relacionados às interações eletromagnética e forte, respectivamente.

Um fato importante, que mostra a relação entre as teorias de calibre e a rica matemática utilizada em sua descrição, ocorre com os conhecidos instantons de Yang-Mills. Veremos que os instantons são classes de equivalência não triviais de um fibrado que descreve o campo de calibre. Em particular, o número instanton na teoria de calibre em 4 dimensões, com grupo  $SU(2)$ , é precisamente a segunda classe de Chern do fibrado que fundamenta a teoria.

## 1.1 O fibrado principal

Em todo o texto, salvo menção contrária,  $P$  e  $M$  representarão variedades diferenciáveis,  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\pi : P \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável sobrejetora e  $R : P \times G \rightarrow P$  uma ação livre (cf. A).

**Definição 1.** Um fibrado principal  $(P, \pi, M, G)$  é definido pelas seguintes condições:

1. Existe difeomorfismo  $f : M \rightarrow P/G$ , da variedade base  $M$  para o espaço das órbitas de  $P$ , satisfazendo a seguinte propriedade:

$$f \circ \pi = \pi_e,$$

onde  $\pi_e$  é a projeção quociente.

2.  $P$  é **localmente trivial**, ou seja, para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U_\alpha$  de  $x$  e um difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times G \\ p &\mapsto (\pi(p), \phi_\alpha(p)) \end{aligned}$$

tal que  $\phi_\alpha \circ R_g = R_g \circ \phi_\alpha$ , para todo  $g \in G$  e  $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$

**Observação 1.** Dizemos que o fibrado é trivial se existe difeomorfismo  $P \cong M \times G$ .

Um exemplo importante de fibrado principal é o fibrado dos referenciais (ou das bases).

**Exemplo 1** (Fibrado de referenciais). Consideramos o objeto  $FM(M, GL(n, \mathbb{R}))$  construído a partir de uma variedade  $M$  e seu fibrado tangente  $TM$ .  $FM$  é o conjunto de isomorfismos lineares entre  $\mathbb{R}^n$  e  $T_x M$ , para cada  $x \in M$ . Este conjunto pode ser identificado com o grupo de matrizes inversíveis e herda um atlas diferenciável por uma construção análoga à de  $TM$ . A ação de  $GL(n, \mathbb{R})$  em  $FM$  é dada simplesmente pela multiplicação de matrizes usual:

$$R_g(\Lambda) \equiv \Lambda \circ g, \quad \forall g \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ e } \Lambda \in FM$$

Esta ação é livre e transitiva, de modo que o espaço de órbitas, i.e. o espaço de classes de equivalência dos referenciais, pode ser identificado com o conjunto de pontos que compõem a variedade base, satisfazendo a condição (1) da definição.

Sendo  $(P, \pi, M, G)$  fibrado principal e  $F$  uma variedade diferenciável, na qual temos uma ação à esquerda de  $G$ , então podemos construir a variedade  $P_F := (P \times F) / \sim_G$ , onde  $\sim_G$  é a relação que define classes de equivalências dadas por:  $[p, f] = \{(R_g p, L_{g^{-1}} f) \mid g \in G\}$ . Pode-se então mostrar que  $(P_F, \pi_F, M, G)$  é um fibrado, com projeção  $\pi_F : P_F \rightarrow M$ , dada por  $\pi[p, f] \equiv \pi(p)$ . Diremos então que  $(P_F, \pi_F, M, G)$  é fibrado associado à  $(P, \pi, M, G)$ .

Note que a fibra típica de fibrados associados passa a ser a variedade  $F$  posteriormente introduzida. Quando a fibra típica de fibrados associados tem a estrutura de espaço vetorial, eles são denominados fibrados vetoriais e são de grande importância no estudo de classes características. Diremos que dois fibrados vetoriais  $E$  e  $E'$ , de mesmo espaço base, têm um morfismo quando existir uma aplicação diferenciável  $f : E \rightarrow E'$ , linear em cada fibra e satisfazendo a condição  $\pi \circ f = \pi'$ . Mostraremos algumas construções funtoriais mediante esta estrutura vetorial adicional nas fibras típicas.

**Definição 2.** Um **funtor covariante**  $\mathcal{F}$  em espaços vetoriais com transformações lineares satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se  $\mathbb{F}$  é espaço vetorial, então  $\mathcal{F}(\mathbb{F})$  é espaço vetorial.
2. Se  $f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}'$  é linear, então  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{F}')$  é linear, tal que:

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \text{ e } \mathcal{F}(\mathbb{I}_{\mathbb{F}}) = \mathbb{I}_{\mathbb{F}'}$$

**Proposição 1.** Sendo  $\mathcal{F}$  um funtor covariante em espaços vetoriais com transformações lineares, podemos construir um funtor em fibrados vetoriais com morfismo.

*Demonstração.* O espaço total será:  $\mathcal{F}(E) := \bigcup_{x \in B} \mathcal{F}(E)_x$ , onde  $\mathcal{F}(E)_x \equiv \mathcal{F}(\pi^{-1}(x))$ . Com projeção  $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(E) \rightarrow B$ , tal que  $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(E)_x) = x, \forall x \in M$ .

O espaço total herda a trivialidade local naturalmente, da seguinte forma:

$$\mathcal{F}(\psi_{\alpha}) : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times \mathcal{F}(\mathbb{F})$$

$$p \mapsto (\pi(p), \mathcal{F}(\phi_\alpha)(p))$$

Sendo  $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}$  trivialização local de  $E$ , e  $\mathcal{F}(\phi_\alpha)|_{\pi^{-1}(x)} := \mathcal{F}(\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)})$   $\square$

Esta construção pode ser feita analogamente para funtores contravariantes e/ou com dois ou mais argumentos, de modo que podemos construir diversos exemplos interessantes.

**Exemplo 2.** Sendo  $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$  espaços vetoriais, temos funtores induzidos de dual, soma direta e produto tensorial, além de composições e iterações dessas operações. Desse modo, sendo  $(E_{\mathbb{F}_1}, \pi_{\mathbb{F}_1}, M, \mathbb{F}_1)$  e  $(E_{\mathbb{F}_2}, \pi_{\mathbb{F}_2}, M, \mathbb{F}_2)$  fibrados vetoriais podemos construir:

1. Fibrados tensoriais, como  $\otimes^n E_1$  e  $E_1 \otimes E_2$ , com fibras típicas  $\otimes^n \mathbb{F}_1$  e  $\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_2$  respectivamente.
2. Somas diretas (ou somas de Whitney), como  $\oplus^n E_1$  e  $E_1 \oplus E_2$ , com fibras típicas  $\oplus^n \mathbb{F}_1$  e  $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$  respectivamente.
3. Fibrado dual  $E_1^*$  com fibra típica,  $\mathbb{F}_1^*$ .

Em todos estes casos, com os respectivos morfismos induzidos.

Terminaremos esta seção apresentando uma condição de trivialidade para os fibrados principais.

**Definição 3.** Uma seção em um fibrado principal, é um mapa diferenciável em um aberto da variedade base  $\sigma : U \subseteq M \rightarrow E$ , tal que  $\pi \circ \sigma = \mathbb{I}_M$ .

Agora suponha  $(P, \pi, M, G)$  um fibrado trivial, então existe uma trivialização  $\phi : P \rightarrow M \times G$ , e para cada  $g \in G$ , a aplicação  $\psi_g : M \rightarrow G$ , dada por  $s_g(x) := \psi^{-1}(x, g)$  é uma seção global. De fato, podemos mostrar que ([NAKAHARA, 1990](#)),

**Proposição 2.** Um fibrado principal é trivial se, e somente se, admite uma seção, definida em toda a variedade base,  $\sigma : M \rightarrow E$ .

Sendo  $E$  um fibrado vetorial sobre  $M$ , as seções do fibrado formado pelo produto tensorial da  $n$ -ésima potência exterior de  $T^*M$  com  $E$  (denotado por  $\wedge^n T^*M \otimes E$ ) são chamadas de  $n$ -formas com valores em  $E$ , denotamos o espaço dessas formas  $\Omega^n(M, E)$ .

## 1.2 Conexão e Curvatura

Nesta seção trataremos de alguns aspectos da teoria de conexões. Veremos que uma conexão nos permite gerar noções de verticalidade e horizontalidade no fibrado tangente

do espaço total, além disso, esta conexão será formulada de modo a garantir o princípio de covariância sob mudanças de coordenadas, expresso na proposição 4.

Seja  $(P, \pi, M, G)$  um fibrado principal. Para cada elemento da álgebra de lie podemos induzir um campo vetorial no espaço total  $i : T_e G \rightarrow \Gamma(TP)$ , dada por:

$$i(A)_p f \equiv \left. \frac{df(R_{\exp(tA)} p)}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.1)$$

Para todo ponto  $p \in P$  e função diferenciável  $f \in C^\infty(P)$ . Diremos que  $i(A)$  é o campo vetorial fundamental induzido por  $A$ . Além disso, em cada ponto  $p \in P$ , o mapa  $i$  definido é um isomorfismo sobre o espaço vetorial vertical  $V_p P := \{X \in T_p P \mid \pi_* X = 0\}$  (cf. (MORITA, 2001)).

Seria interessante considerar um objeto capaz de relacionar pontos individuais de fibras vizinhas. Esta é de fato a motivação para a definição de conexões em fibrados principais.

**Definição 4.** Uma **conexão  $\omega$  no fibrado principal** é uma 1-forma diferenciável em  $P$  com valores na álgebra de lie  $\mathfrak{g}$ , e escrevemos:  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ , tal que, para todo  $p \in P$  e  $g \in G$ :

$$(\omega \circ i)_p = \mathbb{I}_{T_e G}, \quad R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega \quad (1.2)$$

onde  $Ad$  é a representação adjunta do grupo  $G$  em sua álgebra de lie.

**Observação 2.** Dada uma conexão no fibrado principal, podemos separar o espaço tangente para cada ponto  $p \in P$  em uma soma direta dada por:  $T_p P = H_p P \oplus V_p P$ , onde  $H_p P \equiv \{X \in T_p P \mid \omega(X) = 0\}$ . Esta separação herda a diferenciabilidade da 1-forma no espaço total, de modo que o conjunto de espaços horizontais,  $HP := \{H_p P \mid p \in P\}$ , é invariante sob ação do grupo de estrutura, ou seja  $R_g^* H_p P = H_{R_g p} P$ .

**Proposição 3.** Se  $\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow M$  é um curva fechada e orientada, com ponto inicial  $x \in M$ , escrevemos  $\mathbf{c} \in C_x(M)$ . Para cada  $p \in \pi^{-1}(c(0))$ , existe uma única curva  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow P$ , que começa em  $\tilde{c}(0) = p$ , projetada em  $\mathbf{c}$ , ou seja:  $\pi \circ \tilde{c} = \mathbf{c}$ ,  $\forall t$ , tal que  $\tilde{c}'(t) \in H_{\tilde{c}(t)} P$ ,  $\forall t$  (NAKAHARA, 1990).

A proposição anterior garante, através do teorema fundamental das EDO's, a existência do mapa de holonomia  $H(\mathbf{c}, \omega) : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ , para cada loop  $\mathbf{c}$ , tal que  $\mathbf{c}(0) = x$ . Com isso definimos finalmente o grupo de holonomia em  $p \in \pi^{-1}(x)$ , como sendo o subgrupo  $G(p) \subset G$  denotado por:

$$G(p) \equiv \{g \in G \mid H(\mathbf{c}, \omega)(p) = R_g p, \quad \mathbf{c} \in C_x(M)\}$$

Outra propriedade interessante das conexões é que elas formam um espaço afim. Sendo  $\omega_0$  e  $\omega_1$  conexões em um fibrado principal, a 1-forma com valores na álgebra de lie

dada por  $\phi \equiv \omega_1 - \omega_0$ , é equivariante, ou seja,  $R_g^*(\phi) = Ad_{g^{-1}}\phi$ , e se anula quando aplicada a campos verticais. Portanto temos uma família de conexões dada por

$$\omega_t = \omega_0 + t\phi \quad \text{para } t \in [0, 1] \quad (1.3)$$

Agora, seja  $\omega$  uma 1-forma de conexão em  $P$ , para cada trivialização local  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ , podemos considerar o mapa diferenciável  $\Delta_e : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times G$ , tal que  $\Delta_e(x) = (x, e)$ , para então definir uma conexão local dada por  $\omega_\alpha = s_\alpha^*\omega$ , onde  $s_\alpha \equiv \psi_\alpha^{-1} \circ \Delta_e$ . Estas 1-formas locais são denominadas potenciais de calibre e, sendo  $G$  compacto, se transformam sob mudança de coordenadas da seguinte forma (DEWITT-MORETTE, 1982):

**Proposição 4.** Sendo  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ , os respectivos potenciais de calibre  $\omega_\alpha$  e  $\omega_\beta$  se transformam sob mudança de coordenadas pela seguinte igualdade:

$$\omega_\beta = Ad_{t_{\alpha\beta}^{-1}}(\omega_\alpha) + t_{\alpha\beta}^{-1} dt_{\alpha\beta} \quad (1.4)$$

onde,  $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ , é dada por  $t_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha(p) \circ \phi_\beta^{-1}(p)$ ,  $p \in \pi^{-1}(x)$

**Observação 3.** As aplicações  $t_{\alpha\beta}$  são chamadas funções de transição, serão assumidas contínuas e satisfazem a propriedade de cociclo:  $t_{\alpha\gamma}(x) = t_{\alpha\beta}(x)t_{\beta\gamma}(x)$ , para  $x \in U_\alpha \cup U_\beta \cup U_\gamma$ .

O conceito de curvatura, abordado a seguir, pode ser visto como uma generalização do tensor de curvatura de Riemann. Sob condições razoáveis, a subálgebra de lie correspondente ao grupo de holonomia pode ser gerada pela combinação de termos da 2-forma de curvatura aplicada em vetores horizontais. Esta relação fundamental entre a curvatura e o grupo de holonomia em fibrados principais é dada pelo teorema de Ambrose-Singer (para uma demonstração veja (DEWITT-MORETTE, 1982)).

Pela observação (2), temos uma projeção nos espaços horizontais,  $h_p : T_p P \rightarrow H_p P$ , para cada  $p \in P$ , por conta disso, veremos a seguir (definição 5) que a própria conexão permite estender a ideia de derivada exterior para 1-formas com valores em espaços vetoriais  $V$ . Como estamos interessados na derivação da conexão, nos restringiremos ao caso em que  $V = \mathfrak{g}$ .

**Definição 5.** A derivada exterior de uma  $p$ -forma diferenciável  $\varphi = \varphi_i \otimes T_i$  em  $P$ , com valores na álgebra de lie  $\mathfrak{g}$ , é dada por:

$$d_\omega \varphi(X_1, \dots, X_{p+1}) \equiv d\varphi(h(X_1), \dots, h(X_{p+1})) \quad (1.5)$$

onde  $\{T_i\}$  é uma base de  $\mathfrak{g}$ , e  $d\varphi = (d\varphi_i) \otimes T_i$

Dada uma conexão em  $P$  podemos definir sua respectiva curvatura a partir da derivada covariante  $\Omega \equiv d_\omega \omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ . Segue diretamente da definição que  $\Omega(X, Y)$

é nula se  $X$  ou  $Y$  for vertical, em outras palavras dizemos que  $\Omega$  é forma horizontal. Além disso, utilizando as propriedades de  $\omega$ , bem como a antissimetria e linearidade da curvatura, podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 5** (Equação de estrutura de Maurer-Cartan).

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (1.6)$$

Utilizando a equação de Maurer-Cartan e a propriedade 1.2 da 1-forma de conexão, podemos escrever:

$$\begin{aligned} R_g^* \Omega &= R_g^* d\omega + R_g^* [\omega, \omega] \\ &= dR_g^* \omega + [R_g^* \omega, R_g^* \omega] \\ &= dAd_{g^{-1}} \omega + [Ad_{g^{-1}} \omega, Ad_{g^{-1}} \omega] \\ &= Ad_{g^{-1}} d\omega + [\omega, \omega] = Ad_{g^{-1}} \Omega \end{aligned}$$

Concluimos então que a curvatura herda a equivariância da conexão:

$$R_g^* \Omega = Ad_{g^{-1}} \Omega \quad (1.7)$$

Observamos que colchete de formas diferenciais com valores na álgebra de lie é definido da seguinte maneira. Sendo  $\{T_a\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$ , e  $\omega = \omega^a T_a \in \Omega^r(P, \mathfrak{g})$ ,  $\theta = \theta^b T_b \in \Omega^s(P, \mathfrak{g})$ , definimos:

$$[\omega, \theta] \equiv \omega \wedge \theta - (-1)^{rs} \theta \wedge \omega = \sum_{a,b} [T_a, T_b] \omega^a \wedge \theta^b \quad (1.8)$$

Portanto a equação de estrutura de Maurer Cartan pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Omega^a = d\omega^a + \frac{1}{2} f^{abc} \omega^b \wedge \omega^c \quad (1.9)$$

Por fim, temos a famosa identidade de Bianchi, como uma consequência destes dois últimos resultados 1.7 e 1.6:

$$d_\omega \Omega = 0 \quad (1.10)$$

**Observação 4.** De maneira análoga a conexão temos a forma local da curvatura dada por:  $\Omega_\alpha \equiv s_\alpha^* \Omega$ . Quando dois potenciais são relacionados pela equação 1.4, dizemos que são localmente equivalentes, e com esta equação é possível mostrar que:

$$\Omega_\beta = Ad_{t_{\alpha\beta}^{-1}} \Omega_\alpha \quad (1.11)$$

além disso,  $\omega_\beta = 0$  se, e somente se,  $\omega_{\alpha\mu}(x) = -\partial_\mu t_{\alpha\beta}(x) t_{\alpha\beta}^{-1}(x)$ . Expandindo esta última igualdade obtemos  $\Omega_\alpha = 0$ , ou seja um potencial de calibre é localmente equivalente à zero se, e somente se, sua respectiva curvatura local é nula.

## 1.3 Teorias de Yang-Mills

Vamos agora à uma realização mais concreta das teorias de calibre não abelianas. A teoria de Yang-Mills, com grupo de calibre compacto  $G$ , no espaço euclideano ou no espaço de Minkowski, pode ser descrita por um fibrado principal  $(P, \pi, \mathbb{R}^4, G)$ .

Sendo  $\mathfrak{g}$  semi-simples podemos escolher as constantes de estrutura completamente antissimétricas:

$$[T_a, T_b] = f_{abc}T_c \quad (1.12)$$

Além disso, devemos escolher uma normalização para estes geradores:

$$\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (1.13)$$

Sendo  $\Omega^a \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu$  a curvatura dada pelo potencial de calibre, usualmente denotado como  $\omega^a \equiv A_\mu^a dx^\mu$ , expressamos a equação 1.9 da seguinte forma:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.14)$$

Neste contexto as transformações de calibre equivalem a escolha de trivialização local. A ação que corresponde a Lagrangeana livre pode ser definida como:

$$S_{YM}[A] \equiv \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x = \frac{1}{4g^2} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}^a F^{a\ \mu\nu} d^4x \quad (1.15)$$

Observamos que, mesmo para o caso "livre", temos o aparecimento de termos de auto-interação. Estes termos surgem justamente devido ao caráter não abeliano da teoria, basta observar a equação 1.14.

A ação 1.15 escolhida é invariante por transformações de calibre, i.e. escolhas de trivializações locais, pois, como visto em 1.11, a curvatura se transforma de acordo com a representação adjunta. Além disso podemos escrever as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu{}^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu{}^a} = 0 \Rightarrow (D^\mu)^{ab} F_{\mu\nu}^b = 0 \quad (1.16)$$

Onde  $D^\mu{}^{ab} \equiv \partial^\mu \delta^{ab} + f^{abc} A^\mu{}^c$  é a derivada covariante 1.5.

Utilizando o operador estrela de Hodge, relativo à métrica do espaço base, as equações 1.15 e 1.16 podem ser reescritas respectivamente da seguinte maneira:

$$S_{YM}[A] = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge \star F) \quad (1.17)$$

$$d_A \star F = 0 \quad (1.18)$$

Desta forma, utilizando a identidade de Bianchi 1.10, no espaço euclideano temos soluções auto-duais e anti-auto-duais:  $\star F = \pm F$

Com base na proposição 3 podemos também escrever elementos do grupo de holonomia com o auxílio do ordenamento de caminho <sup>1</sup>, pois temos interesse em álgebras matriciais não abelianas:

$$U(K, A) = \text{P} \left[ \exp \left( \int_{s_0}^s A_\mu(x(t)) \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) \right] = \text{P} \left[ \exp \left( \oint_K A_\mu^a T^a dx^\mu \right) \right] \quad (1.20)$$

Estes transportes paralelos fornecem o fator de fase da função de onda associada a uma partícula (interpretada pela escolha da representação  $R$ ) que é transportada através do loop  $K$ . O ordenamento nesta integral de caminho pode ser compreendido da seguinte maneira:

$$U(K, A) := \prod_{t=s_0}^s (1 + A_\mu(x(t)) \frac{dx^\mu}{dt} dt) \quad (1.21)$$

Segue de 1.21, que sob transformações de calibre 1.4, o transporte paralelo 1.20 também se transforma de acordo com a representação adjunta.

Portanto, tomando o traço de 1.20, temos um invariante de calibre, chamado **Loop de Wilson**:

$$W_K^A := \text{Tr} U(K, A) \quad (1.22)$$

É importante deixar claro que estamos integrando e exponenciando funções com valores em álgebras não abelianas em alguma representação matricial, e portanto devemos tomar o cuidado de especificar a ordem das operações. A ordenação dos pontos de  $K$  fica definida através da orientação da parametrização  $A_\mu(x(t))$ , onde  $t \in [s^0, s]$ , e podemos escrever explicitamente:

$$W_K^A = \sum_{n=0}^{\infty} \text{P} \int \left( \prod_{k=1}^n dx_k^{\mu_k} \right) A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \text{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_n}) \quad (1.23)$$

Estes objetos são interpretados como fatores de fase que surgem, por exemplo, no estudo do efeito Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959). Além disso são de extrema importância na formulação da QCD, estando diretamente associados a previsões do valor da energia entre quarks estáticos (MAKEENKO, 2002).

Se desejarmos incluir campos de matéria à teoria, estes serão interpretados como seções no nosso fibrado, de modo a estarem sujeitos ao grupo de simetria  $G$ . Para tanto, podemos considerar a Lagrangeana livre de campos fermiônicos:

$$\mathcal{L}_{fermion} = \psi(i\rlap{-}\not{D} - m)\bar{\psi} \quad (1.24)$$

<sup>1</sup> Sendo  $A(t)$  e  $B(t)$  matrizes dependentes de um parâmetro  $t \in [0, 1]$ , por exemplo, o ordenamento de caminhos é definido pela seguinte regra:

$$P(A(t)B(s)) := \begin{cases} A(t)B(s), & \text{se } t > s \\ B(s)A(t), & \text{se } s > t \end{cases} \quad (1.19)$$

Em geral,  $\psi$  é um vetor no espaço interno associado à uma representação do grupo de simetria  $G$ . Ao impormos a invariância sob trivializações locais, se faz necessário o acoplamento do campo com o potencial de calibre, conseqüentemente podemos mostrar a invariância da Lagrangeana e da ação. O acoplamento consiste em modificar a Lagrangeana de acordo com a representação escolhida para  $\psi$ . Podemos então escrever a Lagrangeana :

$$\mathcal{L}_{total} = -\frac{1}{2g^2} Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \psi(i\not{D} - m)\bar{\psi} \quad (1.25)$$

O operador  $\not{D}$  é a derivada covariante, associada ao potencial de calibre. Por exemplo, para o caso de  $G \equiv SU(3)$ , e  $\psi$  na representação fundamental, temos:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{1}{2i} A_\mu^a \lambda_a \quad (1.26)$$

Neste caso,  $\lambda_a$ , são as matrizes de Gell-Man. A Lagrangeana 1.25 é utilizada, por exemplo, para descrever as interações fortes, dadas pela troca de glúons pelos campos de quark  $\psi$ .

Este é o substrato básico para a teoria de Chern-Weil, o nosso objetivo agora será associar a essas conexões uma estrutura cohomologica que possa descrever a não trivialidade do fibrado principal.

## 1.4 O teorema de Chern-Weil e Classes características

Consideraremos a álgebra  $S(\mathfrak{g})$  das aplicações multilineares simétricas  $S : \otimes^r \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , invariantes, ou seja,  $S(Ad_g A_1, \dots, Ad_g A_r) = S(A_1, \dots, A_r)$ ,  $\forall A_i \in \mathfrak{g}$  e  $g \in G$ . Para cada aplicação  $S \in S(\mathfrak{g})$ , existe um único polinômio, dado pelo mapa  $p_S : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $p_S(V) = S(V, \dots, V)$ , para todo elemento  $V \in \mathfrak{g}$ . É fácil ver que  $p_S$  também é invariante. De fato, podemos mostrar que a álgebra das aplicações multilineares simétricas invariantes é isomorfa a àlgebra das funções polinomiais invariantes (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969).

Para o teorema a seguir estaremos interessados em polinômios associados a formas com valores na algebra de lie, pois este é o caso da conexão e curvatura em fibrados principais. Para detalhes sobre Homologia e Cohomologia de De Rham, confira o apêndice C.

**Teorema 1.** Seja  $(P, \pi, M, G)$  fibrado principal,  $\omega$  e  $\Omega$  uma conexão com sua respectiva curvatura e  $S$  uma aplicação k-multilinear simétrica. Então, para a 2k-forma  $S(\Omega)$  em P dada pela seguinte soma em todas as  $(2k)!$  permutações  $\sigma$  possíveis:

$$S(\Omega)(X_1, \dots, X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) S(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})),$$

existe uma única  $2k$ -forma  $\bar{S}(\Omega)$  em  $M$ , tal que:  $S(\Omega) = \pi^*\bar{S}(\Omega)$ . Esta forma é fechada e sua classe de cohomologia independe da 1-forma de conexão.

*Demonstração.* Sendo  $V_1, \dots, V_{2k} \in T_x M$ , para algum  $x \in M$ , definimos a  $2k$ -forma pela relação:

$$\bar{S}(\Omega)(V_1, \dots, V_{2k}) \equiv S(\Omega)(X_1, \dots, X_{2k}),$$

onde  $X_1, \dots, X_{2k} \in T_p P$ , e  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Pela transitividade da ação do grupo de lie nas fibras, podemos considerar quaisquer  $Y_1, \dots, Y_{2k} \in T_p P$ , de modo que, para cada  $i = 1, \dots, 2k$ ; temos  $X_i - Y_i \in V_p P$ , portanto  $S(\Omega)(X_1, \dots, X_{2k}) = S(\Omega)(Y_1, \dots, Y_{2k})$ .

Sejam  $X_1, \dots, X_{2k+1} \in T_p P$ . Pelas propriedades da derivada exterior e da curvatura:

$$\begin{aligned} dS(\Omega)(X_1, \dots, X_{2k+1}) &= d(\pi^*\bar{S})(X_1, \dots, X_{2k+1}) = \pi^*d(\bar{S})(X_1, \dots, X_{2k+1}) = \\ &= d(\bar{S})(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_{2k+1}) = d(\bar{S})(\pi_*h(X_1), \dots, \pi_*h(X_{2k+1})) \\ &= dS(\Omega)(h(X_1), \dots, h(X_{2k+1})) = d_\omega S(\Omega)(X_1, \dots, X_{2k+1}) = 0 \end{aligned}$$

Onde, na ultima igualdade utilizamos a identidade de Bianchi. Portanto  $\bar{S}(\Omega)$  é forma fechada.

Vamos agora mostrar que a classe de cohomologia de  $\bar{S}(\Omega)$  é invariante pela escolha do potencial de calibre. Para isso precisamos estender o domínio dos polinômios invariantes, logo associaremos cada mapa  $S$ ,  $r$ -multilinear e simétrico, com formas diferenciáveis dadas por:

$$\begin{aligned} &S(A_1, \dots, A_k)(X_1, \dots, X_{q_1+\dots+q_k}) = \\ &= \frac{1}{(\sum_{i=1}^r q_i)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) S(A_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(q_1)}), \dots, A_r(X_{\sigma(q_1+\dots+q_{k-1}+1)}, \dots, X_{\sigma(q_1+\dots+q_k)})) \end{aligned}$$

Onde cada  $A_i \in \otimes \Omega^{q_i}(P, \mathfrak{g})$  e  $X_j \in T_p P$ .

Escolhendo duas conexões  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , temos a família de curvaturas  $\Omega_t$  associadas às conexões  $\omega_t$ , utilizando o fato  $\frac{d}{dt}\Omega_t = d_{\omega_t}\phi$ , obtem-se a seguinte igualdade:

$$\bar{S}(\Omega_1) - \bar{S}(\Omega_0) = d \left[ \pi^* \left( k \int_0^1 S(\phi, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \right) \right] \equiv dQ_{CS}^{(2k-1)}(\omega_1, \omega_0) \quad (1.27)$$

Onde, na expressão 1.27 definimos a forma de Chern-Simons  $Q_{CS}^{(2k-1)}(\omega_1, \omega_0)$ . Será conveniente estabelecer a notação:  $Q_{CS}^{(2k-1)}(\omega, \Omega) := Q_{CS}^{(2k-1)}(\omega, 0)$

□

Em resumo, temos que cada polinômio invariante corresponde à uma classe de cohomologia no espaço base, a qual denotaremos classe característica. Essa correspondência é independente da 1-forma de conexão utilizada e é conservada por difeomorfismos

de fibrados, portanto constitui um invariante topológico. Veremos a seguir um exemplo importante de classes características: As classes de Chern.

**Exemplo 3** (Classes de Chern). Escolhendo um fibrado principal  $(E, \pi, M, GL(k, \mathbb{C}))$ , com fibra típica  $\mathbb{F} \equiv \mathbb{C}^k$ , 1-forma de conexão  $\omega$  e respectiva curvatura  $\Omega$ . Definimos  $k + 1$  polinômios invariantes através da seguinte relação (cf. Apêndice B) :

$$\det\left(\lambda \mathbf{1} - \frac{1}{2\pi i} \Omega\right) = \sum_{j=0}^k S_j(\Omega) \lambda^{k-j} \quad (1.28)$$

Pelo teorema 1, podemos definir as  $j$ -classes de chern como  $c_j(E) \equiv [c_j(\Omega)]$ , onde  $\pi^* c_j(\Omega) = S_j(\Omega)$ . Além disso, tomando  $\lambda = 1$ , a equação 1.28 define a classe de chern total

$$c(E) \equiv \bigoplus_{j=0}^k c_j(E) \quad (1.29)$$

Um fato importante é que ao efetuarmos a integral de um representante de uma classe de Chern, digamos  $c_j(\Omega)$ , sobre um  $2k$ -ciclo na variedade base  $M$ , o número resultante também é um invariante topológico, e em geral depende da classe de homologia do ciclo escolhido (DEWITT-MORETTE, 1982).

**Proposição 6.** As classes de chern satisfazem às seguintes propriedades

1.  $c_0(E) = 1 \in H^0(M, \mathbb{R})$
2. (Naturalidade)  $c(f^* E) = f^* c(E)$
3. (Fórmula da soma de Whitney)  $c(\bigoplus_{i=1}^n E_i) = \bigwedge_{i=1}^n c(E_i)$

Podemos considerar ainda outra classe característica, dada pelo caráter de Chern, no caso de um fibrado  $P(S^4, SU(2))$ , por exemplo, podemos escreve-la da seguinte forma:

$$\text{ch}(\Omega) \equiv \text{tr} \left[ \exp \left( \frac{i}{2\pi} \Omega \right) \right] = 2 + \text{tr} \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right)^2 \quad (1.30)$$

Todos  $ch_j$  podem ser escritos como combinações de classes de chern. Em geral  $c_1$  coincide com  $ch_1$  e

$$ch_2(\Omega) = \frac{1}{2} (c_1(\Omega)^2 - 2c_2(\Omega)) \quad (1.31)$$

No caso do grupo de calibre  $SU(2)$ , sabemos que sua álgebra de Lie é dada por matrizes hermiteanas de traço nulo, então o primeiro caráter de chern se anula, e o segundo caráter de chern é igual à segunda classe de chern a menos de um sinal. É possível mostrar

também que as forma de Chern-Simons correspondentes aos dois últimos termos do lado direito da equação 1.30, são dadas respectivamente por:

$$Q_{CS}^{(1)} = \frac{i}{2\pi} \text{tr}(\omega) \quad (1.32)$$

$$Q_{CS}^{(3)} = \frac{-1}{8\pi^2} \text{tr}\left(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right) \quad (1.33)$$

A seguir veremos que a forma de Chern Simons não é invariante por transformações de calibre mas se transforma por uma forma exata. Utilizando o fato de que o espaço de conexões é afim e sendo  $\bar{S}(\omega_t, \Omega_t)$  (utilizando a notação da equação 1.3), um polinômio invariante podemos definir:

**Definição 6.** O operador de homotopia de Cartan  $k_{01}$  é dado por

$$k_{01}\bar{S}(\omega_t, \Omega_t) \equiv \int_0^1 l_t \bar{S}(\omega_t, \Omega_t) \quad (1.34)$$

onde  $l_t$  é um operador anti-derivativo, tal que:  $l_t \omega_t \equiv 0$ , e  $l_t \Omega_t \equiv \delta t \phi$

$l_t$  anti-derivativo significa que para  $\omega \in \Omega^r(P, \mathfrak{g})$  e  $\theta \in \Omega^s(P, \mathfrak{g})$  temos:

$$l_t(\omega \wedge \theta) = (l_t \omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (l_t \theta) \quad (1.35)$$

Para entender a utilidade deste operador, devemos observar como ele atua combinado com a derivada exterior, ou seja,  $(dk_{01} + k_{01}d)$ . Aplicando esta combinação em  $\omega_t$ :

$$\begin{aligned} (dk_{01} + k_{01}d)\omega_t &= \int_0^1 d(l_t \omega_t) + l_t(d\omega_t) = \int_0^1 l_t(\Omega_t - \omega_t^2) \\ &= \int_0^1 \delta t \phi - (l_t \omega_t)\omega_t - \omega_t(l_t \omega_t) = \int_0^1 \delta t \phi = \omega_1 - \omega_0 \end{aligned}$$

E para a família de curvaturas  $\Omega_t$  temos que:

$$\begin{aligned} (dk_{01} + k_{01}d)\Omega_t &= \int_0^1 d(l_t \Omega_t) + l_t(d\Omega_t) \\ &= \int_0^1 d(\delta t \phi) + l_t(d_{\omega_t} \Omega_t - [\omega_t, \Omega_t]) \\ &= \int_0^1 \delta t d\phi + \omega_t \wedge \Omega_t + \Omega_t \wedge \omega_t \\ &= \int_0^1 \delta t (d\phi + [\omega_t, \phi]) = \int_0^1 \delta t d_{\omega_t} \phi = \int_0^1 \delta t \frac{d}{dt} \Omega_t = \Omega_1 - \Omega_0 \end{aligned}$$

Como  $\bar{S}(\omega_t, \Omega_t)$  é polinomial, temos a formula de homotopia de cartan:

$$(dk_{01} + k_{01}d)\bar{S}(\omega_t, \Omega_t) = \bar{S}(\omega_1, \Omega_1) - \bar{S}(\omega_0, \Omega_0) \quad (1.36)$$

Se o grau do polinômio  $\bar{S}(\omega_t, \Omega_t)$  for suficientemente alto, então  $d\bar{S}(\omega_t, \Omega_t) = 0$ , portanto, comparando com 1.27:

$$k_{01}\bar{S}(\omega_t, \Omega_t) = Q_{CS}^{2k+1}(\omega_1, \omega_0) \quad (1.37)$$

Para formas locais  $\omega_\alpha$  e  $\omega_\beta$  de uma conexão  $\omega$ , podemos considerar uma família de conexões começando (ou seja, em  $t = 0$ ) em uma conexão plana:

$$\omega_{\beta t} \equiv t(t_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha t_{\alpha\beta}) + t_{\alpha\beta}^{-1}dt_{\alpha\beta} \quad (1.38)$$

$$\Omega_{\beta t} \equiv t\Omega_\alpha + (t^2 - t)\omega_\alpha^2 \quad (1.39)$$

É fácil notar que  $\omega_{\beta 0} = t_{\alpha\beta}^{-1}dt_{\alpha\beta}$ ,  $\Omega_{\beta 0} = 0$  e  $\omega_{\beta 1} = \omega_\beta$ ,  $\Omega_{\beta 1} = \Omega_\beta$ . Utilizando 1.36:

$$\bar{S}(\omega_\beta, \Omega_\beta) - \bar{S}(t_{\alpha\beta}^{-1}dt_{\alpha\beta}, 0) = (dk_{01} + k_{01}d)\bar{S}(\omega_{\beta t}, \Omega_{\beta t})$$

Em particular para  $\bar{S} \equiv Q_{CS}^{2k+1}$ , e utilizando a fórmula 1.37, bem como a invariância de  $\bar{S}$ :

$$\begin{aligned} Q_{CS}^{2k+1}(\omega_\beta) - Q_{CS}^{2k+1}(t_{\alpha\beta}^{-1}dt_{\alpha\beta}) &= d(k_{01}Q_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) + k_{01}(dQ_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) \\ &= d(k_{01}Q_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) + k_{01}\bar{S}(\Omega_\beta) \\ &= d(k_{01}Q_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) + k_{01}\bar{S}(\Omega_\alpha) \\ &= d(k_{01}Q_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) + Q_{CS}^{2k+1}(\omega_\alpha) \end{aligned}$$

Este resultado é importante, pois mostra que a forma de Chern-Simons é invariante por transformações de calibre apenas quando seus termos de fronteira se anulam, o que em geral pode não ocorrer para variedades com bordo.

**Proposição 7.** Sendo  $\omega_\alpha$  e  $\omega_\beta$  potenciais de calibre equivalentes, então a forma de Chern-Simons satisfaz a seguinte equação:

$$Q_{CS}^{2k+1}(\omega_\beta) - Q_{CS}^{2k+1}(\omega_\alpha) = Q_{CS}^{2k+1}(t_{\alpha\beta}^{-1}dt_{\alpha\beta}) + d(k_{01}Q_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) \quad (1.40)$$

### 1.4.1 Número de Instanton

Como exemplo da aplicação desses conceitos, considere uma teoria de Yang-Mills no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^4$ , com grupo de calibre  $SU(2)$ . Podemos nos restringir à análise de configurações de campo que resultam em uma ação finita, ou seja, de acordo com

a equação 1.15, configurações em que  $F_{\mu\nu}$  seja uma função quadraticamente integrável. Para  $|x| \rightarrow \infty$ , devemos ter  $F_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0$ , e conseqüentemente (veja observação 4) o potencial deve decair para uma transformação de calibre de uma conexão nula. Graças à simetria conforme da ação podemos considerar a compactificação de  $\mathbb{R}^4$  em  $S^4$ .

Consideramos então o fibrado principal  $P(S^4, SU(2))$ , onde  $S^4$  é obtida pela compactificação por um ponto:  $S^4 \equiv \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ . Tomamos ainda uma cobertura do espaço total dada por  $\{U_N, U_S\}$ , definidas da seguinte forma:  $U_N \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\vec{x}| < R + \epsilon\}$ , e  $U_S \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\vec{x}| > R - \epsilon\}$ , onde  $R$  e  $\epsilon$  são números positivos e  $\epsilon$  infinitesimal. Observamos que a função de transição é definida na esfera  $S_R^3$ , que corresponde à intercessão dos abertos  $U_N$  e  $U_S$ . Além disso, podemos assumir, pela observação 4, que  $\omega_S = 0 \forall x \in U_S$ . Por outro lado, o grupo de estrutura  $SU(2)$  é difeomorfo à  $S^3$ , de modo que as funções de transição, ou seja, as aplicações  $t_{NS} : S_R^3 \rightarrow SU(2)$  podem ser caracterizadas topologicamente pelo seu grau<sup>2</sup>

Vamos agora analisar a quantidade  $Q$  dada pela forma de Chern-Simons, correspondente ao segundo caráter de Chern B:

$$Q := \int_{S^4} ch_2(F) \equiv \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{Tr}(F \wedge F) \quad (1.41)$$

Notamos que no caso de soluções auto-duais, esta quantidade é proporcional a própria ação 1.15. Como temos apenas duas trivializações locais, utilizando o teorema de Stokes, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{U_N} ch_2(F_N) + \int_{U_S} ch_2(F_S) \\ &= \int_{U_N} dQ_{CS}^{(3)}(A_N) + \int_{U_S} dQ_{CS}^{(3)}(A_S) \\ &= \int_{S_R^3} Q_{CS}^{(3)}(A_N) - Q_{CS}^{(3)}(A_S) \\ &= \frac{-1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} \text{tr}(t_{NS}^{-1} dt_{NS})^3 \end{aligned}$$

Este número coincide com o grau das funções de transição que caracterizam a torção do fibrado  $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$ , e é um invariante por transformações de calibre conectadas à transformação identidade (COLEMAN, 1979). Esta grandeza também é chamada de número de instanton e determina o número de vezes que  $SU(2)$  é coberto pela função de transição quando consideramos todo o  $S^3$ .

Até agora estabelecemos uma introdução à matemática das teorias de calibre. Grande parte da geometria diferencial que fundamenta essas teorias de campo foi abor-

<sup>2</sup> Cada mapa contínuo  $t : S^n \rightarrow S^n$  induz um homomorfismo  $t_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ , onde  $H_n(S^n)$  é o  $n$ -ésimo grupo de homologia da  $n$ -esfera. Como  $H_n(S^n)$  é isomorfo ao grupo de números inteiros, o homomorfismo induzido deve obedecer a seguinte regra:  $t_*(a) = n \cdot a$ , para  $n \in \mathbb{Z}$  (cf. (HATCHER, 2000)).

dada, revelando seus aspectos globais. O objetivo final é entender as implicações matemáticas da quantização dessas teorias, em particular, temos interesse em teorias do tipo Chern-Simons, cuja ação é proporcional à integral da forma de Chern-Simons. Nas últimas três décadas ela têm se mostrado uma fonte de muitas ideias diferentes e aplicações na física teórica de altas energias e física da matéria condensada, bem como na matemática, pois fornece um método para a obtenção de invariantes em variedades tridimensionais.

Antes de analisar os invariantes de nós em espaços gerais do ponto de vista físico-matemático, no capítulo 4, vamos realiza-los no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  a seguir.



## 2 Polinômio de Jones e Invariantes de Ordem Finita

### 2.1 Nós e Movimentos de Reidemeister

Exemplos de questões que perduraram durante muito tempo na Teoria de Nós se devem ao físico-matemático escocês Peter Guthrie Tait, um colaborador de Lord Kelvin, que promoveu um estudo classificatório de nós e propôs três conjecturas. Veremos a seguir como os polinômios de Jones tiveram grande sucesso na solução desses problemas.

**Definição 7.** Um nó é um mapa diferenciável injetivo  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com vetor tangente não nulo.

Em outras palavras, é uma curva no  $\mathbb{R}^3$ , fechada e sem autointerseções. Na verdade, trabalhamos apenas com a imagem dessa aplicação no espaço euclidiano e a denotaremos  $f(S^1) \equiv K$ . Esta definição pode ser realizada para a esfera  $S^3$ , pensada como a compactificação de  $\mathbb{R}^3$  por um ponto. Na medida em que a orientação se tornar importante, utilizaremos setas para indicá-la.

Para tornar a manipulação desses objetos mais intuitiva, podemos considerar os diagramas de projeção de cada nó. Os diagramas são simplesmente representações bidimensionais desses objetos, dadas pela projeção do nó em algum plano que não o intercepta, e em cada cruzamento, é destacado qual segmento passa por baixo, e qual passa por cima. A seguir vemos um exemplo de diagramas que temos interesse. O fato é que todos os links que iremos considerar neste trabalho podem ser caracterizados por uma infinidade de diagramas diferentes, e se desenharmos qualquer diagrama arbitrário, sempre poderemos encontrar um link associado à ele. Apesar disso, utilizamos em geral os diagramas de um nó que contém o menor número de cruzamentos possível, desse modo, os nós  $7_4$  e  $7_5$ , na figura 1, são exemplos de diagramas de nós distintos, mas com o mesmo número mínimo de cruzamentos.

Em 1927, ao utilizar estes diagramas de projeção, Kurt Reidemeister descobriu que diferentes diagramas de um mesmo nó podem ser obtidos um do outro, por uma sequência de 3 tipos de movimentos distintos, estes movimentos são denominados movimentos de Reidemeister e são descritos na figura 2. O movimento  $R1$  consiste em torcer o fio em qualquer direção,  $R2$  move um segmento sobre o outro e com  $R3$  movemos um segmento por cima ou por baixo de um cruzamento.

Como dissemos na introdução, temos interesse na classificação dos nós, isso significa dizer quando dois nós são iguais, para tanto, diversas noções de equivalência podem

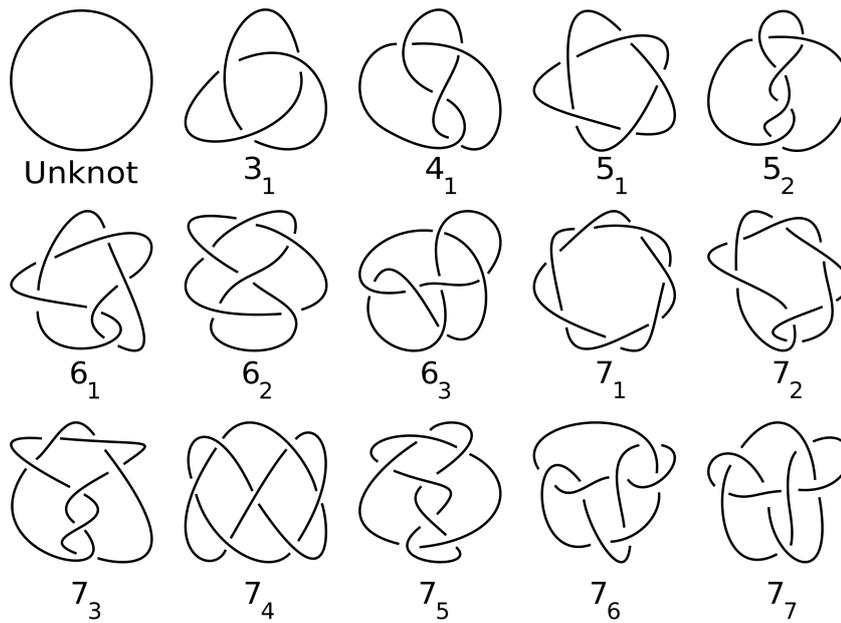


Figura 1 – Exemplos de diagramas de projeção de nós.

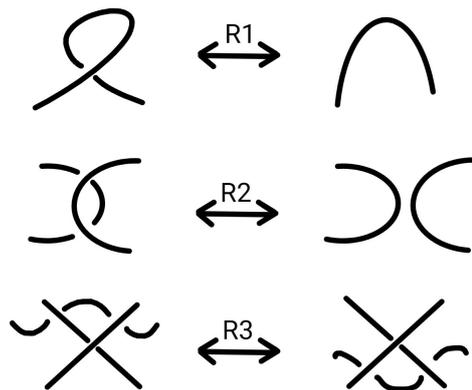


Figura 2 – Exemplos dos tipos de movimentos de Reidemeister.

ser construídas. Se a princípio tivermos dois nós, cujos diagramas coincidirem após a realização dos movimentos  $R2$  e  $R3$ , dizemos que os nós são regularmente isotópicos. Por outro lado, se for necessário também a utilizar o movimento  $R1$  então temos uma isotopia ambiente entre nós. Mais precisamente podemos definir a isotopia ambiente de nós da seguinte forma:

**Definição 8.** Dois nós,  $K_0$  e  $K_1$ , são ditos ambiente isotópicos se existe uma família suave de mapas diferenciáveis, para  $x \in [0, 1]$ ,  $F_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tais que:  $F_0 = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3}$  e  $F_1(K_0) = K_1$ . O conjunto de classes de equivalência de nós será denotado por  $\mathcal{K}$

A imagem espelhada de um nó pode ser facilmente representada invertendo os cruzamentos de algum diagrama que o representa inicialmente. Para um dado nó  $K$  de-

notaremos sua imagem espelhada como  $K^*$ , e dizemos que  $K$  é **chiral** se não é isotópico à sua imagem espelhada, caso contrário é chamado **achiral**. O nó 8 é um exemplo de nó achiral, como demonstrado na figura 3.

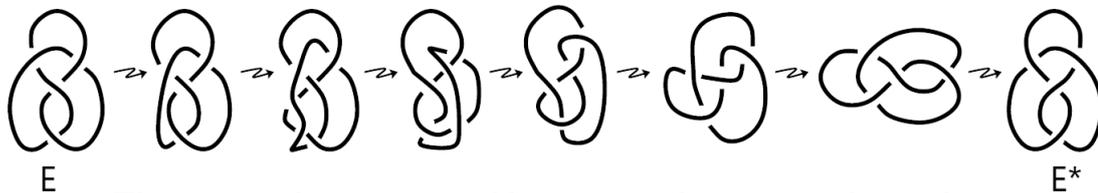


Figura 3 – Exemplo da aplicação de movimentos de Reidemeister (fonte: (CHMUTOV; DUZHIN; MOSTOVOY, 2012)).

Ao decorrer desse texto, indicaremos métodos de demonstrar essa e outras propriedades para nós mais complicados. Para começar esta construção, precisamos estender a noção de nó para links.

**Definição 9.** Um enlace, (ou link)  $L$ , de multiplicidade  $n$  é uma imersão injetiva  $f$  de uma união disjunta de  $n$  círculos no espaço euclidiano:  $f : \bigcup_{j=1}^n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Outra forma equivalente de definir links de  $n$  componentes é considerá-los como um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , constituído de  $n$  curvas fechadas, disjuntas e lineares por partes. Vemos que dessa definição, é possível orientar um link de  $2^n$  maneiras distintas, além disso a isotopia de links, bem como o link trivial podem ser definidos facilmente, pois são simplesmente uma extensão natural das ideias apresentadas para os nós.

A primeira quantidade associada aos diagramas que vamos definir será a chamada torção, ela é capaz de indicar a diferença entre cruzamentos positivos e negativos de um link  $L$ , e pode ser expressa da seguinte forma:

$$\tau(L) := \sum_{c \in \mathcal{C}(L)} \epsilon(c) \quad (2.1)$$

Onde  $\epsilon(c) = +1(-1)$ , para cruzamentos positivos (negativos) e  $\mathcal{C}(L)$  é o conjunto de todos os cruzamentos do link.

Perceba que, para diferenciar o sinal dos cruzamentos (figura 2.1), precisamos determinar a orientação dos segmentos. A partir da figura é fácil perceber que a torção é um invariante sob isotopias regulares. Por exemplo, no caso do movimento  $R2$ , a contribuição de cada um dos cruzamentos é sempre o inverso uma da outra, portanto a torção local é sempre nula. Infelizmente esta quantidade varia mediante o movimento  $R1$ , pois ele cria ou destrói um cruzamento.

Quando temos um link de duas ou mais componentes, podemos definir o número de vezes que uma componente dá a volta em outra. Supondo apenas duas componentes

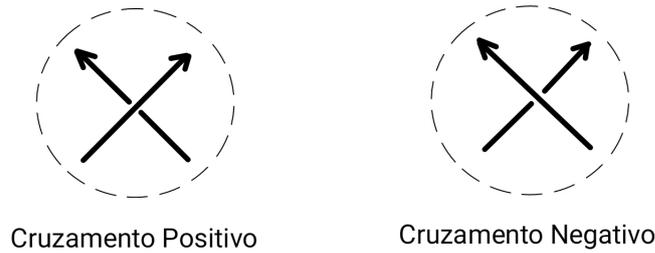


Figura 4 – Definição do sinal de cruzamentos.

$A$  e  $B$ , definiremos o número de link olhando para o seu diagrama:

$$lk(A, B) \equiv \frac{1}{2} \sum_{c \in A \cap B} \epsilon(c) \quad (2.2)$$

Esta soma percorre todos os cruzamentos de  $A$  com  $B$ , ou seja, não levamos em consideração cruzamentos em que os dois segmentos pertencem a apenas uma componente. Bem como o número de componentes do link, o número de link é o nosso primeiro exemplo de um invariante por isotopia ambiente.

Podemos ainda reescrever o número de link como uma integral. Sendo  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{y}(s)$  parametrizações de  $A$  e  $B$  respectivamente, temos que (SPIVAK, 1999):

$$lk(A, B) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1 \times S_1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad (2.3)$$

## 2.2 O polinômio de Jones

Agora estamos interessados em definir o polinômio de Jones, este é um função com valores em polinômios de Laurent<sup>1</sup>, e como um bom invariante, deve estabelecer uma função com domínio no conjunto de links orientados que retorna o mesmo valor para links isotópicos. Especificamente, tomamos um diagrama  $D$  e o polinômio retorna  $V_D(t) \in \mathbf{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$ . Um passo intermediário nesta construção, consistirá em considerar o polinômio colchete, e apartir dele definir o polinômio de Jones através de uma mudança de variáveis.

Iremos expressar alguns axiomas que indicarão como reduzir o calculo do polinômio de um diagrama em função dos polinômios de diagramas com menor numero de cruzamentos.

<sup>1</sup> Um polinômio de Laurent, com coeficientes em um corpo  $\mathbb{K}$ , é a escrita formal

$$P(X) := \sum_n A_n x^n$$

em uma variável  $t^{1/2}$ , cuja soma em  $i$  pode percorrer valores inteiros positivos e negativos.

**Definição 10.** Dois diagramas de Nós:  $K_1$  e  $K_2$ , são **divididos** se existir uma curva fechada que divide o plano em duas regiões disjuntas, uma contendo  $K_1$  e a outra contendo  $K_2$ . Neste caso escrevemos  $K_1 \sqcup K_2$ .

Na definição a seguir,  $C_0$  denotará o diagrama do nó trivial não orientado.

**Definição 11.** O **polinômio colchete** é um mapa

$$\langle \rangle : \{\text{Links não orientados}\} \rightarrow \mathbf{Z}[x, x^{-1}]$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$1. \langle C_0 \rangle = 1$$

$$2. \langle D \sqcup C_0 \rangle = (-x^2 - x^{-2}) \cdot \langle D \rangle$$

$$3. \langle C_+ \rangle = x \langle C_- \rangle + x^{-1} \langle C_{\parallel} \rangle$$

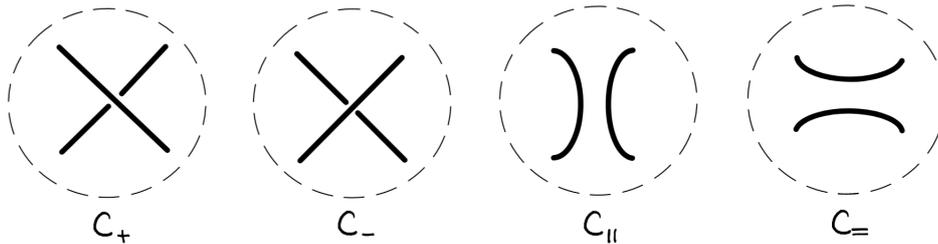


Figura 5 – Cruzamentos utilizados na definição axiomática do Bracket de Kauffman.

A regra numero (3) é chamada relação de novelo (Skein Relation), e indica como devemos proceder com um cruzamento local, ou seja, estamos equacionando o colchete de links que têm exatamente a mesma configuração, exeto no cruzamento escolhido.

Na definição 3, levando em conta as propriedades 1. e 2., a relação 3. equivale à:

$$\langle C_- \rangle = x \langle C_{\parallel} \rangle + x^{-1} \langle C_- \rangle \quad (2.4)$$

Note que cada diagrama de nó está associado à um conjunto de estados. O processo de obtenção desses estados consiste em separar cada cruzamento, levando sempre em conta as duas separações possíveis e associando cada uma à  $x$  ou  $x^{-1}$  (veja a figura 6). É fácil notar que, para um diagrama com  $n$  cruzamentos teremos  $2^n$  estados. Temos então o seguinte resultado:

**Proposição 8.** O **bracket** de um link  $K$  é dado pela seguinte expressão:

$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle (-x^2 - x^{-2})^{|\sigma|-1} \quad (2.5)$$

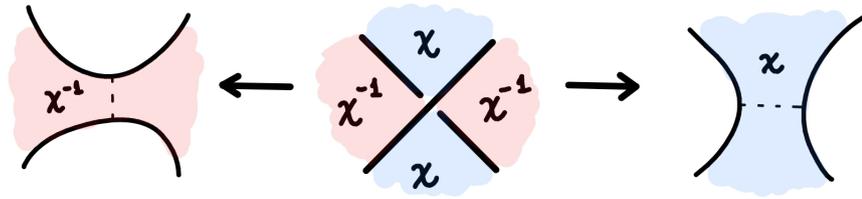


Figura 6 – Separações do tipo  $x^{-1}$  e  $x$ , à esquerda e à direita respectivamente.

O termo  $\langle K|\sigma \rangle$  denota o produto das separações que resultaram no link  $\sigma$ , chamado estado de  $K$ . E  $\|\sigma\|$  é o número de nós triviais de  $\sigma$ .

Com estas relações, o Bracket de Kauffman é um invariante pelas transformações  $R2$  e  $R3$ , mas não é invariante isotópico ambiente. De fato, se um diagrama de link é modificado através de um movimento do tipo  $R1$  então o seu polinômio colchete muda pelas relações 2.6 e 2.7.

$$\langle \text{loop} \rangle = -x^3 \langle \text{cap} \rangle \quad (2.6)$$

e

$$\langle \text{loop} \rangle = -x^{-3} \langle \text{cup} \rangle \quad (2.7)$$

Um fato interessante é que, ao juntarmos as informações da torção e do bracket de Kauffman de uma maneira conveniente, obteremos um invariante isotópico de links orientados (KAUFFMAN, 2001):

**Proposição 9.** Sendo  $K$  o diagrama de um link orientado, então o Polinômio colchete normalizado dado por

$$\mathcal{L}_K(x) = (-x)^{3\tau(L)} \langle K \rangle \quad (2.8)$$

é um invariante por isotopia ambiente.

Tendo essa propriedade em mãos, como dito anteriormente definimos o polinômio de Jones da seguinte forma

**Definição 12.** Sendo  $K$  o diagrama de um link orientado, então o **Polinômio de Jones** é dado por:

$$V_K(t) = \mathcal{L}_K(t^{-1/4}) \quad (2.9)$$

Segue diretamente desta definição as seguinte proposição:

**Proposição 10.** O polinômio de Jones é um mapa

$$V : \{\text{Links orientados}\} \rightarrow \mathbf{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

invariante por isotopia ambiente que satisfaz as seguintes propriedades:

$$V_{(\text{nó trivial})} = 1 \quad (2.10)$$

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})V_{L_0} \quad (2.11)$$

Onde  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  representam links arbitrários, idênticos, a menos de um cruzamento escolhido, no qual eles diferem de acordo com a figura 7.

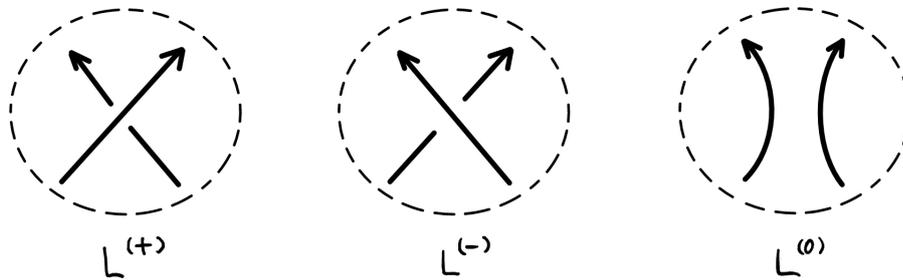


Figura 7 – Exemplo de cruzamentos para um nó orientado.

Tendo em vista a equação 2.9, por simplicidade continuaremos trabalhando com o colchete, mas lembrando que praticamente todos os resultados a seguir também são válidos para o polinômio de Jones.

Observe que, se considerarmos a imagem espelhada de um diagrama de link, a torção troca de sinal, e agora para obter o estado  $\sigma$  se faz necessário realizar a mesma quantidade de separações de cruzamentos associados à  $x^{-1}$  que antes estavam associadas à  $x$ , e vice versa. Com isso temos o seguinte resultado:

**Proposição 11.**  $\mathcal{L}_{K^*}(x) = \mathcal{L}_K(x^{-1})$

Ou seja, o nosso polinômio já consegue detectar a chiralidade dos links, bem como sua não trivialidade. Vejamos alguns exemplos:

1. O trifólio ( $T$ ) é chiral. De fato, temos:

$$\mathcal{L}_T(x) = x^{-4} + x^{-12} - x^{-16} \quad (2.12)$$

2. Já sabemos que o nó oito ( $E$ ) não é chiral, e podemos verificar que de fato o seu colchete normalizado é invariante:

$$\mathcal{L}_E(x) = x^{-8} - x^{-4} + 1 - x^4 + x^8 \quad (2.13)$$

Vamos agora ver uma aplicação interessante para o polinômio colchete (para mais detalhes da exposição a seguir o leitor poderá consultar (KAUFFMAN, 2001)). Um diagrama de link é alternado quando, ao percorrermos cada arco do diagrama, o seguimento escolhido passa por cima e por baixo dos cruzamentos alternadamente. Outra propriedade do link é de ser reduzível ou não.

**Definição 13.** Um diagrama de Link é **reduzível**, quando existe pelo menos um cruzamento como na figura 8, e o escrevemos como uma **soma conexa** de nós  $A$  e  $B$ :

$$D \equiv A + B \quad (2.14)$$

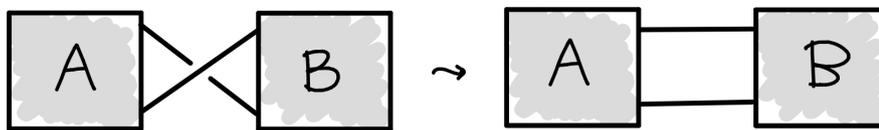


Figura 8 – Exemplo de link reduzível

Se um diagrama não pode ser reduzível ele é chamado **primo** ou **reduzido**. Um link que tem um diagrama primo (alternado) é dito link primo (alternado). Além disso, o polinômio colchete satisfaz a seguinte propriedade mediante soma de links:

$$\mathcal{L}_{A+B} = \mathcal{L}_A \mathcal{L}_B \quad (2.15)$$

Para demonstrar esta propriedade, considere a equação 2.5, por exemplo. Trabalhando com as parcelas  $A$  e  $B$  separadamente temos que os estados possíveis devem se multiplicar.

Suponha um diagrama de link alternado e reduzido, é possível o colorir em preto e branco de forma que as regiões de cores iguais não tenham segmentos em comum, e a região externa seja branca. Um exemplo está na figura 9.

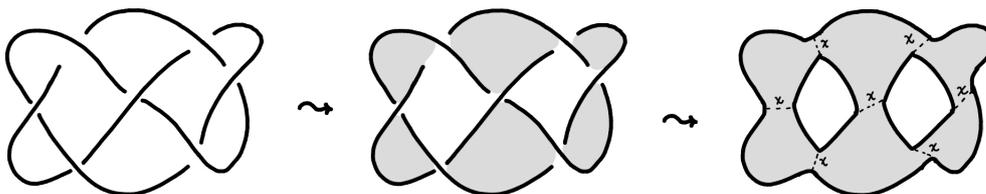


Figura 9 – Exemplo de Nó alternado, juntamente com respectivo estado que maximiza o grau do polinômio colchete.

Se efetuarmos separações do tipo  $x$  nos cruzamentos, então pela equação 2.5 o estado resultante terá um grau máximo, e podemos escrever:

$$\max \deg\langle D \rangle = V(K) + 2B(K) - 2 \quad (2.16)$$

Onde  $B(K)$  é o número de regiões brancas do estado, e  $V(K)$  o número de cruzamentos do diagrama original. Sendo  $P(K)$  é o número de regiões pretas do estado, temos análogamente ao caso anterior:

$$\min \deg\langle D \rangle = -V(K) - 2P(K) + 2 \quad (2.17)$$

Observando que a diferença entre o grau máximo e o grau mínimo do Bracket de Kauffman independe da normalização escolhida, e que o número de todas as regiões é igual ao número de vértices acrescido de um fator 2, temos que:

$$\max \deg\langle D \rangle - \min \deg\langle D \rangle = 2V(K) + 2(B(K) + P(K)) - 4 = 4V(K) \quad (2.18)$$

Através dos argumentos apresentados é possível concluir um dos principais triunfos do polinômio de Jones (MURASUGI, 1987):

**Teorema 2.** Um diagrama reduzido e alternado tem o número mínimo de cruzamentos dentre todos os diagramas que representam um mesmo nó.

Mais detalhes sobre as conjecturas de Tait, bem como a relação entre links alternados e o polinômio de Jones, podem ser encontrados em (LICKORISH, 1997) e (MURASUGI, 2008).

## 2.3 Tranças e o Polinômio de Jones

Uma trança de  $n$  cordas é feita de  $n$  fios atravessando uma caixa de cima para baixo, com  $n$  pontos fixos e distintos em sua aresta superior (inferior), cada um associado à um único fio (Veja a figura 10). Se desenharmos uma linha tracejada paralela às arestas, ela deve tocar exatamente  $n$  pontos. Diremos que duas tranças são a mesma se uma for obtida da outra através de uma isotopia ambiente que não altere os pontos fixos. Formalmente temos:

**Definição 14.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma imersão. Definimos uma **trança** como a imagem da aplicação  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , dada por:

$$F(t) := (f(t), t) \quad (2.19)$$

**Definição 15.** Uma **trança de  $n$  cordas** é uma coleção de  $n$  tranças disjuntas,  $\{f_i\}_{i=1}^n$ , em que todos os pares  $f_i(0), f_i(1), \forall i$  estejam contidos em um único elemento do espaço de configuração de  $\mathbb{R}^2$ :

$$Conf_n(\mathbb{R}^2) \equiv \{(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid x_i \neq x_j, \text{ se } i \neq j\} \quad (2.20)$$

Em 1985 Vaughan F. R. Jones (JONES, 1985) considerou uma álgebra de von Neumann, e percebeu que haviam semelhanças marcantes entre a sua construção e a apresentação do grupo de tranças. No que segue iremos detalhar mais estes conceitos, mas a ideia geral de Jones foi construir uma representação do grupo de tranças em sua álgebra, levando ao aparecimento de um invariante de tranças e conseqüentemente de links .

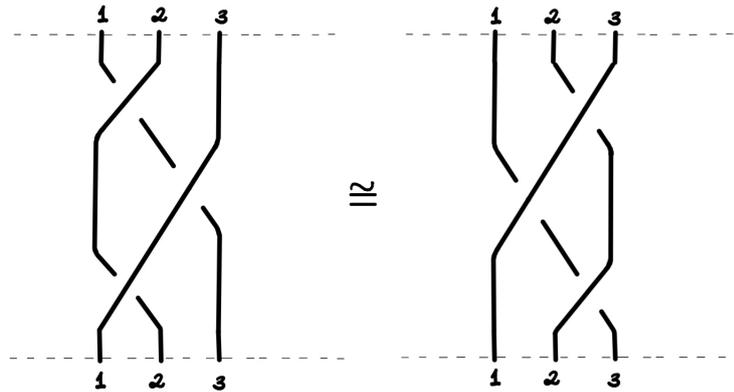


Figura 10 – Exemplo de duas tranças de 3 cordas equivalentes.

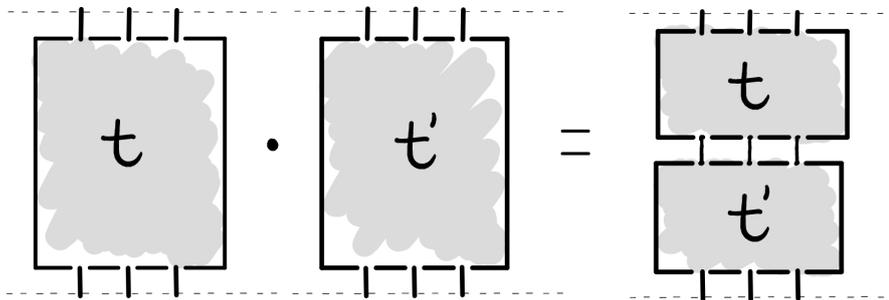


Figura 11 – Produto de duas tranças genéricas de 3 cordas.

As tranças com  $n$  cordas formam um grupo  $(B_n)$ , representamos o produto de duas tranças  $t$  e  $t'$  simplesmente concatenando as duas e ligando os pontos fixos na ordem em que são representados, como na figura 11. A trança identidade será denotada por  $1_n \in B_n$ . Observe que sempre podemos enxergar uma trança como um produto de tranças de apenas um cruzamento.

**Teorema 3.** Sendo  $\sigma_i$  a trança identidade com os pontos fixos superiores  $i$  e  $i + 1$  permutados (figura ??). O conjunto  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$  gera o grupo de tranças, com as seguintes relações:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ se } |i - j| \geq 2 \quad (2.21)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (2.22)$$

Para mais detalhes, veja (ARTIN, 1925) e (BIRMAN; CANNON, 1974). A apresentação de  $B_n$  no teorema 3 permite definir a noção de torção.

**Definição 16.** Seja  $b \equiv \prod_{k=1}^m \sigma_{i_k}^{j_k} \in B_n$ , uma trança arbitrária. A **torção** de  $b$  é o número:

$$\tau(b) := \sum_{k=1}^m j_k \tag{2.23}$$

Podemos ainda relacionar  $B_n$  com o grupo de todas as permutações de  $n$  elementos  $S_n$ . Basta considerar o homomorfismo  $\pi : B_n \rightarrow S_n$ , tal que  $\pi(t)(i) = j$ , onde  $j$  é o ponto fixo inferior associado à corda cujo ponto fixo superior é  $i$ . Neste caso  $\pi(\sigma_i)$  é apenas uma transposição  $t_i$  de elementos  $i$  e  $i + 1$ , e por isso, o grupo  $S_n$  é o quociente de  $B_n$  pela relação adicional  $\sigma_i^2 = 1$ .

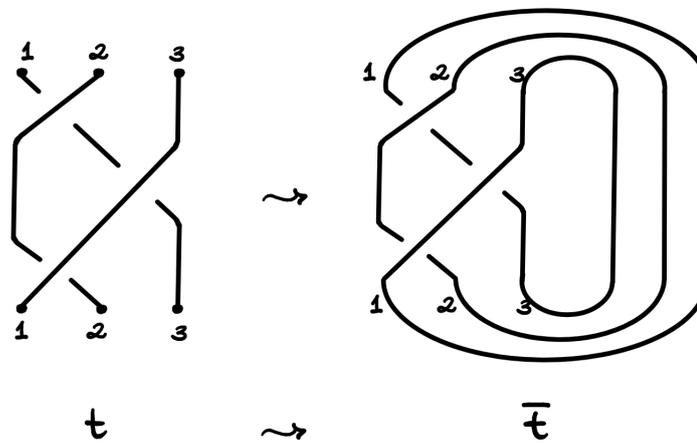


Figura 12 – Um exemplo do fecho de uma trança  $t$ .

Um fato interessante é que se considerarmos o fecho de uma trança conectando os pontos finais com os iniciais da forma padrão indicada pela figura 12, temos o seguinte resultado, conhecido como teorema de Alexander:

**Teorema 4.** (ALEXANDER, 1923) Todo link pode ser representado como o fecho de uma trança.

Uma questão natural que surge com o teorema 4, é de quantas formas podemos representar um link. Um resultado neste sentido é o teorema de Markov.

**Teorema 5.** (BIRMAN; CANNON, 1974) Os fechos de duas tranças  $t_n$  e  $t'_n \in B_n$  são ambiente isotópicos se  $t_n$  pode ser obtida realizando uma sequência de conjugações:

$$t \longleftrightarrow g \cdot t \cdot g^{-1} \quad \text{onde } t, g \in B_n \tag{2.24}$$

e de movimentos de markov (veja figura 13):

$$t \longleftrightarrow t \cdot \sigma_n, \quad \text{onde } t \in B_n \tag{2.25}$$

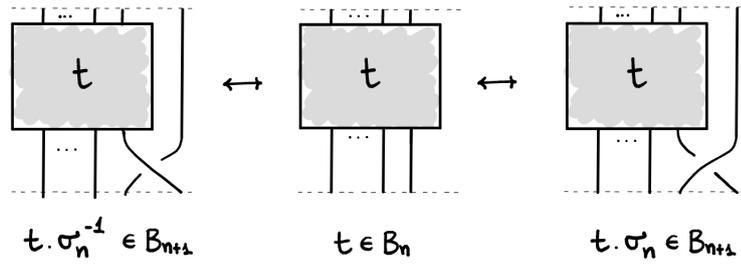


Figura 13 – Exemplos de movimentos de markov.

Os teoremas de Markov e Alexander nos dão uma condição suficiente para que possamos definir um invariante de links orientados.

## 2.4 Polinômios HOMFLY

Vamos discutir uma generalização do invariante de Jones: Os polinômios do tipo HOMFLY, polinômios de Laurent de duas variáveis, com a seguinte definição:

**Definição 17.** O polinômio HOMFLY  $P_L(\alpha, z)$  é um invariante por isotopia ambiente que satisfaz as seguintes propriedades (veja figura 7):

$$V_{(\text{nó trivial})} = 1 \quad (2.26)$$

$$\alpha P_{L_+}(\alpha, z) - \alpha^{-1} P_{L_-}(\alpha, z) = z P_{L_0}(\alpha, z) \quad (2.27)$$

Onde  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  representam links arbitrários, idênticos, a menos de um cruzamento escolhido, no qual eles diferem de acordo com a figura 7.

Observe que, para  $\alpha = t^{-1}$  e  $z = t^{-1/2} - t^{1/2}$  temos exatamente o polinômio de Jones em 2.11. A demonstração de unicidade deste invariante de nós pode ser encontrada em (LICKORISH, 1997).

O polinômio HOMFLY satisfaz algumas propriedades semelhantes ao polinômio de Jones. Por exemplo, sendo  $L_1$  e  $L_2$  links, temos que:

$$P_{L_1^*}(\alpha, z) = P_{L_1}(\alpha^{-1}, z) \quad (2.28)$$

$$P_{L_1}(-\alpha, -z) = P_{L_1}(\alpha, z) \quad (2.29)$$

$$P_{L_1+L_2}(\alpha, z) = P_{L_1}(\alpha, z)P_{L_2}(\alpha, z) \quad (2.30)$$

$$P_{L_1 \sqcup L_2}(\alpha, z) = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{z} P_{L_1}(\alpha, z)P_{L_2}(\alpha, z) \quad (2.31)$$

Para computar este invariante basta efetuar separações, utilizando a relação de novelo 2.27, até desfazer todos os cruzamentos. Por exemplo, para o nó trifólio (T) e o nó oito (E), temos:

$$P_T(\alpha, z) = (2\alpha^2 - \alpha^4) + z^2\alpha^2 \quad (2.32)$$

$$P_E(\alpha, z) = \alpha^{-2} + \alpha^2 - 1 - z^2 \quad (2.33)$$

## 2.5 Invariantes de Vassiliev e a integral de Kontsevich

Veamos agora uma extensão de invariantes de nós para nós com pontos duplos. Esta abordagem é geral, pois em certo sentido todos os invariantes polinomiais clássicos são, como o polinômio de Jones, do tipo finito (CHMUTOV; DUZHIN; MOSTOVOY, 2012).

**Definição 18.** Um **Invariante de Nós**, com valores em um conjunto  $\mathcal{R}$ , é um mapa:

$$V : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R} \quad (2.34)$$

Nesta seção  $\mathcal{K}$  denotará o conjunto de classes de equivalência de nós, e  $\mathcal{R}$  um anel comutativo.

**Definição 19.** uma classe de invariantes  $\mathcal{U}$  **distingue nós**, se para todo par  $K_1 \neq K_2$  em  $\mathcal{K}$ , existir  $f \in \mathcal{U}$ , tal que  $f(K_1) \neq f(K_2)$ .

Logo, uma questão central na teoria de nós é encontrar uma classe de invariantes capaz de detectar o nó trivial, ou seja, distingui-lo de qualquer outro nó.

Se um mapa diferenciável  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  não atende as condições da definição 7, então é chamado de **Nó singular**. Vamos estudar a classe de Nós singulares não injetivos.

**Definição 20.** Seja  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mapa diferenciável, então  $p \in f(S^1)$  é um **ponto duplo** (ou vértice) se:

1.  $f^{-1}(p) = \{t, t'\} \subset S^1$ .
2.  $f'(t)$  e  $f'(t')$  são linearmente independentes.

Um invariante de Nós com  $n+1$  pontos duplos,  $\nabla V$ , pode ser construído a partir de um invariante de Nós com  $n$  vértices,  $V$ , através da **Relação de Novelo de Vassiliev**:

$$(\nabla V)(K_*) := V(K_+) - V(K_-) \quad (2.35)$$

A equação 2.35 indica como procedemos localmente com um ponto duplo, ou seja,  $K_*$ ,  $K_+$  e  $K_-$  são nós com a exatamente a mesma imagem, exceto na vizinhança de um cruzamento, onde distinguem de acordo com a 14.

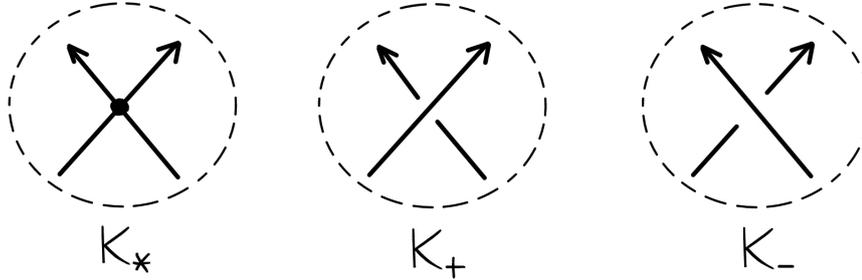


Figura 14 – Configurações em torno de um cruzamento, utilizadas em 2.35.

Sendo  $V : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R}$ , e  $G$  um nó com pontos duplos, podemos usar a relação de novelo 2.35 para substituir cada vértice de  $G$  por um cruzamento positivo ou negativo e escrever:

$$(\nabla^n V)(G) = \sum_K (-1)^{i_-(K)} V(K) \quad (2.36)$$

onde consideramos a soma sobre todos os  $2^n$  nós resultantes. E  $i_-(K)$  o número de substituições negativas necessárias para este processo.

**Definição 21.** Um invariante de Nós  $V$  é do **tipo finito**, ou **Invariante de Vassiliev**, de ordem  $\leq n$  se  $(\nabla^n V)(G) = 0$  para todo nó  $G$  com mais de  $n$  pontos duplos.

**Proposição 12.** Para cada  $n$  inteiro positivo, o conjunto  $\mathcal{V}_n$  de invariantes de Vassiliev de grau  $\leq n$ , é um  $\mathcal{R}$ -módulo satisfazendo a seguinte relação:

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n \quad (2.37)$$

O ponto que deve ser notado aqui é a analogia que começa a surgir entre  $\mathcal{V}$  como um subespaço de todos os invariantes de nós e os polinômios como um subespaço de todas as funções em diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ . Infelizmente até agora não se sabe se a classe de invariantes de Vassiliev detecta o Nó trivial. Por outro lado, vários exemplos indicam que os invariantes de nós podem ser aproximados por Vassiliev, assim como funções diferenciáveis são aproximadas por polinômios.

O diagrama de cordas de um nó  $K$ , de  $n$  pontos duplos, pode ser construído definindo uma orientação para o círculo  $S^1$  que parametriza  $K$  (cf. definição 7). Então desenhamos cordas conectando cada par disjunto de pontos em  $S^1$  que correspondem aos pontos duplos de  $K$ . Seguindo estes dois passos, obtemos o chamado diagrama de corda  $D(K)$ . O conjunto dos diagramas de corda de nós com  $n$  pontos duplos será chamado  $\mathbf{A}_n$ .

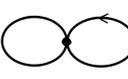
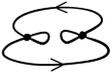
$A_0$	$A_1$	$A_2$	
			
			

Figura 15 – Exemplos de nós que correspondem aos elementos de  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$ .

**Teorema 6.** Seja  $V$  um invariante de Vassiliev, de ordem  $\leq n$ ,  $K_1$  e  $K_2$  nós com exatamente  $n$  pontos duplos. Então,

$$D(K_1) = D(K_2) \Rightarrow V(K_1) = V(K_2) \quad (2.38)$$

**Proposição 13.** Cada  $\mathcal{R}$ -módulo  $\mathcal{V}_n$  é finitamente gerado.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{RA}_n$  o  $\mathcal{R}$ -módulo de funções  $f : \mathbf{A}_n \rightarrow \mathcal{R}$ . Pelo teorema 6, o mapa  $\alpha_n : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{RA}_n$ , tal que:

$$\alpha_n(f)(D) := f(K), \quad (2.39)$$

onde  $K \in \mathcal{K}$ , é tal que  $D(K)$ , é bem definido.

Pela definição 21, a restrição  $\alpha_n|_{\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}}$  é uma inclusão injetiva, portanto se  $\mathcal{V}_0$  for de dimensão finita, o resultado segue de 2.37. Seja  $f \in \mathcal{V}_0$ . Dado  $K \in \mathcal{K}$ , podemos inverter qualquer um dos seus cruzamentos, pois 2.35 implica em:

$$f(K_+) = f(K_-),$$

então  $f(K) = f(C_0)$  e  $\dim(\mathcal{V}_0) = 1$ . □

Observe que o mapa  $\alpha_n$  é de extrema importância para a compreensão da estrutura de  $\mathcal{V}_n$ . Portanto é desejável saber a condição para que uma função  $f \in \mathcal{RA}_n$  esteja na imagem de  $\alpha_n$ . Este é o conteúdo do teorema de Vassiliev-Kontsevich 7, antes de enuciá-lo precisamos definir as relações  $1T$  e  $4T$ .

Seja  $v \in \mathcal{V}_n$ . Considere a seguinte vizinhança de um ponto duplo com a configuração inicial  $I$  exemplificada na figura 17. É possível girar pedaço vertical em vermelho, passando por cada corda horizontal duas vezes, até retornar à configuração inicial. Por exemplo, ao ir da configuração I para a II, geramos um ponto duplo representado pelo diagrama de corda  $A$ , o mesmo ocorre para a passagem de  $B$  à  $C$ , até retornarmos à configuração  $A$ . Aplicando a relação 2.35, segue que a função  $\alpha_n(v) \in \mathcal{RA}_n$ , deve satisfazer a chamada relação de  $4T$ :

$$+\alpha_n(v)(A) - \alpha_n(v)(B) + \alpha_n(v)(C) - \alpha_n(v)(D) = 0 \quad (2.40)$$

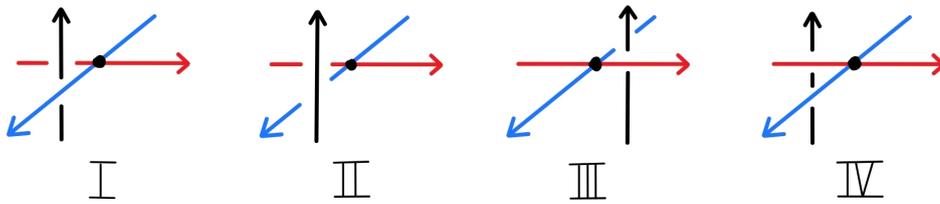


Figura 16 – Configurações intermediárias, ao movimentar o segmento vertical, efetuando um giro em torno de um ponto duplo.

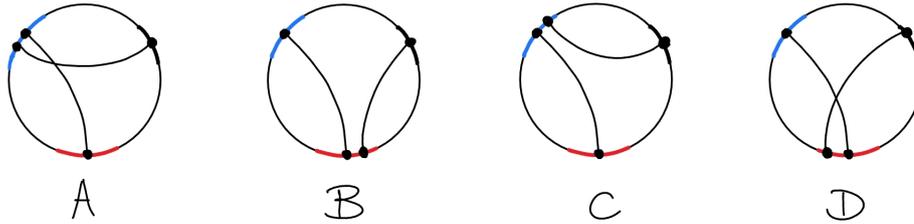


Figura 17 – Diagramas de Corda, equacionados em 2.40

**Definição 22.** Um elemento  $\alpha \in \mathcal{RA}_n$  satisfaz a relação de 4 termos, se:

$$+\alpha(A) - \alpha(B) + \alpha(C) - \alpha(D) = 0 \tag{2.41}$$

Vale para qualquer combinação de cordas omitidas, e onde a combinação das cordas omitidas deve ser a mesma para cada diagrama na figura 15.

Por outro lado, os diagramas de cordas podem ter um par de pontos cuja corda não intersecta nenhuma outra, quando isso acontece dizemos que o diagrama tem uma corda isolada.

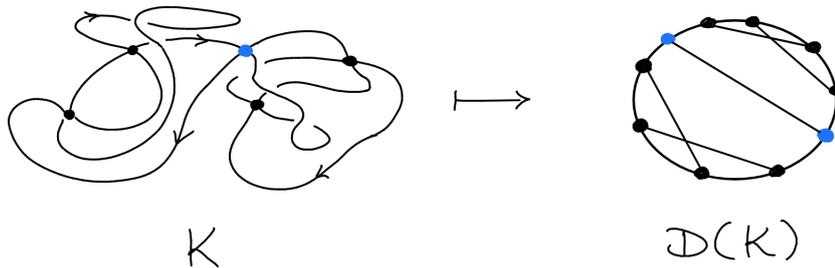


Figura 18 – Exemplo de diagrama  $\mathcal{D}(K)$  com uma corda isolada.

**Definição 23.** Um elemento  $\alpha \in \mathcal{RA}_n$  satisfaz a relação de 1-termo, se para todo diagrama  $D$ , com uma corda isolada,  $\alpha(D) = 0$ .

Sendo  $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{RA}_n$  o subespaço de mapas satisfazendo relações de  $4T$  e  $1T$ , a imagem de  $\alpha_n$ , definida em 2.39, pertence à  $\mathcal{W}_n$ . Considerando  $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ , temos o seguinte resultado (CHMUTOV; DUZHIN; MOSTOVOY, 2012):

**Teorema 7.** O mapa  $\alpha_n : \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \rightarrow \mathcal{W}_n$  é uma bijeção.

O ingrediente principal para a demonstração desta simples afirmação é a integral de Kontsevich 4.28, que será construída como o valor esperado de um Loop de Wilson na teoria de Chern-Simons.

No próximo capítulo iremos elaborar alguns dos aspectos básicos da simetria conforme.



## 3 Teoria Conforme de Campos

As Teorias Conformes de Campos são caracterizadas pela invariância por transformações conformes, as quais, informalmente, deixam ângulos invariantes. Um exemplo dessa simetria ocorre com os Bósons não massivos. Outro exemplo está ao observamos a classe de modelos estatísticos em duas dimensões, em específico, na análise de transições de fase de segunda ordem (FRANCESCO; MATHIEU; SENECHAL, 1997).

É possível mostrar que o espaço de Hilbert obtido pela quantização da teoria de Chern-Simons em (2+1) dimensões pode ser interpretado como o espaço de blocos conformes (1+1) dimensões no modelo Wess-Zumino-Witten (MURAYAMA, 1990). Tendo esta conexão como motivação, neste capítulo, apresentaremos algumas consequências da simetria conforme em teorias de campo de duas dimensões.

### 3.1 O Grupo Conforme

Nesta seção classificaremos a álgebra de transformações conformes infinitesimais através de seus respectivos geradores para dimensão  $d > 2$ . Apresentaremos uma condição necessária para que um mapa seja uma transformação conforme. Através das regras de comutação seremos capazes de identificar o grupo conforme da esfera de Riemann  $S^2 = \mathbb{C}_\infty$  com o grupo de Möbius  $SL(2, \mathbb{C}) \setminus \mathbb{Z}_2$ .

**Definição 24.** Uma transformação conforme é um mapa diferenciável, de rank máximo ( $\varphi : U \subset (M, \eta) \rightarrow V \subset (M', \eta')$ ), entre abertos de variedades semi-riemannianas, tal que existe um mapa  $\Omega : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ , satisfazendo a seguinte relação, para o pullback  $\varphi^*$ :

$$\varphi^* \eta' = \Omega \eta \quad (3.1)$$

Com essa definição, consideraremos o grupo conforme como sendo o conjunto de transformações conformes finitas, inversíveis e globalmente definidas.

Iremos considerar apenas métricas do tipo  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, 1, \dots)$ , e denotaremos os respectivos espaços como  $\mathbb{R}^{p,q}$ , onde  $p$  e  $q$  são o número de índices negativos e positivos respectivamente em  $\eta_{\mu\nu}$ , tais que  $p + q = d$ . Considerando a transformação de coordenadas infinitesimal  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ , e desprezando termos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \eta'_{\mu\nu} &= \partial'_\mu x^\alpha \partial'_\nu x^\beta \eta_{\alpha\beta} = (\delta_{\mu\alpha} + \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta_{\nu\beta} + \partial_\nu \epsilon^\beta) \eta_{\alpha\beta} \\ &\approx (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \epsilon^\beta + \delta_{\nu\beta} \partial_\mu \epsilon^\alpha) \eta_{\alpha\beta} \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \end{aligned}$$

Para assegurar a invariância conforme, devemos garantir a proporcionalidade da métrica modificada, e então:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2\partial_\alpha \epsilon^\alpha}{d} \eta_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Utilizando a comutatividade das derivadas parciais e a equação 3.2, obteremos uma condição para invariância conforme:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \partial_\nu (\partial_k \epsilon_l + \partial_l \epsilon_k) - \partial_\nu \partial_k (\partial_\mu \epsilon_l + \partial_l \epsilon_\mu) + \partial_k \partial_l (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \partial_l \partial_\mu (\partial_\nu \epsilon_k + \partial_k \epsilon_\nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \left( \frac{2\partial_\alpha \epsilon^\alpha}{d} \eta_{kl} \right) - \partial_\nu \partial_k \left( \frac{2\partial_\alpha \epsilon^\alpha}{d} \eta_{\mu l} \right) + \partial_k \partial_l \left( \frac{2\partial_\alpha \epsilon^\alpha}{d} \eta_{\mu\nu} \right) \partial_l \partial_\mu \left( \frac{2\partial_\alpha \epsilon^\alpha}{d} \eta_{\nu k} \right) \\ &= (\eta_{kl} \eta_{kl} \partial_\mu \partial_\nu - \eta_{kl} \eta_{l\mu} \partial_\nu \partial_k + \eta_{kl} \eta_{\mu\nu} \partial_k \partial_l - \eta_{lk} \eta_{k\nu} \partial_l \partial_\mu) (\partial_\alpha \epsilon^\alpha) \\ &= (d \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu + \eta_{\mu\nu} (\eta^{kl} \partial_k \partial_l) - \partial_\nu \partial_\mu) (\partial_\alpha \epsilon^\alpha) \\ &= [\eta_{\mu\nu} \square \eta + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu] (\partial \epsilon) \end{aligned} \quad (3.3)$$

A transformação deve então ser no máximo de 2ª ordem em  $x$ , levando-nos ao ansatz:

$$\epsilon_\mu(x) \equiv a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\lambda} x^\nu x^\lambda \quad (3.4)$$

Onde  $a_\mu$ ,  $b_{\mu\nu}$  e  $c_{\mu\nu\lambda}$  são constantes infinitesimais, e  $c_{\mu\nu\lambda} = c_{\mu\lambda\nu}$ .

Iremos obter os diferentes tipos de transformação analisando cada ordem de  $\epsilon$  separadamente. Como também estamos interessados em identificar a álgebra conforme, primeiro devemos lembrar que os geradores de uma transformação infinitesimal são definidos como:

$$\phi'(x) = \phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \phi(x) \quad (3.5)$$

Onde as transformações das coordenadas e do campo são dadas por:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \quad (3.6)$$

e

$$\phi'(x') = \phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \omega_a} \quad (3.7)$$

Portanto, expandindo 3.7 em primeira ordem, e supondo que os campos não são afetados pela transformação, ou seja,  $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} = 0$ , obtemos:

$$G_a \phi = -i \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \phi \quad (3.8)$$

Munidos da relação 3.8 analisaremos os geradores das transformações infinitesimais em cada ordem de dependência de  $x$ , a começar pelo vetor infinitesimal  $a_\mu$  temos as

translações, com geradores  $P_\mu = -i\partial_\mu$ . Em ordem 1 decomparamos a matriz  $b$  em sua parte simétrica e antissimétrica, utilizando a equação 3.2:

$$b_{\mu\nu} = \left(\frac{b^\alpha_\alpha}{d}\right)\eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

Onde  $a_{\mu\nu} \equiv b_{\mu\nu} - b_{\nu\mu}$ . E então obtemos dilatações ( $D = -ix^\mu\partial_\mu$ ) e rotações ( $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ ) para as partes simétrica e antissimétrica respectivamente.

Para exemplificar o processo de obtenção dos geradores, vejamos o caso quadrático em mais detalhes. Para tanto, vamos derivar ambos os lados de 3.2 e considerar uma soma de cópias da expressão resultante, permutando os índices:

$$\partial_\mu\partial_\nu(c_{\rho\alpha\beta}x^\alpha x^\beta) = \frac{1}{d}(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\alpha(c_{\alpha\gamma\xi}x^\gamma x^\xi) + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\alpha(c_{\alpha\gamma\xi}x^\gamma x^\xi) - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\alpha(c_{\alpha\gamma\xi}x^\gamma x^\xi)) \quad (3.10)$$

Definindo  $b_\mu \equiv \frac{c^\gamma_{\gamma\mu}}{d}$ , obtemos a seguinte expressão para o coeficiente quadrático:

$$c_{\mu\nu\rho} = (\eta_{\nu\rho}b_\mu + \eta_{\mu\mu}b_\rho - \eta_{\nu\rho}b_\mu) \quad (3.11)$$

O qual, aplicado na transformação de coordenadas, nos fornece uma transformação conforme especial infinitesimal:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + c^{\mu\nu\rho}x_\nu x_\rho \\ &= x^\mu + x^\mu b^\rho x_\rho + b^\nu x_\nu x^\mu - b^\mu x_\nu x^\nu \\ &= x^\mu + 2(b \cdot x)x^\mu - x^2 b^\mu \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente aplicando 3.8 em (3.12), obtemos:

$$K_\mu \equiv G_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \quad (3.13)$$

Coletando todos estes geradores e contando com o fato de que as transformações finitas, correspondentes às infinitesimais anteriormente abordadas, estejam globalmente definidas, o que pode ser garantido através da compactificação de  $\mathbb{R}^{p,q}$  (referencia RALPH BLU), obtemos a seguinte álgebra de lie para o grupo conforme, com  $p + q > 2$ :

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i(\eta_{ms}J_{nr} + \eta_{nr}J_{ms} - \eta_{mr}J_{ns} - \eta_{ns}J_{mr}) \quad (3.14)$$

onde  $m, n \in \{-1, 0, \dots, (d-1)\}$  e operadores  $J_{mn}$  definidos como:

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &\equiv L_{\mu\nu}, & J_{-1\mu} &\equiv \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\ J_{-10} &\equiv D, & J_{0\mu} &\equiv \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \end{aligned}$$

De fato, é possível mostrar que a componente conexa de  $Conf(\mathbb{R}^{p,q})$ , contendo a transformação identidade, é isomorfa ao grupo  $SO(p+1, q+1)$  (ref SCHOTTENLOHER)

## 3.2 Grupo conforme em duas dimensões

Para trabalhar com a invariância conforme em duas dimensões, em particular, com uma métrica euclideana em  $\mathbb{R}^{2,0}$  dada por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$ , é conveniente considerar primeiro a complexificação das coordenadas, efetuando a seguinte substituição:

$$z = x^0 + ix^1, \quad \bar{z} = x^0 - ix^1 \quad (3.15)$$

Desta maneira, trabalharemos com transformações na esfera de Riemann, que é o plano complexo compactificado  $S^2 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . O grupo conforme agora pode ser pensado como o grupo de transformações de Möbius, devido ao seguinte isomorfismo:

$$SO^+(1, 3) \approx SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \quad (3.16)$$

De fato, se considerarmos o conjunto de transformações conformes infinitesimais, as equações 3.2 resultam em condições de Cauchy-Riemann, e então transformações próximas a identidade podem ser expandidas em série de Laurent:

$$\begin{aligned} z' &= z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z^{n+1}) \epsilon_n \\ \bar{z}' &= \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\bar{z}^{n+1}) \bar{\epsilon}_n \end{aligned}$$

Com um gerador para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , dado por:

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (3.17)$$

Em geral trataremos  $z$  e  $\bar{z}$  como variáveis independentes, essa escolha é motivada pelo fato de que os geradores 3.17 resultam em uma álgebra dada pela soma direta de duas álgebras de Witt:

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n} \quad (3.18)$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n) \bar{l}_{m+n} \quad (3.19)$$

$$[l_m, \bar{l}_n] = 0 \quad (3.20)$$

Em particular, os únicos geradores globalmente definidos na esfera de Riemann  $S^2$  são  $l_{-1}$ ,  $l_0$ ,  $l_1$  e seus respectivos anti-holomórficos, para os quais obtemos respectivamente translações, dilatações e rotações, e por fim SCT's. Combinando as transformações finitas correspondentes a estes geradores obtemos uma transformação fracionária linear:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (3.21)$$

E para garantir a invertibilidade de 3.21, impomos a condição  $ad - bc \neq 0$

### 3.3 Formalismo de operadores

Estamos interessados descrever o produto de campos, dentro das funções de correlação, definidos em pontos suficientemente próximos como uma soma de termos, evidenciando a parte divergente que nos é de interesse.

#### 3.3.1 Campos Primários e o Tensor Energia-Momento

Os campos primários são de extrema relevância se uma CFT em duas dimensões puder ser totalmente especificada pelas suas funções de Green.

**Definição 25.** Um campo  $\phi(z, \bar{z})$  é dito primário quando, sob transformações conformes, se transforma da seguinte maneira:

$$\phi'(z, \bar{z}) = (\partial_z f)^h (\partial_{\bar{z}} \bar{f})^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (3.22)$$

Em particular, se a transformação for global, dizemos que  $\phi$  é quasi-primário. Todos os outros campos são ditos secundários.

Vamos verificar a expansão de produto de operadores (OPE) do tensor energia momento com um campo primário, obtida através do processo de ordenamento temporal destes produtos na teoria radialmente quantizada.

Primeiramente mapeamos os pontos do plano complexo em um cilindro, ou seja, partindo de  $\omega \equiv t + ix$ , consideramos a equivalência de pontos  $\omega$  e  $\omega'$  se  $\omega - \omega' = 2\pi i \cdot n$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . Em seguida considerando pontos do tipo:  $z = e^\omega$ . É fácil ver que translações temporais e espaciais em  $\omega$  corresponderão respectivamente a dilatações e rotações em  $z$ .

Assumindo um espaço de Hilbert construído através da aplicação de operadores de criação em um estado de vácuo  $|0\rangle$ . O processo de quantização consistirá em considerar os modos de Laurent, resultantes da expansão em série dos campos, como operadores neste espaço de Hilbert:

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{n, \bar{m} \in \mathbb{Z}} z^{-n-h} \bar{z}^{-\bar{m}-\bar{h}} \phi_{n, \bar{m}} \quad (3.23)$$

Onde  $h, \bar{h}$  são as dimensões conformes do campo.

Para exemplificar este processo, vamos voltar nossas atenções ao tensor energia-momento, definido através da corrente conservada  $j_\mu$ , proveniente da simetria por transformações conformes  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ :

$$j_\mu =: T_{\mu\nu} \epsilon^\nu \quad (3.24)$$

Uma condição necessária para este tensor é obtida considerando a divergência nula da corrente:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial^\mu j_\mu = (\partial^\mu T_{\mu\nu})\epsilon^\nu + T_{\mu\nu}(\partial^\mu \epsilon^\nu) = \\
&= \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})\partial^\mu \epsilon^\nu = \frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu) = \\
&= \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}(\partial\epsilon) \frac{2}{d} = \frac{1}{d}T_\mu{}^\mu \partial\epsilon \Rightarrow T_\mu{}^\mu = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ou seja, pela arbitrariedade da transformação  $\epsilon^\mu$  concluímos a nulidade do traço do tensor energia-momento. Considerando este tensor no plano complexo, mediante transformação do tipo  $T_{\mu\nu} = \partial_\mu x^\alpha \partial_\nu x^\beta T_{\alpha\beta}$ , com as coordenadas 3.15, temos:

$$\begin{pmatrix} T_{zz} & T_{z\bar{z}} \\ T_{\bar{z}z} & T_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10}) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

As componentes  $T_{zz}$  e  $T_{\bar{z}\bar{z}}$  são quirais e aquirais respectivamente. De fato, vejamos  $T_{zz}$  em detalhe:

$$\begin{aligned}
\partial_z T_{zz} &= \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10}) \\
&\stackrel{3.25}{=} \frac{1}{4}(\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10}) - \frac{i}{4}(\partial_1 T_{11} + \partial_1 T_{01}) = 0
\end{aligned}$$

Na quantização radial, curvas definidas em  $x^0$  constante equivalem ao raio  $r \equiv |z|$  constante, além disso, para a componente temporal da corrente, temos que:

$$j_0 = \frac{1}{2}(T + \bar{T})(\epsilon + \bar{\epsilon}) + \frac{1}{2}(T - \bar{T})(\epsilon - \bar{\epsilon}) = T(z)\epsilon(z) + \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}) \tag{3.27}$$

Portanto, a variação do campo  $\phi$ , gerado pela carga conservada  $Q := \int_{x_0=cte} dx^1 j_0$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon\bar{\epsilon}}\phi(\omega, \bar{\omega}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} dz [T(z)\epsilon(z), \phi(\omega, \bar{\omega})] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\bar{\omega})} d\bar{z} [\bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}), \phi(\omega, \bar{\omega})] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} dz R(\epsilon(z)T(z)\phi(\omega, \bar{\omega})) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\bar{\omega})} d\bar{z} R(\bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})\phi(\omega, \bar{\omega})) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

O produto de operadores considerados na identidade de Ward 3.28, tanto quanto no restante deste capítulo, levam em conta o ordenamento temporal, o qual, para campos quirais, na quantização radial, equivale a:

$$R(\psi(z)\phi(\omega)) := \begin{cases} \psi(z)\phi(\omega), & \text{se } |z| > |\omega| \\ \phi(\omega)\psi(z), & \text{se } |\omega| > |z| \end{cases} \tag{3.29}$$

**Proposição 14.** Seja  $\phi(\omega, \bar{\omega})$ , um operador local com peso  $(h, \bar{h})$ . Então, podemos relacionar o produto radialmente ordenado  $R(T(z)\phi(\omega, \bar{\omega}))$  com uma soma de operadores locais.

*Demonstração.* Expandindo 3.22 em primeira ordem, para transformações próximas à identidade:

$$\begin{aligned}
\phi'(\omega, \bar{\omega}) &= (1 + h\partial_\omega \epsilon)(1 + \bar{h}\partial_{\bar{\omega}} \bar{\epsilon})(\phi(\omega, \bar{\omega} + \bar{\epsilon}) + \epsilon\partial_\omega \phi(\omega, \bar{\omega} + \bar{\epsilon})) \\
&= (1 + h\partial_\omega \epsilon + \bar{h}\partial_{\bar{\omega}} \bar{\epsilon})(\phi(\omega, \bar{\omega}) + \epsilon\partial_\omega \phi(\omega, \bar{\omega}) + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{\omega}} \phi(\omega, \bar{\omega})) \\
&= \phi(\omega, \bar{\omega}) + h\partial_\omega \epsilon(\omega)\phi + [\epsilon(\omega)]\partial_\omega \phi + \bar{h}[\partial_{\bar{\omega}} \bar{\epsilon}]\phi + [\bar{\epsilon}(\bar{\omega})]\partial_{\bar{\omega}} \phi \\
&= \phi(\omega, \bar{\omega}) + h\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} dz \frac{\epsilon(z)}{(z-\omega)^2}\right]\phi + \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} dz \frac{\epsilon(z)}{z-\omega}\right]\partial_\omega \phi + \text{Antiquiral}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Comparando 3.28 com 3.30, obtemos a nossa primeira OPE, responsável por evidenciar a estrutura algébrica no espaço de campos quânticos:

$$R(T(z)\phi(\omega, \bar{\omega})) = \frac{h}{(z-\omega)^2}\phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{z-\omega}\partial_\omega \phi(\omega, \bar{\omega}) + \dots \tag{3.31}$$

Onde omitimos os termos não-singulares.  $\square$

A relação 3.31, necessária para campos primários, não é satisfeita para o tensor energia-momento, pois este é quasi-primário:

$$R(T(z)T(w)) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{(z-w)} + \dots \tag{3.32}$$

Além disso a carga central “ $c$ ” não pode ser determinada apenas por considerações de simetria, mas pelo comportamento da teoria a curta distância, através do teorema de Wick (referencia). Por exemplo, para bósons livres sem massa e férmions de Majorana livres temos  $c = 1$  e  $c = \frac{1}{2}$  respectivamente.

Vamos agora mostrar o primeiro exemplo de que OPE’s entre campos equivalem a relações de comutação de seus modos de Laurent. Para tanto consideramos a expansão em série do tensor energia-momento:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \tag{3.33}$$

Os modos de Laurent  $L_m$  são especiais pois correspondem aos geradores das transformações conformes locais no espaço de Hilbert, exatamente como  $l_n$  e  $\bar{l}_n$  correspondiam aos geradores dos mapas conformes no espaço de funções. De fato, analisando a parte quiral da carga conforme  $Q_{\epsilon\bar{\epsilon}}$ , temos:

$$\begin{aligned}
Q_\epsilon &\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint dz T(z)\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{m+1} \epsilon_m \right) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \epsilon_m \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i} \oint dz L_n z^{m-n-1} \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \epsilon_m L_m
\end{aligned}$$

E então, aplicando o teorema de resíduos<sup>1</sup>, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+1} T(z), \frac{1}{2\pi i} \oint d\omega \omega^{n+1} T(\omega) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0)} d\omega \omega^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} dz z^{m+1} R(T(z)T(\omega)) \\
&\stackrel{3.32}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0)} d\omega \omega^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} dz z^{m+1} \left[ \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega T(\omega)}{(z-\omega)} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0)} d\omega \omega^{n+1} \left[ \frac{c}{12} (m+1)(m)(m-1)\omega^{m-2} + 2(m+1)\omega^m T(\omega) + \omega^{m+1} \partial_\omega T \right] \\
&= \frac{c}{12} (m^3 - m) \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0)} d\omega \omega^{-m-n+1} \right] + 2(m+1)L_{m+n} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0)} d\omega \omega^{m+n+2} \partial_\omega T \\
&= \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} + (2m+2)L_{m+n} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0)} d\omega \partial_\omega [\omega^{m+n+2} T(\omega)] - (m+n+2)\omega^{m+n+1} T(\omega) \\
&= \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} + (2m+2)L_{m+n} - (m+n-2)L_{m+n} = \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} + (m-n)L_{m+n}
\end{aligned}$$

Este é um exemplo do paradigma geral, qual seja o de que a implementação de um grupo de simetria clássico na teoria quântica correspondente provoca deformações na álgebra resultante, chamadas de extensões centrais. Em particular, através da simetria conforme e da OPE 3.32, obtemos a Álgebra de Virasoro (Vir):

$$[L_m, L_n] = \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} + (m-n)L_{m+n} \quad (3.34)$$

Vamos apresentar mais uma motivação para a expansão 3.33. Considerando sua variação de  $T(z)$  por transformações conformes infinitesimais:

$$\begin{aligned}
\partial_\epsilon T(\omega) &\stackrel{3.28}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} d\omega \epsilon(z) R(T(z)T(\omega)) \\
&\stackrel{3.32}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\omega)} d\omega \epsilon(z) \left[ \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega T(\omega)}{(z-\omega)} \right] \\
&= \frac{c}{12} \partial_\omega^3 \epsilon(\omega) + T(\omega) \partial_\omega \epsilon(\omega) + \epsilon(\omega) \partial_\omega T(\omega)
\end{aligned} \quad (3.35)$$

A expressão 3.35 é a versão infinitesimal da transformação:

$$T'(\omega) = (\partial_\omega f(\omega))^2 T(\omega) + \frac{c}{12} \mathcal{S}(f(\omega), \omega) \quad (3.36)$$

Com a derivada Schwarziana  $\mathcal{S}(\omega, z) := \frac{1}{(\partial_z \omega)} [(\partial_z \omega)(\partial_z^3 \omega) - \frac{3}{2}(\partial_z^2 \omega)^2]$ .

<sup>1</sup> Nesta e em outras passagens iremos utilizar alguns resultados conhecidos da teoria de variáveis complexas, como o Teorema de Resíduos, sem mais comentários. Sendo  $\gamma = \partial D$  um caminho fechado, tal que  $D$  esteja contido em um aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , e  $f \in C^\infty(U \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$  então:

$$\oint_\gamma dz f(z) = 2\pi i \left[ \sum_i \text{Res}(f, z_i) \right],$$

onde

$$\text{Res}(f, z_i) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{H(z)}{(z-z_i)^m} \equiv \frac{H^{(m-1)}(z_i)}{(m-1)!}, \quad H(z_i) \neq 0 \ \& \ \frac{H(z)}{(z-z_i)^m} = f(z)$$

## 3.3.1.1 Ordenamento Normal e Correspondência Estado-Operador

Por fim, antes de partirmos para funções de correlação e resolver a teoria, vamos destacar um ponto positivo da expansão do produto de operadores: Ela evidencia os termos divergentes, facilitando a sua remoção através do ordenamento normal, dado por  $N(\psi\phi) = \{\psi\phi\}_0$ . Para simplificar a análise, vamos trabalhar apenas com o setor quiral, onde temos a forma geral de uma OPE:

$$\begin{aligned}\psi(z)\phi(w) &= \sum_{n \geq 0} \{\psi\phi\}_n (z-w)^n + \sum_{n=1}^N \frac{\{\psi\phi\}_n(w)}{(z-w)^n} \\ &= (\psi(z)\phi(w)) + \overline{\psi(z)\phi(w)}\end{aligned}\quad (3.37)$$

através da qual podemos reescrever o ordenamento normal como:

$$\begin{aligned}N(\psi\phi)(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} \frac{dz}{z-w} \{\psi\phi\}_0 + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-N}^{-\infty} \oint_{C(w)} \frac{dz}{(z-w)^{n-1}} \{\psi\phi\}_n(w) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} \frac{dz}{(z-w)} \sum_{n=-\infty}^N \frac{\{\psi\phi\}_n(w)}{(z-w)^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} \frac{dz}{(z-w)} \psi(z)\phi(w)\end{aligned}\quad (3.38)$$

E sendo  $h^\psi$  e  $h^\phi$  as dimensões conformes de  $\psi$  e  $\phi$  respectivamente, os modos de Laurent do ordenamento normal 3.38 são dados por (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009):

$$N(\psi\phi)_n = \sum_{k > -h^\phi} \psi_{n-k} \phi_k + \sum_{k \leq -h^\phi} \phi_k \psi_{n-k}\quad (3.39)$$

Em particular, com a OPE 3.31 e a expansão em modos de Laurent de  $T(z)$ , definimos os descendentes do campo primário  $\phi$ , de peso conforme  $h$ , como:

$$T(z)\phi(w) = \sum_{n \geq 0} (z-w)^{n-2} (L_{-n}\phi)(w)\quad (3.40)$$

Reescritos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\phi^{(-n)}(w) &\equiv (L_{-n}\phi)(w) = \sum_{m \geq 0} (L_{-m}\phi)(w) \delta_{m,n} \\ &= \sum_{m \geq 0} (L_{-m}\phi)(w) \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{m-n-1} \\ &\stackrel{3.40}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} \frac{dz}{(z-w)^{n-1}} T(z)\phi(w)\end{aligned}\quad (3.41)$$

Estes campos, que compõem a família conforme do campo primário  $\phi$ ,

$$[\phi] := \{\phi^{\{k\}} \equiv L_{-k_1} \dots L_{-k_i} \phi \mid k_n \geq 1\},\quad (3.42)$$

no limite  $w \rightarrow 0$ , mediante quantização, correspondem aos estados excitados do módulo de Verma, construído apartir do estado de peso mais alto  $|h\rangle \equiv \phi(0)|0\rangle$ . É fácil ver que o

número de estados descendentes em 3.42 com nível  $K \equiv \sum_a k_a$  é dado pelo seu número de partições  $P(K)$ . Além disso utilizando uma função geradora  $\mathcal{Z}(q)$ , podemos escrever:

$$\mathcal{Z}(q) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - q^i} = \sum_{K=0}^{\infty} P(K) q^K \quad (3.43)$$

Antes de mostrarmos que as funções de correlação dos campos descendentes podem ser escritas em função de primários, vamos abordar brevemente a correspondência operador-estado. Em geral, para CFT's radialmente quantizadas, temos que cada operador local está associado com um estado. Para verificar esta correspondência, podemos fazer analogia direta com a mecânica quântica <sup>2</sup>, utilizando a representação de Schrodinger, na qual os estados são funcionais  $\Psi[\phi]$  de campos restritos a fatias espaço-temporais com tempo fixado, i.e.  $|z|$  constante. Supondo um funcional de onda  $\Psi[\phi]$ , escrevemos a propagação a partir de um estado inicial  $\Psi_0[\phi_0]$  como:

$$\Psi_f[\phi_f] = \int d\phi_0 \left[ \int_{\phi(|z|=r_0)=\phi_0}^{\phi(|z|=r_f)=\phi_f} [\mathcal{D}\phi] \exp(-\mathcal{S}[\phi]) \right] \Psi_0[\phi_0] \quad (3.46)$$

onde  $r_f > r_0$ . Ao efetuarmos o limite assintótico  $r_0 \rightarrow 0$  a integral " $\int d\phi_0$ " é absorvida na medida  $[\mathcal{D}\phi]$ , pois esta já leva em conta os valores do campo em  $z = 0$ , e o funcional de onda  $\Psi_0[\phi_0]$  agora atua na integral funcional como um operador local inserido no ponto  $z = 0$ :

$$\Psi_f[\phi_f] = \int^{\phi|_{|z|=r_f}=\phi_f} [\mathcal{D}\phi] \exp(-\mathcal{S}[\phi]) \Psi_0[\phi_0] \quad (3.47)$$

Para ressaltar a importância dos campos primários, considere o produto de alguns deles  $\Phi \equiv \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N)$ , com dimensões conformes  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Então a função de

<sup>2</sup> Na mecânica quântica não relativística, temos o propagador, escrito em termos de uma integral de caminho de uma ação euclídeana:

$$K(x, t, x', t') = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}[x(t)] \exp(-\mathcal{S}) \quad (3.44)$$

que fornece a amplitude de probabilidade da partícula viajar do ponto  $x(t_0) = x_0$  ao  $x(t_f) = x_f$ . Ou seja, considerando o estado inicial representado pela função de onda  $\psi_0$ , temos:

$$\psi_f(x_f) = \int dx_0 K(x, t, x', t') \psi_0(x_0) \quad (3.45)$$

correlação de campos descendentes pode ser escrita em função de campos primários:

$$\begin{aligned}
\langle \phi^{(-n)}(w)\Phi \rangle &\stackrel{3.41}{=} \left\langle \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} \frac{dz}{(z-w)^{n-1}} T(z)\phi(w)\Phi \right\rangle \\
&= \left\langle -\sum_{i=1}^N \oint_{C(w_i)} \frac{dz(z-w)^{-n+1}}{2\pi i} T(z)\phi(w)\Phi \right\rangle \\
&\stackrel{3.31}{=} -\sum_{i=1}^N \left\langle \phi(w) \oint_{C(w_i)} \frac{dz(z-w)^{-n+1}}{2\pi i} \left[ \frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w} \partial_{w_i} \right] \Phi \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{h_i(n-1)}{(w_i-w)^n} - \frac{\partial_{w_i}}{(w_i-w)^{n-1}} \right] \langle \phi(w)\Phi \rangle \equiv \mathcal{L}_{-n} \langle \phi(w)\Phi \rangle \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Aplicando esta relação recursivamente, temos:

$$\langle \phi^{(-k_1, \dots, -k_n)}(w)\Phi \rangle \equiv \mathcal{L}_{-k_1} \dots \mathcal{L}_{-k_n} \langle \phi(w)\Phi \rangle \quad (3.49)$$

### 3.3.2 OPE's e Funções de Correlação

Agora desejamos produzir a forma geral da OPE de dois campos quirais quasi-primários. Consideraremos o seguinte ansatz, já levando em conta a simetria por dilatação:

$$\phi_i(z)\phi_j(\omega) = \sum_{k,n \geq 0} C_{ij}^k \frac{a_{h_i h_j h_k}^n}{n!} \frac{\partial^n \phi_k(\omega)}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} \quad (3.50)$$

A simetria conforme global,  $SL(2, \mathbb{C}) \setminus \mathbb{Z}_2 \times \overline{SL(2, \mathbb{C}) \setminus \mathbb{Z}_2}$ , garante que quaisquer 3 pontos da esfera de Riemann podem ser mapeados injetivamente para  $\{0, 1, \infty\}$ , além de impor as seguintes restrições nas funções de correlação de 2 e 3 pontos:

$$\langle \phi_i(z_i, \bar{z}_i)\phi_j(z_j, \bar{z}_j) \rangle = \frac{d_{ij} \delta_{h_i, h_j} \delta_{\bar{h}_i, \bar{h}_j}}{(z_{ij})^{h_i+h_j} (\bar{z}_{ij})^{\bar{h}_i+\bar{h}_j}} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi_i(z_i, \bar{z}_i)\phi_j(z_j, \bar{z}_j)\phi_k(z_k, \bar{z}_k) \rangle &= \\
&= \frac{C_{ijk}}{(z_{ij})^{h_i+h_j-h_k} (z_{jk})^{h_j+h_k-h_i} (z_{ik})^{h_i+h_k-h_j} (\bar{z}_{ij})^{\bar{h}_i+\bar{h}_j-\bar{h}_k} (\bar{z}_{jk})^{\bar{h}_j+\bar{h}_k-\bar{h}_i} (\bar{z}_{ik})^{\bar{h}_i+\bar{h}_k-\bar{h}_j}} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

onde  $z_{ij} = (z_i - z_j)$ .

Tomando  $\omega = 1$  em 3.50, temos:

$$\begin{aligned}
\langle (\phi_i(z)\phi_j(1))\phi_k(0) \rangle &= \sum_{l,n \geq 0} C_{ij}^l \frac{a_{h_i h_j h_l}^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^{h_i+h_j-h_l-n}} \langle \partial^n \phi_l(1)\phi_k(0) \rangle \\
&\stackrel{3.51}{=} \sum_{l,n \geq 0} C_{ij}^l \frac{a_{h_i h_j h_l}^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^{h_i+h_j-h_l-n}} \partial_z^n \left( \frac{d_{lk} \delta_{h_l h_k}}{z^{2h_k}} \right) \Big|_{z=1} \\
&= \sum_{n,l \geq 0} C_{ij}^l d_{lk} a_{h_i h_j h_k}^n \frac{(-1)^n}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k-n}} \binom{2h_k+n-1}{n} \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_i(z)\phi_j(1)\phi_k(0) \rangle &\stackrel{3.52}{=} \frac{C_{ijk}}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k}(z)^{h_i+h_k-h_j}} \\
&= \frac{C_{ijk}}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k}} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{h_k+h_i-h_j+n-1}{n} (z-1)^n \\
&= \sum_{n \geq 0} C_{ijk} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k-n}} \binom{h_k+h_i-h_j+n-1}{n} \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade, utilizamos o resultado  $\frac{1}{(1+x)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n-1}{n} x^n$ . Comparando 3.53 e 3.54, obtemos os seguintes coeficientes para o ansatz proposto:

$$C_{ijk} = C_{ij}^l d_{lk} \quad (3.55)$$

$$a_{h_i h_j h_k}^n = \binom{2h_k+n-1}{n} \binom{h_k+h_i-h_j+n-1}{n} \quad (3.56)$$

Se considerarmos ambos os setores holomórfico e anti-holomórfico, podemos escrever em geral:

$$\phi_i(z, \bar{z})\phi_j(w, \bar{w}) = \sum_{p, \{k, \bar{k}\}} \frac{C_{ij}^p \beta_{ij}^{p\{k\}} \bar{\beta}_{ij}^{p\{\bar{k}\}} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(w, \bar{w})}{(z-w)^{h_i+h_j-h_p-K} (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_i+\bar{h}_j-\bar{h}_p+\bar{K}}} \quad (3.57)$$

onde e os coeficientes  $\beta_{ij}^{p\{k\}}$  e  $\bar{\beta}_{ij}^{p\{\bar{k}\}}$  são completamente determinados por condições de consistência, mediante transformações conformes aplicadas em ambos os lados de 3.57 (FRANCESCO; MATHIEU; SENECHAL, 1997), sendo funções das dimensões conformes e da carga central da teoria.

Para então obter os coeficientes  $C_{ij}^p$  precisamos recorrer à chamada simetria cruzada (Crossing Symmetry). Por conta da simetria global, podemos escrever a função de correlação de 4-pontos:

$$\begin{aligned}
G_{34}^{21}(x, \bar{x}) &\equiv \lim_{w, \bar{w} \rightarrow 0} \langle \phi_1^\dagger(w, \bar{w})\phi_2(1, 1)\phi_3(x, \bar{x})\phi_4(0, 0) \rangle \\
&\stackrel{3.57}{=} \sum_p C_{34}^p C_{12}^p \left[ \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \sum_{\{k, \bar{k}\}} (C_{12}^p)^{-1} \frac{\beta_{34}^{p\{k\}} \bar{\beta}_{34}^{p\{\bar{k}\}} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(0, 0)}{x^{h_3+h_4-h_p} \bar{x}^{\bar{h}_3+\bar{h}_4-\bar{h}_p}} | 0, 0 \rangle \right] \quad (3.58)
\end{aligned}$$

onde  $x \equiv \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$ , e utilizamos a noção de adjunto, importante para termos um produto interno no espaço de Hilbert, para campos com dimensão conforme  $(h, \bar{h})$ :

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) := \frac{1}{z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}}} \phi\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}\right) \quad (3.59)$$

De modo que estados “out” são dados por:

$$\langle h, \bar{h} | := \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \langle 0 | \phi^\dagger(z, \bar{z}) \quad (3.60)$$

Os termos entre colchetes na equação 3.58 dependem apenas da simetria conforme, e são chamados de “Ondas parciais”:  $\mathcal{A}_{34}^{21}(p|x, \bar{x})$ , tais que:

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{34}^p C_{12}^p \mathcal{A}_{34}^{21}(p|x, \bar{x}) \quad (3.61)$$

e podem ser divididas em sua parte holomórfica e anti-holomórfica:

$$\mathcal{A}_{34}^{21}(p|x, \bar{x}) = \mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{34}^{21}(p|\bar{x}) \quad (3.62)$$

chamados blocos conformes. De acordo com 3.58 e 3.42 temos:

$$\mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) = \frac{1}{x^{h_3+h_4-h_p}} \sum_{\{k\}} \beta_{34}^{p\{k\}} x^K \frac{\langle h_1|\phi_2(1)L_{-k_1}\dots L_{-k_i}|h_p\rangle}{\langle h_1|\phi_2(1)|h_p\rangle} \quad (3.63)$$

A simetria cruzada consiste em considerar a irrelevância da ordem dos campos dentro da função de correlação, de modo que poderíamos repetir a análise iniciada em 3.58, mapeando  $z_1, z_2, z_4 \mapsto \infty, 0, 1$ , e então obtendo:

$$G_{32}^{41}(1-x, 1-\bar{x}) = G_{34}^{21}(x, \bar{x}) \quad (3.64)$$

por outro lado, fazendo  $z_1, z_2, z_4 \mapsto 0, 1, \infty$  temos:

$$x^{-2h_3} \bar{x}^{-2\bar{h}_3} G_{31}^{24}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\bar{x}}\right) = G_{34}^{21}(x, \bar{x}) \quad (3.65)$$

A hipótese bootstrap consiste em considerar as restrições impostas à  $C_{ij}^p$ , através das equações 3.64 e 3.65, suficientes para determinar completamente estas constantes de estrutura e resolver a teoria. Apesar de ainda não demonstrada, pode ser verificada exatamente para certos modelos, chamados de "Minimal Models" (FRANCESCO; MATHIEU; SENECHAL, 1997).

## 3.4 O espaço de Hilbert

Nesta seção vamos construir o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de CFT's em duas dimensões através das representações da álgebra de virasoro.

### 3.4.1 Grupo de Simetria e Extensões Centrais

Desejamos construir um formalismo em que as simetrias de um sistema quântico possam ser descritas como transformações que preservam transições de probabilidade.

**Definição 26.** Dado um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . O **Espaço de Fase** quântico é o espaço projetivo  $\mathbb{P} := (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / \sim$ , quocientado pela seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f = \lambda g, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}, \quad (3.66)$$

**Definição 27.** Uma **Simetria** no espaço de fase quântico é uma bijeção  $T : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ , que satisfaz:

$$\delta(T[f], T[g]) = \delta([f], [g]), \quad \forall [f], [g] \in \mathbb{P}, \quad (3.67)$$

onde  $\delta : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada transição de probabilidade:

$$\delta([f], [g]) := \frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|f\|^2 \|g\|^2}, \quad (3.68)$$

$[f]$  representa a classe de equivalência do vetor  $f \in \mathcal{H}$ , e  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  e  $\|\cdot\|$  são a forma hermiteana e a respectiva norma de  $\mathcal{H}$ . O conjunto de simetrias é denotado por  $Aut(\mathbb{P})$ .

Em 1931, Eugene P. Wigner demonstrou que as transformações de simetria de um sistema quântico podem ser induzidas por isometrias no espaço de Hilbert correspondente (WIGNER, 1959).

**Teorema 8.** (WEINBERG, 1995) Para cada simetria  $T \in Aut(\mathbb{P})$ , existe um operador unitário e linear ou anti-unitário e anti-linear  $U$ , tal que:  $T = \hat{\pi}(U)$ , onde o homomorfismo  $\hat{\pi} : \mathcal{U}(\mathcal{H}) \rightarrow Aut(\mathbb{P})$  é dado por:

$$\hat{\pi}(U)[f] := [Uf], \quad (3.69)$$

$$\forall [f] \in \mathbb{P}, U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}).$$

Na teoria de Campos Conformes, bem como nas teorias clássicas de Yang-Mills (1.3), a simetria se evidenciou através de um grupo topológico  $G$ . Neste caso, a quantização destas simetrias consiste em obter um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  no qual tenhamos um homomorfismo contínuo,

$$T : G \rightarrow U(\mathbb{P}) \quad (3.70)$$

Onde  $U(\mathbb{P}) \subset Aut(\mathbb{P})$  é o subespaço de automorfismos projetivos induzidos por operadores unitários em  $\mathcal{H}$ .

Isto posto, um análogo do teorema de Wigner seria considerar levantamentos de 3.70, ou seja, homomorfismos contínuos entre o grupo de simetria e o grupo de operadores unitários,  $S : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , tais que,  $T = \hat{\pi} \circ S$  (cf. 3.69). Infelizmente, nem sempre estes levantamentos ocorrem.

Para grupos de simetria conexos e simplesmente conexos, como é o caso de  $SL(2, \mathbb{C})$  e  $SU(2)$ , uma condição suficiente para obtermos um levantamento para cada representação projetiva é a trivialidade do segundo grupo de cohomologia de sua respectiva álgebra de lie  $\mathfrak{g}$ , denotado como  $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  (Para mais detalhes sobre esta construção cf. (SCHOTTENLOHER, 2008)). Um fato importante neste resultado, é o fato de que o grupo  $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  está em correspondência 1-para-1 com o conjunto de classes de equivalência de extensões centrais da álgebra  $\mathfrak{g}$  por  $\mathbb{R}$ .

Notamos agora que, ao invés de especificar o grupo conforme, a nossa abordagem consistiu em verificar as consequências das transformações conformes infinitesimais dos operadores de campos primários 3.30, as quais ocorrem de acordo com a álgebra de Witt, evidenciada na seção 3.2, e cuja extensão central é dada pela álgebra de virasoro 3.34. Desse modo, para especificar o espaço de Hilbert de CFT's em duas dimensões, devemos considerar representações unitárias dessa extensão central.

### 3.4.2 Módulo de Verma

Como observamos em 3.33, a álgebra de Virasoro surgiu através da quantização do tensor energia momento, por sua expansão em modos de Laurent.

**Definição 28.** A **álgebra de Virasoro**  $Vir$ , com carga central  $c$ , é um espaço vetorial complexo  $Vir := W \oplus \mathbb{C}c$ , com geradores  $L_n$  e  $c$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , satisfazendo:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n,0} \quad (3.71)$$

$$[c, L_n] = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (3.72)$$

Cada estado assintótico criado a partir da aplicação de um operador primário  $\phi(z)$ , de dimensão  $h$ , no estado de vácuo  $|0\rangle$ , é um vetor de peso mais alto  $\phi(0)|0\rangle = |h\rangle$  que produz uma representação da álgebra de Virasoro. Suas propriedades serão axiomatizadas e analisadas a seguir.

**Definição 29.** Um **Módulo de Verma** é um espaço vetorial complexo  $M(c, h)$ , caracterizado por dois números  $h, c \in \mathbb{C}$ . Juntamente com um homomorfismo  $\rho : Vir \rightarrow End_{\mathbb{C}}(M(c, h))$ , e um vetor  $|h\rangle \in M(c, h)$ , tal que:

$$\rho(c)|h\rangle = c|h\rangle \quad (3.73)$$

$$\rho(L_0)|h\rangle = h|h\rangle \quad (3.74)$$

$$\rho(L_n)|h\rangle = 0, \quad \forall n > 0 \quad (3.75)$$

De modo que o conjunto  $\{\rho(L_{-n_1})\dots\rho(L_{-n_k})|h\rangle \mid n_1 \geq \dots \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{|h\rangle\}$  seja base de  $M(c, h)$ .

**Teorema 9.** Para cada par  $c, h \in \mathbb{C}$ , podemos construir um módulo de Verma  $M(c, h)$

*Demonstração.* Basta definir o espaço vetorial

$$M(c, h) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C}\{|n_1 \dots n_k\rangle \mid n_1 \geq \dots \geq n_k > 0\} \oplus \mathbb{C}|h\rangle \quad (3.76)$$

Juntamente com o homomorfismo  $\rho : Vir \rightarrow End_{\mathbb{C}}(M(c, h))$ , dado por

$$\begin{aligned}\rho(c) &:= c \cdot id_{M(c, h)}; & \rho(L_n)|h\rangle &:= 0, \quad \forall n \geq 1; \\ \rho(L_0)|h\rangle &:= h|h\rangle; & \rho(L_0)|n_1 \dots n_k\rangle &:= \left( \sum_{j=1}^k n_j + h \right) |n_1 \dots n_k\rangle; \\ \rho(L_{-n})|h\rangle &:= |n\rangle, \quad \forall n \geq 1 & \rho(L_{-n})|n_1 \dots n_k\rangle &:= |nn_1 \dots n_k\rangle, \text{ se } n \geq n_1;\end{aligned}$$

Em acordo com a literatura física, vamos omitir o mapa  $\rho$  e escrever apenas  $L_n \equiv \rho(L_n)$ . Podemos então definir  $L_{-n}|n_1 \dots n_k\rangle$ , para  $n > 0$ , por indução, para diferentes possibilidades  $n_1 \geq \dots \geq n_i > n \geq n_{i+1} \geq \dots \geq n_k > 0$  :

$$n_1 > n \geq n_2$$

$$\Rightarrow L_{-n}|n_1 \dots n_k\rangle := |n_1 \ n \ n_2 \dots n_k\rangle + (n_1 - n)|(n_1 + n)n_2 \dots n_k\rangle \quad (3.77)$$

$$n_1 \geq n_2 > n \geq n_2$$

$$\Rightarrow L_{-n}|n_1 \dots n_k\rangle := |n_1 \ n_2 \ n \ n_3 \dots n_k\rangle + (n_1 - n)|(n_1 + n)n_2 \dots n_k\rangle + (n_2 - n)L_{-n_1}|(n_2 + n)n_3 \dots n_k\rangle$$

Em geral, para  $n_1 \geq \dots \geq n_i > n \geq n_{i+1} \geq \dots$ , somos levados a definir:

$$L_{-n}|n_1 \dots n_k\rangle := |n_1 \dots n_i \ n \ n_{i+1} \dots n_k\rangle + \sum_{j=1}^i (n_j - n) \prod_{l=0}^{j-1} L_{-n_l}|(n_j + n)n_{j+1} \dots n_k\rangle, \text{ onde } L_{-n_0} \equiv id_{M(c, h)}$$

Fazemos um processo similar para  $L_n|n_1 \dots n_k\rangle, \forall n > 0$ , bem como para obter a igualdade  $\rho([L_n, L_m]) = [\rho(L_n), \rho(L_m)]$ . Por exemplo, para  $m \geq n \geq n_1$ , temos:

$$\begin{aligned}(L_{-n}L_{-m} - L_{-m}L_{-n})|n_1 \dots n_k\rangle &= L_{-n}|m \ n_1 \dots n_k\rangle - |m \ n \ n_1 \dots n_k\rangle \\ &\stackrel{3.77}{=} |m \ n \ n_1 \dots n_k\rangle + (m - n)|(m + n)n_1 \dots n_k\rangle - |m \ n \ n_1 \dots n_k\rangle \\ &= (m - n)|(m + n)n_1 \dots n_k\rangle = (m - n)L_{-m-n}|n_1 \dots n_k\rangle\end{aligned}$$

As outras possibilidades também podem ser verificadas utilizando apenas as definições anteriormente especificadas de  $\rho(L_n)|n_1 \dots n_k\rangle, \forall n$ . Por fim, pela definição 3.76, a base de  $M(c, h)$  deve ser composta exatamente pelos elementos  $\{L_{-n_1} \dots L_{-n_k}|h\rangle \mid n_1 \geq \dots \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{|h\rangle\}$ .  $\square$

**Teorema 10.** Se  $c, h \in \mathbb{R}$ , então podemos construir uma forma hermiteana  $\langle \cdot | \cdot \rangle : M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ , no módulo de Verma  $M(c, h) \equiv M$ , tal que:

$$\langle h|h\rangle = 1 \quad (3.78)$$

$$\langle L_n v|u\rangle = \langle v|L_{-n} u\rangle \quad (3.79)$$

$$\langle c \ v|u\rangle = \langle v|c \ u\rangle, \quad \forall u, v \in M \quad (3.80)$$

*Demonstração.* Primeiramente observamos que o módulo de Verma pode ser decomposto em uma soma direta de autoespaços  $V_N, N \in \mathbb{N}$ , de autoestados do operador  $L_0$ , com

autovalor  $h + N$ . Deste modo, o conjunto  $B = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} B_N$ , onde:

$$B_N := \{L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |h\rangle \mid n_1 \geq \dots \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^k n_j = N\} \quad (3.81)$$

$$B_0 := \{|h\rangle\} \quad (3.82)$$

é uma base conveniente para  $M(c, h)$ . Então definimos uma forma  $\mathbb{R}$ -bilinear  $\langle \cdot | \cdot \rangle_B : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , para os vetores da base  $B$  de  $M(c, h)$ , dada por:

$$\langle n_1 \dots n_k | m_1 \dots m_j \rangle_B := \langle h | L_{n_k} \dots L_{n_1} L_{-m_1} \dots L_{-m_j} |h\rangle, \quad (3.83)$$

onde  $\langle h | v \rangle$  é o coeficiente da componente de  $|v\rangle \in M(c, h)$ , contida no subespaço invariante  $V_0 \equiv \mathbb{C}\{|h\rangle\}$ . Então 3.78 segue diretamente de 3.83. Após o uso das relações de comutação em 3.83, obtemos um número dependente de  $h$  e  $c \in \mathbb{R}$ , de modo que  $\langle n_1 \dots n_k | m_1 \dots m_j \rangle_B = \langle m_1 \dots m_j | n_1 \dots n_k \rangle_B$ .

Considerando dois vetores arbitrários  $w, u \in M(c, h)$ , expandimos em termos da base  $B$ , como  $w = \sum_j \alpha_j v_j$  e  $u = \sum_i \beta_i v'_i$ , a forma hermiteana  $\langle \cdot | \cdot \rangle : M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por:

$$\langle w | u \rangle := \sum_{j,i} \bar{\alpha}_j \beta_i \langle v_j | v'_i \rangle_B \quad (3.84)$$

satisfaz as propriedades requisitadas 3.78, 3.79 e 3.80.  $\square$

Para que seja possível construir uma norma no módulo de Verma precisamos garantir que a forma hermiteana seja positiva definida.

**Definição 30.** Dizemos que o  $M$  é **unitário** se a sua forma hermiteana é positiva semi-definida, ou seja

$$\langle v | v \rangle \geq 0, \quad \forall |v\rangle \in M \quad (3.85)$$

e satisfaz as propriedades 3.79 e 3.80.

É fácil ver que uma condição necessária para a unitariedade da forma construída no teorema 10 é que  $h, c$  sejam números não negativos. Basta observar o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle n | n \rangle &= \langle h | L_n L_{-n} |h\rangle = \langle h | [L_n, L_{-n}] |h\rangle \\ &= 2 n h + \frac{c}{12} (n^3 - n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Então, assumindo  $\langle n | n \rangle \geq 0$  para todo  $n > 0$ , segue de 3.86 que  $h \geq 0$  e  $c \geq 0$ .

Em geral, podemos verificar em quais pontos  $(c, h) \in \mathbb{R}^2$  esta condição de unitariedade é atendida, examinando se as matrizes associadas a forma hermiteana são positivas, i.e. se têm determinante positivo.

**Definição 31.** Sendo  $\langle \cdot | \cdot \rangle : M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ , forma hermiteana no módulo de Verma  $M$ , então definimos, para cada subespaço invariante  $V_N \in M(c, h)$ , a matriz  $A_{ij}^N := \langle i | j \rangle$ , onde  $|i\rangle$  e  $|j\rangle$  são vetores da base  $B_N$ , indexados por  $i, j = 1, \dots, \dim_{\mathbb{C}}(V_N)$ .

Com a definição anterior,  $\det(A^{(N)}) \geq 0, \forall N$  é uma condição necessária para a unitariedade de  $M(c, h)$ . Temos, para os  $N = 0, 1, 2$

$$\det(A^0) = \langle h | h \rangle = 1 \quad (3.87)$$

$$\det(A^1) = \langle h | L_1 L_{-1} | h \rangle = 2h \quad (3.88)$$

$$\det(A^1) = \begin{pmatrix} \langle h | L_2 L_{-2} | h \rangle & \langle h | L_2 L_{-1} L_{-1} | h \rangle \\ \langle h | L_1 L_1 L_{-2} | h \rangle & \langle h | L_2 L_{-2} | h \rangle \end{pmatrix} = 2h(16h^2 + 2hc - 10h + c) \quad (3.89)$$

A expressão geral, obtida por Victor G. Kac (KAC, 1978), é dada por:

$$\det A^{(N)} = K_N \prod_{p, q \in \mathbb{N}, pq \leq N} (h - h_{p,q}(c))^{dim_{\mathbb{C}} V_{N-pq}} \quad (3.90)$$

tal que,

$$h_{p,q} := \frac{1}{48} \left[ (13 - c)(p^2 + q^2) + \sqrt{(c - 1)(c - 25)}(p^2 - q^2) - 24pq - 2 - 2c \right] \quad (3.91)$$

Através da expressão 3.90, é possível mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 11.** (KAC; RAINA; ROZHKOVSKAYA, 2013) O módulo de Verma  $M(c, h)$  é unitário se  $c \geq 1$  e  $h \geq 0$ . Mas no caso de  $0 \leq c < 1$  e  $h > 0$ ,  $M(c, h)$  é unitário se, e somente se, existe  $m \in \mathbb{N}$ , tal que

$$h = \frac{((m + 1)p - mq)^2 - 1}{4m(m + 1)} \quad (3.92)$$

$$c = 1 - \frac{6}{m(m + 1)}, \quad m \neq 1 \quad (3.93)$$

para  $1 \leq p < q < m$ .

Por fim, quando o módulo de Verma é unitário, podemos construir uma representação irredutível da álgebra de virasoro, com norma positiva definida, quocientando-o pela sua única subrepresentação própria maximal.

**Teorema 12.** (SCHOTTENLOHER, 2008) Se  $M(c, h)$  é unitário, então a representação

$$V(c, h) := M(c, h) / \ker \langle \cdot | \cdot \rangle,$$

onde

$$\ker \langle \cdot | \cdot \rangle := \{v \in M \mid \langle w | v \rangle = 0, \forall |w\rangle \in M\}$$

é positiva definida e não admite subrepresentação própria, ou seja, é irredutível.

No próximo capítulo mostraremos como uma teoria quântica de campos topológica, com lagrangeana do tipo Chern-Simons produz invariantes em variedades que generalizam naturalmente a noção de links.

## 4 A teoria de Chern-Simons

Neste capítulo final vamos compreender em detalhes a ação de Chern-Simons. Primeiramente vamos estudá-la do ponto de vista clássico, tendo em vista os conceitos elaborados no capítulo 1. Em seguida iremos verificar o surgimento da integral de Kontsevich, explanada no capítulo 2, como um observável do Loop de Wilson no calibre Holomórfico. E por fim, iremos ressaltar o caráter functorial da teoria de Chern-Simons e seguir os passos da dedução original do polinômio de Jones (WITTEN, 1989).

### 4.1 Ação e Equações de Movimento

Consideramos um grupo de calibre  $G$  compacto e simples, e uma variedade base 3-dimensional  $M$ . A grande diferença aqui, será o fato de não utilizarmos a ação usual 1.15, mas uma ação manifestadamente topológica, ou seja, que não é definida com auxílio da métrica inerente ao espaço base:

$$\mathcal{S}_{CS}[A] := \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \quad (4.1)$$

Nesta definição 4.1,  $A$  é uma conexão em um fibrado  $(P, \pi, M, G)$ , escrita em geral como:

$$A \equiv A_i^a T^a dx^i, \quad (4.2)$$

onde os índices superiores percorrem as componentes da conexão como um elemento da álgebra de lie (cf. 1.12), as componentes inferiores se referem às coordenadas de  $A$  como uma 1-forma (cf. C.7), e  $\varepsilon_{ijk}$  é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita.

O primeiro termo na integral 4.1 torna-se:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A \wedge dA) &= \text{Tr}(T_a T_b) A_i^a \partial_j A_k^b dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \text{Tr}(T_a T_b) \varepsilon_{ijk} A_i^a \partial_j A_k^b dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\stackrel{1.13}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_i^a \partial_j A_k^a d^3x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Em 4.3, denotamos  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv d^3x$ . Da mesma forma, para segundo termo

em 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(A \wedge A \wedge A) &= \text{Tr}(A_i^a A_j^b A_k^c T_a T_b T_c dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) \\
&= \varepsilon_{ijk} A_i^a A_j^b A_k^c \text{Tr}(T_a T_b T_c) d^3x \\
&= A_1^a A_2^b A_3^c \text{Tr}([T_a, T_b]T_c - [T_a, T_c]T_b + [T_b, T_c]T_a) d^3x \\
&\stackrel{1.13}{=} \frac{1}{4} A_1^a A_2^b A_3^c \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f_{\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)} d^3x \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} A_i^a A_j^b A_k^c f_{abc} d^3x
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Na obtenção da equação 4.4, o símbolo  $\sigma$  denotou as diferentes permutações dos índices  $a, b$  e  $c$ , além disso utilizamos a equação 1.12, onde  $f_{abc}$  é antissimétrico em todos os índices. Portanto, a ação de Chern-Simons pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{S}_{CS}[A] = \frac{k}{8\pi} \int_M \varepsilon_{ijk} [A_i^a \partial_j A_k^a + \frac{1}{3} A_i^a A_j^b A_k^c f_{abc}] d^3x \tag{4.5}$$

Como vimos na seção 1.4, esta ação não é invariante sob transformação de calibre, mas em geral se transforma de acordo com o grau  $N$  da transformação  $g$ . Se escrevermos a conexão após a transformação de calibre como  $A^g$ , e considerarmos o caso tratado naquela seção, ou seja, do fibrado  $P(S^4, SU(2))$ , vimos que:

$$\mathcal{S}_{CS}[A^g] - \mathcal{S}_{CS}[A] = -2\pi k N \tag{4.6}$$

Entretanto, a quantidade que deve ser preservada sob transformações de calibre é na verdade a exponencial desta ação:  $\exp(i\mathcal{S}[A])$ . Portanto, somos levados à condição de quantização para a constante de acoplamento:  $k \in \mathbb{Z}$ .

Outra característica desta ação é que seus pontos críticos são dados por conexões planas. Derivando o primeiro termo da equação 4.5, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta A_l^g(x)} \int_M \varepsilon_{ijk} A_i^a \partial_j A_k^a &= \varepsilon_{ijk} \delta_{li} \delta_{gd} \partial_j A_k^d + \int_M \varepsilon_{ijk} A_i^d \frac{\delta}{\delta A_l^d} (\partial_j A_k^d) \\
&= \varepsilon_{ljk} \partial_j A_k^g + \int_M \partial_j (\varepsilon_{ijk} A_i^d \frac{\delta}{\delta A_l^g} (A_k^d)) - \varepsilon_{ijk} \partial_j A_i^d \delta_{gd} \delta_{lk} \\
&= \varepsilon_{ljk} \partial_j A_k^g - \varepsilon_{lji} \partial_j A_i^g = 2\varepsilon_{ljk} \partial_j A_i^d
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Onde utilizamos uma integração por partes na segunda igualdade. Já para o segundo termo em 4.5, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta A_l^g(x)} \int_M \varepsilon_{ijk} \frac{1}{3} A_i^a A_j^b A_k^c f_{abc} &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{3} [\delta_{ab} \delta_{li} A_j^b A_k^c + \delta_{gb} \delta_{lj} A_i^a A_k^c + \delta_{gc} \delta_{lk} A_i^a A_j^b] f_{abc} \\
&= \frac{1}{3} [\varepsilon_{ijk} A_j^b A_k^c f_{gbc} + \varepsilon_{ilk} A_i^a A_k^c f_{gac} + \varepsilon_{lij} A_i^a A_j^b f_{gab}] \\
&= \varepsilon_{ljk} A_j^b A_k^c f_{gbc}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Portanto, utilizando 4.7 e 4.8 em 4.5, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{k} \varepsilon_{rst} \frac{\delta \mathcal{S}_{CS}}{\delta A_t^g} &= \varepsilon_{rst} \varepsilon_{ljk} (\partial_j A_i^d + A_j^b A_k^c f_{abc}) \\
&= (\delta^{rj} \delta^{sk} - \delta^{rk} \delta^{sj}) (\partial_j A_i^d + A_j^b A_k^c f_{abc}) \\
&= \partial_r A_s^g - \partial_s A_r^g + A_r^a A_s^b f_{gab} \stackrel{1,14}{=} F_{rs}^g
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Então os pontos estacionários da ação de Chern-Simons são campos de calibre para os quais a curvatura é nula.

A partir de agora, podemos seguir duas rotas distintas para relacionar esta teoria de campos com os invariantes de Nós. A primeira consiste em uma análise perturbativa da ação escolhida, que fornece um ponto de vista bastante útil no estudo de invariantes de Vassiliev (KAUFFMAN, 2001). A segunda abordagem consiste em uma análise não-perturbativa, que resulta nas relações de novelo que caracterizam o polinômio de Jones.

## 4.2 Calibre Holomórfico e a Integral de Kontsevich

Vamos explanar um primeiro exemplo de correspondência entre os invariantes de nós e a teoria de Chern-Simons. Veremos o surgimento da integral de Kontsevich (cf. cap 2) como um observável do Loop de Wilson no calibre Holomórfico.

Considerando  $M = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ , efetuamos a mudança de coordenadas

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (t, z, \bar{z}),$$

dada por:

$$z = x_2 + ix_3, \quad \bar{z} = x_2 - ix_3, \quad t = x_1 \tag{4.10}$$

Podemos então reescrever 4.2 como:

$$\begin{aligned}
A(x) &= A_i dx^i = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 \\
&= A_1 dt + \frac{1}{2} A_2 (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} A_3 (dz - d\bar{z}) \\
&= A_1 dt + \frac{1}{2} (A_2 - iA_3) dz + \frac{1}{2} (A_2 + iA_3) d\bar{z} \\
&\equiv A_t dt + A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O calibre holomórfico, consiste em estabelecer a seguinte relação:

$$A_{\bar{z}} \equiv 0 \tag{4.12}$$

Então, temos que  $A \wedge A \wedge A|_{A_{\bar{z}}=0} = 0$ , e o primeiro termo de 4.1 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A \wedge dA) &= (A_i^a dx^i) \wedge (\partial_j A_k^b dx^j \wedge dx^k) \text{tr}(T^a T^b) \\ &\stackrel{1.13}{=} \frac{1}{2} (A_z^a \partial_{\bar{z}} A_t^a - A_t^a \partial_{\bar{z}} A_z^a) dz \wedge d\bar{z} \wedge dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

A ação de Chern-Simons torna-se quadrática em  $A$ :

$$S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int dz d\bar{z} dt \varepsilon^{mn} \frac{\delta^{ab}}{2} A_m^a \partial_{\bar{z}} A_n^b \quad (4.14)$$

onde  $\varepsilon^{mn}$  é antissimétrico, com índices  $m, n \in \{z, t\}$ , de modo que  $\varepsilon^{zt} \equiv 1$ . É relevante ressaltar que os termos não físicos provenientes da fixação de calibre (cf. D) podem ser desacoplados da integral funcional (FRÖHLICH; KING, 1989).

Podemos partir para o cálculo do propagador D.6. Se reescalarmos o potencial de calibre  $A \mapsto A\sqrt{\frac{2}{k}}$  para incorporar a constante de acoplamento, a ação é reescrita como:

$$S_{CS}[A] = \frac{-1}{2} \int dz d\bar{z} dt A_m^a (\Delta^{-1})_{ab}^{mn} A_n^b \equiv -\frac{1}{2} A \cdot \Delta^{-1} \cdot A, \quad (4.15)$$

Em que

$$(\Delta^{-1})_{ab}^{mn} \equiv -\frac{1}{2\pi} \delta_{ab} \varepsilon^{mn} \partial_{\bar{z}} \quad (4.16)$$

Para calcular o inverso de  $\partial_{\bar{z}}$ , recobramos o teorema da divergência em coordenadas complexas:

$$\int_R d^2 z (\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) = i \oint_{\partial R} (v^z d\bar{z} - v^{\bar{z}} dz) \quad (4.17)$$

onde  $v^a$  é um vetor, e utilizamos a notação:  $v^z \equiv v^1 + iv^2$  e  $v^{\bar{z}} \equiv v^1 - iv^2$ .

Sendo  $\partial_{\bar{z}} \ln(z\bar{z}) \equiv v^{\bar{z}}$ , de 4.17 temos que:

$$\begin{aligned} \int_R d^2 z (\partial_{\bar{z}} \partial_z \ln(z\bar{z})) &= i \oint_{\partial R} -\partial_z \ln(z\bar{z}) dz \\ &= i \oint_{\partial R} \frac{1}{z} dz = 2\pi \end{aligned} \quad (4.18)$$

Além disso, para  $z \neq 0$ :

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z \ln(z\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} \partial_z (\ln z + \ln \bar{z}) = 0 \quad (4.19)$$

Portanto, escrevemos:

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z \ln(z\bar{z}) \equiv 2\pi \delta^{(2)}(z, \bar{z}) \quad (4.20)$$

De modo que o operador inverso de  $\partial_{\bar{z}}$  é:

$$(\partial_{\bar{z}})^{-1} = \frac{1}{2\pi z} \quad (4.21)$$

De posse dos resultados 4.16 e 4.21, escrevemos:

$$\Delta_{ab}^{mn}(z) = \delta_{ab} \varepsilon^{mn} \frac{1}{z} \quad (4.22)$$

Então, utilizando D.6, temos as funções de correlação de 2-pontos:

$$\begin{aligned} \langle A_m^a(z, t) A_n^b(w, s) \rangle &= \frac{\delta^2}{\delta J_m^a(z, t) \delta J_n^b(w, s)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz' dw' dt' J_r^c(z', t') \left( \frac{\delta_{cd} \varepsilon^{rs}}{z' - w'} \right) J_s^d(w', t') \right\} \\ &\Rightarrow \langle A_m^a(z, t) A_n^b(w, s) \rangle = \frac{\varepsilon_{mn} \delta^{ab}}{z - w} \delta(t - s) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Desejamos agora calcular o valor esperado de um Loop de Wilson, definido em 1.22, para um Nó  $K$  em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\langle W_K^A \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{k} \right)^{n/2} \text{P} \int_K \left( \prod_{k=1}^{2n} dx_k^{\mu_k} \right) \langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_{2n}}^{a_{2n}}(x_{2n}) \rangle \text{Tr}(T^{a_1} \dots T^{a_{2n}}) \quad (4.24)$$

$$\stackrel{D.18}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{k} \right)^{n/2} \text{P} \int_K \sum_{p \in P_{2n}} \left( \prod_{k=1}^n dx_{i_k}^{\mu_{i_k}} dx_{j_k}^{\mu_{j_k}} \langle A_{\mu_{i_k}}^{a_{i_k}}(x_{i_k}) A_{\mu_{j_k}}^{a_{j_k}}(x_{j_k}) \rangle \right) D_p \quad (4.25)$$

onde  $D_p$  é o traço dos geradores, correspondente a cada pareamento  $p \in P_{2n}$  (cf. D.18). Os termos de proporcionalidade  $(\frac{2}{k})^{n/2}$  surgem devido a reescala feita em  $A$  na equação 4.15 anterior. Vejamos um exemplo do termo em parêntesis em 4.25 sem todos esses milhares de índices, utilizando 4.23:

$$\begin{aligned} dx_1^k dx_2^l \langle A_k^a(x_1) A_l^b(x_2) \rangle &= dz_1 dt_2 \langle A_z^a(z_1, t_1) A_t^b(z_2, t_2) \rangle + dt_1 dz_2 \langle A_t^a(z_1, t_1) A_z^b(z_2, t_2) \rangle \\ &= (dz_1 dt_2 - dt_1 dz_2) \delta^{ab} \frac{\delta(t_1 - t_2)}{z_1 - z_2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

A equação 4.26 é generalizada para:

$$\begin{aligned} dx_{i_k}^{\mu_{i_k}} dx_{j_k}^{\mu_{j_k}} \langle A_{\mu_{i_k}}^{a_{i_k}}(x_{i_k}) A_{\mu_{j_k}}^{a_{j_k}}(x_{j_k}) \rangle &\stackrel{4.26}{=} (dz_{i_k} dt_{j_k} - dt_{i_k} dz_{j_k}) \delta^{a_{i_k} a_{j_k}} \frac{\delta(t_{i_k} - t_{j_k})}{z_{i_k} - z_{j_k}} \\ &= dt_{i_k} dt_{j_k} (dz_{i_k} - dz_{j_k}) \delta^{a_{i_k} a_{j_k}} \frac{\delta(t_{i_k} - t_{j_k})}{z_{i_k} - z_{j_k}} \\ &= \delta^{a_{i_k} a_{j_k}} \frac{dz_{i_k} - dz_{j_k}}{z_{i_k} - z_{j_k}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Antes de escrever a fórmula final para  $\langle W_K^A \rangle$ , passamos da variável  $t \in [s^0, s]$  que parametriza o Loop 1.23, para a direção temporal definida na mudança de coordenadas 4.10. Desse modo, o loop de Wilson fica bem definido nos segmentos do nó entre os pontos de máximo e mínimo (ie. pontos críticos) dessa parametrização (KAUFFMAN, 2000).

O preço a se pagar por essa mudança de variáveis é a introdução de um fator  $(-1)^{p^\dagger}$  onde  $p^\dagger$  é o número de segmentos  $(z_{i_k}, t_{i_k})$  ou  $(z_{j_k}, t_{i_k})$ , dos pares em um  $p \in P_{2n}$ , em que a orientação do nó é oposta ao sentido positivo da direção  $t$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ . Então, impondo 4.27 em 4.25, temos:

$$\langle W_K^A \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{k} \right)^{n/2} \text{P} \int \sum_{p \in P_{2n}} (-1)^{p^\dagger} \prod_{k=1}^n \left( \frac{dz_{i_k} - dz_{j_k}}{z_{i_k} - z_{j_k}} \right) D_p \quad (4.28)$$

Esta é a integral de Kontsevich ([VASSILIEV'S... , 1993](#)), ingrediente fundamental utilizado para a demonstração do teorema de Kontsevich-Vassiliev. Detalhes da computação desta integral podem ser encontrados nas referências ([CHMUTOV; DUZHIN; MOSTOVOY, 2012](#)) e ([DUNIN-BARKOWSKI; SLEPTSOV; SMIRNOV, 2013](#)). A seguir veremos como obter a relação de novelo do polinômio de Jones utilizando o caráter functorial da integral funcional de Chern-Simons.

### 4.3 Aspectos Functorias e o Polinômio de Jones

Considere os Loops de Wilson (veja seção 1.3) definidos em algum link  $L$ , de  $n$  componentes, mergulhado na variedade base  $M$ , a qual para cálculos explícitos será considerada  $S^3$ . Estes observáveis podem ser calculados, mediante a representação fundamental para  $SU(2)$ , utilizando a função de partição, dada pela seguinte integral no espaço das conexões, quocientado pelas transformações de calibre:

$$Z(M, L) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \mathcal{D}[A] \exp(i\mathcal{S}_{CS}[A]) W_L^A \quad (4.29)$$

Sendo o link não trivial, podemos escolher um cruzamento arbitrário e rodeá-lo com uma bola  $B$ , suficientemente pequena para conter somente os dois segmentos que compõem o cruzamento escolhido ( $L^x$ ). Desse modo, a variedade pode ser escrita como a união de  $B$  e o seu complemento  $B^c \equiv M \setminus B$ , de modo que o bordo de  $B$ , que corresponde à uma esfera  $S^2$  tem orientação oposta ao bordo de  $B^c$ . Vamos também denotar os 4 pontos em que os segmentos do cruzamento cruzam os bordos de pontos marcados, denotaremos a 2-esfera por  $S^2_{(4)}$ .

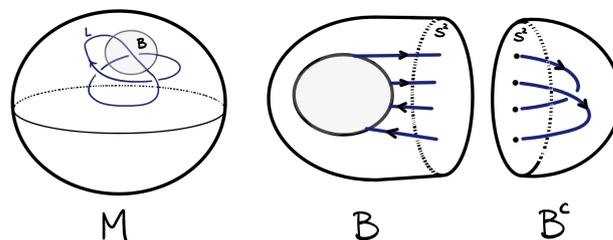


Figura 19 – Exemplo de um link mergulhado em variedade  $M$ .

O fato é que esta é uma teoria quântica de campos topológica ([ATIYAH, 1988](#)), pois por meio de sua quantização associamos espaços de Hilbert 2-dimensionais aos bordos  $\partial B$  e  $\partial B^c$ , ambos equivalentes à esfera  $S^2_{(4)}$ . A dimensionalidade destes espaços na verdade é uma consequência da Teoria Conforme de Campos, segundo a qual podemos ainda interpretar o valor esperado 4.29 como vetores nestes espaços, ou seja,  $Z(B, L^x) \equiv \chi \in \mathcal{H}_B$

e  $Z(B^c, L \setminus L^x) \equiv \psi \in \mathcal{H}_{B^c}$ . Devido a orientação oposta entre os bordos, temos que  $\mathcal{H}_B$  é dual à  $\mathcal{H}_{B^c}$ , e podemos escrever ainda:

$$Z(M, L) = (\chi, \psi) \quad (4.30)$$

Agora vamos supor que temos 3 links idênticos a menos do cruzamento escolhido, para o qual as possibilidades são  $L^+$ ,  $L^-$  e  $L^0$ , como na figura 7. O nosso objetivo é realizar uma construção dos invariantes que seja livre de projeções, portanto estes cruzamentos na verdade devem ser vistos como uma consequência da disposição dos pontos marcados em  $S^2_{(4)}$ , ou seja da aplicação de um difeomorfismo  $\mathcal{B}$  nesta 2-esfera (veja figura 20). Desse modo, temos os vetores  $\psi^{(+)}$ ,  $\psi^{(0)} \equiv \mathcal{B}\psi^{(+)}$  e  $\psi^{(-)} \equiv \mathcal{B}^2\psi^{(+)}$  relacionados às funções de correlação  $Z(B, L^{(+)})$ ,  $Z(B, L^{(-)})$  e  $Z(B, L^{(0)})$ . Agora basta notar que quaisquer três vetores em um espaço bi-dimensional devem ser linearmente dependentes, portanto existem coeficientes  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  tais que:

$$\alpha\psi^{(+)} + \beta\psi^{(-)} + \gamma\psi^{(0)} = 0 \quad (4.31)$$

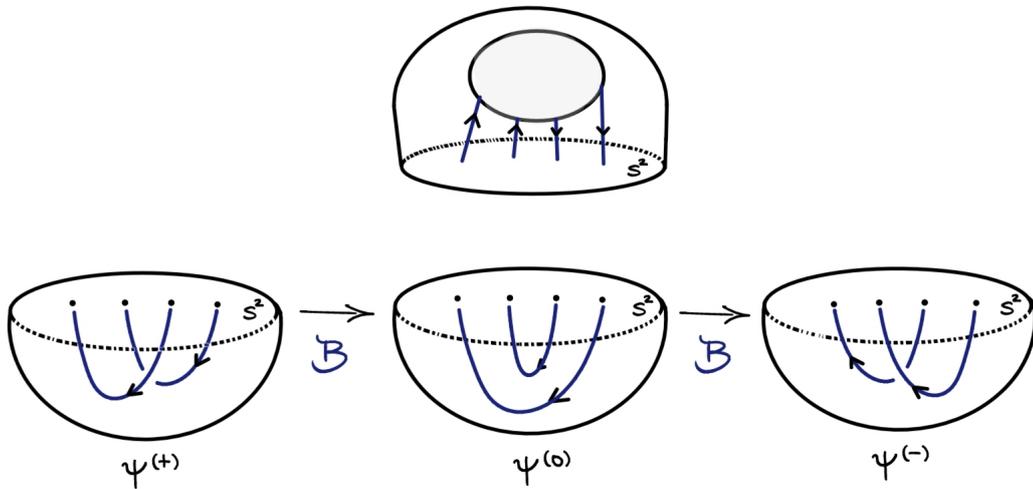


Figura 20 – Esquemática da aplicação do difeomorfismo  $\mathcal{B}$ .

Utilizando 4.30, temos:

$$\alpha Z(M, L^{(+)}) + \beta Z(M, L^{(-)}) + \gamma Z(M, L^{(0)}) = 0 \quad (4.32)$$

Para calcular os coeficientes  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  devemos fazer algumas observações. A primeira delas é que estes coeficientes em geral são funções da constante de acoplamento  $k$  e da representação escolhida para o grupo de estrutura, que no nosso caso é a representação fundamental de  $SU(2)$ . A segunda observação é que para determinar a função

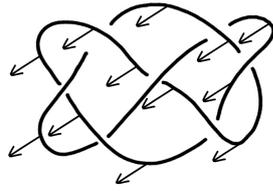


Figura 21 – Exemplo de um link com emolduramento padrão.

de partição sem ambiguidades devemos considerar um emolduramento (framing) para o respectivo link.

O emolduramento consiste em escolher uma seção não nula do fibrado normal de cada componente do link. Com essa escolha um nó emoldurado pode ser visualizado como uma fita. A conclusão de Witten em (WITTEN, 1989) é que se efetuarmos uma torção no emolduramento, então  $Z(M, L)$  deve ser multiplicado por um termo  $e^{2\pi i h}$ , onde  $h$  é a dimensão conforme de um campo primário em uma CFT com álgebra simétrica realizada por correntes. Neste caso, considerando a álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{su}(2)_k$  temos que (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009) :

$$h = \frac{3}{4(2+k)} \quad (4.33)$$

onde  $k$  denota a extensão central de  $\mathfrak{su}(2)$ .

Logo, se interpretarmos as linhas de Wilson como trajetórias espaço-temporais, a teoria de Chern-Simons descreve partículas com estatística fracionária, para as quais a amplitude de propagação não depende apenas de sua órbita mas também da fase adicional correspondente ao número de rotações efetuadas durante o percurso.

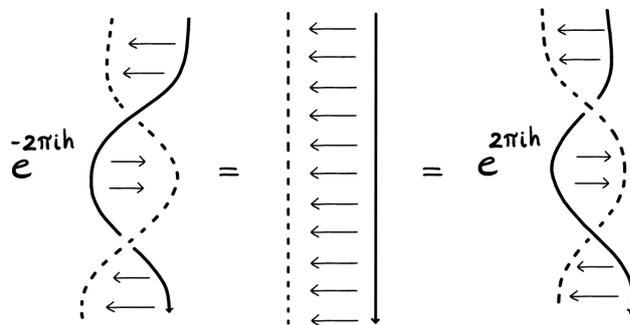


Figura 22 – Mudança na função de partição relativa a dois tipos de torção.

Para obtermos os coeficientes explicitamente devemos novamente recorrer a teoria conforme de campos. Temos que a aplicação  $\mathcal{B}$  pode ser vista como uma matriz atuando no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{S^2_{(4)}}$ , com autovalores:

$$\lambda_1 = \exp\left(\frac{-i\pi}{2(2+k)}\right) \quad \lambda_2 = -\exp\left(\frac{-3i\pi}{2(2+k)}\right) \quad (4.34)$$

Utilizando a equação característica  $\mathcal{B}^2 - \text{Tr}(\mathcal{B}) \cdot \mathcal{B} + \det(\mathcal{B}) = 0$ , aplicada em  $\psi^{(+)}$ , e comparando com a expressão 4.31, temos os coeficientes:

$$\alpha = -\exp\left(\frac{\pi i}{k+2}\right) \quad (4.35)$$

$$\beta = 1 \quad (4.36)$$

$$\gamma = \exp\left(\frac{3\pi i}{2(k+2)}\right) - \exp\left(\frac{-\pi i}{2(k+2)}\right) \quad (4.37)$$

Observamos que o difeomorfismo  $\mathcal{B}$  tem o efeito de adicionar uma torção ao emolduramento escolhido, portanto, para compensar este efeito, devemos multiplicar  $\gamma$  e  $\beta$  por  $\exp(-2\pi i h)$  e  $\exp(-4\pi i h)$  respectivamente. Além disso, podemos multiplicar toda a equação por um fator comum  $\exp\left(\frac{i\pi}{2+k}\right)$ , resultando em:

$$-\exp\left(\frac{2i\pi}{2+k}\right)\psi^{(+)} + \exp\left(\frac{-2i\pi}{2+k}\right)\psi^{(-)} + \left[ \exp\left(\frac{i\pi}{2+k}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi}{2+k}\right) \right] \psi^{(0)} = 0 \quad (4.38)$$

Finalmente, com o auxílio da equação 4.30, teremos exatamente a relação de novelo desejada, bastando definir  $t \equiv \exp\left(\frac{2i\pi}{2+k}\right)$ :

$$-tZ(M, L^{(+)}) + t^{-1}Z(M, L^{(-)}) = (t^{-1/2} - t^{1/2})Z(M, L^{(0)}) \quad (4.39)$$

A equação 4.39 tem exatamente a forma da relação de novelo que define o polinômio de Jones (veja 2.11).



## Conclusão

Neste trabalho, foi possível formular a relação entre a álgebra comutativa de mapas invariantes  $I(G)$  e a álgebra cohomológica na base do fibrado estudado  $H^*(M, \mathbb{R})$  (KO-BAYASHI; NOMIZU, 1969), construída a partir do teorema de Chern-Weil (1). Outras consequências deste resultado podem ser verificadas em (CHERN; SIMONS, 1974), onde mostra-se que, tomando  $\omega, \omega', \Omega, \Omega'$  formas de conexão e curvatura de métricas relacionadas por transformações conformes, então  $\bar{S}(\Omega) = \bar{S}(\Omega')$ .

Por outro lado, os invariantes de ordem finita, abordados no capítulo 2, mostram-se promissores no estudo e classificação dos Nós. De acordo com Chmutov e Duzhin, conjectura-se que o espaço das funções em qualquer conjunto finito de Nós pode ser gerado por invariantes de ordem finita com valores racionais (CHMUTOV; DUZHIN; MOSTOVOY, 2012). Em caso afirmativo, esta propriedade ajudaria a compreender se estes invariantes são de fato capazes de distinguir Nós.

Para o estabelecimento da correspondência entre a teoria de Chern-Simons e Campos Conformes em 2-dimensões, se faz necessário a introdução da chamada quantização geométrica (WITTEN, 1989). Neste contexto, é possível notar o surgimento natural da equação diferencial funcional que caracteriza a ação do modelo WZW (BERSHADSKY; OOGURI, 1989), como uma condição de restrição para os estados físicos do espaço de Hilbert da teoria de Chern-Simons (MURAYAMA, 1990).



## Referências

- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 115, p. 485–491, Aug 1959. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.485>>. Citado na página 20.
- ALEXANDER, J. W. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 9, n. 3, p. 93–95, 1923. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/9/3/93>>. Citado na página 39.
- ARTIN, E. Theorie der zöpfe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Springer Science and Business Media LLC, v. 4, n. 1, p. 47–72, Dec 1925. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02950718>>. Citado na página 39.
- ATIYAH, M. F. Topological quantum field theory. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, Institut des Hautes Études Scientifiques, v. 68, p. 175–186, 1988. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1988\\_\\_68\\_\\_175\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1988__68__175_0/)>. Citado na página 70.
- BERSHADSKY, M.; OOGURI, H. Hidden  $SL(n)$  symmetry in conformal field theories. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 126, n. 1, p. 49 – 83, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/>>. Citado na página 75.
- BIRMAN, J. S.; CANNON, J. *Braids, Links, and Mapping Class Groups. (AM-82)*. Princeton University Press, 1974. ISBN 9780691081496. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9rvz3>>. Citado na página 39.
- BLUMENHAGEN, R.; PLAUSCHINN, E. *Introduction to conformal field theory: with applications to String theory*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 779. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 72.
- CHERN, S.-S.; SIMONS, J. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, Annals of Mathematics, v. 99, n. 1, p. 48–69, 1974. ISSN 0003486X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1971013>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 75.
- CHMUTOV, S.; DUZHIN, S.; MOSTOVOY, J. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 7, 31, 41, 44, 70 e 75.
- COLEMAN, S. R. The Uses of Instantons. *Subnucl. Ser.*, v. 15, p. 805, 1979. Citado na página 26.
- DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically Massive Gauge Theories. *Annals Phys.*, v. 140, p. 372–411, 1982. [Erratum: *Annals Phys.* 185, 406 (1988)]. Citado na página 12.
- DEWITT-MORETTE, Y. C.-B. C. *Analysis, Manifolds and Physics*. [S.l.]: North Holland, 1982. ISBN 9781493302536. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.

- DUNIN-BARKOWSKI, P.; SLEPTSOV, A.; SMIRNOV, A. Kontsevich integral for knots and vassiliev invariants. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 28, n. 17, p. 1330025, Jul 2013. ISSN 1793-656X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X13300251>>. Citado na página 70.
- DUNNE, G. V. Aspects of Chern-Simons theory. In: *Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 69: Topological Aspects of Low-dimensional Systems*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 12.
- FRANCESCO, P. D.; MATHIEU, P.; SENECHAL, D. *Conformal Field Theory*. New York: Springer-Verlag, 1997. (Graduate Texts in Contemporary Physics). ISBN 978-0-387-94785-3, 978-1-4612-7475-9. Citado 3 vezes nas páginas 47, 58 e 59.
- FRÖHLICH, J.; KING, C. The Chern-Simons theory and knot polynomials. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 126, n. 1, p. 167 – 199, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/>>. Citado na página 68.
- HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/478079>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 91.
- JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 12, n. 1, p. 103 – 111, 1985. Citado na página 38.
- KAC, V. G. Highest Weight Representations of Infinite-Dimensional Lie Algebras. *Academia Scientiarum Fennica*, p. 299–304, 1978. Citado na página 64.
- KAC, V. G.; RAINA, A. K.; ROZHKOVSKAYA, N. *Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*. Singapore: Amer Mathematical Society, 2013. (Advanced Series in Mathematical Physics). Disponível em: <<http://cds.cern.ch/record/1601455>>. Citado na página 64.
- KAUFFMAN, L. H. Knot theory and the heuristics of functional integration. In: . [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 69.
- KAUFFMAN, L. H. *Knots and Physics*. [S.l.]: WORLD SCIENTIFIC, 2001. ISSN 0219-9769. ISBN 9789810241117. Citado 3 vezes nas páginas 34, 36 e 67.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*. [S.l.]: Interscience Publication, Wiley, New York, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 75.
- KRAGH, H. The vortex atom: A victorian theory of everything. *Centaurus*, v. 44, n. 1-2, p. 32–114, 2002. Citado na página 11.
- LICKORISH, W. B. R. *An Introduction to Knot Theory*. Springer New York, 1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0691-0>>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.
- MAKEENKO, Y. *Methods of Contemporary Gauge Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Citado na página 20.
- MORITA, S. *Geometry of Differential Forms*. [S.l.]: AMS, 2001. Citado na página 16.

- MURASUGI, K. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology*, v. 26, n. 2, p. 187–194, 1987. ISSN 0040-9383. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0040938387900589>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 37.
- MURASUGI, K. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser Boston, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3>>. Citado na página 37.
- MURAYAMA, H. Explicit Quantization of the Chern-Simons Action. *Z. Phys. C*, v. 48, p. 79–88, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 12, 47 e 75.
- NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: Institute of Physics Publishing, wholly owned by The Institute of Physics, London, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 91.
- NASTASE, H. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 978-1-108-49399-4, 978-1-108-66563-6, 978-1-108-62499-2. Citado na página 95.
- SCHOTTENLOHER, M. (Ed.). *A mathematical introduction to conformal field theory*. [S.l.: s.n.], 2008. v. 759. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 64.
- SEPANSKI, M. R. Compact lie groups. In: . [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página 83.
- SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. [S.l.]: Publish or Perish, 1999. Citado na página 32.
- VASSILIEV'S knot invariants. *ADVSOV*, American Mathematical Society, p. 137–150, Aug 1993. Citado na página 70.
- WASSERMAN, S. A.; COZZARELLI, N. R. Biochemical topology: Applications to dna recombination and replication. *Science*, v. 232, n. 4753, p. 951–960, 1986. Citado na página 11.
- WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. v. 1. Citado na página 60.
- WIGNER, E. P. *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. [S.l.]: Academic Press; Expanded, Improved edition, 1959. Citado na página 60.
- WITTEN, E. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Commun. Math. Phys.*, v. 121, p. 351–399, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 11, 65, 72 e 75.



# Apêndices



## APÊNDICE A – Grupos de Lie

Neste apêndice abordaremos algumas noções introdutórias sobre grupos de lie utilizadas no estudo dos fibrados principais.

**Definição 32.** Um **grupo de lie**  $G$  é uma variedade diferenciável e um grupo, cujas operações produto (p) e inverso (i) :

$$p(g, h) = gh, \quad \forall g, h \in G \quad (\text{A.1})$$

$$i(g) = g^{-1}, \quad \forall g \in G \quad (\text{A.2})$$

são mapas diferenciáveis.

O exemplo principal é o grupo das matrizes quadradas, com coeficientes no corpo  $\mathbb{C}$ , de ordem  $n$ , invertíveis. Este espaço é chamado **grupo geral linear**:  $GL(n, \mathbb{C})$ , e constitui um aberto de  $\mathbb{R}^{2n^2}$ . Para ver que  $GL(n, \mathbb{C})$  é de fato um grupo de Lie basta lembrar que o determinante e a adjunta de uma matriz são funções polinomiais, e por consequência diferenciáveis. Para o inverso, temos por exemplo:

$$i(g) \equiv \frac{\text{adj}(g)}{\det(g)}, \quad \forall g \in GL(n, \mathbb{C}) \quad (\text{A.3})$$

A relevância de  $GL(n, \mathbb{C})$  para grupos de lie compactos é evidenciada no seguinte teorema (cf. (SEPANSKI, 2006)).

**Teorema 13.** Todo grupo de lie compacto é isomorfo a um subgrupo de lie de  $GL(n, \mathbb{C})$

**Definição 33.** Uma **ação** de  $G$  sobre um espaço topológico  $X$  é uma aplicação  $\sigma : G \times X \rightarrow X$  diferenciável, tal que:

1.  $\sigma(e, x) = x, \quad x \in X$
2.  $\sigma(h, \sigma(g, x)) = \sigma(hg, x) \quad \forall h, g \in G, x \in X$
3.  $\sigma(g, \cdot) : X \rightarrow X$  é difeomorfismo  $\forall g \in G$

É possível verificar que o produto de elementos de um grupo de lie constitui uma ação nele próprio.

Em geral estaremos interessados na ação do grupo de lie em variedades arbitrárias  $M$ , e representaremos a ação de um elemento  $g$  do grupo de lie em um elemento  $x \in M$  como  $g \cdot x$ .

1. A ação é dita **livre** quando apenas o elemento neutro tem ponto fixo, ou seja:

$$\exists x : g \cdot x = x \Rightarrow g = e$$

2. A ação é dita **transitiva** quando, para qualquer dupla de elementos  $x_1, x_2 \in X$ , existe  $g \in G$ , tal que :

$$x_1 = g \cdot x_2$$

3. A ação é dita **efetiva** quando, para qualquer elemento  $g \in G$  diferente da identidade, existe  $x \in X$ , tal que:

$$g \cdot x \neq x$$

Um operador  $\mathbb{R}$ -Linear,  $v$ , definido nos germes das funções reais diferenciáveis em  $g \in G$ , é uma derivação em  $p$  quando é leibniziano, ou seja,

$$v(fg) = v(f)g + fv(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(G), \quad (\text{A.4})$$

onde  $\mathcal{F}(G)$  denota o conjunto das funções diferenciáveis em  $G$ . Desse modo, podemos definir o espaço tangente à  $G$  no ponto  $p$ ,  $T_p G$ , como o espaço de derivações em  $p$ . E então é possível mostrar que o espaço  $(T_p G, [,])$  é uma álgebra de lie, com o colchete dado por:

$$[v, w](f) := v(w(f)) - w(v(f)) \quad (\text{A.5})$$

**Definição 34.** Uma **Álgebra de Lie** é uma espaço vetorial  $\mathfrak{g}$ , dotada de uma operação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , tal que:

$$\begin{aligned} [g, h] &= -[h, g] \\ [g, [h, t]] + [h, [t, g]] + [t, [g, h]] &= 0 \end{aligned}$$

Exemplos de conjuntos com esta estrutura são:

$$\mathfrak{sl}_n := \{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Tr}(\mathbf{a}) = 0 \} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathfrak{so}_{2n+1} := \{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)} \mid \mathbf{a}^T = -\mathbf{a} \} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathfrak{sp}_{2n} := \{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \mathbf{a}^T \cdot M + M \cdot \mathbf{a} = 0 \} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathfrak{so}_{2n} := \{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \mathbf{a}^T = -\mathbf{a} \} \quad (\text{A.9})$$

**Definição 35.** A **representação** de uma álgebra de lie  $\mathfrak{g}$  em uma espaço vetorial  $V$ , é um homomorfismo  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , com valores na álgebra de operadores lineares em  $V$ , tal que:

$$\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) \quad (\text{A.10})$$

Por exemplo, a representação adjunta é caracterizada pelo mapa  $g \mapsto ad_g$ , onde

$$ad_g(h) := [g, h] \quad (\text{A.11})$$

**Definição 36.** Uma representação  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  é redutível se existem  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1)$  e  $\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_2)$ ,  $V_i \neq \emptyset$  tais que:

$$V \equiv V_1 \oplus V_2$$

$$\rho \equiv \rho_1 \oplus \rho_2$$

Caso contrário, a representação é dita **irredutível**.



## APÊNDICE B – Polinômios Característicos

Neste trabalho, fizemos uso de algumas noções de álgebras exterior.

**Definição 37.** Uma álgebra de Grasmann sobre um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$ , sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , é a soma direta dos produtos exteriores de  $V$ . E escrevemos

$$\bigwedge V \equiv \mathbb{K} \oplus \bigwedge^1 V \oplus \dots \oplus \bigwedge^n V \quad (\text{B.1})$$

A dimensão de  $\bigwedge V$  é  $2^n$ , além disso a lei de comutação para elementos  $\xi \in \bigwedge^m V$  e  $\nu \in \bigwedge^n V$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\xi \wedge \nu = (-1)^{m \cdot n} \nu \wedge \xi \quad (\text{B.2})$$

Temos interesse em estender aplicações lineares em  $V$  para cada um desses setores graduados em B.1.

**Definição 38.** A extensão  $m$ -linear de um endomorfismo  $\mathbf{A} \in \text{End}(V)$ , à  $k$ -ésima potência exterior de  $V$ , é a aplicação linear dada por

$$\bigwedge V^k \mathbf{A}^m \left( \bigwedge_{i=1}^k u_i \right) \equiv \sum_{n_1, \dots, n_k} \bigwedge_{i=1}^k \mathbf{A}^{n_i} u_i, \quad \forall \bigwedge_{i=1}^k u_i \in \bigwedge^k V \quad (\text{B.3})$$

Onde estamos considerando  $0 \leq m \leq k \leq n$  e

Uma consequência imediata desta definição é que, para qualquer  $a \in \mathbb{K}$ , e dois endomorfismos de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , temos :

$$V^k (a\mathbf{A})^m = a^m V^k \mathbf{A}^m \quad (\text{B.4})$$

$$V^k (\mathbf{A}\mathbf{B})^m = (V^k \mathbf{A}^m)(V^k \mathbf{B}^m) \quad (\text{B.5})$$

Outra identidade útil é que, para qualquer subconjunto  $(u_i)_i^k \subset V$ , temos

$$V^{k+1} \mathbf{A}^m \left( \bigwedge_{i=1}^k u_i \wedge u \right) = V^k \mathbf{A}^m \left( \bigwedge_{i=1}^k u_i \right) \wedge u + V^k \mathbf{A}^{m-1} \left( \bigwedge_{i=1}^k u_i \wedge \mathbf{A}u \right) \quad (\text{B.6})$$

Casos particulares de interesse dessas extensões são o determinante e o traço.

**Definição 39.** O traço de um endomorfismo  $\mathbf{A} \in \text{End}(V)$ , é um número tal que:

$$\bigwedge^1 \mathbf{A}^1(\xi) =: (\text{Tr} \mathbf{A}) \xi \quad \forall \xi \in \bigwedge^1 V \quad (\text{B.7})$$

Veja que esta definição se reduz ao caso já conhecido, pois para qualquer base  $\{u_i\}$  de  $V$ , temos :

$$\begin{aligned} \bigwedge^n \mathbf{A}^1(u_1 \wedge \dots \wedge u_n) &\equiv \mathbf{A}u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n + u_1 \wedge \mathbf{A}u_2 \dots \wedge u_n + u_1 \wedge u_2 \dots \mathbf{A}u_n = \\ &= \sum_{j=1}^n u_1 \wedge \dots \wedge \left( \sum_{k=1}^n A_{jk} u_k \right) \wedge \dots \wedge u_n = \left( \sum_j A_{jj} \right) u_1 \wedge \dots \wedge u_n \end{aligned}$$

Outras propriedades diretas da definição são:

$$Tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = Tr(\mathbf{A}) + Tr(\mathbf{B}) \quad (\text{B.8})$$

$$Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA}) \quad (\text{B.9})$$

**Definição 40.** O determinante de um endomorfismo  $\mathbf{A} \in End(V)$ , é um número tal que:

$$\bigwedge^n \mathbf{A}^n(\xi) =: (det(\mathbf{A}))\xi \quad \forall \xi \in \bigwedge^n V \quad (\text{B.10})$$

O determinante de um operador pode ser visto como o aumento do volume de um paralelepipedo  $N$  dimensional, quando este é submetido à transformação linear do respectivo operador. Listamos aqui algumas de suas propriedades que seguem diretamente da definição:

$$det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B}) \quad (\text{B.11})$$

$$det(\alpha \mathbf{AB}) = \alpha^n det(\mathbf{A}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\text{B.12})$$

Vejamos agora, como combinar estes resultados para obtermos uma expressões polinomiais gerais. Começaremos descrevendo o polinômio característico.

**Definição 41.** O polinômio característico de um endomorfismo  $\mathbf{A} \in End(V)$  é definido como:

$$P_{\mathbf{A}}(x) := det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_V) \quad (\text{B.13})$$

Onde  $\mathbf{I}_V$  é a identidade no espaço vetorial  $V$ .

Por exemplo, se o operador é diagonalizável, com autovalores  $\lambda_i$ , então temos simplesmente:

$$P_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - x) \quad (\text{B.14})$$

O polinômio característico é relevante pois suas raízes são os autovalores do operador correspondente. Desejamos escrever os coeficientes deste operador como combinações das potências de traços. Começando com a seguinte expressão para o determinante:

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_V) = \sum_{r=0}^n (-x)^{n-r} \bigwedge^n \mathbf{A}^r \quad (\text{B.15})$$

Por fim, utilizando a formula de Liouville,

$$\det(\exp(\mathbf{A})) = \exp(\text{Tr}(\mathbf{A})) \quad (\text{B.16})$$

E pela equação B.15, temos

$$\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \text{Tr} \mathbf{A}^k\right] = \sum_{k=1}^n x^k \bigwedge^n \mathbf{A}^k \quad (\text{B.17})$$

Como casos particulares, até a quarta ordem de expansão, segue que:

$$\bigwedge^n \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr} \mathbf{A})^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}^2)] \quad (\text{B.18})$$

$$\bigwedge^n \mathbf{A}^3 = \frac{1}{6}(\text{Tr} \mathbf{A})^3 - \frac{1}{2}(\text{Tr} \mathbf{A})^2 \text{Tr}(\mathbf{A}^2) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^3) \quad (\text{B.19})$$

$$\bigwedge^n \mathbf{A}^4 = \frac{1}{24}(\text{Tr} \mathbf{A})^4 - \frac{1}{4}(\text{Tr} \mathbf{A})^2 \text{Tr}(\mathbf{A}^2) + \frac{1}{8}[\text{Tr} \mathbf{A}^2]^2 + \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}^3) \text{Tr} \mathbf{A} - \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{A}^4) \quad (\text{B.20})$$



# APÊNDICE C – Homologia e Cohomologia de De Rham

Neste apêndice iremos abordar os conceitos básicos relacionados às teorias de homotopia, homologia e cohomologia de de Rham. Os dois primeiros temas se encaixam no contexto da topologia algébrica (HATCHER, 2000), e servem como ferramentas para o estudo do último. A maioria dos resultados deste apêndice foram retirados de (NAKAHARA, 1990), e foram aplicados em praticamente todos os 4 capítulos desta dissertação.

## C.1 Homologia e Homotopia

Estamos interessados em definir um objeto a partir de uma espaço topológico  $M$ , que seja invariante por homeomorfismos em  $M$ . Ao invés de trabalhar diretamente com espaços topológicos, vamos introduzir espaços mais gerais, os Poliedros.

**Definição 42.** Um **r-simplexo**,  $\sigma = \langle p_0, \dots, p_r \rangle$ , em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto de combinações conexas e afins de pontos em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja:

$$\sigma \equiv \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid p = \sum_{i=0}^r c_i p_i, \ c_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\} \quad (\text{C.1})$$

Desta definição segue que um r-simplexo é um conjunto compacto e pode ser pensado como uma generalização da noção de triângulo em  $\mathbb{R}^3$ . Agora, sendo  $q \in \mathbb{N}$ , tal que  $0 < q < r$  temos:

**Definição 43.** Uma **q-face** de um r-simplexo  $\sigma$  é um q-simplexo dado por  $\sigma_q = \langle p_{i_0}, \dots, p_{i_q} \rangle$ , onde  $i$  é uma permutação dos índices  $\{0, \dots, r\}$ . Escrevemos  $\sigma_q \leq \sigma$ .

Em particular uma 0-face  $\langle p_i \rangle \leq \sigma$  é chamada de vértice. Podemos trocar a orientação de um r-simplexo efetuando uma permutação ímpar dos seus  $r + 1$  vértices.

**Definição 44.** Um **Poliedro**  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  é a união de todos os simplexes que satisfazem:

1. Se  $\sigma \in \mathcal{K}$ , então toda face de  $\sigma$  pertence a  $\mathcal{K}$
2. Se  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{K}$ , então a interseção  $\sigma \cap \sigma'$  é vazia ou é face de ambos.

O conjunto  $\mathcal{K}$  de simplexes satisfazendo 1 e 2 é chamado de **complexo simplicial**.

Dizemos que um espaço topológico  $X$  é triangularizável se for homeomorfo à um poliedro  $\mathcal{K}$ . Vamos nos restringir a trabalhar apenas com espaços triangularizáveis. Esta imposição não vai nos limitar, haja vista que a maioria dos espaços úteis de interesse, como a esfera  $S^n$  e o torus  $T$ , atendem a esta condição.

Podemos utilizar o conjunto de  $r$ -simplexos de um complexo simplicial  $K$  como geradores do grupo abeliano livre  $C_r(K, G)$ , com coeficientes em  $G$  (um grupo abeliano arbitrário). Para  $r \geq \dim(K)$ , temos  $C_r(K, G) = 0$ .

**Definição 45.** O **operador bordo**,  $\partial_r$ , é um mapa linear  $\partial_r : C_r(K, G) \rightarrow C_{r-1}(K, G)$ , satisfazendo:

1.  $\partial_r(p_0, \dots, p_r) := \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_r)$
2.  $\partial_0 := 0$

A propriedade fundamental destes operadores é que  $\partial_{r-1} \circ \partial_r$  é um mapa nulo. Isso significa que o grupo de  $r$ -bordos,  $B_r(K, G)$ , dado pela imagem de  $\partial_{r+1}$ :

$$B_r(K, G) := \{z \in C_r(K, G) \mid z = \partial_{r+1}b\} \quad (\text{C.2})$$

está contido no grupo de  $r$ -ciclos,  $Z_r(K)$ , dado pelo kernel de  $\partial_r$ :

$$Z_r(K, G) := \{z \in C_r(K, G) \mid \partial_r z = 0\} \quad (\text{C.3})$$

Então podemos definir nosso invariante topológico de interesse, quocientando o grupo de  $r$ -ciclos de  $K$  pelo seu subgrupo  $B_r(K)$ .

**Definição 46.** O  $r$ -ésimo **grupo de Homologia** de um poliedro  $\mathcal{K}$ , é dado por:

$$H_r(\mathcal{K}, G) := Z_r(K, G)/B_r(K, G) \quad (\text{C.4})$$

Onde  $K$  é um complexo simplicial que produz  $\mathcal{K}$ .

**Teorema 14.** Se  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  são poliedros homeomorfos, então  $H_r(\mathcal{K}_1)$  é isomorfo à  $H_r(\mathcal{K}_2)$ .

O grupo de homologia permite identificar conexidade.

**Definição 47.** Um espaço topológico  $X$  é **conexo** quando, para quaisquer dois abertos  $A, B \subset X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$ , tivermos  $X \neq A \cup B$

**Teorema 15.** Um espaço topológico  $X$  é conexo se, e somente se,  $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

Podemos ainda pensar no 1º grupo de homologia como uma abelianização do grupo fundamental. Primeiramente consideramos um mapa contínuo  $\alpha$ , de um  $r$ -cubo  $I^r$  (produto cartesiano de intervalos:  $I \equiv [0, 1]$ ) para o espaço topológico  $X$  de interesse. Dizemos que  $\alpha$  é um **r-loop** em  $x_\alpha \in X$ , se  $\alpha(\partial I^r) = \{x_\alpha\} \in X$ .

**Definição 48.** Uma **homotopia** entre dois  $r$ -loops  $\alpha, \beta$  em  $x \in X$ , é um mapa contínuo  $H : I^r \times I \rightarrow X$ , tal que:

1.  $F(z, 0) = \alpha(z), \forall z \in I^r$
2.  $F(z, 1) = \beta(z), \forall z \in I^r$
3.  $F(z, t) = x, \forall z \in \partial I^r, t \in I$

E dizemos que  $\alpha$  é homotópico à  $\beta$ , e isso define uma relação de equivalência  $\alpha \sim \beta$ .

O conjunto das classes de equivalência de  $r$ -loops em um dado ponto  $p \in X$ , é o  $r$ -ésimo **grupo de homotopia** de  $X$ , e escrevemos  $\pi_r(X, p)$ . O **grupo fundamental** de  $X$  no ponto  $p$ , é o conjunto  $\pi_1(X, p)$ .

**Definição 49.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, um **embedding** (como traduzir isso ?) é um mapa contínuo  $f : X \rightarrow Y$ , tal que  $X$  é homeomorfo a  $f(X)$ .

**Definição 50.** Um espaço topológico é **conexo por caminhos** (arcwise-connected) se, para quaisquer dois pontos  $x_0, x_1 \in X$ , existe uma imersão  $c : I \rightarrow X$ , tal que  $c(0) = x_0$ ,  $c(1) = x_1$ .

Seja  $G$  um grupo com apresentação  $G = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m)$ . Então a abelianização de  $G$ , é o grupo:  $G^{ab} \equiv (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m, x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$ .

**Teorema 16.** Se  $X$  é um espaço topológico conexo por caminhos. Então existe um isomorfismo entre  $H_1(X)$  e  $\pi_1^{ab}(X)$ .

Em geral trabalharemos com espaços topológicos localmente homeomorfos ao espaço euclidiano, as variedades diferenciáveis. Neste caso, é útil definir a noção de homologia singular.

**Definição 51.** Um  **$r$ -simplexo singular** em uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  é a imagem de uma aplicação diferenciável  $f : \sigma_r \rightarrow \mathcal{M}$ , onde:

$$\sigma_r \equiv \{(x^1, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r \mid x^\mu = 0, \sum_{i=0}^r x^\mu \leq 1\} \quad (\text{C.5})$$

De modo análogo ao procedimento feito com  $r$ -simplexos de 42 até 46, definimos o grupo de  $r$ -cadeias  $C_r(\mathcal{M})$  gerado pelas combinações lineares com coeficientes reais dos  $r$ -simplexos singulares. O operador bordo, dado por  $\partial f(\sigma_r) \equiv f(\partial \sigma_r)$  também satisfaz a condição de nilpotência:  $\partial^2 = 0$ , o que possibilita a construção do  $r$ -ésimo grupo de homologia singular de  $\mathcal{M}$  como:

$$H_r(\mathcal{M}) = Z_r(\mathcal{M})/B_r(\mathcal{M}) \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Cohomologia de De Rham

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade compacta. O conjunto de r-formas diferenciáveis em  $p \in \mathcal{M}$ , é o r-ésimo produto exterior do espaço tangente dual neste ponto, ou seja :

$$\Omega_p^r(\mathcal{M}) := \bigwedge^r T_p^* \mathcal{M}$$

Portanto, sendo  $\{dx^\mu\}$  uma base de  $T_p^* \mathcal{M}$ , temos explicitamente:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (\text{C.7})$$

para  $\omega \in \Omega_p^r(\mathcal{M})$ , onde  $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_r}$  é totalmente antissimétrico nos seus índices.

Escrevemos o produto exterior de  $\omega \in \Omega_p^r(\mathcal{M})$  com  $\nu \in \Omega_p^l(\mathcal{M})$  com auxílio do conjunto de permutações de  $k+l$  elementos:  $P_{k+l}$

$$(\omega \wedge \nu)(v_1, \dots, v_{k+l}) \equiv \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in P_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \nu(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \quad (\text{C.8})$$

A derivada exterior  $d_r : \Omega_p^r(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_p^{r+1}(\mathcal{M})$  é dada por:

$$d_r \omega \equiv \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial v^\nu} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (\text{C.9})$$

E também obedece a relação de nilpotência, ou seja,  $d_{r+1} \circ d_r = 0$ , portanto podemos definir o r-ésimo **grupo de Cohomologia de De Rham** em  $\mathcal{M}$  como o conjunto de r-formas fechadas quotientado pelo conjunto de r-formas exatas:

$$H^r(\mathcal{M}) = Z^r(\mathcal{M})/B^r(\mathcal{M}) \quad (\text{C.10})$$

Agora, considerando  $[c] \in H_r(\mathcal{M})$  e  $[w] \in H^r(\mathcal{M})$ , podemos definir um produto interno  $(, ) : H_r(\mathcal{M}) \times H^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$([c], [w]) := \sum_i a_i \int_{\sigma_{r,i}} f^* w, \quad (\text{C.11})$$

onde  $c = \sum_r a_i f(\sigma_{r,i}) \in C_r(\mathcal{M})$  e  $w \in \Omega^r(\mathcal{M})$ .  $f^*$  é o pullback do mapa  $f : \sigma_r \rightarrow C_r(\mathcal{M})$ .

O mapa C.11 é na verdade um produto interno  $(, ) : C_r(\mathcal{M}) \times \Omega^r(\mathcal{M})$  que não depende da escolha de elementos da mesma classe de equivalência de  $c \in C_r(\mathcal{M})$  e  $w \in \Omega^r(\mathcal{M})$ , podemos utilizar a seguinte notação:

$$([c], [w]) \equiv (c, w) \equiv \int_c w \quad (\text{C.12})$$

**Teorema 17 (Teorema de Stokes).** Sejam  $c \in C_r(\mathcal{M})$  e  $w \in \Omega^{r-1}(\mathcal{M})$ , então:

$$\int_c dw = \int_{\partial c} w \quad (\text{C.13})$$

**Teorema 18 (Teorema de de Rham).** Sendo  $\mathcal{M}$  uma variedade compacta,  $H^r(\mathcal{M})$  e  $H_r(\mathcal{M})$  são espaços vetoriais de dimensão finita e  $H^r(\mathcal{M})$  é dual à  $H_r(\mathcal{M})$ .

**Teorema 19 (Lema de Poincaré).** Se uma vizinhança coordenada  $U$  de uma variedade  $\mathcal{M}$  é contrátil à um ponto  $p$ , então qualquer r-forma fechada em  $U$  é exata.

# APÊNDICE D – Formalismo funcional em Teoria Quântica de Campos

Neste apêndice iremos abordar a teoria quântica de campos perturbativa através do formalismo envolvendo integrais de funcionais. Em geral, estamos interessados no cálculo das funções de correlação de  $n$ -pontos (funções de Green) de uma teoria. Os conceitos apresentados aqui podem ser encontrados em (NASTASE, 2019) (e Jan Ambjrn and Jens Lyng Peterse).

Vejamos o caso de um campo escalar  $\phi = \phi(x)$ , definido no espaço euclidiano, com a seguinte ação:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \int d^4x V(\phi(x)) \quad (\text{D.1})$$

$$\equiv \mathcal{S}_0[\phi] + \mathcal{S}_I[\phi] \quad (\text{D.2})$$

Onde separamos a sua parte livre  $\mathcal{S}_0[\phi]$  da parte interagente  $\mathcal{S}_I[\phi]$ . As funções de Green de  $n$  podem ser escritas como uma integral funcional:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-\mathcal{S}[\phi]\} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \quad (\text{D.3})$$

O método para obtenção destas funções de correlação, consiste em definir um funcional gerador:

$$Z[\beta, J] = \int_P \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}[\phi] + J \cdot \phi} \quad (\text{D.4})$$

Onde  $P$  representa a condição de periodicidade do campo:

$$\phi(\vec{x}, t + \beta) = \phi(\vec{x}, t),$$

utilizamos a notação conveniente:

$$J \cdot \phi \equiv \int d^4x J(x) \phi(x)$$

e lembramos que a projeção nos estados de vácuo ocorre quando o período  $\beta$  é infinito:

$$Z[J] \equiv Z[\infty, J] = {}_J \langle 0|0 \rangle_J \quad (\text{D.5})$$

É fácil ver que as funções de Green agora podem ser escritas como:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (\text{D.6})$$

Agora vamos resolver a teoria livre, obtendo os propagadores de Feynmann [D.11](#). O ponto central nesta análise é o fato de que o gerador livre pode ser reescrito como uma integral gaussiana. Integrais desse tipo podem ser calculadas, a menos de um fator de normalização, utilizando a configuração de campo que torna o argumento da exponencial (que neste caso é a própria ação) estacionário. Em resumo, sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$  de determinante não nulo e  $b \in \mathbb{R}^n$ , temos o resultado:

$$\int d^n x \exp\left(-\frac{1}{2}x^T \cdot A \cdot x - b^T \cdot x\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det A)^{1/2}} \exp\left(\frac{1}{2}b^T \cdot A^{-1} \cdot b\right) \quad (\text{D.7})$$

Então, manipulamos o funcional gerador livre  $Z_0[J]$ :

$$\begin{aligned} Z_0[J] &\equiv \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\mathcal{S}_0[\phi] + J \cdot \phi\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + J \cdot \phi\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{-1}{2}\phi \cdot \Delta^{-1} \cdot \phi + J \cdot \phi\right) \\ &\stackrel{\text{D.7}}{=} \mathcal{N} \exp\left(\frac{1}{2}J \cdot \Delta \cdot J\right), \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

onde  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização, definimos o propagador euclideano:

$$\Delta(x, y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip \cdot (x - y))}{p^2 + m^2} \quad (\text{D.9})$$

Por fim, podemos efetuar uma rotação de Wick, para expressar as quantidades de interesse no espaço de Minkowski:

$$p^0 \longmapsto e^{i(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}p^0 \quad (\text{D.10})$$

Observe que tomamos o cuidado de não rotacionar a variável  $p^0$  completamente, para evitar divergências provenientes da relação de dispersão  $p^2 = m^2$ , no espaço de Minkowski. A rotação [D.10](#), transforma [D.9](#) no propagador desejado:

$$D_F(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ip \cdot (x - y)) \quad (\text{D.11})$$

Por fim, o valor esperado no vácuo (VEV) de operadores,  $\mathcal{F}[\{\hat{\phi}\}]$ , na presença da fonte  $J$ , pode ser escrito como:

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\mathcal{S}_0[\phi] + J \cdot \phi\right) \mathcal{F}[\{\phi\}] = \mathcal{F}\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[J] \quad (\text{D.12})$$

Então, utilizando [D.2](#), [D.8](#) e [D.12](#), podemos reescrever a função de partição:

$$Z[J] = \exp\left(-\int d^4x V\left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\right) \exp\left(\frac{1}{2}J \cdot \Delta \cdot J\right) \quad (\text{D.13})$$

Em princípio, esta expressão permite obter os termos de qualquer ordem na expansão perturbativa da função de correlação de  $n$  pontos (D.6). De fato, D.13 equivale ao teorema de Wick, de modo que a função de Green D.6 pode ser reescrita como:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi_{cl}} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}\right) \left\{ \phi_{cl}(x_1) \dots \phi_{cl}(x_n) \exp\left(-\int d^4x V(\phi_{cl})\right) \right\} \quad (\text{D.14})$$

Onde  $\phi_{cl}$  é chamado campo clássico, definido na presença da fonte externa  $J$ :

$$\phi_{cl} \equiv \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J} Z[J] \quad (\text{D.15})$$

Generalizando para uma teoria com diferentes campos bosônicos  $\{\phi_i\}$ , indexados de acordo com alguma simetria interna (Lorentz, cor ou sabor, por exemplo), assumimos que a parte livre da ação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^4x \sum_{ij} \phi_i \Delta_{ij}^{-1} \phi_j \quad (\text{D.16})$$

Generalizando a expressão D.14, vemos que a função de  $n$ -pontos é nula para  $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ , mas pode ser escrita como uma soma sobre produtos de correlação de pares:

$$\langle \phi_{r_1}(x_1) \dots \phi_{r_{2N}}(x_{2N}) \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\delta}{\delta\phi_i} \cdot \Delta_{ij} \cdot \frac{\delta}{\delta\phi_j}\right) \left\{ \phi_{r_1}(x_1) \dots \phi_{r_{2N}}(x_{2N}) \right\} \quad (\text{D.17})$$

$$= \sum_{p \in P_{2N}} \prod_k^n \langle \phi_{r_{i_k}}(x_{i_k}) \phi_{r_{j_k}}(x_{j_k}) \rangle \quad (\text{D.18})$$

Onde  $p \in P_{2N}$  é o conjunto de todos os pareamentos  $p \equiv ((i_1 j_1) \dots (i_N j_N))$ , do conjunto de números  $\{1, \dots, 2N\}$ , onde  $i_k < j_k, \forall k$ .

È importante ressaltar que nas teorias de gauge, como é o caso de 1.15 e 4.1, o operador em D.16 é invertido custas de uma fixação de calibre, o que produz o aparecimento de campos fantasmas.