

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

ALEXANDRY MOREIRA ALVES PINTO

**FORMALISMO BRST, TÉCNICA DA PINÇA E  
FORMALISMO DE BATALIN-VILKOVISKY NA  
CROMODINÂMICA QUÂNTICA**

BRASÍLIA

01 DE FEVEREIRO DE 2023



Alexandry Moreira Alves Pinto

# **Formalismo BRST, Técnica da Pinça e Formalismo de Batalin-Vilkovisky na Cromodinâmica Quântica**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

01 de Fevereiro de 2023

# Resumo

É descrito campos invariantes por transformações de calibre e encontra-se que para quantizar um campo de calibre não-Abeliano necessita-se de fixar um calibre no funcional geratriz e conseqüentemente introduz-se o formalismo BRST de quantização que tem como propriedade manifestar a covariância dos campos observáveis através de um operador BRST que é introduzido via noções de álgebra cohomologica e graduada. É observado que a constante de acoplamento que acopla o campo do gluôn (carregador bosônico de interação da cromodinâmica quântica) com o campo do quark se torna muito grande na região (de pequenas energia) infravermelha, conseqüentemente quebrando métodos perturbativos utilizados para descrever observáveis. É construído a técnica da Pinça (PT) que busca rearranjar os termos da série de Schwinger-Dyson (método não-perturbativo) para se obter funções de Green invariantes do esquema de fixação de calibre. Uma equivalência entre o método de campos de fundo (BFM), um método de se obter funções de Green que obedecem identidades do tipo Identidade de Ward (WI) da eletrodinâmica quântica, e PT é notado no calibre de Feynman. É introduzido os anticampos do formalismo de Batalin-Vilkovisky para em seguida obter identidades quânticas de fundo (BQI) que são identidades de Slavnov-Taylor relacionando campos, fantasmas, anticampos e campos de fundo. Usando a técnica da pinça é obtido a série de Schwinger-Dyson para o propagador do gluôn no BFM no calibre de Feynman e em seguida usa-se as BQI para truncar a série e garantir transversalidade de suas componentes.

**Palavras-chaves:** simetria de gauge; simetria de calibre; formalismo BRST; técnica da pinça; Batalin-Vilkovisky; teoria quântica de campos.

# Sumário

	Introdução . . . . .	7
1	<b>A FUNÇÃO DE LAGRANGE . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1	Invariância por Gauge . . . . .	11
1.2	Procedimento Gupta-Bleuler e o segundo termo . . . . .	14
1.3	Fantasma de Faddeev-Popov . . . . .	15
2	<b>ÁLGEBRA COHOMOLÓGICA . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1	Álgebra graduada-comutativa . . . . .	17
2.2	Álgebra Cohomologica . . . . .	19
2.3	Resolução . . . . .	21
2.4	Construindo o formalismo . . . . .	22
2.5	O que deve ser feito . . . . .	26
3	<b>FORMALISMO BRST . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1	Operador derivação $s$ . . . . .	29
3.2	Nilpotência e Campo Auxiliar . . . . .	31
3.3	Carga e transformação BRST . . . . .	33
3.4	Operador BRST e estados físicos . . . . .	35
3.5	Discussão . . . . .	37
4	<b>CROMODINÂMICA QUÂNTICA - UMA TEORIA NÃO-ABELIANA</b>	<b>39</b>
4.1	Cores e Sabores . . . . .	39
4.2	Propagadores e diagramas de Feynman . . . . .	40
4.3	Matriz-S e o Teorema Óptico . . . . .	43
4.4	Identidade de Ward . . . . .	45
5	<b>A TÉCNICA DA PINÇA . . . . .</b>	<b>51</b>
5.1	Um exemplo . . . . .	51
5.2	Matriz-S para espalhamento quark-quark . . . . .	53
5.3	Auto-energia do Gluôn . . . . .	58
5.4	Processos no PT obedecendo WI . . . . .	60
5.5	O Teorema Óptico . . . . .	63
5.6	Equivalência PT e método de campos de fundo (BFM) . . . . .	68
6	<b>FORMALISMO DE BATALIN-VILKOVISKY . . . . .</b>	<b>71</b>
6.1	Anticampos . . . . .	71

6.2	Identities de Slavnov-Taylor e Lee-Zinn-Justin . . . . .	75
6.3	Identidade de ST para vértice de três gluons . . . . .	78
6.4	Identities quânticas de fundo (BQI) . . . . .	80
6.5	Decomposição PT da auto-energia do gluon . . . . .	82
	Conclusão . . . . .	89
	REFERÊNCIAS . . . . .	91

*Dedico este trabalho e agradeço primeiramente aos meus pais, Danielly e Celso; meus irmãos Kelvyn e Guilherme, por me motivarem e nunca me desanimarem de seguir este difícil caminho de me tornar um físico. Agradeço ao professor Arsen por me orientar durante todo este período, desde o projeto de iniciação científica até o presente momento que finalizo este trabalho, com certeza um exemplo de físico e professor a ser seguido. Agradeço a minha namorada Izabela por ter estado junto a mim durante boa parte da minha graduação sendo a excelente companhia que sempre é. Sou grato á professora Vanessa pela ajuda no momento da minha graduação que mais precisei.*



# Introdução

Desde que a noção de ação á distância Newtoniana teve seu fim com a introdução das noções da relatividade especial por Einstein (BOGOLIUBOV; SHIRKOV, 1959), a melhor forma de descrever a interação entre corpos da natureza é introduzindo a noção de campo, um meio não físico que permeia todo o universo e associa para cada ponto do espaço-tempo uma informação, que pode ser nula ou não. Sendo assim, ao introduzir a noção de uma partícula pontual, estamos lidando com uma perturbação de um campo em que a densidade de probabilidade da mecânica quântica usual pode ser tomada e a partícula pontual é descrita como um quanta de informação localizado. As interações ocorrem quando outra partícula é introduzida respeitando a relatividade especial e consequentemente o princípio da causalidade, com adição de um quanta encarregado de mediar a interação (de velocidade finita) informando uma partícula a presença de outra. Das interações mais comuns, temos por exemplo, partículas carregadas que perturbam o campo eletromagnético que consequentemente encarrega aos fótons o trabalho de cuidar da interação.

Lidando com interações na natureza, em geral, observamos que interações apenas ocorrem via perturbação de campos de spin-1, no qual associamos uma certa simetria, a chamada simetria de calibre (gauge) (SREDNICKI, 2007). Os graus internos de liberdade de um sistema pode ser descrito via noção de maço de fibras e por exigência de invariância de descrição desses graus internos por transformação global e local temos a introdução de um potencial forma-um com valores na álgebra de Lie e que cuida de manter nossa descrição dinâmica dos graus internos dos campos invariantes. Acontece que nossas interações são descritas por bósons que tem seus quantas governados por estes potenciais que demandamos serem invariantes por transformação local e global.

Funcionalmente os campos são funções no espaço de Hilbert em que seus estados são dados por uma descrição coerente no espaço de Fock. Em teorias de gauge, diferentemente de campos escalares, não conseguimos realizar a quantização dos campos via *quantização canônica* devido á quebra de invariância por Lorentz e em seguida ao surgimento de métrica negativa que quebra a interpretação de probabilidade da mecânica quântica (ITZYKSON; ZUBER, 2012). Uma consequência histórica disso foram as diversas tentativas de construir uma quantização para teorias de Yang-Mills abelianas e não abelianas. De maneira concreta, o indiano Suraj N. Gupta e o suíço Konrad Bleuler construíram um procedimento para tratar em especial o campo de radiação via adição de um termo de vínculo á Lagrangeana, impondo assim uma condição aos estados que gera a exclusão das componentes de norma negativa e se faz possível definir um verdadeiro espaço de Hilbert com métrica definida positiva com condição de fixação de gauge.

Para teorias não abelianas tiveram dois marcos importantes na construção da quantização da teoria. O primeiro importante resultado é devido a Ludvig D. Faddeev e Victor N. Popov explorando uma invariância da medida da Lagrangeana e introduzindo fantasmas com graduações de Grassmann opostas, porém também é realizado um procedimento de fixação de gauge (KACHELRIESS, 2018). A segunda grande construção para teorias de gauge não abelianas se dá pelo formalismo desenvolvido por *Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora e Igor Tyutin*, chamado *formalismo BRST* (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992).

O formalismo BRST se baseia na introdução de fantasmas de maneira semelhante ao formalismo de Faddeev-Popov, introduz-se graduações fantasmas e anti fantasmas para os campos envolvidos na Lagrangeana e um operador derivação é construído via perturbação algébrica e que age nos campos envolvidos na teoria. A introdução dos anti-fantasmas nos permitem descrever de forma covariante os observáveis de uma teoria de gauge em termos de um complexo diferencial que contém campos físicos definidos sobre o espaço-tempo e assim evita tratar os campos como variáveis canônicas em um dado instante do tempo e por consequência nenhuma fixação de gauge é exigida em algum momento da construção (BARNICH; BRANDT; HENNEAUX, 2000). A simetria de gauge expressa uma simetria interna do campo, desde que não é uma quantidade física mensurável, pode-se escolher diferentes calibres e a física resultante deve ser e é a mesma, porém ao realizar procedimentos de quantização observamos que esta simetria é quebrada quando se realiza uma fixação de calibre, que é uma escolha de um representante para se calcular a integral de caminho, a propagação entre dois pontos no espaço-tempo e evitar o infinito que vem do cálculo das redundâncias. A simetria BRST surge quando realizamos a troca dos parâmetros de transformação de gauge por campos fantasmas de maneira a estender o espaço de fase e não o reduzir como no procedimento de Faddeev-Popov (que escolhe passar pelas orbitas de gauge uma única vez), isto nos faz trabalhar consistentemente com funções definidas e que preservam a localidade e invariância. A simetria BRST pode ser entendida como uma versão quântica da simetria de gauge que nos permite explorar a invariância da ação quântica para obter resultados consistentes e manter unitariedade e renormalizabilidade.

Mais de 90% da matéria visível no universo é formada por prótons e nêutrons, que por sua vez não são partículas elementares, mas sim um conjunto ligado de no mínimo três partículas elementares chamadas de *quarks*. Porém, mesmo se somarmos as massas de três quarks ainda restam 98% de massa. Os quarks são Hádrons, partículas que interagem via força forte e que tem seu carregador de força (interação) o bóson chamado de *gluôn*. Estima-se que a massa restante dos prótons e nêutrons advêm dos gluôn. Os quarks obedecem a estatística de Fermi-Dirac e os gluôn satisfazem a estatística de Bose-Einstein, logo devem ser quantizados obedecendo o teorema spin-estatística (ITZYKSON; ZUBER, 2012). Como foi comentado anteriormente, tem-se para interações fortes uma teoria de

calibre não-Abeliana. Os glúons são bósons não massivos e assim suas propagações devem ocorrer de maneira transversal (vetor polarização sempre ortogonal ao seu vetor momento linear) e desta forma devem obedecer identidades do tipo de Ward da eletrodinâmica quântica. Após se acoplar os campos dos quarks e glúons e em seguida quantizar a teoria via fantasmas de Faddeev-Popov, haverá duas constantes de grande importância, uma é a constante de acoplamento entre os campos, presente na derivada covariante e a segunda é o parâmetro de fixação de calibre. Observa-se que já no propagador existe uma dependência explícita no parâmetro de fixação de calibre e que por conseguinte infesta as funções de Green em todas as ordens (AGUILAR; BINOSI; PAPAVALASSILIOU, 2015). A massa que surgirá será devido á auto interações, ou ainda, se a polarização de vácuo desenvolver um polo em baixas energias (AGUILAR; BINOSI; PAPAVALASSILIOU, 2015). Em resumo, é de interesse estudar a teoria das interações fortes, a cromodinâmica quântica, em baixas energias (região infravermelha). Porém, em baixas energias a constante de acoplamento é muito grande e desta forma a teoria de perturbação é quebrada (NASTASE, 2019) dando margens a teorias não perturbativas, como por exemplo equações de Schwinger-Dyson, um método de se obter equações integrais de regiões infravermelha, porém de quantidade infinita uma acoplada á outra.

A técnica de Pinça tem como objetivo rearranjar os termos da série de Schwinger-Dyson via expansão de vértice que irá engatilhar uma identidade do tipo de Ward resultando em vértices inteiramente independentes do calibre. O método de campos de fundo (BFM) constrói funções de n-pontos invariantes por transformação de calibre e que satisfaz identidades do tipo de Ward, mas de forma a ainda depender do esquema de fixação de calibre. No calibre de Feynman, é notado que a técnica de Pinça é equivalente ao BFM. Desta forma temos um método consistente de construir vértices independentes do esquema de fixação de calibre e que satisfazem identidades do tipo de Ward. Próximo passo é fazer uso do formalismo de Batalin-Vilkovisky introduzindo anticampos como fontes das transformações BRST e que em seguida podem ser usados para construir identidades de Slavnov-Taylor relacionando vértices. Usando o BFM e o formalismo BV é possível construir identidades quânticas de fundo (BQI) relacionando os anticampos, fantasmas, campos usuais e campos de fundo. As identidades quânticas de fundo são usadas para fazer a transição nas séries de Schwinger-Dyson envolvendo vértices dos campos da QCD com os vértices no BFM no calibre de Feynman satisfazendo identidades do tipo de Ward da eletrodinâmica quântica. Desta forma se faz possível truncar a série de Schwinger-Dyson mantendo a transversalidade dos vértices. Uma transição para o calibre de Landau é possível de ser realizada pois no calibre de Landau as simulações na rede mostram que o propagador do glúon satura em um valor diferente de zero no regime profundo do infravermelho, correspondendo a um sinal inequívoco de geração de massa do glúon (AGUILAR; BINOSI; PAPAVALASSILIOU, 2015).

Primeiro, será construído as componentes da Lagrangeana de teorias de Yang-

Mills de forma geral, partindo da construção da redundância dos graus de liberdade de um campo escalar complexo. Apresentará definições de álgebra graduada, paridade, como se faz possíveis estender o espaço de fase de maneira a acomodar vínculos e em seguida como a cohomologia do operador BRST é construída. Será identificado os campos, fantasmas e anti fantasmas de acordo com as devidas graduações e em seguida será assinalado o espaço físico onde os estados dos campos observáveis são identificados devido á cohomologia do operador BRST estabelecido. É introduzido a cromodinâmica quântica discutindo suas cargas conservadas, calcula-se os propagadores e regras de Feynman para diagramas. Voltando um passo atrás e tratando teorias de calibre abelianas define-se a identidade de Ward. A técnica da pinça é introduzida no contexto da cromodinâmica quântica, discute-se como se faz possível eliminar a dependência do esquema de fixação de calibre nos elementos de matriz-S de interação quark-quark, isto é, das funções de Green off-shell. É mostrado como construir um vértice quark-gluon que satisfaz uma identidade do tipo de Ward da eletrodinâmica quântica. A equivalência entre o BFM e PT é discutido. Após a introdução do formalismo de anticampos, identidades de Slavnov-Taylor envolvendo campos, anticampos, fantasmas e campos de fundo são construídas. Por fim, define-se a série de Schwinger-Dyson para o propagador do gluôn no contexto da técnica da Pinça onde usa-se as identidades quânticas de fundo para chegar a uma nova equação de Schwinger-Dyson transversal, independente do esquema de quantização e ainda truncável em diferentes ordens.

# 1 A função de Lagrange

Neste capítulo, tem-se como objetivo construir todas as componentes da *Lagrangiana* de *Yang-Mills* não-abeliana.

## 1.1 Invariância por Gauge

Um *campo escalar complexo* mais simples tem sua Lagrangeana na forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.1)$$

Esta Lagrangeana é um escalar de Lorentz desde que

$$\phi'(x') = \begin{cases} \phi(x'), & x' = \Lambda x, \quad \text{ou} \\ \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \end{cases} \quad (1.2)$$

com  $\Lambda$  denotando uma transformação de Lorentz.

Para  $\phi(x)$  e  $\phi^*(x)$  com valores complexos em  $\mathbb{R}^4$ , definimos um espaço total  $P$  de todos os estados do tal campo. Dado dois pontos distintos no espaço-tempo, temos diferentes estados associados em  $P$ , denotados por  $G_x$  e  $G_y$  para dado dois estados  $x, y$ . Estamos definindo a fibra  $P$  sobre o espaço-tempo base  $M$ .

Sabemos que nossa *Lagrangiana* deve ser invariante sobre transformação de fase dos campos

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\lambda} \phi(x), \\ \phi^*(x) &\rightarrow e^{-i\lambda} \phi^*(x), \\ x^{\mu'} &= x^\mu \end{aligned} \quad (1.3)$$

com  $\lambda$  sendo um número real constante para todo  $x$  e que representa uma rotação de fase através de um ângulo  $\lambda$ . Podemos ainda definir  $\lambda(x)$  uma transformação que varia arbitrariamente de ponto a ponto, neste caso chamamos de transformação local e quando  $\lambda$  é constante, chamamos de transformação global. Estamos buscando então uma independência de transformação de fase para cada ponto do espaço. Chamamos isto de invariância de calibre (gauge).

Mas é verificado que nossa Lagrangeana não é invariante pela dada transformação local

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= (\partial_\mu \phi^{*'}) (\partial^\mu \phi') - m^2 \phi^{*'} \phi' \neq \mathcal{L} \\ \mathcal{L}' - \mathcal{L} &\sim \alpha^s, \quad s \leq 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Sendo assim, surge uma complicação para quando tivermos termos de derivada na construção, já que por exemplo campos  $\phi(x)$  e  $\phi(x + \epsilon)$  estão em pontos diferentes do espaço e se transformam de forma completamente diferente. Devemos então construir um fator que terá o papel de compensar a diferença de transformação de fase em dois dados pontos,

Esse fator é a derivada covariante que inclui o termo de derivada parcial mais um termo de conexão

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu(x). \quad (1.5)$$

Seja uma transformação infinitesimal, temos então

$$g(x) = e^{\lambda(x)} = 1 + \lambda(x) = 1 + \lambda^a(x)t^a. \quad (1.6)$$

Sabemos que  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a$  se transforma em primeira ordem segundo

$$A_\mu^g(x) = g(x)^{-1}A_\mu(x)g(x) + g(x)^{-1}\partial_\mu g(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x). \quad (1.7)$$

E agora podemos verificar como a derivada covariante se transforma

$$\begin{aligned} D_\mu \phi(x) &= (\partial_\mu - A_\mu(x))\phi(x) \rightarrow [\partial_\mu - A_\mu(x) - \partial_\mu(\lambda(x)) - [A_\mu(x), \lambda(x)]](1 + \lambda(x))\phi(x) \\ &= (1 + \lambda)(\partial_\mu - A_\mu(x))\phi(x) = e^{\lambda(x)}D_\mu \phi(x). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Observemos que  $D_\mu \phi(x)$  se transforma assim como  $\phi(x)$ . Sem essa propriedade, não poderíamos escrever uma Lagrangeana envolvendo termos de derivada. Assim, qualquer combinação de  $\phi$  e suas derivadas covariantes que são invariantes globalmente por transformação de fase, serão também invariantes por transformação local. Logo, tanto as derivadas do campo, a conexão quanto suas transformações descrevem então o mesmo sistema físico.

Pode-se concluir então que não apenas um conjunto de campo mas toda uma classe de configurações de gauge equivalentes correspondem ao mesmo sistema físico real. Isto implica num espaço interno de estado sem base fixa com respeito a um campo de matéria que se dá em termos de componentes  $\phi$ . Tais bases podem ser introduzidas localmente em cada ponto do espaço-tempo, no entanto, não há razão física para fixar sua posição. A alteração local da base é interpretada como uma mudança de gauge do campo. Desse modo, a Lagrangiana ser invariante representa uma **redundância na representação dos nossos campos** e não simplesmente uma simetria de rotação.

Seja uma curva  $\gamma(s)$  no espaço-tempo definido por

$$\gamma(s) = x_\mu(s). \quad (1.9)$$

O campo vetorial  $\dot{\gamma}(s)$  de vetores tangentes a  $\gamma(s)$  tem componentes  $X_\mu = dX_\mu/ds$ . Podemos falar de transporte paralelo de  $\phi(x)$  ao longo de  $\gamma(s)$  desde que

$$\nabla_\mu \phi(s)|_{x=x(s)} X_\mu = 0, \quad (1.10)$$

sendo a derivada covariante na direção tangencial onde as coordenadas de  $\gamma$  satisfazem essa igualdade. Definindo como antes um transporte paralelo através de um paralelogramo fechado de vértices

$$(x, x + \Delta_1 x, x + \Delta_1 x + \Delta_2 x, x + \Delta_2 x). \quad (1.11)$$

A não comutatividade de  $\phi(x)$  pode ser calculada via

$$[D_\mu, D_\nu]\phi(x) = -[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A^b A^c]t^a \phi(x), \quad (1.12)$$

onde podemos definir

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a t^a, \quad (1.13)$$

a curvatura no espaço de estado. Onde podemos abrir o ultimo termo como segue

$$i[A_\mu, A_\nu] = i[A_\mu^b(x)t^b, A_\nu^c(x)t^c] = iA_\mu^b(x)A_\nu^c(x)[t^b, t^c] = (f_{ca}^b A_\mu^b(x)A_\nu^c(x))t^a. \quad (1.14)$$

E abrimos as componentes do tensor  $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + f_{bc}^a A_\mu^b(x)A_\nu^c(x). \quad (1.15)$$

Seja  $G = SU(2)$ , isto é, o grupo das matrizes  $2 \times 2$  unitárias. Os geradores são dados pelas *matrizes de Pauli*:

$$t^a = \frac{1}{2i}\sigma^a, \quad (1.16)$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

A conexão será dada por

$$\mathcal{A} = A_\mu^a(x) \left( \frac{\sigma^a}{2i} \right) dx^\mu. \quad (1.18)$$

Usando a propriedade dos comutadores, temos

$$[\sigma^a, \sigma^b] = f_c^{ab} \frac{\sigma^c}{2i}. \quad (1.19)$$

Dessa forma, temos  $[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu}^a \sigma^a / 2i$ . Escrevemos as componentes do tensor curvatura na forma

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.20)$$

Sabendo a transformação de  $A_\mu(x)$  segue que o campo de força se transforma como

$$F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2i} \rightarrow e^{i\lambda} F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2i} e^{-i\lambda} = (1 + \lambda^a \frac{\sigma^a}{2i}) F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2i} (1 - \lambda^a \frac{\sigma^a}{2i}) = F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2i} + [\lambda^a \frac{\sigma^a}{2i}, F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2i}]. \quad (1.21)$$

Que nos mostra que  $F_{\mu\nu}^a$  não é invariante por gauge desde que tem dependência em três direções  $\sigma^a$ . Mas ainda podemos tentar construir uma função de Lagrange invariante por gauge, na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr \left\{ F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2i} F^{\mu\nu} \frac{\sigma^a}{2i} \right\} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

E dessa forma, podemos mostrar que obtemos com exito a construção da Lagrangiana invariante por transformação de fase

$$(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) \rightarrow (e^{i\lambda} F_{\mu\nu}^a e^{-i\lambda}) \left( e^{i\lambda} F_a^{\mu\nu} e^{-i\lambda} \right) = e^{i\lambda} (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) e^{-i\lambda}. \quad (1.23)$$

E por fim, temos o nosso primeiro termo de Lagrangeana de Yang-Mills, que é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

## 1.2 Procedimento Gupta-Bleuler e o segundo termo

Dado a nossa Lagrangeana construída na seção anterior, podemos pegar por simplicidade o caso abeliano em que  $f_{bc}^a$  é zero e temos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \quad (1.25)$$

Podemos pensar em quantizar este campo via *quantização canônica* em que a única preocupação a ser tomada é de não tirar a *invariância de Lorentz*, isto é, não termos uma direção especificada na nossa quantização e com isso continuarmos tratando índices  $\mu$  indo de 0 a 3. No formalismo de quantização canônica, promovemos um campo  $\phi(x)$  qualquer á classe de operador tal que obedece ás seguintes regras

$$\begin{aligned} [\phi_\alpha(t, \vec{x}), \pi_\beta(t, \vec{y})] &= i\delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi_\alpha(t, \vec{x}), \phi_\beta(t, \vec{y})] &= 0 \\ [\pi_\alpha(t, \vec{x}), \pi_\beta(t, \vec{y})] &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Daqui já podemos ver a primeira complicação em realizar este procedimento, a componente  $\pi^{00}$  é zero

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = F^{\mu\nu}, \\ \pi^{0\nu} &= F^{0\nu} = F^{0i} + F^{00} = F^{0i}, \\ \pi^{00} &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

E uma consequência disto é que não podemos quantizar de forma canônica desde que estamos preocupados com invariância de Lorentz.

No procedimento de **Gupta-Bleuler** (ITZYKSON; ZUBER, 2012), para contornar este problema introduz-se uma constante arbitrária  $\alpha$  que entra na Lagrangeana na forma

$$\mathcal{L}_{vinculo} = -\frac{\alpha}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (1.28)$$

e para qualquer escolha de valor de  $\alpha$  dizemos que estamos fixando um calibre, ou ainda, fixando uma escolha de representação, usando de fato que temos uma redundância em tratar a dinâmica dos nossos campos e nos retorna a equação de campo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0 \quad (1.29)$$

$$\square A_\mu - (1 - \alpha) \partial_\mu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

E o momento conjugado agora se lê

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} - \alpha (\partial_\mu A^\mu) \eta^{\mu\nu}, \\ \pi^{\mu 0} &= F^{\mu 0} - \alpha (\partial_\mu A_\mu) \eta^{\mu 0}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

e

$$\pi^{00} = -\alpha (\partial_\mu A^\mu) \neq 0 \quad (1.31)$$

não é mais zero.

Olhando a equação dinâmica do campo

$$\begin{aligned} \square A_\mu - (1 - \alpha) \partial_\mu (\partial_\mu A^\mu) &= 0, \\ \alpha \square (\partial_\mu A) &= 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

nos mostra que a  $(\partial_\mu A^\mu)$  é um campo escalar livre.

Uma consequência disso é que no procedimento de Gupta-Bleuler se faz possível tornar  $A_\mu(t, \vec{x})$  um operador e conseqüentemente seu momento canônico, mas um resultado disso é que não estamos tratando mais da teoria de Maxwell já que temos outra Lagrangeana e outra equação dinâmica. Um problema de métrica indefinida surge e para lidar, usa-se a condição  $\partial^\mu A_\mu |\psi\rangle = 0$  já no espaço de Hilbert e assim divide o espaço de Fock dos estados de maneira que a física observável é dada apenas por bons estados de métrica semi-definida positiva. Mais adiante neste trabalho será discutida outras propriedades e características deste procedimento de Gupta-Bleuler.

### 1.3 Fantasmas de Faddeev-Popov

Para o caso não-abeliano ( $f_{bc}^a \neq 0$ ) podemos pensar em invocar o procedimento de Gupta-Bleuler somando um termo proporcional a  $\alpha (\partial_\mu A^\mu)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c) (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c) + \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu^a) (\partial^\mu A_\mu^a), \quad (1.33)$$

calculando a equação dinâmica teremos

$$\partial^2 A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\nu^b (\partial_\nu A_\mu^c - \partial_\mu A_\nu^c) - g^2 f_{bc}^a f_{de}^c A_\mu^d A_\nu^b A_\nu^e = \partial_\mu (\partial^\mu A_\mu^a), \quad (1.34)$$

e não temos mais  $(\partial_\mu A^\mu)$  como um campo livre, exceto quando  $g = 0$  e não podemos seguir a diante com intuito de obter os subespaços do espaço de Fock que é fisicamente invariante por ação dos observáveis.

A integral de caminho para uma teoria de Yang-Mills é dada por

$$Z \propto \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp(iS_{YM}(A)), \quad (1.35)$$

onde a ação é escrita como se segue

$$S_{YM}(A) = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \right] \quad (1.36)$$

A integral de caminho da maneira como é construída é tal que leva em conta todos os possíveis caminhos que o tal campo pode percorrer entre dois dados pontos do espaço-tempo nos dando a amplitude de persistência de vácuo. Podemos notar um problema, já que temos um campo com infinitas redundâncias que são de fato levadas em conta no calculo da integral de caminho. Podemos adicionar vínculos nas direções de gauge de forma a introduzir uma identidade na integral funcional

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right), \quad (1.37)$$

onde  $A^\alpha$  representa o campo  $A$  transformado. Usando

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x), \quad (1.38)$$

e a transformação de  $A^a(x)$ , teremos

$$\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha} = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu. \quad (1.39)$$

Sabendo que um determinante funcional pode ser escrito como uma integral de caminho sobre variáveis complexas de Grassmann (PESKIN; SCHROEDER, 1995),

$$\int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp(-bMc) = \det(M), \quad (1.40)$$

introduzimos os *campos complexos de Grassmann*  $c^a(x)$  e  $b^a(x)$  tal que anti-comutam de forma que ficamos com

$$\det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu\right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}b \exp(i \int d^4x b(-\partial^\mu D_\mu)c). \quad (1.41)$$

Para obtermos a identidade correta, devemos ter  $c$  e  $b$  anticomutando e sendo escalares de Lorentz. Estes campos introduzidos são chamados de *fantasmas de Faddeev-Popov*.

O ultimo termo da nossa lagrangeana de Yang-Mills se lê

$$\mathcal{L} = -b^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b = \partial^\mu b^a D_\mu^{ab} c^b. \quad (1.42)$$

## 2 Álgebra cohomológica

### 2.1 Álgebra graduada-comutativa

Começemos definindo uma álgebra. Seja  $A$  um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ , que usualmente escolhemos trabalhar com  $K = \mathbb{C}$ .

**Definição 1** *Uma álgebra associativa sobre o corpo dos complexos é um conjunto  $A$  com as propriedades*

- $A$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ ;
- para todo par  $(x, y)$  de elementos de  $A$ , há um produto  $xy \in A$  que satisfaz as condições de bilinearidade e que é associativa.

Isto é, para  $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)y &= x_1y + x_2y; & y(y_1 + y_2) &= xy_1 + xy_2 \\ \alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y) & & (2.1) \\ (xy)z &= x(yz). \end{aligned}$$

**Definição 2** *Uma álgebra  $A$  é dita  $G$ -graduada se  $A$  pode ser escrita como a soma direta de subespaços  $A = \bigoplus A_g$  tais que para todo  $g, h \in G$  temos  $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ .*

Qualquer elemento  $a \in A$  pode ser escrito como  $a = \sum_{g \in G} a_g$ , com  $a_g \in A_g$ . Denotamos o *deg*, o grau de  $a$  pelo índice do subconjunto que a mesma pertence,  $\text{deg}(a) = g \iff a \in A_g$ . O índice  $g$  é um inteiro ( $\mathbb{Z}$ -gradação) positivo ou negativo, ou inteiro ( $\mathbb{N}$ -gradação) positivo e não negativo.

**Definição 3** *A álgebra de Grassman  $E$  possui uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação na forma  $E = E_0 \oplus E_1$  onde  $E_0$  é o subespaço de monômios de comprimento par e  $E_1$  de monômios de comprimento ímpar.*

Ou mais geral ainda, podemos definir

**Definição 4** *Se  $A = A_0 \oplus A_1$ , então é dita uma  $\mathbb{Z}_2$ -graduada-comutativa ou super-comutativa ou super-álgebra. Os subespaços  $A_0$  e  $A_1$  são chamados as componentes par e ímpar de  $A$ , respectivamente.*

Para uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada temos

$$xy = (-)^{\epsilon_x \epsilon_y} yx, \quad (2.2)$$

com  $\epsilon_u$  sendo a *paridade de Grassman* tal que  $\epsilon_u = 0$  quando  $u \in A_0$  e  $\epsilon_u = 1$  quando  $u \in A_1$ , o que implica em

$$A_0 A_0 \subset A_0, \quad A_0 A_1 \subset A_1, \quad A_1 A_1 \subset A_0. \quad (2.3)$$

Dado um espaço vetorial  $V$   $\mathbb{Z}_2$ -graduado

$$V = V_0 \oplus V_1, \quad (2.4)$$

definimos  $End(V)$  como o conjunto de todos os homomorfismos de  $V$  em  $V$ ,  $V \rightarrow V$ , isto é, transformações lineares que levam de um espaço a si mesmo e que forma uma álgebra associativa com a unidade. Uma transformação linear  $M$  é dita ter uma paridade definida  $\epsilon_M = (0, 1)$  se para qualquer elemento  $x \in V$

$$\epsilon(Mx) = \epsilon_M + \epsilon_x. \quad (2.5)$$

A multiplicação ordinária de transformações lineares preserva a graduação

$$\epsilon(M_1 M_2) = \epsilon_{M_1} + \epsilon_{M_2}. \quad (2.6)$$

Dado duas transformações lineares  $M_1$  e  $M_2$ , seu comutador graduado  $[M_1, M_2]$  é definido por

$$[M_1, M_2] = M_1 M_2 - (-)^{\epsilon_{M_1} \epsilon_{M_2}} M_2 M_1. \quad (2.7)$$

O comutador graduado é antissimétrico exceto quando  $M_1$  e  $M_2$  são ambos par ou ímpar, neste caso será simétrico. Um espaço vetorial  $End(V)$  com estrutura de comutador é uma álgebra de Lie (graduada).

É importante notar que  $deg(M)$  pode ser negativo mesmo se a graduação de  $A$  é  $\geq 0$ , porque  $M$  pode fazer  $A_n \rightarrow A_m$  com  $n > m$ .

Definimos agora uma derivação (graduada). Uma *derivação graduada* é uma transformação linear que obedece a regra de Leibniz

$$D(xy) = xDy + (-)^{\epsilon_D \epsilon_y} (Dx)y. \quad (2.8)$$

Definimos uma subálgebra de Lie graduada de  $End(A)$  denotada por  $Der(A)$  como o conjunto de todas as derivações de  $A$ .

Um ideal  $B$  é um subespaço vetorial de  $A$  tal que  $AB \subset B$ , isto é,  $xy \in B$  sempre que  $y$  (ou  $x$ )  $\in B$ . Assim  $B$  é uma subálgebra.

Seja agora uma álgebra  $A$  e  $B$  um ideal de  $A$ . Consideremos um espaço vetorial quociente  $A/B = \{aB | a \in A\}$ , sendo  $aB = \{ax | x \in B\}$ . Este produto é super-comutativo e associativo se o produto em  $A$  for também. Todas as propriedades algébricas de  $A$  passam para  $A/B$ .

**Definição 5** Um diferencial  $D$  é uma derivação ímpar que é nilpotente de ordem dois,

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{2}[D, D] = 0 \\ \epsilon(D) &= 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Assumimos que há uma  $\mathbb{N}$ -gradação tal que

$$\deg(D) = \pm 1. \tag{2.10}$$

Se  $\deg(D) = -1$ , o diferencial  $D$  decresce a graduação e se comporta como um operador contorno. Se  $\deg(D) = +1$ , o diferencial  $D$  aumenta a graduação e se comporta como um operador co-contorno. Se considerarmos sobre uma álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada, o sinal de  $D$  se torna uma mera convenção.

A álgebra graduada com um diferencial  $D$  é chamada uma álgebra diferencial graduada.

## 2.2 Álgebra Cohomologica

Definimos um *complexo diferencial* como um espaço vetorial  $V = \bigoplus_n V_n$  que é  $\mathbb{N}(\mathbb{Z})$ -graduada com um operador nilpotente linear e de grau  $\pm 1$ .

Definimos o  $\ker(D)$  como o conjunto de elementos de  $A$  tal que são aniquilados por  $D$

$$x \in \ker(D) \iff Dx = 0. \tag{2.11}$$

O subespaço  $\ker(D)$  é uma subálgebra de  $A$  porque  $D$  é uma derivação. Chamamos para todo  $x \in \ker(D)$  elementos  $D$ -fechados.

O subespaço  $\text{Im}(D)$  é por definição a imagem de  $A$  sobre  $D$ , isto é

$$x \in \text{Im}(D) \iff \exists y \in A : Dy = x. \tag{2.12}$$

Os elementos de  $\text{Im}(D)$  são chamados  $D$ -exatos.

Por  $D$  ser nilpotente de ordem dois, todo elemento do subespaço  $\ker(D)$  pertence também ao subespaço  $\text{Im}(D)$  e assim  $\text{Im}(D)$  é um ideal de  $\ker(D)$ .

Desde que temos  $D(A_n) \subset A_{n\pm 1}$ , um complexo diferencial é dado pelas seguintes cadeias

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{D} A_n \xrightarrow{D} A_{n+1} \xrightarrow{D} A_{n+2} \xrightarrow{D} \dots & \quad \deg(D) = +1, \\ \dots \xleftarrow{D} A_{n-2} \xleftarrow{D} A_{n-1} \xleftarrow{D} A_n \xleftarrow{D} \dots & \quad \deg(D) = -1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Podemos definir uma álgebra quociente

$$\frac{Ker(D)}{Im(D)}, \quad (2.14)$$

que denotamos por  $H^*(D)$  e chamamos a álgebra cohomologica de  $D$  quando  $deg(D) = +1$ . Denotamos  $H_*(D)$  a álgebra homologica de  $D$  quando  $deg(D) = -1$ . Ambas álgebras homologicas e cohomologicas herdam a graduação de  $A$ , isto é

$$\begin{aligned} H^* &= \oplus_n H^n(D), \\ H_* &= \oplus_n H_n(D). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Seja um operador linear  $\Lambda$  tal que  $\Lambda x = \lambda x$  com  $A = \oplus \bar{A}_\lambda$  para  $x \in \bar{A}_\lambda$ . Assumimos que o subespaço  $\bar{A}_0$  associado com o autovalor zero está contido no subespaço  $A_0$  de grau zero,  $\bar{A}_0 \subset A_0$ . Chamamos uma *contração homotópica* se existe um operador linear  $\sigma$  que o anti-comutador com  $D$ , o operador derivação, resulta em  $\Lambda$

$$\sigma D + D\sigma = \Lambda. \quad (2.16)$$

**Teorema 1** *Se existe uma contração homotópica, o diferencial  $D$  obedece*

$$H^k(D) = 0, \quad k \neq 0. \quad (H_k(D) = 0, \quad k \neq 0.) \quad (2.17)$$

e dizemos que o diferencial  $D$  é acíclico.

Se existir uma derivação  $\Delta$  que comuta com  $D$ , dizemos que  $\Delta$  é  $D$ -fechada

$$[\Delta, D] = 0 \iff \Delta \text{ é } D\text{-fechada.} \quad (2.18)$$

Todas as derivações  $D$ -fechadas formam uma subálgebra de Lie do conjunto das derivações em  $A$ ,  $der(A)$ .

Uma derivação  $\Delta$  é  $D$ -exata se pode ser escrita como o comutador de outra derivação com  $D$ ,

$$\Delta = [\bar{\Delta}, D] \iff \Delta \text{ é } D\text{-exata.} \quad (2.19)$$

Podemos notar que uma derivação  $D$ -exata é  $D$ -fechada devido á nilpotência da derivação  $D$ . As derivações  $D$ -exatas formam um ideal sobre a álgebra de Lie das derivações  $D$ -fechadas.

Seja  $\delta$  um diferencial e  $d$  uma derivação ímpar. Se  $\delta$  comuta com  $d$

$$d\delta + \delta d = 0, \quad (2.20)$$

uma derivação é induzida em  $H_*(\delta)$  e é dada por  $d$ . Se  $d^2$  é  $\delta$ -exato segundo (2.19) para alguma derivação  $\Lambda$ , o diferencial induzido  $d$  respeita o grau de nilpotência dois,

$d^2 = 0$ , em  $H_*(\delta)$ . Se estas duas propriedades se aplicam a  $\delta$  e  $d$ , podemos construir uma cohomologia de  $d$  em  $H_*(\delta)$  que será dada por  $H^*(d|H_*(\delta))$  ou simplesmente  $H^k(d)$ . Uma classe de cohomologia de  $d$  pode assim ser determinada e será tal que para um elemento  $x$   $\delta$ -fechado seu modulo  $\delta y$  é  $d$ -fechado

$$\begin{aligned}\delta x &= 0, \\ dx &= \delta y.\end{aligned}\tag{2.21}$$

## 2.3 Resolução

Seja  $A$  uma álgebra. Uma *resolução (homologica)* de  $A$  é uma álgebra diferencial  $\bar{A}$   $\mathbb{N}$ -graduada com diferencial  $\delta$  de grau menos um tal que

$$\begin{aligned}H_k(\delta) &= 0, \quad k \neq 0, \\ H_0(\delta) &= A.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Assim, uma resolução representa  $A$  como a álgebra quociente  $H_*(\delta) = H_0(\delta)$  da álgebra diferencial  $\mathbb{N}$ -graduada  $(\bar{A}, \delta)$ . A graduação de  $A$  é chamada o grau da resolução e os elementos de  $A$  são identificados ao se identificar elementos de  $\bar{A}$ .

Como  $\delta$  define uma resolução homologica de  $H_0(\delta)$ , temos explicitamente

$$\begin{aligned}\delta^2 &= 0, \\ r(\delta) &= -1 \iff r(\delta x) = r(x) - 1, \quad r(x) \geq 1, \\ \delta x &= 0, \quad r(x) = 0, \\ H_k(\delta) &= 0, \quad k \neq 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Onde  $k$  é o grau da resolução.

Para uma derivação  $d$  modulo  $\delta$  da resolução de grau zero, isto é,  $d$  age em elementos de graduação zero e vale

$$\delta d + d\delta = 0, \quad d^2 = -[\delta, s^{(1)}], \quad r(d) = 0,\tag{2.24}$$

onde  $s^{(1)}$  é uma derivação da resolução de grau um e a graduação de  $d$  é dada por  $deg$ . Assumimos que é deixada inalterada pela ação de  $\delta$  e por definição tomamos  $d$  como o operador co-contorno. Temos então

$$deg(\delta) = 0, \quad deg(d) = 1.\tag{2.25}$$

Definimos agora o *número fantasma total*

$$gh(x) = deg(x) - r(x).\tag{2.26}$$

Logo, devemos ter

$$gh(\delta) = gh(d) = 1.\tag{2.27}$$

**Teorema 2** • Se  $H_k(\delta) = 0$  para todo  $k \neq 0$ , existe um diferencial  $s$  de número fantasma total um que combina  $d$  e  $\delta$ ,

$$\begin{aligned} s &= \delta + d + s^{(1)} + s^{(2)} + \dots, \\ r(s^{(k)}) &= k, \quad gh(s^{(k)}) = 1, \\ s^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

- Qualquer diferencial  $s$  que combine  $d$  com  $\delta$  como (2.21) satisfaz que

$$H^k(s) = H^k(d), \tag{2.29}$$

onde a cohomologia de  $d$  é calculada de  $H_0(\delta)$ , isto é, é definida pela equação

$$dx = \delta y, \quad x \sim x + dz + \delta z', \tag{2.30}$$

com

$$r(x) = 0 = r(z), \quad r(y) = 1 = r(z'). \tag{2.31}$$

Podemos concluir que a classe cohomologica de um elemento  $s$ -fechado é completamente determinado por suas componentes na resolução de grau zero. Na cohomologia de  $s$  os termos relevantes são apenas  $d$  e  $\delta$ , os termos  $s^{(1)}$  e  $s^{(2)}$  em diante apenas são importantes para garantir a nilpotência de  $s$ .

## 2.4 Construindo o formalismo

Nesta etapa queremos assinalar quantidades físicas para as quantidades matemáticas definidas anteriormente de forma consistente e que nos leve a resultados que arremetam à interpretações físicas.

Denotamos por  $P$  o *espaço de fase* e  $C^\infty(P)$  o espaço de funções suaves do espaço de fase que deve ser munido de uma estrutura algébrica de produto ponto a ponto, e também de uma operação, o *Dirac Bracket* que o torne uma álgebra de Lie.

Denotamos por  $\Sigma$  uma superfície de vínculo e  $C^\infty(\Sigma)$  o espaço de funções suaves em  $\Sigma$ . Funções que somem em  $\Sigma$  para a multiplicação usual formam um ideal em  $C^\infty(P)$  que denotamos por  $\mathcal{N}$ .

Uma condição de invariância por transformações de gauge nos elementos de  $C^\infty(\Sigma)$  se traduz a uma exigência que tais sejam aniquiladas por  $d$  em  $\Sigma$ .

Definimos  $\delta$  como a *resolução de Koszul-Tate* de  $C^\infty(\Sigma)$  que age em  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_\alpha] \otimes C^\infty(P)$  onde  $\mathcal{P}_\alpha$  são polinômios.

Desde que  $\delta$  age em  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_\alpha] \otimes C^\infty(P)$ , temos que  $\mathcal{P}_\alpha$  aniquilam funções que somem em  $\Sigma$ . Um diferencial  $d$  é denotado em  $\Sigma$  mas pode ser levado a agir em  $P$ . Queremos construir um formalismo tal que

$$H^0(d) = \{\text{funções em } \Sigma \text{ que são constantes ao longo das orbitas de gauge}\}. \quad (2.32)$$

Desde que  $d^2$  é zero a termos  $\delta$  - *exatos*,  $d$  é um diferencial modulo  $\delta$ .

A álgebra  $C^\infty(\Sigma)$  de funções em  $\Sigma$  pode ser identificada como a álgebra quociente  $C^\infty(P)/\mathcal{N}$  de funções no espaço de fase  $P$  que diferem por elementos do ideal  $\mathcal{N}$  de funções que desaparecem em  $\Sigma$ . Para objetivos de construção, deve-se definir  $\delta$  tal que

$$(Ker(\delta))_0 = C^\infty(P), \quad (2.33)$$

e

$$(Im(\delta))_0 = \mathcal{N}. \quad (2.34)$$

Para termos (2.33), definimos polinômios  $\mathcal{Z}_\alpha$  como variáveis do espaço de fase e o fazemos orbitar o kernel de  $\delta$ ,

$$\delta(\mathcal{Z}^A) = 0. \quad (2.35)$$

Com  $\delta$  agindo como uma derivação temos que para toda função do espaço de fase  $F(\mathcal{Z})^A$  temos

$$antigh(\mathcal{Z}^A) = 0. \quad (2.36)$$

Definimos funções  $F$  como funções no espaço de fase tal que podemos escrever como

$$F \approx 0, \quad (2.37)$$

para indicar que  $F$  é numericamente restrita a ser zero mas não necessariamente desaparece no espaço de fase.

Desde que  $\mathcal{N}$  é um ideal de funções que desaparecem em  $\Sigma$ , um elemento arbitrário de  $\mathcal{N}$  pode ser escrito como uma combinação de vínculos com coeficientes que são funções no espaço de fase

$$F = F^a G_a, \quad (2.38)$$

se definirmos tantos geradores  $\mathcal{P}_\alpha$  quanto houver de vínculos  $G_a$  e fazer

$$\delta(\mathcal{P}_a) = -G_a, \quad (2.39)$$

temos

$$F = \delta(-F^a \mathcal{P}_a) \in (Im(\delta))_0, \quad (2.40)$$

teremos por fim

$$\begin{aligned} antigh(\mathcal{P}_a) &= 1, \\ \epsilon(\mathcal{P}_a) &= \epsilon_a + 1, \end{aligned} \quad (2.41)$$

com  $\epsilon_a = \epsilon(G_a)$ .

Temos que  $\delta$  age em polinômios arbitrários  $\mathcal{P}$  com coeficientes que são funções no espaço de fase de forma  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes C^\infty(P)$  desde que  $\delta$  seja uma derivação ímpar.

Definimos agora  $\mathcal{P}$  como o *momento fantasma* e a motivação para tal reside no fato que irá comutar com os fantasmas.

**Teorema 3** *A álgebra diferencial  $[\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes C^\infty(P), \delta]$  fornece uma resolução da álgebra de funções nas superfícies de vínculos, isto é*

$$\begin{aligned} H_0(\delta) &= C^\infty(\Sigma), \\ H_k(\delta) &= 0, \quad k \neq 0. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Através de cada ponto na superfície de vínculo, há uma órbita de gauge definindo direções verticais e horizontais. Campos vetoriais nas superfícies de vínculos são ditas serem longitudinais se em todo ponto são tangente às órbitas de gauge. Assim, campos vetoriais associados com os vínculos e que definem transformações de gauge infinitesimais são campos vetoriais longitudinais. Teremos formas-1  $\eta^a$  duais aos campos vetoriais e que definem transformações de gauge infinitesimais, com coeficientes que são funções suaves em  $\Sigma$ . Desta forma, a álgebra exterior longitudinal é isomórfica a  $C^\infty(\Sigma) \otimes \mathbb{C}[\eta^a]$ . Denotamos  $\eta^a$  por *fantasmas* em que seu respectivo grau é denotado por *número fantasma puro* e é denotado por *puregh*. Teremos

$$\text{pure gh } \eta^a = 1, \quad \text{pure gh } \mathcal{Z}^a = 0. \tag{2.43}$$

Funções de vínculos  $G_a$  determinam não apenas a superfície de vínculo  $\Sigma$  através de  $G_a = 0$ , mas também órbitas de gauge (transformações de gauge) através de  $\delta F = [F, G_a]$ .

Declaremos que  $\eta^a$  são conjugados de  $\mathcal{P}_a$ , isto é, estendemos a estrutura de *bracket* do espaço de fase original  $P$  a  $\eta^a$  e  $\mathcal{P}_a$  como

$$[\mathcal{P}_a, \eta^b] = -(-)^{(\epsilon_a+1)(\epsilon_b+1)}[\eta^b, \mathcal{P}_a] = -\delta_a^b. \tag{2.44}$$

Definimos agora o importante *espaço de fase estendido*  $P_{ext}$  que é o espaço de fase usual  $P$  mais as variáveis fantasmas  $\eta^a$  e seus momentos  $\mathcal{P}_a$ . A álgebra de  $P_{ext}$  é dada por  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes C^\infty(P) \otimes \mathbb{C}[\eta^a]$ . Fantasmas são reais

$$(\eta^a)^* = \eta^a, \tag{2.45}$$

e com paridade

$$\epsilon(\eta^a) = \epsilon(\mathcal{P}_a) = \epsilon_a + 1, \quad (\text{mod } 2). \tag{2.46}$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned} \text{antigh}(\eta^a) &= 0, \\ \text{puregh}(\mathcal{P}_a) &= 0. \end{aligned} \tag{2.47}$$

E definimos um índice de número total fantasma por

$$gh(A) = puregh(A) - antigh(A), \quad (2.48)$$

para toda variável de números  $puregh$  e  $antigh$ . Temos

$$gh(\mathcal{Z}_a) = 0, \quad gh(\eta^a) = 1 = -gh(\mathcal{P}_a), \quad (2.49)$$

$$gh(AB) = gh(A) + gh(B). \quad (2.50)$$

Os fantasmas  $\eta^a$  contam positivamente enquanto os momentos fantasmas  $\mathcal{P}_a$  contam negativamente.

Números fantasmas possuem um gerador canônico  $\mathcal{G}$  que é dado por

$$\mathcal{G} = i\eta^a \mathcal{P}_a, \quad (2.51)$$

que obedece

$$[A, \mathcal{G}] = igh(A)A, \quad (2.52)$$

e é imaginário

$$\mathcal{G}^* = -\mathcal{G}, \quad (2.53)$$

mostrando que apresenta autovalor real.

Em resumo o que temos até agora é uma derivação  $\delta$  que age em  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes C^\infty(P)$  e uma derivação  $d$  que age em  $C^\infty(P) \otimes \mathbb{C}[\eta^a]$ . Estendemos  $\delta$  tal que

$$\delta\eta^a = 0, \quad (2.54)$$

e assim  $\delta$  pode agir em todo o espaço de fase estendido. Mas por

$$antigh(\delta\eta^a) = antigh(\delta) + antigh(\eta^a) \quad (2.55)$$

e (2.47), temos  $antigh(\delta\eta^a) = -1$ .

Queremos por fim construir uma relação definitiva de  $s = \delta + d + \text{mais termos}$ , tal que  $s^2 = 0$ , como garante o Teorema (2). Olhemos para a função que gera  $s$  através do *Poisson Bracket*

$$sF = [F, \Omega]. \quad (2.56)$$

As propriedades de graduação de  $s$  implicam para  $\Omega$

$$\begin{aligned} \epsilon(\Omega) &= 1, \\ gh(\Omega) &= 1. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Além disso, podemos identificar a nilpotência  $s^2 = 0$  através de (2.7),

$$[\Omega, \Omega] = 0. \quad (2.58)$$

Se  $\Omega$  reproduz  $\delta$  á menor ordem no momento fantasma, deve-se ter

$$\Omega = \eta^a G_a + \text{mais termos}, \quad (2.59)$$

onde os seguintes termos são na ordem de  $\mathcal{P}_a$  e  $\eta^a$ . Com isso, temos  $[\mathcal{P}_a, \Omega] = \delta\mathcal{P}_a + \dots$ . Usando (2.59) e a *identidade de Jacobi*, temos

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}^A, \Omega] &= [\mathcal{Z}^A, G_a] \eta^a + \dots, \\ &= d\mathcal{Z}^A + \dots \end{aligned} \quad (2.60)$$

Logo, podemos concluir que as restrições á superfície de vínculo  $\delta$  e á transformações de gauge  $d$  são geradas pelas mesmas funções de primeira classe  $G_a$ .

Enunciemos agora que o gerador de transformação deve satisfazer as seguintes exigências:

- $gh(\Omega) = 1 \quad \epsilon(\Omega) = 1, \quad \Omega^* = \Omega,$
- $\Omega = \eta^{a_0} G_{a_0} + \eta^{a_k} Z_{a_k}^{a_k-1} \mathcal{P}_{a_k-1} + \dots,$
- $[\Omega, \Omega] = 0.$

A segunda exigências faz  $\Omega$  reproduzir através do Poisson Bracket os termos lineares em  $\mathcal{P}$  em  $\delta\mathcal{P}_{a_k}$ . Juntando a terceira propriedade de nilpotência implica que  $s \equiv [ , \Omega]$ .

## 2.5 O que deve ser feito

Dado uma Lagrangena do tipo *Yang-Mills*  $\mathcal{L}[A, \Psi]$ , isto é, onde seus parâmetros são invariantes por transformações de gauge, queremos explorar uma outra simetria, no sentido que mesmo após a fixação de um gauge, ainda contenha uma simetria mas de forma residual. Como visto anteriormente devemos considerar um espaço de fase estendido de maneira que acomode os *fantasmas de Faddeev-Popov*, nos dando  $\mathcal{L}[A, \Psi, C]$  e em seguida deve-se adicionar as fontes para as variações *BRST* dos campos e dos fantasmas. Um cuidado na construção devido ás paridades de Grassmann deve ser tomado desde que nossa Lagrangena deve ter número fantasmas zero, nos dando ainda, outra simetria residual.

Deve-se construir um diferencial *BRST* até ordem  $\gamma$

$$s = \delta + \gamma, \quad (2.61)$$

onde para campos  $Z$  fantasmas ou reais, temos  $sZ = \delta Z + \gamma Z$  que obedecem as seguintes regras:  $\delta\partial_\mu = \partial_\mu\delta$ ,  $\gamma\partial_\mu = \partial_\mu\gamma$  e  $\gamma$  aumentando o *número fantasma puro* por uma unidade.

O diferencial  $s$  deve ser construído de forma a ter uma nilpotência como antes,

$$s^2 = 0, \quad (2.62)$$

o que nos retorna

$$\delta^2 = 0 = \gamma^2, \quad \delta\gamma + \gamma\delta = 0. \quad (2.63)$$

Os campos  $Z$  devem ser rotulados por serem  $BRST$ -fechados por estarem no kernel de  $s$ ,

$$sA = 0, \quad (2.64)$$

e  $BRST$ -exatos por estarem na imagem de  $s$ . Por consequência da nilpotência de  $s$ , campos  $BRST$ -exatos são automaticamente fechados. A cohomologia  $BRST$  é construída como o espaço quociente de elementos fechados e exatos como mostrado anteriormente,

$$H(s) = \frac{Ker(s)}{Im(s)}. \quad (2.65)$$

É esperado que a teoria construída restaure a independência por transformação de gauge por restaurar a simetria na ação efetiva ao introduzir os termos da transformação  $BRST$ , o que é a motivação primária em quantizar usando o presente formalismo.



## 3 Formalismo BRST

### 3.1 Operador derivação $s$

Unindo todas as Lagrangeanas encontradas nas seções do [Capítulo 1](#), temos a nossa Lagrangeana padrão de uma teoria de gauge não-abeliana ou de Yang-Mills,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu) + \partial_\mu b^a D_\mu^{ab} c^b. \quad (3.1)$$

Claramente, observamos que após a construção do procedimento de Faddeev-Popov, fixamos um gauge, quebrando assim a simetria de gauge local (a simetria global ainda se mantém). Felizmente uma outra simetria é encontrada de forma que nossa Lagrangeana de Yang-Mills é invariante pela mesma.

Primeiramente devemos fazer as identificações a partir das definições feitas no [Capítulo 2](#). Os campos normais  $z^A$  são aqui  $A_\mu$  e se tivermos campos de matéria acoplados (exemplo campo fermiônico  $\Psi$  de Dirac) também serão identificados por  $z^A$ . Os campos fantasmas  $\eta$  como deve ser, são identificados pelos fantasmas de Faddeev-Popov  $c$ . Já os campos anti fantasmas são aqui  $b$ .

Devemos introduzir um novo operador derivação (5) na forma

$$s = \delta + \gamma, \quad (3.2)$$

que age nos campos normais, campos fantasmas e ainda nos anti-campos que serão introduzidos em outras circunstâncias. Como definido anteriormente,  $\delta$  é o diferencial de Koszul-Tate que age em  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_\alpha] \otimes C^\infty(P)$ , isto é, somente nos anti-campos, logo para a nossa Lagrangeana, não terá efeito algum. O operador  $\gamma$  é definido sobre  $\Sigma$ , a superfície de vínculo, mas ainda pode ser levado a agir em  $P$ , o espaço de fase e assim terá efeito em  $A_\mu, c, b$  e se fosse o caso, nos anti campos também. Desta forma,  $\gamma$  se reduz a  $s$  nesta etapa do formalismo. Vale lembrar que o espaço de fase  $C^\infty(P)$  é o espaço de fase definido no kernel  $(ker\delta)_0$  de maneira que  $\delta(z^A) = 0$  como identificado nas linhas acima.

Agora temos que verificar as graduações de *números fantasma*, *anti fantasma* e *fantasma puro* dos campos em questão. Da equação (2.48), temos

$$\begin{aligned} gh(K) &= puregh(K) - antigh(K), \\ gh(z) &= 0 - 0 = 0, \quad z = A_\mu, \Psi, \dots, \\ gh(\eta) &= 1 - 0 = 1, \quad \eta = c, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Logo,  $\delta$  e  $\gamma$  aumentam o número fantasma por uma unidade com  $\delta$  diminuindo o número anti-campo (anti-fantasma) por uma unidade enquanto deixa o número fantasma puro

inalterado, já  $\gamma$  aumenta o número fantasma puro por uma unidade enquanto deixa o número anti-campo (anti-fantasma) inalterado. Ou seja,  $antigh(\delta) = antifd(\delta) = -1$  e  $antifd(\gamma) = 0$ . Vale lembrar que  $s$  é construído via expansão de número  $antifd$ ,  $s = \sum_{k>-1} s_k$  com  $antifd(s_k) = k$  e no nosso caso  $s_{-1} = \delta$  e  $s_0 = \gamma$  e assim pode-se notar que em teorias de Yang-Mills a expansão para em  $\gamma$  mas em teorias de gauge genéricas pode-se ter ordens superiores. Com isso, temos o requerido *espaço de fase estendido*  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes C^\infty(P) \otimes \mathbb{C}[\eta^a]$  no qual nossos campos e ações de  $s$  interagem.

Com objetivo de construir uma transformação que tem como forma residual uma transformação de gauge de maneira que permaneça a Lagrangeana invariante,

$$s\mathcal{L} = 0, \quad (3.4)$$

a *transformação BRST* toma a forma de uma *transformação de gauge*

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \lambda(x)^a + g f_{bc}^a A_\mu^b \lambda^c \quad (3.5)$$

em que os parâmetros de gauge  $\lambda(x)$  é espaço-temporal dependente de um grupo de Lie semi-simples compacto  $G$  com  $f_{bc}^a$  sendo as estruturas constantes. Os parâmetros de gauge  $\lambda$  são substituídos pelos fantasmas:

$$sA_\mu^a = (D_\mu c)^a \Lambda = \Lambda \partial_\mu c^a + g f_{bc}^a A_\mu^b c^c \Lambda. \quad (3.6)$$

Para consistência, fazemos a seguinte análise: a dimensão da Lagrangeana deve ser 4, logo temos  $[c] = [b] = 1$  e também devemos ter  $gh(\mathcal{L}) = 0$ , desde que  $\lambda^a(x) \rightarrow c^a(x)\Lambda$  e usando a regra (2.48).

$$\begin{aligned} gh(\lambda^a(x)) = 0 &= gh(c^a(x)\Lambda) = gh(c^a) + gh(\Lambda) = 1 + gh(\Lambda), \\ gh(\Lambda) &= -1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Também podemos inferir (NASTASE, 2019)

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}] = 4, \quad [\partial_\mu] = 1, \quad [A_\mu] = 1, \\ [\delta A_\mu] = 1 = [D_\mu \lambda] \rightarrow [D_\mu c^a(x)\Lambda] = 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pela construção de  $sA_\mu^a$  ter sido direta da transformação de gauge, temos que o primeiro termo já é invariante, resta analisar o restante dos termos. O termo  $-b_a \partial^\mu s(D_\mu c)^a$  deve ter variação zero desde que não há nenhum outro termo possível para nos retornar uma variação que a cancele, melhor ainda podemos verificar a variação de  $s(D_\mu c)^a$  sendo zero, temos

$$s(D_\mu c^a) = \partial_\mu (s c^a) + g f_{bc}^a (D_\mu c)^b \Lambda c^c + g f_{bc}^a A_\mu^b (s c^c). \quad (3.9)$$

Lembrando da *identidade de Jacobi*, multiplicando por  $c^b c^c$  e lembrando que  $c$  anti-comuta, obtemos

$$\begin{aligned} f_{pq}^a f_{bc}^q + f_{bq}^a f_{cp}^q + f_{cq}^a f_{pq}^q &= 0, \\ c^b c^c f_{pq}^a f_{bc}^q - c^b c^c f_{qc}^a f_{pb}^q - c^b c^c f_{qc}^a f_{pb}^q &= 0 \\ \left[ \frac{1}{2} f_{pq}^a f_{bc}^q - f_{qc}^a f_{pb}^q \right] c^b c^c &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ficamos com

$$s(D_\mu c^a) = D_\mu(sc^a) + \frac{1}{2}D_\mu(gf_{bc}^a c^b \Lambda c^c) = 0, \quad (3.11)$$

onde para  $A_\mu = 0$

$$sc^a = -\frac{1}{2}gf_{bc}^a c^b c^c \Lambda, \quad (3.12)$$

e para  $A_\mu \neq 0$  a igualdade acima continua valendo. Concluimos que para o termo de ação de Faddeev-Popov ser invariante por ação de  $s$ , no mínimo o fantasma  $c^a$  deve se transformar devidamente como em (3.12), mas ainda não sabemos a transformação de  $b^a$ .

Resta apenas averiguar a variação da ação nos seguintes termos

$$\mathcal{L}_{ghost} + \mathcal{L}_{g-f} = -b^a \partial^\mu (D_\mu c)^a + \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu) (\partial^\nu A_\nu), \quad (3.13)$$

transformando os campos em primeira ordem em  $\Lambda$ , ficamos com

$$s\mathcal{L} = -(sb)^a \partial^\mu (D_\mu c)^a + \frac{1}{\alpha} (\partial^\rho A_\rho) \partial^\mu (D_\mu c)^a \Lambda. \quad (3.14)$$

O termo ( $s\mathcal{L}_{ghost}$ ) tem que se cancelar com o termo ( $s\mathcal{L}_{g-f}$ ), para isso

$$-s b^a \partial^\mu (D_\mu c)^a = \frac{1}{\alpha} (\partial^\rho A_\rho) \partial^\mu (D_\mu c)^a \Lambda, \quad (3.15)$$

$$s b^a = -\frac{1}{\alpha} (\partial^\rho A_\rho) \Lambda. \quad (3.16)$$

Em, resumo uma transformação BRST na nossa ação tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} s\mathcal{L} &= 0, \\ A_\mu^a &\mapsto A_\mu^a + sA_\mu^a = A_\mu^a + (D_\mu c)^a \Lambda, \\ c^a &\mapsto c^a + sc^a = c^a - \frac{1}{2}gf_{bc}^a c^b c^c \Lambda, \\ b^a &\mapsto a + sb^a = b^a - \frac{1}{\alpha} (\partial^\rho A_\rho) \Lambda, \\ D_\mu^{ac} &\mapsto D_\mu^{ac} + g\Lambda f_{bc}^a (D_\mu^{bd} + c^d). \end{aligned} \quad (3.17)$$

## 3.2 Nilpotência e Campo Auxiliar

Como é dado por (5), o operador derivação  $s$  deve ser nilpotente em grau 2:  $s^2 = 0$ . Verifiquemos se esta condição é satisfeita.

Temos

$$\begin{aligned} sA_\mu^a &= (D_\mu c)^a, \\ s(D_\mu c)^a &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

logo, podemos inferir que

$$s^2 A_\mu^a = 0. \quad (3.19)$$

Para o campo fantasma  $c$ , temos a ação do operador derivação  $s$  é dada por

$$sc^a = \frac{1}{2}gf_{bc}^a c^b c^c \Lambda \quad (3.20)$$

e se atuarmos por  $s$  mais uma vez, ficamos com

$$\begin{aligned} s^2 c^a &= s(f_{bc}^a c^b c^c) = f_{bc}^a s c^b c^c + f_{bc}^a c^b s c^c \\ &= f_{bc}^a \left( \frac{1}{2} g f_{de}^b c^d c^e \right) c^c + f_{bc}^a c^b \left( \frac{1}{2} g f_{de}^c c^d c^e \right), \\ &= \frac{1}{2} g f_{cb}^a f_{de}^c c^d c^e c^b + \frac{1}{2} g f_{bc}^a f_{de}^c c^b c^d c^e, \\ &= g f_{bc}^a f_{de}^c c^d c^e c^b. \end{aligned} \quad (3.21)$$

usando a antissimetria de  $c^b c^d c^e$  e identidade de Jacobi das estruturas constantes, temos por fim

$$s^2 c^a = 0. \quad (3.22)$$

Verifiquemos agora  $b^a$ ,

$$\begin{aligned} sb^a &= -\frac{1}{\alpha} \partial^\mu A_\mu^a \Lambda, \\ s(sb^a) &= -\frac{1}{\alpha} \partial^\mu ((D_\mu c)^a \Lambda_2) \Lambda_1, \\ s^2 b^a &= -\frac{1}{\alpha} \partial^\mu (s A_\mu^a) \Lambda_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O que nos indicaria que  $s^2 b^a \neq 0$  quebrando a nilpotência de  $s$ , porem, se olharmos a equação dinâmica de  $b^a$ , temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu b)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} &= 0, \\ \partial^\mu (D_\mu^{ab} c^b) &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

o que nos indica na verdade que  $s^2 b^a = 0$ , porem somente **on-shell**, isto é, quando a equação dinâmica é válida. Esta dependência on-shell pode parecer satisfatória mas ter uma dependência a mais nas nossas equações e construções não é interessante.

Definimos agora o campo auxiliar de *Nakanishi-Lautrup*  $B(x)$  que é adicionado á Lagrangeana de gauge-fixing

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{g-f} &= -\frac{\alpha}{2} B^2(x) - B(x) (\partial^\rho A_\rho^a), \\ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} &= 0 \\ \alpha B + (\partial^\rho A_\rho) &= 0, \\ B &= -\frac{1}{\alpha} (\partial^\rho A_\rho^a). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora escrevemos a variação de  $b^a$  e  $B$  na forma

$$sb^a = B\Lambda, \quad sB = 0. \quad (3.26)$$

E temos finalmente a nilpotência sendo respeitada de forma integra

$$s^2b^a = 0 = sB. \quad (3.27)$$

Podemos notar que a nossa teoria de campos até o momento vem apresentando boas concordâncias com o desenvolvimento realizado no [Capítulo 2](#) e que ao adicionar o campo de Nakanishi-Lautrup faz a nilpotência  $s^2b^a = s(B\Lambda) = 0$  ser respeitada e a torna ainda independente do gauge-fixing  $\alpha$ .

### 3.3 Carga e transformação BRST

A nossa Lagrangeana tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) - b^a \partial_\mu (D_\mu^{ab} c^b) - \frac{1}{\alpha} B^2 - B(\partial^\mu A_\mu^a), \quad (3.28)$$

e obedece as transformações (3.17). Segue do teorema de Noether que para transformações infinitesimais nos campos  $\phi' \mapsto \phi(x) + \Lambda\xi$  com  $\xi$  sendo o gerador das transformações e o funcional da ação do campo sendo invariante sobre tal transformação,  $\delta\mathcal{L} = 0$ , temos

$$\partial_\mu (\sum_J \pi_J^\mu \xi_J) = 0. \quad (3.29)$$

E desta forma podemos identificar uma corrente

$$j^\mu = \sum_J (\pi_J)^\mu \xi_J, \quad (3.30)$$

tal que

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0, \\ \partial_0((\pi_J)^0 \xi_J) &= -\partial_i((\pi_J)^i \xi_J), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e finalmente identificamos uma carga ([ITZYKSON; ZUBER, 2012](#))

$$Q_J^s = \int j_J^0 d^3x = \int (\pi_J)^\mu \xi_J d^3x. \quad (3.32)$$

Seja algum  $\mathcal{F}$  um funcional dos campos e de seus momentos, queremos calcular seu *Poisson Bracket*

$$\{Q^s, \mathcal{F}\} = \int d^3x \sum_J \left( \frac{\delta Q_B}{\delta \pi_J} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi_J} - \frac{\delta Q_B}{\delta \phi_J} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi_J} \right), \quad (3.33)$$

usando (3.30) e (3.32), temos então

$$\{Q^s, \mathcal{F}\} = \int d^3x \left( \xi_J \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi_J} \right). \quad (3.34)$$

Em particular encontramos

$$\{Q^s, \phi(x)\} = \xi_J, \quad (3.35)$$

um resultado muito importante que nos mostra explicitamente que as cargas  $Q^s$  geram estas transformações infinitesimais através do *Poisson Bracket* da mesma maneira que a Hamiltoniana gera translação temporal. Dessa forma  $Q_s$  pode ser levado á classe de operadores que age em estados  $|\psi\rangle$ .

Voltando á nossa Lagrangeana (3.28) e ás nossas transformações (3.17), identificamos nossa corrente *BRST* como

$$j_B^\mu = \sum_J \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_J(x))} \delta_B \Phi_J(x), \quad (3.36)$$

onde o índice  $B$  indica corrente devido á transformação *BRST*,  $\Phi_J$  vale para todos os campos, incluindo os de matéria quando for o caso.

De maneira geral, teremos

$$j_\mu^B = D^\nu c^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} - \frac{1}{2} g f_{bc}^a c^b c^c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu c)} + B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu b)}, \quad (3.37)$$

tal que

$$\partial^\mu j_\mu^B = 0, \quad (3.38)$$

$$j_\mu^B = B D_\mu c^a - \partial_\mu B c^a + \frac{i}{2} g \partial_\mu b^a (f_{bc}^a c^b c^c) - \partial^\nu (F_{\mu\nu} c^a). \quad (3.39)$$

Definimos a carga *BRST* conservada como

$$Q_B = \int d^3x j_B^0(x). \quad (3.40)$$

$$Q_B = \int d^3x [B \partial_0 c^a - c^a \partial_0 B + g B (f_{bc}^a A_0^b c^c) + \left(\frac{i}{2}\right) g \partial_0 b^a (f_{bc}^a c^b c^c)]. \quad (3.41)$$

Desde que tenhamos  $c$  e  $b$  campos independentes teremos,

$$\begin{aligned} [Q_B, A_\mu^a] &= D_\mu^{ab} c^b(x), \\ \{Q_B, c^a(x)\} &= -\frac{1}{2} g f_{bc}^a c^b(x) c^a(x), \\ \{Q_B, b^a(x)\} &= B(x), \\ \{Q_B, B(x)\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Onde os comutadores e anti-comutadores devem ser escolhidos de acordo com as paridades de Grassmann. Dessa forma podemos interpretar  $s\Phi = [Q_B, \Phi]$ , com  $\Phi$  valendo para os campos contidos na nossa Lagrangeana. Daqui em diante usaremos a notação

$$Q_B \equiv \Omega. \quad (3.43)$$

Precisamos agora analisar a nilpotência de  $\Omega^2 = 0$  que pode ser vista via

$$\begin{aligned} & [\Omega, \int d^3x (BD_0c^a - \partial_0Bc^a + \frac{1}{2}g\partial_0b^a(f_{bc}^ac^bc^c))] \\ &= \int d^3x (-\partial_0B(sc^a) + \partial_0(sb)^a \frac{i}{2}gf_{bc}^ac^bc^c) = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

desde que  $sB = s(D_\mu c) = s(f_{bc}^ac^bc^c) = 0$ ,  $sc^a = -\frac{1}{2}gf_{bc}^ac^bc^c$  e  $sb^a = iB$ . Assim temos mostrado explicitamente a nilpotência da carga BRST.

O *Teorema de Noether* nos afirma que para toda simetria existe uma respectiva quantidade conservada e como mencionado antes, a nossa Lagrangeana é invariante por número fantasma e conseqüentemente deve existir uma carga de número fantasma conservada (KUGO; OJIMA, 1979). A correspondente corrente conservada é

$$j_\mu^c = i(b^a D_\mu c^a - \partial_\mu b^a c^a), \quad (3.45)$$

com índice  $c$  indicando ser a corrente devido á conservação do número fantasma. A carga conservada é então

$$Q_c = i \int d^3x [b^a \partial_0 c^a - c^a \partial_0 b^a + gb^a f_{bc}^a (A_0^b c^c)]. \quad (3.46)$$

Chamamos  $Q_c$  de carga fantasma e ao ser elevado á classe de operador age nos campos fantasmas e anti fantasmas da seguinte forma

$$[iQ_c, c(x)] = c(x), \quad (3.47)$$

$$[iQ_c, b(x)] = -b(x), \quad (3.48)$$

nos indicando que tem como autovalor o número fantasma do respectivo campo que atua.

## 3.4 Operador BRST e estados físicos

Nosso objetivo agora consiste em elevar  $\Omega$  á classe de operador que age em estados  $|\psi\rangle$  do espaço de Fock dos campos assintóticos das teorias de Yang-Mills. Desde que sabemos que o espaço vetorial de estados em teorias de gauge necessariamente contém estados de norma negativa e conseqüentemente métrica indefinida que quebra nossa noção de probabilidade da mecânica quântica, temos que usar nossa construção de carga BRST nilpotente e a cohomologia definida no [Capítulo 2](#) de maneira a separar de forma única os bons estados, isto é, os de métrica semi-definida positiva.

Queremos que nossa carga BRST  $\Omega$  identificada pelo operador derivação  $s$  cuide de realizar a separação comentada no paragrafo anterior, isto é, queremos identificar nosso espaço de Fock dos estados dos campos físicos como

$$H(s) = \frac{Ker(s)}{Im(s)} = \mathcal{H}_{físico}. \quad (3.49)$$

com o ponto de partida sendo a condição

$$\Omega |\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{físico}. \quad (3.50)$$

O primeiro subespaço que temos que definir é o espaço dos *bósons* e *anti campos*, denotado por  $\mathcal{H}_1$  que é definido como

$$\mathcal{H}_1 = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \text{ tal que } \Omega |\psi\rangle \neq 0\}. \quad (3.51)$$

Seja um dado estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$  é denotado por  $|k, N\rangle$  onde  $k$  é referido a seus momento e números quânticos, e com seu número fantasma dado por  $gh(|\psi\rangle) = N$ . Desde que  $\Omega |\psi\rangle \neq 0$  então podemos escrever

$$|k, N + 1\rangle = \Omega |k, N\rangle, \quad (3.52)$$

de maneira que podemos definir um novo subespaço  $\mathcal{H}_2$

$$\mathcal{H}_2 = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \text{ tal que existe } |\psi'\rangle \in \mathcal{H}_1 \text{ desde que } |\psi\rangle = \Omega |\psi'\rangle\}. \quad (3.53)$$

e forma uma base da representação chamada *dubleto-BRST*.

Usando a nilpotência de  $\Omega$  podemos ainda escrever

$$\Omega(\Omega |k, N\rangle) = \Omega |k, N + 1\rangle = 0, \quad (3.54)$$

mostrando que estados pertencentes a  $\mathcal{H}_1$  tem norma zero

$$\langle k, N | \Omega |k, N + 1\rangle = \langle k, N + 1 | k, N + 1\rangle = 0. \quad (3.55)$$

E finalmente podemos falar da *cohomologia* de  $\Omega$ , que é definida por vetores de estado que estão contidos no kernel de  $\Omega$  e ao mesmo tempo não estão no subespaço  $\mathcal{H}_2$

$$\mathcal{H}_0 = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H}/\mathcal{H}_2 \text{ tal que } \Omega |\psi\rangle = 0\}. \quad (3.56)$$

Seja um campo  $\Phi(x)$  de número fantasma zero,  $gh(\Phi) = 0$ , e com operador criação  $\phi_k^\dagger$  que define o estado

$$\phi_k^\dagger |0\rangle = |k, N = 0\rangle, \quad (3.57)$$

usando  $\Omega |k, N\rangle = 0$  desde que  $|k, N\rangle \in \mathcal{H}_0$  com o fato de  $\Phi(x)$  ter número fantasma zero, o campo  $\Phi$  deve descrever uma partícula física e então comuta com a carga BRST

$$\Omega |k, 0\rangle = \Omega \phi^\dagger |0, 0\rangle = (\Omega \phi_k^\dagger - \phi_k^\dagger \Omega) |0, 0\rangle = 0, \quad (3.58)$$

$$[\Omega, \phi_k^\dagger] = [\Omega, \phi_k] = 0, \quad (3.59)$$

onde  $\phi_k^\dagger$  é o operador criação do respectivo campo. Para uma teoria consistente,  $\phi_k$  deve ter norma positiva

$$[\phi_k, \phi_k^\dagger] = +\delta_{kl}, \quad (3.60)$$

o comutador deve ser substituído pelo anti-comutador se for o caso de um campo fermiônico. Vale notar que estamos fazendo uma exigência aqui, queremos construir o subespaço de Fock de bons estados, desde que valha que os estados de norma positiva definida são os contidos no kernel de  $\Omega$  e que não são imagem de outra ação de  $\Omega$ .

## 3.5 Discussão

Nota-se que

$$\Omega |\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle \in H(s) = \frac{\ker(s)}{\text{Im}(s)} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_2} = \mathcal{H}_{físico}, \quad (3.61)$$

é a condição mais importante e que nos concilia toda a construção requerida de que a adição de fantasmas no espaço de Fock nos permite fazê-los se cancelarem por consequência da construção da cohomologia do operador derivação  $s$ . Onde claro, os estados  $|\psi\rangle$  são resultados de criação, ou aniquilação, dos operadores criação e aniquilação dos campos  $A, b$  e  $c$ . Desde que os fantasmas são fechados e anti fantasmas tem imagem, isto nos permite escrever os bons estados de observáveis. Para  $a$  representando o operador aniquilação ou criação de um campo físico qualquer, temos o seguinte ciclo (note a nilpotência e acréscimo de número fantasma devido a  $\Omega$ )

$$0 \xrightarrow{\Omega} b \xrightarrow{\Omega} a \xrightarrow{\Omega} c \xrightarrow{\Omega} 0. \quad (3.62)$$

Aqui percebemos que os bons estados (métrica semi definida positiva) podem ser separados dos estados ruins (métrica indefinida) desde que conseguimos identificar os estados criados (aniquilados) por  $a$  que estão contidos na imagem de  $\Omega$  (e por consequência os estados criados/aniquilados por  $a$  que não estão na imagem) e os estados criados (aniquilados) por  $a$  que nos retornam  $c$  (e por consequência os estados criados/aniquilados por  $a$  que não nos retornam  $c$ ), fazendo assim uma identificação única de  $\mathcal{H}/\mathcal{H}_2$ , isto é, estados criados (aniquilados) por  $a$  exatos e que não podem ser escritos como imagem de outra atuação de  $s$ .



## 4 Cromodinâmica Quântica - Uma teoria não-abeliana

Para uma melhor visualização da aplicabilidade do formalismo anteriormente construído, foi escolhido avaliar a teoria das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD), que descreve a interação entre quarks, partículas fermiônicas, e gluões, o intermediador da força forte. Será visto que o formalismo BRST de quantização e os fantasmas inseridos são essenciais para a construção da respectiva teoria quântica.

### 4.1 Cores e Sabores

A Lagrangiana construída, incluindo os termos de fixação de gauge e fantasmas é dada por (3.28). Definimos agora uma Lagrangeana para um campo massivo fermiônico, chamada Lagrangeana de Dirac

$$\mathcal{L} = \sum_{\text{sabores}} \bar{\psi}_i (i\mathcal{D} - m)_{ij} \psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (4.1)$$

com  $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$  e índices  $i, j, k = 1, 2, \dots, N$  representam os *sabores* com  $a, b, c, \dots = 1, \dots, N^2 - 1$  sendo os índices de *cores*, além disso temos os índices de letras gregas representando a dimensão do espaço-tempo. Para cada sabor, o espinor do quark é escrito como

$$\psi_i = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Na teoria da Cromodinâmica Quântica, temos uma teoria de gauge não-abeliana  $SU(3)$ , desta forma, teremos oito espinores de sabores com 3 cores cada. Os quarks pertencem á representação fundamental do  $SU(3)$  de dimensão 3 e os gluons pertencem á representação adjunta do  $SU(3)$  de dimensão 8. A derivada deve ser utilizada de forma a acoplar todos os campos envolvidos na teoria. A estrutura constante  $f^{abc}$  do grupo de cor  $SU(3)$  é definido como se segue

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad (4.3)$$

sendo totalmente antissimétrico e são dadas por

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1, \\ f^{147} &= f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os geradores  $t^a$  da  $SU(3)$  são dados pelas matrizes de Gell-Man e satisfazem as seguintes propriedades

$$\text{Tr}[t^a t^b] = t_R \delta^{ab}, \quad t_R = \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

$$\sum_a t_{ij}^a t_{kj}^a = C_F \delta_{ij}, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} = \frac{4}{3}, \quad (4.6)$$

$$\sum_{cd} f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}, \quad C_A = N = 3. \quad (4.7)$$

Denotamos  $C_A$  e  $C_F$  os autovalores do operador Casimir da representação adjunta e fundamental respectivamente. Notando que o gluon tem uma cor e uma anti-cor, para o  $SU(3)$ , o produto das representações 3-quarks e  $\bar{3}$ -anti-quarks é

$$(3 \otimes \bar{3}) = (8 \oplus 1). \quad (4.8)$$

Temos ainda um octeto de estados de cor

$$\begin{aligned} G_1 &= R\bar{G}, \quad G_2 = R\bar{B}, \quad G_3 = G\bar{R}, \\ G_4 &= G\bar{B}, \quad G_5 = B\bar{R}, \quad G_6 = B\bar{G}, \\ G_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \quad G_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por se tratar de uma teoria de gauge não-abeliana temos os mesmos problemas de redundância e de necessidade de fixação de gauge discutidos anteriormente. Sendo assim, a nossa Lagrangeana completa fica sendo da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + \sum_{\text{sabores}} \bar{\psi}_i (i\not{D} - m)_{ij} \psi_j - b^a \partial_\mu (D_\mu^{ab} c^b) - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (4.10)$$

E como será visto a seguir, o uso dos fantasmas e dos termos de fixação de gauge é essencial para a quantização da teoria e sendo assim, apresenta grandes resultados experimentais e deixa em aberto questões a serem estudadas e resolvidas deixando uma motivação a mais para estudos sobre o formalismo BRST.

## 4.2 Propagadores e diagramas de Feynman

Primeiramente vamos focar no termo de Lagrangeana fermiônica com massa, dada pela seguinte equação

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi, \quad (4.11)$$

com a seguinte integral de trajetória de Feynman, livre de fontes, definida por

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp i \int d^4x \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi, \quad (4.12)$$

podemos então adicionar fontes de Grassman  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  á ação tal que  $S[\psi, \bar{\psi}] = \bar{\eta} + \bar{\psi}\eta$ . Então em seguida completamos o quadrado a obter

$$\bar{\psi}A\psi + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} = (\bar{\psi} + \bar{\eta}A^{-1})A(\psi + A^{-1}\eta) - \bar{\eta}A^{-1}\eta, \quad (4.13)$$

logo

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp i \int d^4x d^4x' [\bar{\psi}(x')A(x, x')\psi(x) + \bar{\eta}(x')\psi(x) + \bar{\psi}(x')\eta(x)] \\ &= Z[0] \exp(-i \int d^4x d^4x' \bar{\eta}(x)S_F(x - x')\eta(x')). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aqui temos  $A^{-1} = S_F(x - x') = -S_F^T(x' - x)$ , já que a matriz A definida é antissimétrica. Denotamos assim o propagador fermiônico de Dirac como uma linha com uma flecha representando o fluxo de carga conservada e que assim distingue partículas e antipartículas, o diagrama de Feynman para o férmion é como se segue:

$$\longrightarrow = iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}. \quad (4.15)$$

Queremos agora escrever o propagador de um campo bosônico vetorial sem massa, dada pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) \quad (4.16)$$

ou melhor ainda

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f_{bc}^a A^{b\mu} A^{c\nu}). \quad (4.17)$$

Como para descrever a propagação entre dois pontos do espaço e tempo de um campo é interpretado a como calcular a função de Green de dois pontos da integral de trajetória do respectivo campo, temos que usar os escrever a ação (ou Lagrangeana) como a ação de duas derivadas parciais sanduichadas por campos. Com isso, podemos escrever a Lagrangeana como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2}A_\mu (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \\ &= \frac{1}{2}A^\mu D_{\mu\nu}^{-1} A^\nu. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Onde foi possível desprezar os termos envolvendo  $g$  e ordem superior já que sumiriam no cálculo da derivada funcional de  $Z[J]$ .

A partir de uma transformada de Fourier podemos passar ao espaço dos momentos, onde o propagador é dado por

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k) = k^2 P_T^{\mu\nu} = k^2 \left( g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (4.19)$$

com  $P_T^{\mu\nu}(k)$  sendo o operador projeção, que projeta qualquer quadri-vetor em um subespaço ortogonal a  $k$ :

$$P_T^{\mu\nu} P_{T\nu}^\lambda = P_T^{\mu\lambda}, \quad (4.20)$$

e tem autovalor 0 e 1. Ao tentar calcular a inversa de (4.19) encontramos

$$-Ak^2 \delta_\lambda^\mu + Ak^\mu k_\lambda = \delta_\lambda^\mu, \quad (4.21)$$

onde para um  $k$  arbitrário com  $A = 1/k^2$  e  $A = 0$  não temos solução e  $B$  ainda fica indeterminado. Este fato também poderia ser observado notando que  $P^{\mu\nu}T(k)$  não é um operador unitário, tem ao menos um autovalor zero e é assim não inversível. O traço do operador projeção pode ser calculado como se segue

$$P_\mu^\mu = g_{\mu\nu} P_T^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu - 1 = 3, \quad (4.22)$$

e assim três autovalores são *um* e o outro é zero. O autovalor zero corresponde a  $k_\mu P_T^{\mu\nu} = 0$  como exigido para um operador projeção no subespaço ortogonal a  $k$ . A parte ortogonal a  $\delta_\nu^\mu - P_{T\nu}^\mu$  é dado pelo operador projeção longitudinal  $P_L^{\mu\nu} = (k^\mu k^\nu)/k^2$ .

A necessidade de fixação de gauge aqui fica mais clara e após adicionarmos o mesmo termo de fixação de gauge introduzido por Gupta e Bleuler que se faz possível inverter  $D^{-1}$  e encontrar o propagador para um campo bosônico vetorial de spin-1 sem massa.

Adicionando o termo de fixação de gauge, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2, \\ &= \frac{1}{2} A_\nu (g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu, \end{aligned} \quad (4.23)$$

realizando uma transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu} &= -k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \alpha^{-1}) k^\mu k^\nu \\ &= -k^2 \left( P_T^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + (1 - \alpha^{-1}) k^\mu k^\nu, \\ &= -k^2 P_T^{\mu\nu} - \alpha^{-1} k^2 P_L^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

e por fim temos

$$\left( -k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right) D_F^{\nu\rho} = i \delta_\mu^\rho \quad (4.25)$$

com solução

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (4.26)$$

$$\text{~~~~~} = D_{\mu\nu}(q, \alpha = 1) = \frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}. \quad (4.27)$$

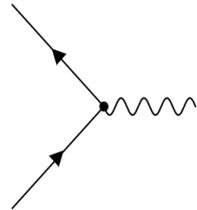
Resta agora obtermos os termos de vértices, isto é, termos de interação. É claro, para calcularmos interação, precisamos primeiramente acoplar os campos  $F_{\mu\nu}$  com  $\psi$ . O acoplamento é feito quando fazemos a transição da derivada usual para a derivada covariante no qual obtemos a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (4.28)$$

ou ainda

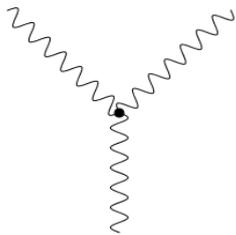
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}A_\nu^a(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu^a + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + gt^a\bar{\psi}A_\mu^a\gamma^\mu\psi \\ & - gf^{abc}A_\mu^aA_\nu^b\partial^\mu A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}A_\mu^aA_\nu^bA^{c\mu}A^{d\nu}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

O propagador do campo bosônico e do campo fermiônico já foram calculados, restando apenas os termos de interação de primeira e segunda ordem, que pelas regras para diagramas de Feynman, temos como se segue:



$$= -ig\gamma^\mu \int d^4x \quad (4.30)$$

O vértice de três gluões é dado a seguir



$$= if^{amn}[(p_3 - p_2)^\alpha g^{\beta\gamma} + (p_1 - p_3)^\beta g^{\alpha\gamma} + (p_2 - p_1)^\gamma g^{\alpha\beta}]. \quad (4.31)$$

### 4.3 Matriz-S e o Teorema Óptico

Neste momento da nossa teoria, queremos descrever como dois campos interagem e o primeiro passo já foi dado, no primeiro capítulo inclusive, que foi acoplar os campos por uma constante  $g$ . Agora, partindo da ideia que temos os modos dos campos definidos sobre o espaço Fock, isto é

1. Autovalores de energia e momento estão dentro do *cone de luz*

2. Existe um *estado fundamental* invariante por Lorentz que é não degenerado e é definido sendo o de menor energia e de valor zero, chamado *estado de vácuo*
3. Os estados de vácuo e estados de única partícula (estados  $|P^{(i)}\rangle$ ) criados pelo operador criação atuando no estado de vácuo) estáveis formam um espectro discreto

Junto com nossa definição de como campos se propagam iremos definir um estado  $|q_1 q_2 \dots q_n \text{ in}\rangle$  de  $n$  partículas se propagando livremente antes da interação e um estado  $|p_1 p_2 \dots p_n \text{ out}\rangle$  de  $m$  partículas após o instante de interação. Definimos assim um operador  $S$  de transição entre o estado inicial e final

$$S |inicial\rangle = |final\rangle, \quad (4.32)$$

e a amplitude de transição dada por

$$S_{fi} = \langle final | inicial \rangle, \quad (4.33)$$

que define a amplitude de projeção do campo inicial em  $t \rightarrow -\infty$  á um estado de campo final em  $t \rightarrow \infty$ . Pelo pressuposto de completeza de estados iniciais e finais, todos os elementos de matriz de um operador  $S$  que transforma estados iniciais em estados finais

$$\langle p_1 p_2 \dots p_n \text{ in} | S = \langle p_1 p_2 \dots p_n \text{ out} |, \quad \langle p_1 p_2 \dots p_n \text{ out} | S^{-1} = \langle p_1 p_2 \dots p_n \text{ in} | \quad (4.34)$$

e deve ser unitário de maneira a conservar a probabilidade

$$S^\dagger |q_1 q_2 \dots q_n \text{ in}\rangle = |q_1 q_2 \dots q_n \text{ out}\rangle, \quad (4.35)$$

e conseqüentemente

$$\langle p_1 p_2 \dots p_n \text{ out} | S S^\dagger |q_1 q_2 \dots q_n \text{ in}\rangle, \quad (4.36)$$

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1. \quad (4.37)$$

Mas o operador  $S$  contém o caso onde partículas entram sem interação e assim definimos (NASTASE, 2019)

$$S = 1 + iT, \quad (4.38)$$

e devemos sempre inserir conservação de momento por uma delta de Dirac que entra na amplitude e assim definimos o *elemento de matriz*  $\mathcal{M}$  *invariante* dado por

$$\langle q_1 q_2 \dots q_n | p_1 p_2 \dots p_n \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) i\mathcal{M}(q_1 q_2 \dots q_n \dots p_1 p_2 \dots p_n). \quad (4.39)$$

Definimos

$$R = (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) T, \quad (4.40)$$

e pela equação (4.38) temos

$$\begin{aligned} SS^\dagger &= (1 + iR)(1 - iR^\dagger), \\ 1 &= 1 - iR^\dagger + iR + RR^\dagger, \\ R - R^\dagger &= iR^\dagger R, \end{aligned} \quad (4.41)$$

e com

$$R - R^\dagger = 2i\text{Im}(R), \quad (4.42)$$

temos

$$2\text{Im}(R) = R^\dagger R = RR^\dagger. \quad (4.43)$$

Supondo um processo  $|p_1 p_2\rangle \rightarrow |p_3 p_4\rangle$  em que neste caso

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_n \int \frac{d^3 k_1}{W_1} \frac{d^3 k_2}{W_2} \dots \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - \dots - k_n) \\ &\times \langle p_3 p_4 | T | k_1 k_2 \dots k_n \rangle \langle p_1 p_2 | T | k_1 k_2 \dots k_n \rangle^\dagger. \end{aligned} \quad (4.44)$$

E este é o conhecido *Teorema Óptico*. Um importante corolário deste teorema é caso  $\langle p_3 p_4 | = |p_1 p_2\rangle$  ou ainda  $f = i$ , exemplo processos do tipo  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$  ou  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$  entre quarks.

## 4.4 Identidade de Ward

Para um campo  $\phi(x)$  escalar qualquer, definimos as *funções de Green de n-pontos* por

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}, \quad (4.45)$$

que como mencionado antes, descrevem a propagação de campos entre n pontos. Se quisermos calcular o processo de espalhamento entre dois campos, isto é, interação entre dois campos, podemos usar a *formula de redução LSZ* (Lehmann, Symanzik e Zimmermann) (ITZYKSON; ZUBER, 2012)

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n, out | q_1, \dots, q_n, in \rangle &= \langle p_1, \dots, p_n, out | S | q_1, \dots, q_n, in \rangle \\ &= \text{partes desconexas} \\ &+ (iZ^{-1/2})^{n+l} \int d^4 y_1 \dots d^4 x_l \exp \left( i \sum_1^n p_k \cdot y_k - \sum_1^l q_r \cdot x_r \right) \\ &\times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{x_l} + m^2) \langle 0 | T \phi(y_1) \dots \phi(x_l) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.46)$$

que relaciona funções correlações (produto de campos ordenados no tempo) com amplitudes de transição *on-shell*. Pode-se perceber também que funções de Green tem polos nas variáveis  $p_i^2$  com  $p_i$  conjugado a  $x_i$ . A menos de constante de normalização, elementos de matriz-S são apenas os resíduos dos múltiplos polos.

Definimos funções redutíveis como sendo os diagramas de Feynman em que as linhas internas podem ser cortadas ao meio, outro nome que aparece na literatura para estes diagramas é *1-particle reducible*. Os diagramas que não podem ser cortados ao meio nas linhas internas são denotadas por *1-particle irreducible (1PI)* (RYDER, 1996). Se queremos calcular a interação entre dois campos, então podemos desconsiderar da matriz-S as funções de Green conexas pois iriam descrever dois campos se propagando entre dois pontos sem um perceber e interagir com o outro. As funções de Green conexas são geradas por  $W$  ( $Z = e^W$ ) e são dadas por

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (4.47)$$

Chamamos os diagramas conexos de propagador completo e são denotados por

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = G_c^2(x, y) \quad (4.48)$$

Definimos a *auto-energia* como a soma de grafos *1PI* o termo  $i^{-1}\Sigma(p)$  e tem seus diagramas dados como a a figura (1). O propagador completo  $G_c^{(2)}$  no espaço dos momentos pode ser

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---}$$

Figura 1 – Expansão do propagador em termos de diagramas 1PI.

escrito em termos do propagador usual

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(p) &= G_0(p) + G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) \\ &+ G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) + \dots \\ &= G_0 \left( 1 + \frac{\Sigma}{i} G_0 + \frac{\Sigma}{i} G_0 \frac{\Sigma}{i} G_0 + \dots \right) \\ &= G_0 \left( 1 - \frac{\Sigma}{i} G_0 \right)^{-1} \\ &= \left[ G_0(p) - \frac{\Sigma(p)}{i} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

em diagramas é dado como na Figura 2.

Temos então duas funções de Green que são computadas através de  $Z$  e outra através de  $W$  em que  $Z$  e  $W$  se relacionam como se segue

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \exp iS(\phi) + i \int d^4x J\phi, \quad (4.50)$$

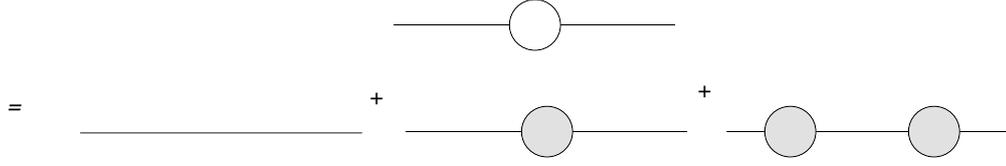


Figura 2 – Expansão do propagador com correções radioativas.

com  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  sendo a ação, via  $Z = e^W$ . Motivados por isso, introduzimos uma transformação de Legendre

$$\begin{aligned} Z_\Gamma(J) &= \int \mathcal{D}\phi \exp [i\Gamma(\phi) + i \int d^4x J\phi], \\ &= \exp [iW_\Gamma(J)]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

e como visto  $W_\Gamma[J]$  é dado pela soma de diagramas conexos (com fontes) com cada linha representando o propagador exato e cada vertice dado por  $1PI$  exatos. A transformação de Legendre se resume a

$$W[J] = \Gamma[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x), \quad (4.52)$$

assim, diferenciando

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi(x), \quad \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = -J(x), \quad (4.53)$$

e podemos ver ainda

$$G_c(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta J(x) \delta J(y)} = -i \frac{\delta \phi}{\delta J(y)}, \quad (4.54)$$

junto com

$$\Gamma(x, y) = \frac{\delta^2 W[J]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta \phi(y)}, \quad (4.55)$$

nos mostra que a função  $\Gamma$  é a inversa do propagador (RYDER, 1996)

$$\begin{aligned} \int dz G_c(x, z) \Gamma(z, y) &= -i \int \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \\ &= i \int dz \frac{\delta \phi(x)}{\delta J(z)} \frac{\delta J(z)}{\delta \phi(y)} \\ &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Com isso, podemos voltar á nossa Lagrangeana de férmions e bósons

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp i \int d^4x \mathcal{L}, \quad (4.57)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu - igA_\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta, \quad (4.58)$$

e como queremos que as funções de Green, i.e a propagação, dos campos sejam invariantes por Gauge (supondo caso Abelian), fazemos a seguinte transformação nos campos

$$A_\mu \rightarrow +\partial_\mu \Lambda, \quad \psi \rightarrow \psi + ig\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - ig\psi, \quad (4.59)$$

os três primeiros termos de (4.58) são invariantes por Gauge, mas o restante não. Com isso, ficamos com

$$\exp\left(i \int d^4x \left[ -\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)\square\Lambda + J^\mu\partial_\mu\Lambda + ig\Lambda(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right]\right), \quad (4.60)$$

e com  $\Lambda$  infinitesimal, expandimos a exponencial de forma a ficar com

$$1 + i \int d^4x \left[ -\frac{1}{\alpha}\square(\partial^\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu + ig(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right] \Lambda(x) - \frac{1}{\alpha}\square(\partial^\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu + ig(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \quad (4.61)$$

fazemos a seguinte identificação

$$\psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \frac{\delta}{\delta \eta}, \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}. \quad (4.62)$$

Exigindo que a a função de Green seja invariante, temos

$$\left[ \frac{i}{\alpha}\square\partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} - \partial^\mu J_\mu + g\left(\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta}\right) \right] Z[\eta, \bar{\eta}, J] = 0, \quad (4.63)$$

usamos que  $Z = e^{iW}$ ,

$$-\frac{1}{\alpha}\square\partial^\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} + ig\left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta}\right) = 0. \quad (4.64)$$

Fazendo as seguintes identificações (RYDER, 1996)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} &= -J^\mu(x), & \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} &= A^\mu(x), \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} &= -\bar{\eta}(x), & \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} &= \psi(x), \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} &= -\eta(x), & \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} &= \bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (4.65)$$

a partir de

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu), \quad (4.66)$$

teremos

$$-\frac{1}{\alpha}\square\partial^\mu A_\mu(x) - ig\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} - ig\psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} + ig\bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = 0. \quad (4.67)$$

Se diferenciarmos duas vezes funcionalmente a equação anterior com respeito a  $\bar{\psi}(x)$  e  $\psi(y_1)$  e em seguida fazer  $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$ , teremos o primeiro termo de (4.67) igual a zero, o segundo irá nos retornar o vértice 1PI férmion-bóson, e os outros dois termos serão inversas de propagadores exatos.

Definimos a *função vértice própria*  $\Gamma_\mu(p, q, p + q)$  por

$$\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1) \delta A^\mu(x)} = -ig(2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \Gamma_\mu(p, q, p'), \quad (4.68)$$

mas como diferenciação funcional de  $\Gamma$  por  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  é o propagador inverso  $S_F(p)$ , obtemos por fim

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, q, p + q) = S_F^{-1}(p + q) - S_F^{-1}(p), \quad (4.69)$$

conhecida como a *identidade de Ward-Takahashi* e tomando o limite  $q_\mu \rightarrow 0$ , obtemos a *identidade de Ward* (RYDER, 1996)

$$\frac{\partial S_F^{-1}}{\partial p^\mu} = \Gamma_\mu(p, 0, p). \quad (4.70)$$



## 5 A técnica da pinça

Já foi visto como se dá a simetria de Gauge em campos bosônicos, como se faz possível quantizar os campos abelianos definindo seus modos de maneira coerente no espaço de Fock e como podemos quantizar campos não-abelianos de maneira consistente. Foi visto que para a quantização ser consistente precisamos escolher representantes de Gauge e que isso ocorre ao introduzirmos termos de fixação de Gauge. Em seguida vimos como se calcula o propagador e ainda os elementos de matriz-S para campos que interagem.

Vale ressaltar que **invariância por Gauge** diz respeito á quantidade trabalhada ser invariante por *transformações de Gauge*, já **independência por Gauge** significa que a quantidade trabalhada é independente do método de fixação de Gauge, ou ainda, do calibre escolhido. As teorias de interações de partículas elementares são teorias de Gauge. Como sabemos e foi visto, elementos de matriz-S são independentes do Gauge, porém, os propagadores de campos bosônicos são dependentes do Gauge trabalhado. Ao exigirmos invariância por Gauge do funcional geratriz  $Z$ , obtemos a identidade de Ward que relaciona funções de Green. Se a constante de acoplamento que entra no vértice for fraca, pode-se fazer uso da teoria de perturbação sem grandes dificuldades, já em teorias com constante de acoplamento próximas á unidade ou maior (como no caso da QCD), métodos não perturbativos são preferíveis. É de interesse definirmos elementos que irão entrar na matriz-S de maneira a serem independentes do Gauge. A maneira mais instrutiva a se fazer isso é considerar diagramas com diferentes topologias (vértices, caixa ou loop) e que envolvam três ou quatro partículas bosônicas e assim trabalhar com a parte de *auto-energia*, da respectiva partícula, que envolve parâmetro de Gauge, assim extraíndo a independência de calibre.

O método apresentado a seguir tem nome de *técnica da pitada* ou *pinçada* e consiste em identificar as partes dos diagramas de Feynman em ordem de um-loop e fazer com que momentos longitudinais ativem a identidade de Ward e conseqüentemente realizem cancelamentos e como resultado, amplitudes físicas são reorganizadas em sub-amplitudes que mantém a forma cinemática, restando apenas quantidades independentes do Gauge.

### 5.1 Um exemplo

Consideremos um vértice de três gluões, denotado aqui por  $\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{amn}$  tal que todos os momentos estão entrando  $q + k_1 + k_2 = 0$

$$i\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{amn} = g f^{amn} \Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, k_1, k_2), \quad (5.1)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, k_1, k_2) = g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\alpha + g_{\alpha\nu}(k_2 - q)_\mu + g_{\alpha\mu}(q - k_1)_\nu. \quad (5.2)$$

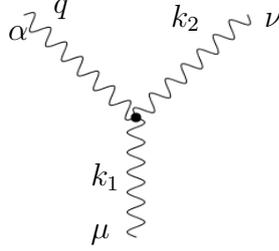


Figura 3 – Vértice de três gluões.

Este vértice deve satisfazer as identidades de Ward para  $q^\alpha$ ,  $k_1^\mu$  e  $k_2^\nu$ . Verifiquemos para  $q^\alpha$  primeiro

$$\begin{aligned} q^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(q^\alpha k_{1\alpha} - q^\alpha k_{2\alpha}) + q_\nu k_{2\mu} - q_\mu k_{1\nu}, \\ &= g_{\mu\nu}(-k_1 - k_2)^\alpha (k_1 - k_2)_\alpha + (-k_1 - k_2)_\nu k_{2\nu} (k_1 - k_2)_\alpha, \\ &= g_{\mu\nu}[-k_1^2 + k_2^2] + k_{1\nu} k_{1\mu} - k_{2\nu} k_{2\mu}, \\ &= k_2^2 [g_{\mu\nu} - \frac{k_{2\nu} k_{2\mu}}{k_2^2}] - k_1^2 [g_{\mu\nu} - \frac{k_{1\nu} k_{1\mu}}{k_1^2}], \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde para o restante das identidades é análogo, e por fim escrevemos

$$q^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, k_1, k_2) = k_2^2 P_{\mu\nu}(k_2) - k_1^2 P_{\mu\nu}(k_1), \quad (5.4)$$

$$k_1^\mu \Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, k_1, k_2) = q^2 P_{\alpha\nu}(q) - k_2^2 P_{\alpha\nu}(k_2), \quad (5.5)$$

$$k_2^\nu \Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, k_1, k_2) = k_1^2 P_{\alpha\mu}(k_1) - q^2 P_{\alpha\mu}(q). \quad (5.6)$$

E podemos ver que o lado direito das equações anteriores são precisamente dadas por (4.19) e desta maneira o vértice (5.1) não satisfaz as identidades de Ward, pois os operadores projeção transversal contidos não tem inversa.

Queremos assim, encontrar uma maneira de decompor este vértice de forma a obedecer a identidade de Ward e seguindo o que foi feito anteriormente, queremos que apareça um operador projeção longitudinal que seja capaz de suprir a identidade de Ward. Escrevemos (5.1) com  $k_2 = -q - k_1$  e  $-k_1 = q + k_2$ , lembrando que  $k_1 + k_2 + q = 0$ , depois se soma e subtrai o termo de calibre  $\xi^{-1}[k_{2\nu} g_{\alpha\mu} - k_{1\mu} g_{\alpha\nu}]$ , onde agora  $\xi$  será nosso termo de fixação de Gauge. Por fim nosso termo de vértice toma a forma

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}(q, k_1, k_2) = \Gamma_{\mu\nu\alpha}^\xi + \Gamma_{\mu\nu\alpha}^{P\xi} \quad (5.7)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}^\xi(q, k_1, k_2) = (k_1 - k_2)_\alpha g_{\mu\nu} - 2q_\mu g_{\nu\alpha} + 2q_\nu g_{\mu\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) [k_{2\nu} g_{\alpha\mu} - k_{1\mu} g_{\alpha\nu}] \quad (5.8)$$

e

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}^{P\xi}(q, k_1, k_2) = \frac{1}{\xi} [k_{2\nu}g_{\alpha\mu} - k_{1\mu}g_{\alpha\nu}]. \quad (5.9)$$

Verifiquemos se  $\Gamma^\xi$  satisfaz a identidade de Ward

$$\begin{aligned} q^\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}^\xi(q, k_1, k_2) &= -(k_1 + k_2)^\alpha (k_1 - k_2)_\alpha g_{\mu\nu} \\ &+ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) [-(k_1 + k_2)_\mu k_{2\nu} + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\mu}], \\ &= (-k_1^2 + k_2^2)g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) [k_{1\mu}k_{1\nu} - k_{2\mu}k_{2\nu}], \\ &= k_2^2 \left[ g_{\mu\nu} + \left(1 - \xi^{-1}\right) \frac{k_{2\mu}k_{2\nu}}{k_2^2} \right] - k_1^2 \left[ g_{\mu\nu} + \left(1 - \xi^{-1}\right) \frac{k_{1\mu}k_{1\nu}}{k_1^2} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

e podemos ver que obedece sim a identidade de Ward, desde que do lado direito temos a diferença de duas inversas de propagadores, podemos explicitar isso escrevendo em termos de (4.25),

$$q^\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}^\xi(q, k_1, k_2) = D_{\mu\nu}^{-1}(k_2, \xi) - D_{\mu\nu}^{-1}(k_1, \xi), \quad (5.11)$$

no calibre de Feynman ('t Hooft),  $\xi = 1$ , podemos ainda escrever  $\Gamma_{\mu\nu\alpha}^F$  e assim definimos

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, k_1, k_2) = \Gamma_{\alpha\mu\nu}^F(q, k_1, k_2) + \Gamma_{\alpha\mu\nu}^P(q, k_1, k_2), \quad (5.12)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu}^F(q, k_1, k_2) = (k_1 - k_2)_\alpha g_{\mu\nu} + 2q_\nu g_{\alpha\mu} - 2q_\mu g_{\alpha\nu}, \quad (5.13)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu}^P(q, k_1, k_2) = k_{2\nu}g_{\alpha\mu} - k_{1\mu}g_{\alpha\nu}. \quad (5.14)$$

A *técnica da pinça* ou *pitada* se baseia em invocar um momento longitudinal que irá acarretar no cumprimento da identidade de Ward. Claramente, quando isto for feito em elementos de matriz-S, trará consequências para os diagramas de Feynman e nas seções que se seguem, será feito uma análise nas consequências de se aplicar a técnica e como se dará o diagrama resultante.

## 5.2 Matriz-S para espalhamento quark-quark

Consideremos os elementos de *matriz-S* de espalhamento do tipo  $qq \rightarrow qq$ , de um quark com outro quark. Os diagramas de Feynman podem ser vistos a seguir na Figura 4, onde a menos dos termos dos quarks externos e internos, temos termos de propagação do glúon e vértice de três glúons que irão aparecer nas amplitudes.

Ao lidar com integrais de loop, usa-se regularização dimensional (SREDNICKI, 2007) que será daqui para frente entendida por

$$\int_k \equiv \mu^\epsilon (2\pi)^{-d} \int d^d k, \quad (5.15)$$

onde  $d = 4 - \epsilon$  é a dimensão do espaço-tempo e  $\mu$  é o fator de massa de t'Hooft, introduzido para garantir que a constante de acoplamento não tenha dimensão em dimensão  $d$ . Além disso, vale para regularização dimensional o seguinte resultado

$$\int_k \frac{1}{k^2} = 0. \quad (5.16)$$

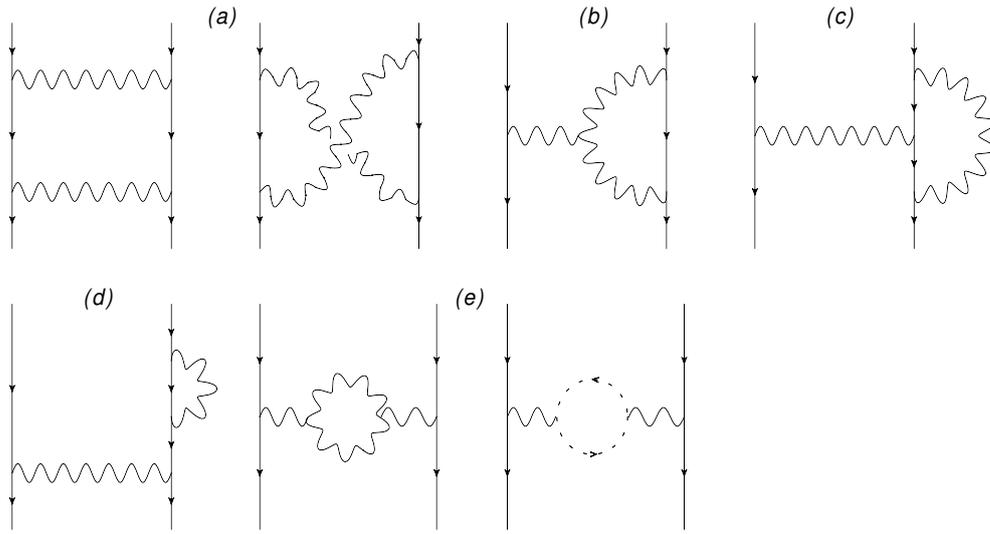


Figura 4 – Diagramas de Feynman para correções radioativas de interação quark com quark.

A amplitude se lê

$$\mathcal{T}^{(0)}i = \mathcal{V}^{\alpha\alpha}(r_1, r_2) iD_{\alpha\beta}(q) i\mathcal{V}^{\alpha\beta}(p_1, p_2), \quad (5.17)$$

e os termos fermiônicos cinemáticos são dados por

$$i\mathcal{V}^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = \underbrace{\bar{u}(p_1)}_{LE} \underbrace{igt^\beta}_{V} \underbrace{u(p_2)}_{LE}, \quad (5.18)$$

$$i\mathcal{V}^{\alpha\alpha}(r_1, r_2) = \underbrace{\bar{u}(r_1)}_{LE} \underbrace{igt^\alpha}_{V} \underbrace{u(r_2)}_{LE}, \quad (5.19)$$

com  $V, LI, LE$  significando respectivamente vértice, linha interna e linha externa, indicando de onde surgem através dos diagramas de Feynman.

Se olharmos o termo

$$D_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{q^2} \left[ g_{\alpha\beta} - (1 - \alpha) \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right] \quad (5.20)$$

podemos perceber que os termos da parte longitudinal  $q_\alpha$  e  $q_\beta$  multiplicando  $\gamma^\alpha$  e  $\gamma^\beta$  fazem acionar as equações de movimento

$$\bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0 = (\not{p} - m)u(p), \quad (5.21)$$

desde que linhas externas nas amplitudes sempre estão *on-shell*. Dessa forma, ficamos apenas com

$$\mathcal{T}^0 = i\mathcal{V}^{a\alpha}(r_1, r_2)d(q^2)\mathcal{V}_\alpha^a(p_1, p_2), \quad (5.22)$$

e definimos  $d(q^2) = q^{-2}$  e olhando a soma dos dois primeiros diagramas da Figura 4, temos

$$(a) = g^2 \int_k \overbrace{\bar{u}(r_1)}^{\text{LE}} \overbrace{\gamma^\alpha t^a}^{\text{V}} \overbrace{S^{(0)}(r_2 - k)}^{\text{LI}} \overbrace{\gamma^\rho t^r}^{\text{V}} \overbrace{u(r_2)}^{\text{LE}} \overbrace{D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q)}^{\text{LI}} \overbrace{D_{\rho\sigma}^{(0)}(k)}^{\text{LI}} g^2 \overbrace{\bar{u}(p_1)}^{\text{LE}} \quad (5.23)$$

$$\times \left\{ \overbrace{\gamma^\beta t^a}^{\text{V}} \overbrace{S^{(0)}(p_2 + k)}^{\text{LI}} \overbrace{\gamma^\sigma t^r}^{\text{V}} + \overbrace{\gamma^\sigma t^r}^{\text{V}} \overbrace{S^{(0)}(p_1 - k)}^{\text{LI}} \overbrace{\gamma^\beta t^a}^{\text{V}} \right\} \times \overbrace{\bar{u}(p_2)}^{\text{LE}}.$$

Lembrando da identidade de Ward (4.69), teremos que vale sempre para um gluôn e um férmion entrando e saindo um férmion

$$k_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(p_1 + k) - S^{-1}(p_1) \rightarrow S^{-1}(p_1 + k), \quad (5.24)$$

com o segundo lado da flecha valendo quando tivermos em amplitude envolvendo termos  $p_1$  *on-shell*. Assim, podemos usar o produto de  $D_{\rho\sigma}^{(0)}(k)D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q)$  e abrir o primeiro termo como se segue,

$$\begin{aligned} D_{\rho\sigma}^{(0)}(k) &= d(k^2)g_{\rho\sigma} - d(k^2)(1 - \xi)\frac{k_\rho k_\sigma}{k^2}, \\ &= d(k^2)g_{\rho\sigma} - d(k^2)(1 - \xi)d(k^2)k_\rho k_\sigma, \\ &= (a)_{\xi=1} - d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho k_\sigma, \end{aligned} \quad (5.25)$$

em que  $(a)_{\xi=1}$  pode ser escrito desde que quando o termo (a) (5.23) multiplicar o primeiro termo  $d(k^2)g_{\rho\sigma}$  é igual ao (a) (5.23) no calibre  $\xi = 1$ , também foi definido  $\lambda = (1 - \xi)$ .

Multiplicando (5.23) pelo segundo termo de (5.25), teremos

$$\begin{aligned} &g^2 \int_k \bar{u}(r_1) \gamma^\alpha t^a S^{(0)}(r_2 - k) \gamma^\rho t^r u(r_2) D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q) [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho k_\sigma] g^2 \bar{u}(p_1) \\ &\times \left\{ \gamma^\beta t^a S^{(0)}(p_2 + k) \gamma^\sigma t^r + \gamma^\sigma t^r S^{(0)}(p_1 - k) \gamma^\beta t^a \right\} \times \bar{u}(p_2), \end{aligned} \quad (5.26)$$

em especial, para

$$[d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho k_\sigma] g^2 \bar{u}(p_1) \times \left\{ \gamma^\beta t^a S^{(0)}(p_2 + k) \gamma^\sigma t^r + \gamma^\sigma t^r S^{(0)}(p_1 - k) \gamma^\beta t^a \right\} \bar{u}(p_2) \quad (5.27)$$

$$[d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g^2 \bar{u}(p_1) \times \left\{ \gamma^\beta t^a S^{(0)}(p_2 + k) k_\sigma \gamma^\sigma t^r + k_\sigma \gamma^\sigma t^r S^{(0)}(p_1 - k) \gamma^\beta t^a \right\} \bar{u}(p_2), \quad (5.28)$$

usando

$$k_\sigma \gamma^\sigma S^{(0)}(p_2 + k) = \frac{1}{\not{p}_2 + k - m} [S^{-1}(p_2 + k) - S^{-1}(p_2)] = 1 \quad (5.29)$$

desde que  $(\not{p}_2 - m)u(p_2) = 0$ . O mesmo vale para  $k_\sigma \gamma^\sigma S^{(0)}(p_1 - k)$  e ficamos com

$$\begin{aligned} & [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g^2 \bar{u}(p_1) \times \left\{ \gamma^\beta t^a t^r - t^r \gamma^\beta t^a \right\} \bar{u}(p_2), \\ &= [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g^2 \bar{u}(p_1) i f^{arn} \gamma^\beta t^n \bar{u}(p_2) - [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g^2 \bar{u}(p_1) i \gamma^\beta t^n f^{arn} \left( \frac{-q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \bar{u}(p_2), \\ &= [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g^2 \bar{u}(p_1) i f^{arn} P_\nu^\beta(q) \gamma^\nu t^n \bar{u}(p_2), \\ &= [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g f^{arn} P_\nu^\beta(q) i V^{\nu\mu}(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (5.30)$$

com

$$\bar{u}(p_1) i g t^n \gamma^\nu \bar{u}(p_2) = \mathcal{V}^{\nu\mu}(p_1, p_2). \quad (5.31)$$

Voltando a (5.23), e aplicando  $k_\rho$ , teremos

$$g^2 \int_k \bar{u}(r_1) \gamma^\alpha t^a S^{(0)}(r_2 - k) \gamma^\rho t^r u(r_2) D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q) [d(k^2)\lambda d(k^2)k_\rho] g f^{arn} P_\nu^\beta(q) i V^{\nu\mu}(p_1, p_2), \quad (5.32)$$

$$g \int_k \bar{u}(r_1) \gamma^\alpha t^a t^r u(r_2) D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q) [d(k^2)\lambda d(k^2)] g f^{arn} P_\nu^\beta(q) i V^{\nu\mu}(p_1, p_2), \quad (5.33)$$

usando

$$S^{(0)}(r_2 - k) k_\rho \gamma^\rho = 1, \quad (5.34)$$

e

$$f^{arn} t^a t^r = t^n (-C_A/2), \quad (5.35)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} & - g \int_k \bar{u}(r_1) \gamma^\alpha g t^n \frac{1}{2} C_A u(r_2) D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q) [d(k^2)\lambda d(k^2)] g P_\nu^\beta(q) i V^{\nu\mu}(p_1, p_2), \\ & - g \int_k V^{n\alpha}(r_1, r_2) \frac{1}{2} C_A D_{\alpha\beta}^{(0)}(k - q) [d(k^2)\lambda d(k^2)] g P_\nu^\beta(q) i V^{\nu\mu}(p_1, p_2), \\ & - g^2 \int_k V_\mu^a(r_1, r_2) \frac{1}{2} C_A D^{(0)\mu\nu}(k - q) \lambda \frac{1}{k^4} d(q^2) d(q^2) q^4 P_\nu^\beta(q) i V_\beta^a(p_1, p_2) \\ & - g^2 \int_k V_\alpha^a(r_1, r_2) g_\mu^\alpha \frac{1}{2} C_A D^{(0)\mu\nu}(k - q) \lambda \frac{1}{k^4} d(q^2) d(q^2) q^4 P_\nu^\beta(q) i V_\beta^a(p_1, p_2). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Abrindo o termo  $D^{(0)\mu\nu}(k - q)$ , teremos

$$V_\mu^a(r_1, r_2) g_\mu^\alpha \left( d((k - q)^2) g^{\mu\nu} - d((k - q)^2) \lambda \frac{(k - q)_\mu (k - q)_\nu}{(k - q)^2} \right) P_\nu^\beta V_\beta^a(p_1, p_2), \quad (5.37)$$

fazendo os produtos podemos obter

$$V_\mu^a(r_1, r_2) \left( d((k-q)^2) P^{\alpha\beta} - d((k-q)^2) \lambda g^{\alpha\mu} \frac{(k-q)_\mu (k-q)_\nu}{(k-q)^2} P^{\beta\nu} \right) V_\beta^a(p_1, p_2), \quad (5.38)$$

e assim abrir novamente  $g^{\alpha\mu}$  como  $P^{\alpha\mu}$  ao adicionar  $q^\alpha q^\mu / k^2$ . Teremos finalmente

$$(a) = (a)_{\xi=1} + V_\alpha^a(r_1, r_2) d(q^2) \Pi^{\alpha\beta}(q, \lambda) d(q^2) V_\beta^a(p_1, p_2), \quad (5.39)$$

com

$$\Pi^{\alpha\beta}(q, \lambda) = \frac{1}{2} C_A \lambda g^2 q^4 \left[ \lambda P^{\alpha\mu}(q) P^{\beta\nu}(q) \int_k \frac{(k-q)_\mu (k-q)_\nu}{k^4 (k-q)^4} - P^{\alpha\beta}(q) \int_k \frac{1}{k^4 (k-q)^2} \right]. \quad (5.40)$$

Fazendo as identificações:  $k-q \rightarrow k$  e  $k \rightarrow k+q$ , temos

$$\Pi^{\alpha\beta}(q, \lambda) = \frac{1}{2} C_A \lambda g^2 q^4 \left[ \lambda P^{\alpha\mu}(q) P^{\beta\nu}(q) \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{k^4 (k+q)^4} - P^{\alpha\beta}(q) \int_k \frac{1}{k^2 (k+q)^4} \right]. \quad (5.41)$$

As partes isoladas dependentes de  $\lambda$  ( $\xi$ ) independentemente da origem no diagrama, tem a forma

$$(i) = (i)_{\xi=1} + i \mathcal{V}_\alpha^a(r_1, r_2) id(q^2) \Pi_{(i)}^{\alpha\beta} id(q^2) i \mathcal{V}_\beta^a(p_1, p_2), \quad (5.42)$$

onde  $(i)$  vale para cada diagrama envolvido na interação, e pode-se observar na tabela (1), que a soma total dos termos de auto-energia se cancelam completamente e assim retirando a dependência de calibre da amplitude.

	$\lambda^2 \int_k \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 (k+q)^4}$	$\lambda \int_k \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 (k+q)^2}$	$\lambda \int_k \frac{1}{k^2 (k+q)^4}$	$\lambda \int_k \frac{1}{k^4}$
$\Pi_{(a)}$	$C_A/2$	0	$-C_A$	0
$2\Pi_{(b)}$	0	0	0	$C_A - 2C_f$
$2\Pi_{(c)}$	$-C_A$	$2C_A$	$2C_A$	$-2C_A$
$4\Pi_{(d)}$	0	0	0	$2C_f$
$\Pi_{(e)}$	$C_A/2$	$-2C_A$	$-C_A$	$C_A$
Total	0	0	0	0

Tabela 1 – Contribuições dos diferentes tipos de diagramas envolvidos na interação. (CORNWALL; PAPAVALASSILIOU; BINOSI, 2010)

A técnica de pinça resultou em vértices invariantes de calibre e que tem sua forma diagramática original, assim vemos dois pontos importantes para o uso da técnica: explícita que desde o início podemos trabalhar com o calibre  $\xi = 1$  que em muitos casos é de maior facilidade e também é obtido as sub-amplitudes independentes do calibre.

### 5.3 Auto-energia do Gluôn

Relembremos agora como se dá a auto-energia em *um-loop* do gluôn a partir de (4.49) que foi escrito para um campo escalar qualquer. No nosso caso, o gluôn terá duas contribuições relevantes (Figura 5), a primeira é dada como se segue

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)}(q) = \frac{1}{2}C_A g^2 \int_k \frac{\Gamma_{\alpha\mu\nu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu}}{k^2(k+q)^2}, \quad (5.43)$$

e também tem contribuição

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2}g^2 C_A \int_k \frac{k_\alpha(k+q)_\beta + k_\beta(k+q)_\alpha}{k^2(k+q)^2}. \quad (5.44)$$

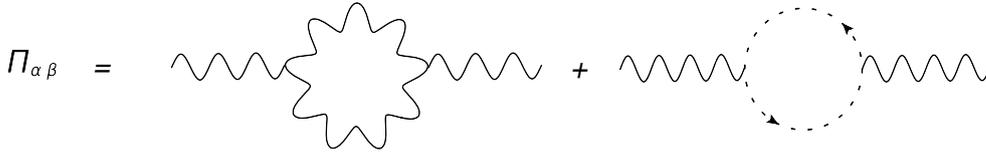


Figura 5 – Convencional auto-energia do gluon em um-loop.

Lembrando que  $\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \Gamma_{\mu\nu\alpha}(k, q, -k - q) = \Gamma_{\mu\nu\alpha}^F + \Gamma_{\mu\nu\alpha}^P$  e então  $\Gamma^F = \Gamma - \Gamma^P$ . Pode-se escrever o termo  $\Gamma_{\alpha\mu\nu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma\Gamma &= \Gamma^F\Gamma^F + \Gamma^F\Gamma^P + \Gamma^P\Gamma^F + \Gamma^P\Gamma^P, \\ &= \Gamma^F\Gamma^F + \Gamma\Gamma^P - \Gamma^P\Gamma^P + \Gamma^P\Gamma, \end{aligned} \quad (5.45)$$

com

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}^P \rightarrow \Gamma_{\alpha\mu\nu}^P = [(k+q)_\nu g_{\alpha\mu} - k_\mu g_{\alpha\nu}] \quad (5.46)$$

$$\Gamma_{\beta\mu\nu}^P \rightarrow \Gamma_{\beta}^{\mu\nu} = (k+q)^\nu g_{\beta}^{\mu} + k^\mu g_{\beta}^{\nu}, \quad (5.47)$$

teremos para  $\Gamma^P\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\nu}^P\Gamma_{\beta}^{\mu\nu} &= (k+q)_\nu g_{\alpha\mu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu} - k_\mu g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu} \\ &= -(k+q)_\nu\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} + k_\mu\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (\text{identidade de Ward}) \\ &= k^2 P_{\alpha\beta}(k) - q^2 P_{\alpha\beta}(q) - q^2 P_{\alpha\beta}(q) + (q+k)^2 P_{\alpha\beta}(k+q), \end{aligned} \quad (5.48)$$

e para  $\Gamma\Gamma^P$  com

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\nu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu P} &= (k+q)_\nu g_{\alpha\mu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu} - k_\mu g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta}^{\mu\nu} \\ &= -(k+q)_\nu\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} + k_\mu\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (\text{identidade de Ward}) \\ &= k^2 P_{\alpha\beta}(k) - q^2 P_{\alpha\beta}(q) - q^2 P_{\alpha\beta}(q) + (q+k)^2 P_{\alpha\beta}(k+q). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Somando (5.48) com (5.49) ficamos com

$$\begin{aligned} \Gamma^P\Gamma + \Gamma\Gamma^P &= -4q^2 P_{\alpha\beta}(q) + 2k^2 P_{\alpha\beta}(k) + 2(k+q)^2 P_{\alpha\beta}(k+q) \\ &= -4q^2 P_{\alpha\beta}(q) + 2k^2 g_{\alpha\beta} - 2k_\alpha k_\beta + 2(k+q)^2 g_{\alpha\beta} - 2(k+q)_\alpha(k+q)_\beta \end{aligned} \quad (5.50)$$

Calculando agora para  $\Gamma^P \Gamma^P$  temos

$$\Gamma^P \Gamma^P = -(k+q)^2 g_{\alpha\beta} + (k+q)_\alpha k_\beta + k_\alpha (k+q)_\beta - k^2 g_{\alpha\beta}, \quad (5.51)$$

após retirar os termos que somem por regularização dimensional ( $\int_k k^{-2} = 0$ ) temos por fim

$$\Gamma^P \Gamma + \Gamma \Gamma^P - \Gamma^P \Gamma^P = -4q^2 P_{\alpha\beta}(q) - 2(2k+q)_\alpha (2k+q)_\beta. \quad (5.52)$$

Chegamos em

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{2} g^2 C_A \left[ \int_k \frac{\Gamma_{\alpha\mu\nu}^F \Gamma_\beta^{F\mu\nu}}{k^2 (k+q)^2} - 2 \int_k \frac{(2k+q)_\alpha (2k+q)_\beta}{k^2 (k+q)^2} \right] - 2C_A g^2 \int_k \frac{q^2 P_{\alpha\beta}(q)}{k^2 (k+q)^2}, \quad (5.53)$$

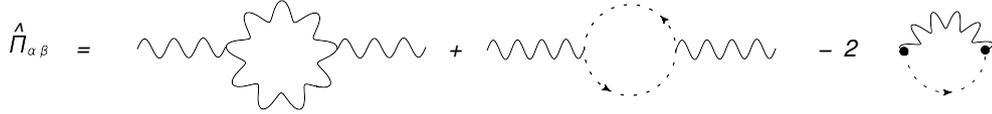


Figura 6 – Correção em um-loop da auto-energia do glúon após o processo de PT.

Somando (5.44), podemos ver que o termo de auto-energia na técnica de pinça é dado por

$$\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{2} g^2 C_A \left[ \int_k \frac{\Gamma_{\alpha\mu\nu} \Gamma_\beta^{\mu\nu}}{k^2 (k+q)^2} - \int_k \frac{k_\alpha (k+q)_\beta + k_\beta (k+q)_\alpha}{k^2 (k+q)^2} \right] + 2g^2 C_A \int_k \frac{q^2 P_{\alpha\beta}(q)}{k^2 (k+q)^2}, \quad (5.54)$$

e ao abrir os termos de vértice na decomposição da técnica da pinça obtemos a auto-energia do glúon na técnica da pinça

$$\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{2} g^2 C_A \left[ \int_k \frac{\Gamma_{\alpha\mu\nu}^F \Gamma_\beta^{F\mu\nu}}{k^2 (k+q)^2} - \int_k \frac{2(2k+q)_\alpha (2k+q)_\beta}{k^2 (k+q)^2} \right], \quad (5.55)$$

assim, concluímos a auto-energia final, dada pela soma de partes convencionais e auto-energia extraída de dois vértices

$$\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(q) = \Pi_{\alpha\beta}(q) + 2\Pi_{\alpha\beta}^P(q). \quad (5.56)$$

Agora vamos abrir o termo  $\Gamma_{\alpha\mu\nu}^F \Gamma_\beta^{F\mu\nu}$ ,

$$d(2k+q)_\alpha (2k+q)_\beta + 8q^2 P_{\alpha\beta}(q), \quad (5.57)$$

e inserimos o fator dimensional  $d$ , ficando com

$$\hat{\Pi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^2 C_A \left[ \int_k \frac{8q^2 P_{\alpha\beta}(q)}{k^2 (k+q)^2} + (d-2) \int_k \frac{(2k+q)_\alpha (2k+q)_\beta}{k^2 (k+q)^2} \right], \quad (5.58)$$

Olhando o denominador podemos definir

$$D_1 = -(k - q)^2, \quad D_2 = -k^2, \quad (5.59)$$

e assim com  $\Pi_\alpha^\alpha$  o numerador pode ser escrito como

$$4k^2 + 4k \cdot q + q^2 = -4D_2 + \frac{4}{2}(D_2 - D_1 - q^2) + q^2, \quad (5.60)$$

ficando com

$$\frac{1}{2}(d - 2) \int_k \frac{q^2 - 4D_2 + 2(D_2 - D_1) - 2q^2}{(-D_2) \cdot (-D_1)}, \quad (5.61)$$

lembramos que termos  $\int_k (k)^{-2} = 0$  para propagadores sem massa e assim todos os termos do numerador com  $D_1$  e  $D_2$  é zero, podemos também usar que  $\Pi_{\alpha\beta}(q) = P_{\alpha\beta}\Pi(q^2)$

$$\Pi_\alpha^\alpha(q) = \frac{P_\alpha^\alpha(q)}{2} \left[ \frac{q^2 8}{k^2(k+q)^2} + \frac{(d-2)}{P_\alpha^\alpha} \int_k \frac{(2k+q)^2}{k^2(k+q)^2} \right], \quad (5.62)$$

e usando que

$$(2k+q)^2 \xrightarrow{\text{reg. dim.}} -q^2, \quad P_\alpha^\alpha = g_\alpha^\alpha - \frac{q^2}{q^2} = d - 1, \quad (5.63)$$

e assim, como deve valer para todo índice, teremos por fim

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g^2 C_A \int_k \frac{q^2 P_{\alpha\beta} 8}{k^2(k+q)^2} - \frac{(d-2)}{(d-1)} \int_k \frac{q^2 P_{\alpha\beta}(q)}{k^2(k+q)^2}, \\ \hat{\Pi}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g^2 C_A \int_k \frac{q^2 P_{\alpha\beta}(q)}{k^2(k+q)^2} \left( \frac{7d-6}{d-1} \right), \\ \hat{\Pi}_{\alpha\beta}(q) &= P_{\alpha\beta}(q) \hat{\Pi}(q^2), \end{aligned} \quad (5.64)$$

sendo válido para  $d = 3, 4$  e obedece a identidade de Ward

$$q^\alpha \hat{\Pi}_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.65)$$

Em  $d = 4$ , temos

$$\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(q) = P_{\alpha\beta}(q) \hat{\Pi}(q^2), \quad (5.66)$$

com (CORNWALL; PAPAVALASSILIOU; BINOSI, 2010)

$$\hat{\Pi}(q^2) = i \frac{11C_A}{48} g^2 q^2 \left[ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E - \ln \frac{q^2}{\mu^2} + \frac{67}{33} \right]. \quad (5.67)$$

## 5.4 Processos no PT obedecendo WI

Até o momento usamos o procedimento da técnica de pinça, que se baseia no uso do surgimento de momentos longitudinais, para ativar identidades de Ward e assim foi possível mostrar explicitamente que para um processo de espalhamento entre quarks,

podemos considerar elementos de matriz-S no calibre  $\xi = 1$  sem nenhuma perda de generalidade e em seguida também foi possível determinar a auto energia do glúon a partir de um rearranjo nos elementos de vértice e o resultado foram três estruturas manifestamente transversais que admitem uma conservação independente e assim temos uma identidade de Ward livre de fantasmas, isto tem uma ligação forte com o truncamento da *Serie de Schwinger-Dyson* no qual a construção na técnica de pinça oferece a vantagem de tornar a série invariante por calibre e de forma a manter a transversalidade. Podemos já aqui perceber um padrão no uso da técnica empregada: fazemos uma expansão em um-loop trazendo o momento longitudinal á equação de expansão e de maneira a ativar a identidade de Ward, assim obtemos um resultado independente do calibre e que obedece o vinculo imposto pela identidade de Ward, a forma funcional da auto-energia do bóson deve obedecer  $(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$  (PESKIN; SCHROEDER, 1995).

O grande objetivo aqui é obter quantidades independentes do calibre e que satisfaçam a identidade de Ward, um fato ainda não discutido no trabalho é que usualmente teorias de calibre não-Abelianas tem uma identidade geral, chamada *identidade de Slavnov-Taylor* que relaciona vértices em ordens mais altas com contra-termos fantasmas e normalmente estas identidades levam em conta termos que não são fáceis de se trabalhar. Obter um propagador e termos de vértices independentes do calibre nos permite no manter no degraú da identidade de Ward em todas as ordem, sem inserir novas quantidades difíceis de se trabalhar. Iremos agora comentar a construção do *vértice quark-gluôn*. Para maiores detalhes sobre o procedimento de *três-gluôn*s e *vértice de quatro-gluôn*s, recomenda-se consultar as referências que serão dadas ao decorrer da seção.

O vértice de quark-gluôn  $\Gamma_\alpha^a(p_1, p_2)$  obedece a identidade de Ward em tree-level

$$q^\alpha \Gamma_\alpha^a(p_1, p_2) =igt^a[S^{-1}(p_1) - S^{-1}(p_2)], \quad (5.68)$$

queremos agora construir, ao menos em nível de um-loop, o vértice de quark-gluôn satisfazendo um análogo á identidade de Ward.

Seja um vértice quark-gluôn  $\Gamma_\alpha^a(p_1, p_2)$  dado pelo diagrama (b) da Figura 4

$$\mathcal{V}(r_1, r_2)D_{\rho\alpha}^{(0)}(q)D_{\mu\alpha}^{(0)}(k)g^2\bar{u}(p_1)\bar{u}(p_2)D_{\nu\alpha}^{(0)}(q+k)S^{(0)}(p_2-k)\gamma^\mu t^r \gamma^\nu t^a g\Gamma_{\rho\mu\nu}, \quad (5.69)$$

$$(b)_{\xi=1} = i\mathcal{V}_a^\alpha id(q^2)\bar{u}(p_1)i\tilde{\Gamma}_\alpha^a(p_1, p_2)u(p_2), \quad (5.70)$$

em um-loop, temos

$$i\tilde{\Gamma}_\alpha^a(p_1, p_2) = \frac{1}{2}g^3 C_A t^a \int_k \frac{[\Gamma_{\alpha\mu\nu}^F + \Gamma_{\alpha\mu\nu}^P]\gamma^\nu S^{(0)}(p_2-k)\gamma^\mu}{k^2(k+q)^2}, \quad (5.71)$$

onde temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\nu}^F &= g_{\mu\nu}(2k+q)_\alpha + 2q_\nu g_{\alpha\mu} - 2q_\mu g_{\alpha\nu}, \\ \Gamma_{\alpha\mu\nu}^P &= (k+q)_\nu g_{\alpha\mu} + k_\mu g_{\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

logo podemos reescrever como

$$\int_k \frac{[\Gamma_{\alpha\mu\nu}^P] \gamma^\nu S^{(0)}(p_2 - k) \gamma^\mu}{k^2(k+q)^2} = \int_k \frac{-(k+q)_\nu g_{\alpha\mu} \gamma^\nu S^{(0)}(p_2 - k) \gamma^\mu}{k^2(k+q)^2} - \int_k \frac{k_\mu g_{\alpha\nu} \gamma^\nu S^{(0)}(p_2 - k) \gamma^\mu}{k^2(k+q)^2}, \quad (5.73)$$

assim  $(k+q)$  e  $k$  ativam identidades de Ward que por fim nos dá

$$\int_k \frac{[\Gamma_{\alpha\mu\nu}^P] \gamma^\nu S^{(0)}(p_2 - k) \gamma^\mu}{k^2(k+q)^2} = 2\gamma_\alpha \int_k \frac{1}{k^2(k+q)^2}. \quad (5.74)$$

E neste caso também obtemos um termo do tipo propagador vindo da pinça que obedece uma identidade de Ward

$$\Pi_{\alpha\beta}^P(q) = g^2 C_A \int_k \frac{q^2 P_{\alpha\beta}(q)}{k^2(k+q)^2}. \quad (5.75)$$

Para o outro vértice espelho dado pelo diagrama (c) da Figura 4, temos

$$-ig\gamma^\alpha t^a i\gamma^\mu t^b gS(p_2+k) d(k^2) g_{\mu\nu} ig\gamma^\nu t^b S(p_1+k), \quad (5.76)$$

em que podemos usar

$$\begin{aligned} t^a t^b t^a &= -\frac{T_f}{N_c} t^b, \\ -\frac{T_f}{N_c} &= C_F - \frac{C_A}{2}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

nos retorna

$$i\hat{\Gamma}_\alpha^a(p_1, p_2) = g^3 t^a \left[ \frac{1}{2} C_A \int_k \frac{\Gamma_{\alpha\mu\nu}^F \gamma^\nu S^{(0)}(p_2 - k) \gamma^\mu}{k^2(k+q)^2} \right] - \left( C_F - \frac{C_A}{2} \right) \int_k \frac{\gamma^\mu S(p_1+k) \gamma^\alpha S(p_2+k) \gamma_\mu}{k^2}. \quad (5.78)$$

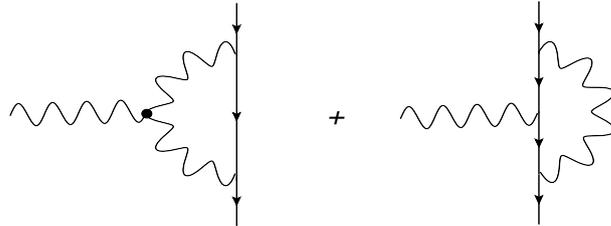


Figura 7 – Técnica da pinça aplicada em um vértice de quark-gluon em um-loop.

Como dito antes, já expandimos o vértice, ativamos identidades de Ward para realizar cancelamentos, agora queremos derivar a identidade de Ward que  $\hat{\Gamma}_\alpha^a$  satisfaz, sendo assim, apliquemos  $q^\alpha$ , onde usaremos

$$q^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu}^F = (k+q)^2 g_{\mu\nu} - k^2 g_{\mu\nu}, \quad (5.79)$$

obtendo por fim

$$\begin{aligned} q^\alpha \Gamma_\alpha^a(p_1, p_2) &= -ig^3 C_f t^a \left[ \int_k \frac{\gamma^\mu S(p_2+k) \gamma_\mu}{k^2} - \int_k \frac{\gamma^\mu S(p_1+k) \gamma_\mu}{k^2} \right], \\ &= ig t^a [\hat{\Sigma}(p_1) - \hat{\Sigma}(p_2)] \end{aligned} \quad (5.80)$$

O fato do vértice  $\Gamma_\alpha^a$  satisfazer a identidade de Ward, não é trivial, como dito antes, o usual é satisfazer uma identidade de Slavnov-Taylor com termos relacionadas a fantasmas e que não é nada fácil de se ter em mãos. Uma implicação imediata disso que podemos imaginar é que os termos cancelados ao invocar a técnica da pinça e os termos do tipo fantasma na identidade de Slavnov-Taylor estão conectados, este será o foco principal do próximo capítulo.

## 5.5 O Teorema Óptico

Na seção 4.3 foi citado rapidamente o teorema óptico, que funciona perfeitamente para teorias Abelianas (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Quando passamos á teorias não-Abelianas a situação se torna mais complicada, é de se imaginar que devido aos métodos de quantização empregados, o problema são os fantasmas (se surgissem no espectro teríamos partículas quebrando o *teorema spin-estatística*), mas acontece que eles são essenciais para garantir a unitariedade da matriz-S e não só isso, mas se cancelam completamente desaparecendo do espectro da teoria, um fato que explícita porque partículas fantasmas são fantasmas e não reais e porque no formalismo BRST construído, eliminamos os estados criados pelo operadores criação dos referentes campos fantasmas.

Começemos definindo as variáveis de Mandelstam. Seja um processo  $2 \rightarrow 2$  como na Figura 8, isto é, interação entre dois campos que trocam (interagem via) uma terceira partícula e sendo assim, o que muda entre o estado inicial e final é apenas o estado dos campos externos e vale sempre conservação do quadri-momento. Temos então

$$s = (p + p')^2 = (k + k')^2 \quad (5.81)$$

$$t = (k - p)^2 = (k' - p')^2 \quad (5.82)$$

$$u = (k' - p)^2 = (k - p')^2, \quad (5.83)$$

definidos por

- t: quadrado da diferença dos momentos iniciais e finais,
- u: definido fazendo  $k \rightarrow k'$  em t,
- s: quadrado do 4-momento inicial,

ou ainda

- s: Partícula 1, 2 se unem formando uma partícula intermediária que em seguida se divide em 3, 4,
- t: Partícula 1 emite uma intermediária e se torna 3, enquanto 2 absorve a partícula intermediária e se torna 4,

- u: canal  $t$  com 3, 4 trocados.

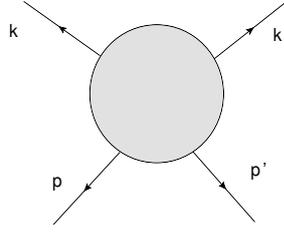


Figura 8 – Processo qualquer do tipo  $2 \rightarrow 2$ .

Consideremos agora quatro diagramas da interação  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$  em ordem  $g^4$ .

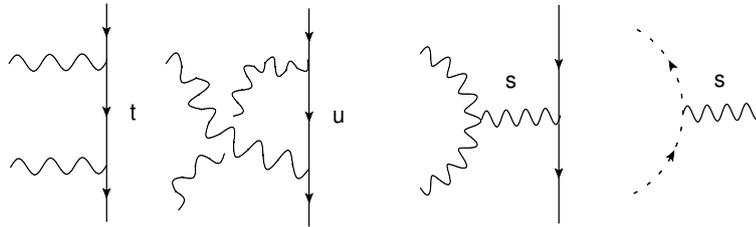


Figura 9 – Sub-amplitudes de interação  $q - g$  via variáveis de Mandelstam.

Temos  $Im(A) = \Sigma BB^\dagger$ , onde  $B$  é a amplitude para todos os processos possíveis ou ainda, a metade dos diagramas de Feynman  $q\bar{q} \rightarrow \dots$  como na Figura 9:

$$Im(\langle q\bar{q}|T|q\bar{q}\rangle) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int_{PS_{gg}} \langle q\bar{q}|T|gg\rangle \langle gg|T|q\bar{q}\rangle^\dagger, \quad (5.84)$$

a integral é uma medida de integração do espaço de fase de dois gluons

$$\int_{PS} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k_1 \int d^4k_2 \delta_+(k_1^2 - m_1^2) \delta_+(k_2^2 - m_2^2) \delta^4(q - k_1 - k_2), \quad (5.85)$$

e por motivos estatísticos temos o fator  $1/2$  inserido. Assumimos as seguintes variáveis de Mandelstam para este processo

$$s = q^2 = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 \quad (5.86)$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 \quad (5.87)$$

$$u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2, \quad (5.88)$$

definindo

$$\mathcal{V}_\alpha^a = \bar{v}(p_2) t^a \gamma_\alpha u(p_1), \quad (5.89)$$

temos para os diagramas (a), (b), (c)

$$B_{s\mu\nu}^{mn} = -g f^{mnc} D^{(\xi)\rho\lambda}(q) \Gamma_{\lambda\mu\nu}(q, -k_1, -k_2) \mathcal{V}_\rho^c, \quad (5.90)$$

$$B_{t\mu\nu}^{mn} = -ig^2 \bar{v}(p_2) [t^n \gamma_\nu S^{(0)}(p_1 - k_1) t^m \gamma_\mu + t^m \gamma_\mu S^{(0)}(p_1 - k_2) \gamma_\nu t^n] u(p_1), \quad (5.91)$$

onde temos

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}(q, -k_1, -k_2) = (k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (q + k_2)_\mu g_{\lambda\nu} - (q + k_1)_\nu g_{\lambda\mu}, \quad (5.92)$$

e o termo que depende do procedimento de fixação de calibre fica sendo

$$D^{(\xi)\rho\lambda}(q) = \frac{1}{q^2} \left( g^{\rho\lambda} - (1 - \xi) \frac{q^\rho q^\lambda}{q^2} \right). \quad (5.93)$$

Agora definimos o tensor polarização  $L_{\mu\nu}(k)$  de uma partícula sem massa e de spin-1

$$L_{\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu - n_\nu k_\mu}{n \cdot k} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2}, \quad (5.94)$$

em que para glúons on-shell vale  $k^2 = 0$  e  $k^\mu L_{\mu\nu}(k) = 0$ . Pegando o primeiro termo de (5.91) temos

$$B_{s\mu\nu}^{mn} = g^2 f^{mnc} \mathcal{V}_\alpha^a d(q^2) \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(q, k_1, k_2), \quad (5.95)$$

e se usarmos a expansão da técnica da pinça (5.12), (5.13) e (5.14) obtemos que o termo  $\Gamma^P$  vai a zero completamente desde que temos um termo ativando a identidade de Ward

$$-(1 - \xi) \frac{q^\rho q^\lambda}{q^2} \Gamma_{\lambda\mu\nu} = -(1 - \xi) \frac{q^\rho}{q^2} (k_1^2 - k_2^2) g_{\mu\nu}, \quad (5.96)$$

com  $k^2 = 0$ , restando apenas o termo  $\Gamma^F$ , um fato essencial já que não é de se esperar que conservação da corrente sozinha garanta a dependência do parâmetro de fixação de calibre. Resta então a seguinte amplitude

$$\mathcal{M} = [B_s^F + B_t]_{\mu\nu}^{mn} L^{\mu\sigma}(k_1) L^{\nu\lambda}(k_2) [B_s^F + B_t]_{\sigma\lambda}^{mn\dagger}, \quad (5.97)$$

com

$$B_{s\mu\nu}^{Fmn} = -g f^{mnc} \frac{g^{\rho\lambda}}{q^2} \Gamma_{\lambda\mu\nu}^F(q, -k_1, -k_2) V_\rho^c. \quad (5.98)$$

Para o diagrama (d) temos

$$\mathcal{S}^{mn} = \frac{1}{2} g f^{amn} d(q^2) (k_1 - k_2)^\mu \mathcal{V}_\mu^a, \quad (5.99)$$

e definimos

$$\mathcal{R}_\mu^{mn} = g f^{amn} \mathcal{V}_\mu^a \quad (5.100)$$

de forma que temos

$$k_1^\mu \mathcal{R}_\mu^{mn} - k_2^\mu \mathcal{R}_\mu^{mn} = q^2 \mathcal{S}^{mn}, \quad (5.101)$$

assim podemos usar

$$k_1^\mu \Gamma_{\alpha\mu\nu}^F(q, -k_1, -k_2) = -q^2 g_{\alpha\nu} + (k_1 - k_2)_\alpha - \alpha k_{2\nu}, \quad (5.102)$$

e calcular

$$\begin{aligned}
k_1^\mu [B_s]_{\mu\nu}^{Fmn} &= g^2 f^{mnc} \mathcal{V}_\alpha^c \frac{1}{q^2} k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu}^{F\alpha}, \\
&= g^2 f^{mnc} \mathcal{V}_\alpha^c \frac{1}{q^2} [-q^2 g_\nu^\alpha + (k_1 - k_2)^\alpha k_{2\nu}], \\
&= -g^2 f^{mnc} \mathcal{V}_\nu^c + g^2 f^{mnc} \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\alpha^c k_1^\mu (k_1 - k_2)^\alpha k_{2\nu}, \\
&= 2k_{2\nu} \mathcal{S}^{mn} - \mathcal{R}_\nu^{mn},
\end{aligned} \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}
k_1^\mu [B_t]_{\mu\nu}^{mn} &= ig^2 [\bar{v}(p_2) t^n \gamma_\nu S^{(0)}(p_1 + k_1) t^m k_1^\mu \gamma_\mu u(p_1)] \\
&\quad + ig^2 [\bar{v}(p_2) t^m k_1^\mu \gamma_\mu S^{(0)}(p_1 + k_2) t^n \gamma_\nu u(p_1)] \\
&= g^2 [\mathcal{V}_\nu^a f^{mna}], \\
&= \mathcal{R}_\nu^{mn}.
\end{aligned} \tag{5.104}$$

De maneira análoga, temos

$$k_2^\nu [B_s^F]_{\mu\nu}^{mn} = 2k_1^\mu \mathcal{S}^{mn} + \mathcal{R}_\mu^{mn}, \tag{5.105}$$

$$k_2^\nu [B_t]_{\mu\nu}^{mn} = -\mathcal{R}_\mu^{mn}, \tag{5.106}$$

logo

$$\begin{aligned}
k_2^\nu k_1^\mu [B_s^F]_{\mu\nu}^{mn} &= 2k_2^\nu k_{2\nu} \mathcal{S}^{mn} - k_{2\nu} \mathcal{R}_\nu^{mn}, \\
&= q^2 \mathcal{S}^{mn},
\end{aligned} \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned}
k_2^\nu k_1^\mu [B_t]_{\mu\nu}^{mn} &= k_2^\nu \mathcal{R}_\nu^{mn}, \\
&= -q^2 \mathcal{S}^{mn}.
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Desta forma, quando operarmos o produto  $L^{\mu\mu'} L^{\nu\nu'}$  ficamos com

$$\mathcal{M} = (B_s^F B^{F\dagger} - 8\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger) + (B_s^F B_t^\dagger + B_s^{F\dagger} B_t) + B_t B_t^\dagger. \tag{5.109}$$

No momento estamos preocupados com os termos envolvendo fantasmas e por isso iremos focar na primeira parte da amplitude, que definimos ser uma sub-amplitude do tipo propagador que denotaremos por  $(rhs)_1$ , o lado direito do teorema óptico

$$(rhs)_1 = \frac{1}{4} \int_{PS} (B_s^F B_s^{F\dagger} - 8\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger), \tag{5.110}$$

olhando (5.98), (5.99) e ainda (5.57), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho\mu\nu}^F \Gamma_\lambda^{F\mu\nu} &= [(k_1 - k_2)_\rho g_{\mu\nu} + 2q_\mu g_{\rho\nu} - 2q_\nu g_{\rho\mu}] [(k_1 - k_2)_\lambda g^{\mu\nu} + 2q^\mu g_\lambda^\nu - 2q^\nu g_\lambda^\mu], \\
&= 4(k_1 - k_2)_\lambda (k_1 - k_2)_\rho - 8q^2 \left( -g_{\rho\lambda} + \frac{q_\rho q_\lambda}{q^2} \right),
\end{aligned} \tag{5.111}$$

$$\begin{aligned}
S^{mn} S^{mn\dagger} &= \left( \frac{1}{2} g f^{mnc} \frac{1}{q^2} (k_1 - k_2)^\rho \mathcal{V}_\rho^c \right) \left( \frac{1}{2} g f^{mnc} \frac{1}{q^2} (k_1 - k_2)^\lambda \mathcal{V}_\lambda^c \right), \\
&= \frac{1}{4} C_A \mathcal{V}_\rho^c \frac{(k_1 - k_2)^\rho (k_1 - k_2)^\lambda}{(q^2)^2} \mathcal{V}_\lambda^c,
\end{aligned} \tag{5.112}$$

somando

$$\begin{aligned}
4(rhs)_1 &= g^2 f^{mnc} f^{mnc} \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\mu^c \left( 4(k_1 - k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\nu + 8q^2 P^{\mu\nu}(q) \right) \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\nu^c \\
&\quad - 8 \frac{1}{4} g^2 C_A \mathcal{V}_\mu^c \frac{(k_1 - k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\nu}{q^4} \mathcal{V}_\nu^c, \\
&= g^2 f^{mnc} f^{mnc} \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\mu^c [8q^2 P^{\mu\nu}(q) + (4 - 2)(k_1 - k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\nu] \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\nu^c,
\end{aligned} \tag{5.113}$$

e podemos observar que esta equação é muito próxima á equação (5.58) com  $d = 4$ . Realizemos agora as integrações no espaço de fase invariante por Lorentz (LIPS) (SREDNICKI, 2007)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \delta_+(k_1^2 - m_1^2) \delta_+(k_2^2 - m_2^2) \delta^4(q - k_1 - k_2) \\
&= \frac{\lambda^{1/2}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{8q^2} \frac{d^2 d\Omega}{(2\pi)^2},
\end{aligned} \tag{5.114}$$

com  $l\lambda(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4yz$  e desta forma, para dois gluões, partículas sem massa temos  $\lambda^{1/2}(q^2, 0, 0) = q^2$  e a integração ocorrendo sobre ângulo sólido resulta em  $(4\pi)$

$$\int_{LIPS} = \frac{1}{8\pi}. \tag{5.115}$$

O segundo termo nos dá uma integração na forma (SREDNICKI, 2007)

$$\begin{aligned}
\int_{LIPS} (k_1 - k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\nu &= \left\{ \frac{-\lambda(q^2, m_1^2, m_2^2)}{3q^2} P_{\mu\nu}(q) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\lambda(q^2, m_1^2, m_2^2)}{q^2} - q^2 + 2(m_1^2 + m_2^2) \right] \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right\} \int_{LIPS} \\
&= \left\{ -\frac{q^4}{3q^2} P_{\mu\nu}(q) + \left[ \frac{q^4}{q^2} - q^2 \right] \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right\} \int_{LIPS} \\
&= -\frac{q^2}{24\pi} P_{\mu\nu}(q).
\end{aligned} \tag{5.116}$$

Desta forma, juntando os resultados obtidos, temos por fim

$$\begin{aligned}
(rhs)_1 &= g^2 C_A \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\mu^c [8q^2 P^{\mu\nu}(q) \frac{1}{8\pi} - 2 \frac{q^2}{24\pi} P_{\mu\nu}(q)] \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\nu^c \\
&= g^2 C_A \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\mu^c \left[ \frac{1}{48} q^2 P^{\mu\nu}(q) \right] \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\nu^c,
\end{aligned} \tag{5.117}$$

definindo

$$b = \frac{11C_A}{48\pi^2}, \tag{5.118}$$

temos

$$(rhs)_1 = g^2 b \pi \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\mu^c [q^2 P^{\mu\nu}(q)] \frac{1}{q^2} \mathcal{V}_\nu^c, \quad (5.119)$$

e olhando (5.67) podemos observar que  $(rhs)_1$  é precisando a parte imaginária de  $\hat{\Pi}(q)$ , isto é, o lado esquerdo do teorema óptico

$$(lhs)_1 = (rhs)_1. \quad (5.120)$$

Desta forma fica mostrado que a auto-energia do processo de  $PT$  obedece a versão forte do teorema óptico, isto é, cada sub-amplitude satisfaz o teorema separadamente e consequentemente fica explicito a necessidade dos fantasmas introduzidos por Faddeev e Popov. Na ausência dos fantasmas não valeria o teorema óptico e não teríamos a unitariedade da matriz-S obedecida.

## 5.6 Equivalência $PT$ e método de campos de fundo (BFM)

Como discutido, invariância por transformação de calibre da ação clássica é perdida quando é de interesse quantizar a teoria, desde que necessitamos de fixar o calibre. O método de campos de fundo (BFM), é um formalismo que permite fixar o calibre e em seguida calcular quantidades quânticas ao mesmo tempo que não se perde explicitamente a invariância de calibre.

Dado uma ação típica de Yang-Mills não-Abeliana

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} G^a G^a + b^a \frac{\partial G^a}{\partial Q_\mu^b} D_\mu^{bc} c^c. \quad (5.121)$$

O próximo passo é escolher um calibre mas de maneira que o campo  $A_\mu$  ainda permanecerá com a devida simetria de calibre. A invariância é assegurada pela fonte externa de acoplamento do campo. No termo de fixação de calibre substitui-se a derivada usual pela derivada covariante em relação ao campo de fundo

$$\hat{D}_\mu(\hat{A}) = \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu, \quad (5.122)$$

e escolhemos

$$G^a = (\hat{D}_\mu)^{ab} - igT_A^a \hat{A}_\mu^a, \quad (5.123)$$

para o termo de fixação de calibre. O termo de Faddeev-Popov da integral funcional sofre a mesma mudança

$$\mathcal{L}_{gh} = b^a \hat{D}^{\mu ab} D_\mu^{bc} c = -(\hat{D}^\mu b)^a (D_\mu c)^a. \quad (5.124)$$

Sobre transformação infinitesimal temos

$$\delta_G A_\mu^a(x) = -D_\mu^{ac} \theta^c(x), \quad (5.125)$$

$$\delta_G c^b(x) = -ig\theta(x) (T_A^a)^{bc} c^c(x), \quad (5.126)$$

$$\delta_G \hat{A}_\mu^a(x) = 0, \quad (5.127)$$

e aqui o campo  $\hat{A}$  é fixo e não muda sobre transformação de calibre. Como discutido antes, as Lagrangianas dos campos fantasma e de fixação de calibre quebram a simetria e sabendo disso, definimos uma transformação de calibre para o campo de fundo

$$\delta_B \hat{A}_\mu^a(x) = -D_\mu^{ac} \theta^c(x), \delta_{BG} A_\mu^a(x) = 0, \delta_{BG} c^b(x) = 0, \quad (5.128)$$

e a Lagrangiana  $\mathcal{L}_{YM}$  invariante sobre esta transformação, mas os termos de fixação e de fantasmas não são invariantes por  $\delta_{BG}$  sozinho, mas sim sobre a transformação combinada  $\delta_B + \delta_{BG}$

$$\delta_{G+BG}(A - \hat{A})_\mu^b = -(D - \hat{D})_\mu^{ba} \theta^a(x) = ig\theta^a (T^a)^{bc} (A - \hat{A})_\mu^c. \quad (5.129)$$

E foi possível obter uma Lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}$  invariante sobre transformação combinada.

Se colocarmos  $A = \hat{A}$ , temos

$$\mathcal{L}_{gf} = 0, \quad \mathcal{L}_{gh} = -(\hat{D}^\mu b)^a (\hat{D}_\mu c)^a, \quad (5.130)$$

e obtemos uma ação quântica expressa em termos da ação clássica mais termos de correções em loops

$$\Gamma[\hat{A}, c, b, A] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} - (\hat{D}^\mu b)^a (\hat{D}_\mu c)^a \right]. \quad (5.131)$$

Para calcular as correções em loops comentada, temos que calcular funções de Green  $1PI$  no calibre de campo de fundo com propagadores externos removidos e substituídos por campos externos. Assim, o campo externo de calibre deve ser posto igual ao campo de fundo

$$A = \hat{A} + \mathcal{A}, \quad (5.132)$$

e desta forma obter a integral de caminho em termos de  $\mathcal{A}$ . Assim, restauramos o termo de fixação de calibre, dado agora por

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\hat{D}^\mu \mathcal{A}_\mu)^a (\hat{D}^\nu \mathcal{A}_\nu)^a. \quad (5.133)$$

O termo de campo de força se escrever como

$$F_{\mu\nu}^a = \hat{F}_{\mu\nu}^a + (\hat{D}_\mu \mathcal{A}_\nu)^a - (\hat{D}_\nu \mathcal{A}_\mu)^a + gf^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \quad (5.134)$$

e a Lagrangiana completa se escreve como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} = & -\frac{1}{4} \hat{F}^{a\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} (\hat{D}^\mu \mathcal{A}^\nu)^a (\hat{D}_\mu \mathcal{A}_\nu)^a \\ & + \frac{1}{2} (\hat{D}^\mu \mathcal{A}^\nu)^a (\hat{D}_\nu \mathcal{A}_\mu)^a - \frac{1}{2} gf^{abc} \hat{F}^{a\mu\nu} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c + \dots, \end{aligned} \quad (5.135)$$

agora manipulando o terceiro termo do lado direito da equação anterior, obtemos

$$(\hat{D}^\mu \mathcal{A}^\nu)^a (\hat{D}_\nu \mathcal{A}_\mu)^a = +(\hat{D}^\mu \mathcal{A}_\mu)^c (\hat{D}^\nu \mathcal{A}_\nu)^c - gf^{abc} \hat{F}^{a\mu\nu} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \quad (5.136)$$

e o primeiro termo desta equação se cancela com o primeiro termo da equação de fixação de calibre (5.133) no calibre  $\xi = 1$ . É aqui que reside a *equivalência entre a técnica da pinça com o método de campo de fundo*. No calibre  $\xi = 1$ , temos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\hat{F}^{a\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2}(\hat{D}^\mu\mathcal{A}^\nu)^a(\hat{D}_\mu\mathcal{A}_\nu)^a - (\hat{D}^\mu b)^a(\hat{D}_\mu c)^a - \frac{1}{2}gf^{abc}\hat{F}^{a\mu\nu}\mathcal{A}_\mu^b\mathcal{A}_\nu^c + \dots \quad (5.137)$$

O exemplo mais claro de se observar a equivalência entre a técnica de pinça e o método de campo de fundo (BFM) é em ordem de one-loop calculando os diagramas do BFM no calibre  $\xi = 1$  seguindo as regras dadas por L. F. Abbott (ABBOTT, 1981), a forma funcional é dada como a seguir

$$(a)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^2C_A \int_k \frac{1}{k^2(k+q)^2} \Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, -k-q, k) \Gamma_\beta^{\mu\nu}(q, -k-q, k), \quad (5.138)$$

$$(b)_{\alpha\beta} = -g^2C_A \int_k \frac{1}{k^2(k+q)^2} (2k+q)_\alpha(2k+q)_\beta, \quad (5.139)$$

e são idênticos á equação (5.55) calculados na técnica de pinça.

Funções de n-pontos geradas pelo funcional geratriz no método de campo de fundo são invariantes por transformação de calibre, de maneira que satisfazem identidades do tipo de Ward, como visto nas equações (5.138) e (5.139), que são semelhantes ás encontradas na técnica de pinça e que conseqüentemente foram mostradas satisfazerem identidade de Ward. Mas no BFM, estas funções de Green, em especial off-shell, continuam dependentes do calibre, diferente da técnica de pinça, que busca gerar rearranjos e cancelamentos nas séries perturbativas para enfim gerar funções de Green, em especial as off-shell que entram em matriz-S, que sejam invariantes do calibre. Conseqüentemente pode-se observar que é possível usar os dois procedimentos combinados, mesmo quando usado um calibre diferente de  $\xi = 1$  no BFM, ainda haverá momentos longitudinais que poderá invocar a técnica de pinça.

## 6 Formalismo de Batalin-Vilkovisky

### 6.1 Anticampos

Desde o início foi visto que dado uma lagrangiana típica de Yang-Mills não-Abeliana pode-se construir uma integral funcional (ou ainda, função de partição) que será usada para construir elementos de matriz-S após procedimento de quantização adequado. É visto que para se quantizar uma teoria de calibre não-Abeliana é necessário fixar o calibre e que observáveis são independentes do procedimento de fixação de calibre (ou ainda, parâmetro de fixação de calibre). O objetivo de *Batalin* e *Vilkovisky* era de definir uma integral funcional no qual fosse possível definir todos os observáveis da teoria (TROST; NIEUWENHUIZEN; PROEYEN, 1990). O formalismo BRST é o procedimento de quantização covariante e que não exige em seu formalismo qualquer menção ao parâmetro de fixação de calibre e além disso se baseia no uso de álgebra cohomológica construído após identificação do *espaço de fase*, *superfície de vínculo* e *funções que são constantes ao longo das orbitas de Gauge*, e que apesar de não trabalhado é um formalismo que tem como base o formalismo Hamiltoniano de vínculos de primeira e segunda classe (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992). Dito isso, queremos construir uma integral de trajetória quântica na forma lagrangiana a partir de uma ação clássica  $S_0$ , isto é, o objetivo de Batalin e Vilkovisky.

Pelo princípio básico da mecânica quântica, dado a propagação de um bóson entre dois pontos, não se pode determinar completamente a trajetória do mesmo, desta forma, usa-se o formalismo de integral de trajetória de Feynman, comentado anteriormente e que se leva em conta a integral sobre a média (ponderada) de todas as possíveis trajetórias de propagação do bóson entre os dois pontos. Em geral o espaço da integral é enorme, tendo um número incontável de dimensões para se levar em conta e conseqüentemente a integral se torna mal definida. Desde que estejamos falando de um bóson vetorial, temos que levar em conta ainda a liberdade de calibre e que duas trajetórias consideradas na integral podem ser mapeadas uma na outra e conseqüentemente sendo contada duas vezes. Nossos observáveis são elementos de um espaço de funções suaves  $C^\infty(M)$  e que não devem depender de fixação e de transformação de calibre, isto é, devemos ter a integral de trajetória dada pelo mapa

$$\langle \rangle: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

onde para um observável  $f \in C^\infty(M)$ , definimos um forma volume  $\Omega$  de maneira a definirmos a integral funcional

$$\langle f \rangle = \int_M f \Omega, \quad (6.2)$$

que fornece a habilidade de relacionar elementos de  $C^\infty(M)$  que terão o mesmo valor se  $f\Omega$  e  $f'\Omega$  se distinguirem por um termo  $d$ -exato, nos mostrando que observáveis são elementos de um grupo de cohomologia.

Seja o espaço funcional  $\mathcal{I}$  infinito dimensional de todas as histórias de propagação de um campo. Para um campo  $\phi(x^\mu) = \phi^i$  qualquer, um ponto  $\phi^i$  em  $\mathcal{I}$  é uma história arbitrária que pode ou não fechar *on-shell*, isto é,  $\delta S_0/\delta\phi^i = 0$  obedecida, com  $S_0$  sendo a ação clássica. O fechamento *on-shell* determina uma subvariedade  $\Sigma$  em  $\mathcal{I}$ , chamada de superfície estacionária. Esta subvariedade é apenas o espaço de fase covariante e  $\mathcal{I}$  não é restrito por condições de contorno de maneira a conter todas as soluções das equações dinâmicas. Desta forma, fica claro que observáveis são funções definidas em  $\Sigma$ , isto é, elementos de  $C^\infty(\Sigma)$ .

Qualquer função  $f$  de campos em  $\Sigma$  (histórias em  $\mathcal{I}$  com suas equações dinâmicas válidas) pode ser estendida para fora de  $\Sigma$  a uma função de campos  $F(\phi^i)$  definido em  $\mathcal{I}$ , isto é, a um elemento de  $C^\infty(\mathcal{I})$  e esta extensão pode não ser única. Dado duas extensões  $F$  e  $F'$ , elas irão ser distinguíveis por funções que são zero em  $\Sigma$  e que conseqüentemente formam um ideal  $\mathcal{N}$ . A álgebra de funções  $C^\infty(\Sigma)$  é assim a álgebra quociente  $C^\infty(\mathcal{I})/\mathcal{N}$ .

Transformações de calibre geram orbitas bem definidas na superfície estacionária  $\Sigma$  (simetria de Gauge é puramente matemática, dado uma transformação de calibre, a física é exatamente a mesma). As funções invariantes por transformações de calibre são constantes ao longo das orbitas de calibre e, assim, induzem funções definidas no espaço quociente  $\Sigma/G$  da superfície estacionária por orbitas de calibre.

Dado um conjunto de campos com suas histórias definidas sobre  $\mathcal{I}$ , a superfície estacionária  $\Sigma$  é dada por

$$\frac{\delta S_0}{\delta\phi^i} = 0, \quad (6.3)$$

com transformações de calibre sobre os campos definindo as orbitas de gauge como

$$\delta_\epsilon F = \frac{\delta F}{\delta\phi^i} R_\alpha^i \epsilon^\alpha. \quad (6.4)$$

A descrição de observáveis envolve duas etapas

- Restrição á superfície estacionária (condição on-shell)
- Implementação da condição de invariância por transformação de calibre em  $\Sigma$ .

O diferencial *BRST* deve corresponder á soma de diferenciais que apliquem as restrições citadas acima

$$s = \delta + d + \dots, \quad (6.5)$$

com  $\delta$  sendo o diferencial de *Koszul-Tate* que implementa a restrição á superfície estacionária e segundo o diferencial  $d$  longitudinal exterior que tira para fora as funções invariantes por transformações de calibre.

Para cada equação de campo  $\delta S_0/\delta\phi^i = 0$ , conseqüentemente para cada  $\phi^i$ , introduzimos um *anticampo*  $\phi_i^*$  e definimos o diferencial de Koszul-Tate  $\delta$  em  $\phi^i$  e  $\phi_i^*$  como

$$\delta\phi^i = 0, \quad (6.6)$$

$$\delta\phi_i^* = -\frac{\delta S_0}{\delta\phi^i}. \quad (6.7)$$

Os anticampos foram introduzidos por Zinn-Justin como fontes acopladas á variação *BSRT* dos campos com objetivo de controlar como a simetria BRST não-linear passa pelo processo de renormalização (NASTASE, 2019).

Para garantir propriedades de graduação do diferencial  $\delta$ , devemos ter a seguinte graduação de número anticampo

$$\begin{aligned} \epsilon(\phi_i^*) &= 1, \\ \text{antifd}(\phi_i^*) &= 1, \quad \text{antifd}(\phi^i) = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

e isto é dado assim, desde que o diferencial de Koszul-Tate age somente em anticampos retornando a equação dinâmica do respectivo campo,  $\text{Im}(\delta)_0 = \mathcal{N}$ , e leva a zero os campos usuais  $\text{Ker}(\delta)_0 = C^\infty(\mathcal{I})$

$$H_0(\delta) = C^\infty(\Sigma). \quad (6.9)$$

Agora devemos construir o diferencial exterior longitudinal  $d$  de maneira que implemente a segunda condição de invariância por transformação de calibre em  $\Sigma$ . As orbitas geradas pelas transformações de calibre são integráveis quando as equações de movimento valem, isto é, na superfície estacionária  $\Sigma$  e assim definimos o operador derivada exterior  $d$  que age em *formas-p* ao longo das orbitas de gauge

$$H^0(d) = \{\text{funções invariantes por transformações de calibre}\}, \quad (6.10)$$

Aqui reside a motivação da introdução de campos fantasmas  $C^\alpha$  de maneira que

$$\text{puregh}(C^\alpha) = 1, \quad \epsilon(C^\alpha) = 1, \quad (6.11)$$

e temos

$$dF = \frac{\delta F}{\delta\phi^i} R_\alpha^i C^\alpha, \quad (6.12)$$

$$dC^\alpha = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha C^\beta C^\gamma. \quad (6.13)$$

Na formulação Lagrangiana não temos uma estrutura de Poisson Bracket natural no espaço  $\mathcal{I}$  de todas as histórias, porém, acontece que há uma estrutura de antibracket natural que pode ser definida. Denotamos a estrutura de antibracket por  $(, )$  de maneira que

$$sA = (A, S), \quad (6.14)$$

com  $S$  sendo o gerador de simetria BRST, onde por motivação da construção de Zinn-Justin, contém a ação clássica  $S_0$  mais termos de fonte

$$S[\phi, \phi^*] = S_0[\phi] + \sum_{\phi} \phi^* s\phi. \quad (6.15)$$

É natural declarar que os pares  $\phi^i, \phi_i^*; C^\alpha, \phi_\alpha^*$  são conjugados

$$(\phi^i, \phi_j^*) = \delta_j^i, \quad (6.16)$$

$$(C^\alpha, \phi_\beta^*) = \delta_\beta^\alpha. \quad (6.17)$$

Assim, podemos definir o antibracket á funcionais locais  $A$  e  $B$  dos campos, fantasmas e anticampos, como se segue

$$(A, B) = \frac{\delta^R A}{\delta \phi^i} \frac{\delta^L B}{\delta \phi_i^*} - \frac{\delta^R A}{\delta \phi_i^*} \frac{\delta^L B}{\delta \phi^i} + \frac{\delta^R A}{\delta C^\alpha} \frac{\delta^L B}{\delta \phi_\alpha^*} - \frac{\delta^R A}{\delta \phi_\alpha^*} \frac{\delta^L B}{\delta C^\alpha}. \quad (6.18)$$

Por conta da paridade e número fantasma do antibracket, o gerador  $S$  da simetria BRST (6.14) deve ser par e ter número fantasma zero,

$$\epsilon(S) = 0, \quad gh(S) = 0. \quad (6.19)$$

Além disso, a nilpotência do operador  $S$  se traduz á chamada *master equation*

$$(S, S) = 0. \quad (6.20)$$

Os primeiros termos em  $S$  devem gerar  $\delta$  e  $d$  e isto significa que na expansão de  $S$  segue o número anti-fantasma

$$S = \sum_{n \geq 0} S^{(n)}, \quad \text{antifd}(S^{(n)}) = n, \quad (6.21)$$

devemos ter

$$S^{(0)} = S_0, \quad (6.22)$$

de maneira que  $(\phi_i^*, S) = \delta \phi_i^* + \dots$ ; e ainda

$$S^{(1)} = \phi_i^* R_\alpha^i C^\alpha, \quad (6.23)$$

de maneira que  $(\phi_\alpha^*, S) = \delta \phi_\alpha^* + \dots$  e  $(\phi^i, S) = d\phi^i + \dots$

Explicitamente para o diferencial de Koszul-Tate temos,

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= 0, & \delta c^a &= 0, \\ \delta A_a^{*\mu} &= D_\nu F^{\mu\nu}, & \delta C_a^* &= D_\mu A_a^{*\mu},\end{aligned}\tag{6.24}$$

e para o diferencial exterior longitudinal,

$$\begin{aligned}dA_\mu^a &= D_\mu c^a, & dc^a &= -\frac{1}{2}f_{bc}^a c^b c^c, \\ dA_a^{*\mu} &= f_{ac}^b A_b^{*\mu} c^c, & dC_a^* &= f_{ac}^b C_b^* c^c,\end{aligned}\tag{6.25}$$

de maneira que ficamos com

$$\begin{aligned}sA_\mu^a &= D_\mu c^a, & sc^a &= -\frac{1}{2}f_{bc}^a c^b c^c, \\ sA_a^{*\mu} &= D_\nu F_a^{\nu\mu} + f_{bc}^a A_b^{*\mu} c^c, & sC_a^* &= D_\mu A_a^{*\mu} + f_{ac}^b C_b^* c^c.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Tendo definido o formalismo de anticampos e a equação mestre (master equation), resta definir o funcional integral buscado por Batalin e Vilkovisky.

## 6.2 Identidades de Slavnov-Taylor e Lee-Zinn-Justin

Comecemos lembrando da equação (4.58) e assim, escrevemos para o nosso caso não-Abeliano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + \bar{\psi}_i(i\not{D} - m)_{ij}\psi_j - b^a \partial_\mu (D_\mu^{ab} c^b) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\ &+ J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \beta_a c^a + b_a \gamma^a, \\ &= \mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{fontes}\end{aligned}\tag{6.27}$$

agora realizamos como antes uma transformação, que neste caso agora é a transformação BRST e como visto a nossa Lagrangiana efetiva é invariante ( $\delta_B \mathcal{L}_{eff} = 0$ ) mas ao agir nas fontes obtemos um termo adicional infinitesimal (supondo o caso de uma transformação BRST infinitesimal sobre parâmetro  $\Lambda$ )

$$\delta_B \mathcal{L} = J^\mu (\delta_B A_\mu) + \bar{\eta} (\delta_B \psi) + \eta (\delta_B \bar{\psi}) + \beta_a (\delta_B c^a) + \gamma^a (\delta_B b_a).\tag{6.28}$$

A invariância do funcional integral  $Z$  por transformação BRST implica

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp\left(i \int d^d x \mathcal{L} + i \int d^d x \delta_B \mathcal{L}\right).\tag{6.29}$$

expandindo a parte infinitesimal

$$\begin{aligned}\delta_B Z &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp\left(i \int d^d x \delta_B \mathcal{L}\right) \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}b \mathcal{D}c \left[1 + \int d^d x \delta_B \mathcal{L} + \dots\right],\end{aligned}\tag{6.30}$$

logo

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-iS_{tot}} [1 + \int d^d x \delta_B \mathcal{L}], \quad (6.31)$$

com  $S = \mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{fontes}$  e se queremos a invariância da integral funcional ( $\delta_B Z = 0$ ), então devemos ter

$$\delta_B Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-iS} [\int d^d x \delta_B \mathcal{L}] = 0. \quad (6.32)$$

Desta maneira podemos adicionar ao expoente o seguinte termo de ação com fontes extras

$$-S_{fontes extras} = \int d^d x [K_\mu^a (Q_B A)_\mu^a - L^a (Q_B c)^a + M(Q_B \psi) + N(Q_B \bar{\psi})], \quad (6.33)$$

notemos que como as fontes obedecem  $Q_B K_\mu^a = Q_B L^a = Q_B M = Q_B N = 0$ , temos que para o restante de termos desta Lagrangiana de fontes extras vale  $Q_B^2 A_\mu^a = 0$ ,  $Q_B^2 \psi = 0$ ,  $Q_B^2 \bar{\psi} = 0$  e  $Q_B^2 c^a = 0$ , é então possível reescrevermos da seguinte forma

$$-S_{fontes extras} = \sum_\phi \phi^* s\phi, \quad (6.34)$$

como escrito na seção anterior e este é o truque de Zinn-Justin. Fazemos as seguintes identificações dos anticampos

$$K_\mu^a = A_\mu^{*a}, \quad L^a = C^{*a}, \quad M = \bar{\psi}^*, \quad N = \psi^*. \quad (6.35)$$

A equação (6.32) com (6.28) e  $S$  já somada com as fontes extras é dada por

$$e^{-W} [\int d^d x J^\mu (\delta_B A_\mu) + \beta_a (\delta_B c^a) + \eta (\delta_B \bar{\psi}) + \bar{\eta} (\delta_B \psi) + \gamma^a (\delta_B b_a)] = 0, \quad (6.36)$$

e podemos fazer as seguintes identificações

$$\begin{aligned} \delta_B A_\mu &= \frac{\delta}{\delta A_\mu^*}, & \delta_B c^a &= \frac{\delta}{\delta C^{*a}}, \\ \delta_B b &= \frac{1}{\alpha} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^*}, & \delta_B \bar{\psi} &= \frac{\delta}{\delta \psi^*}, \\ \delta_B \psi &= \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}^*}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

e desta forma obtemos a seguinte identidade equivalente á identidade de Ward

$$\int d^d x \left[ J^\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^*} + \beta_a \frac{\delta}{\delta C^{*a}} + \eta \frac{\delta}{\delta \psi^*} + \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}^*} + \gamma^a \frac{1}{\alpha} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^*} \right] W[J, \beta, \gamma, \eta, \bar{\eta}, A^*, C^*, \psi^*, \bar{\psi}^*] = 0. \quad (6.38)$$

Nosso objetivo agora é escrever como no formalismo de anticampos e chegar por fim em uma forma da equação mestre, para tal, realizemos uma transformação de Legendre

$$\begin{aligned} \Gamma[A_\mu^a, b_a, c^a, A_\mu^{*a}, C^{*a}, \psi^*, \bar{\psi}^*] &= W[J_\mu^a, \beta_a, \gamma^a, \eta, \bar{\eta}, A_\mu^{*a}, C^{*a}, \psi^*, \bar{\psi}^*] \\ &+ \int d^d x (J_\mu^a A_\mu^a + \beta_a c^a + b_a \gamma^a + \eta \bar{\psi} + \bar{\eta} \psi). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Desta transformação de Legendre obtemos

$$\begin{aligned} J_\mu^a &= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}, & \beta_a &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}, & \gamma^a &= \frac{\delta\Gamma}{\delta b_a}, & \eta &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}, & \bar{\eta} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} \\ \frac{\delta W}{\delta A_\mu^{*a}} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*a}}, & \frac{\delta W}{C^{*a}} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta C^{*a}}, & A_\mu^a &= \frac{\delta W}{\delta J_\mu^a}, & \frac{\delta W}{\delta\bar{\psi}^*} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^*}, & \frac{\delta W}{\delta\psi^*} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^*}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Desta forma, obtemos

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \int d^d x \left[ \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta\Gamma}{\delta C^{*a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^*} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^*} + \frac{\delta\Gamma}{\delta b_a} \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu) \right] = 0, \quad (6.41)$$

ou ainda, com  $\phi$  representando todos os campos da teoria, podemos escrever

$$\int d^d x \sum_\phi \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi^*} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi}. \quad (6.42)$$

Usando a invariância da ação, realizemos um deslocamento  $b_a \rightarrow b_a + \delta b_a$ , onde o primeira termo leva á toda discussão anterior, e para o segundo termo temos

$$\delta b_a [\partial^\mu (D_\mu c)^a + \gamma^a] = \delta b_a [\partial^\mu (Q_B A_\mu)^a + \gamma^a], \quad (6.43)$$

temos em seguida

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}b_a \mathcal{D}c^a \int d^d x \delta b_a(x) [\partial^\mu (Q_B A_\mu)^a + \gamma^a] e^{-S_{eff} + \int d^d x (JA + \beta c + b\gamma)} = 0, \quad (6.44)$$

escrevendo  $Q_B A_\mu^a$  como  $\delta/\delta A_\mu^{*a}$  temos

$$\left( \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^{*a}} + \gamma^a \right) e^{-W[J, \beta, \gamma, A^*, C^*]} = 0, \quad (6.45)$$

obtemos por fim

$$\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*a}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta b_a} = 0. \quad (6.46)$$

Podemos ainda obter uma relação equivalente, olhando o termo de fixação de Faddeev-Popov da equação (6.27) e fazendo como se segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FPG} &= -b^m \partial^\mu (D_\mu c)^a \\ &= -b^m \partial^\mu (sA)^a, \\ &= -b^m \partial^\mu \left( \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*m}} \right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

consequentemente vale

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta b^m} + \partial^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*m}} = 0, \quad (6.48)$$

podemos ainda tomar uma transformação de Fourier para obter

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta b^m} + iq^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*m}} = 0. \quad (6.49)$$

E o restante da identidade de Lee-Zinn-Justin pode ser escrita como

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \int d^d x \left[ \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^{*a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta\Gamma}{\delta C^{*a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^*} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^*} \right] = 0. \quad (6.50)$$

### 6.3 Identidade de ST para vértice de três gluões

Na seção 5.4 foi discutido o vértice de três gluões e vértices quark-gluão usando a técnica da pinça para obter o termo de vértice que satisfaz a identidade de Ward, na mesma seção foi comentado que isto não era um fato trivial e que além disso deveria satisfazer uma identidade de Slavnov-Taylor ainda não discutida. Veremos aqui qual é esta identidade de Slavnov-Taylor e discutir o seu grau de importância e dificuldade de manipulação.

A equação de Lee-Zinn-Justin tem número fantasma +1 e que por conservação ao derivarmos funcionalmente esta relação, o número fantasma deve se manter o mesmo, então temos as seguintes regras

- Pode diferenciar com respeito a um campo fantasma
- Se diferenciar com respeito a dois campos fantasmas, então deve-se diferenciar com respeito a um anticampo (+2 - 1 = +1)
- Se diferenciar com respeito a um anticampo fantasma, deve-se diferenciar com respeito a três campos fantasmas

Seguindo as regras podemos diferenciar duas vezes a equação (6.50) em relação a um campo bosônico e uma vez em relação a um campo fantasma

$$\left. \frac{\delta^3 \mathcal{S}(\Gamma)}{\delta c^a(q) \delta A_\mu^m(k_1) \delta A_\nu^n(k_2)} \right|_{\phi, \phi^* = 0} = 0, \quad (6.51)$$

teremos como resultado

$$\begin{aligned} & \Gamma_{c^a A_\mu^m A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(q, k_1, k_2) \Gamma_{A_\nu^\gamma} + \Gamma_{A_\mu^\gamma A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(k_1, k_2) \Gamma_{c^a A_\gamma^d}(q) \\ & + \Gamma_{c^a A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(q, k_2) \Gamma_{A_\mu^m A_\gamma^d}(k_1) + \Gamma_{A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(k_2) \Gamma_{c^a A_\mu^m A_\gamma^d}(q, k_1) \\ & + \Gamma_{c^a A_\mu^m A_d^{*\gamma}}(q, k_1) \Gamma_{A_\nu^n A_\gamma^d}(k_2) + \Gamma_{A_\mu^m A_d^{*\gamma}}(k_1) \Gamma_{c^a A_\nu^n A_\gamma^d}(q, k_1) \\ & + \Gamma_{c^a A_d^{*\gamma}}(q) \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n A_\gamma^d}(k_1, k_2) + \Gamma_{A_d^{*\gamma}} \Gamma_{c^a A_\mu^m A_\nu^n A_\gamma^d}(q, k_1, k_2) \\ & + \Gamma_{c^a A_\mu^m A_\nu^n c^{*l}}(q, k_1, k_2) \Gamma_{c^l} + \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n c^{*l}}(k_1, k_2) \Gamma_{c^a c^l}(q) \\ & + \Gamma_{c^a A_\nu^n c^{*l}}(q, k_2) \Gamma_{A_\mu^m c^l}(k_1) + \Gamma_{A_\nu^n c^{*l}}(k_2) \Gamma_{c^a A_\mu^m c^l}(q, k_1) \\ & + \Gamma_{c^a A_\mu^m c^{*l}}(q, k_1) \Gamma_{A_\nu^n c^l}(k_2) + \Gamma_{A_\mu^m c^{*l}}(k_1) \Gamma_{c^a A_\nu^n c^l}(q, k_2) \\ & + \Gamma_{c^a c^{*l}}(q) \Gamma_{A_\mu^m c^l}(k_1) + \Gamma_{c^{*l}} \Gamma_{c^a A_\mu^m c^l}(q, k_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.52)$$

agora olhemos a equação (6.27) e a equação (4.29) e fazemos  $\phi = \phi^* = 0$ , resultando por fim em

$$\begin{aligned} -\Gamma_{c^a A_\alpha'^{\alpha}}(q) \Gamma_{A_\alpha' A_\mu^m A_\nu^n}(k_1, k_2) & = \Gamma_{c^a A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(k_1, k_2) \Gamma_{A_\gamma^d A_\mu^m}(k_1) \\ & + \Gamma_{c^a A_\mu^m A_d^{*\gamma}}(k_1, k_2) \Gamma_{A_\gamma^d A_\nu^n}(k_2). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Derivemos a equação (6.49) com respeito a  $c^m$

$$\Gamma_{c^m b^n} + iq^\nu \Gamma_{c^m A_\nu^{*n}} = 0, \quad (6.54)$$

e usando que podemos escrever como

$$\Gamma_{c^m A_\nu^{*n}}(q) = q_\nu \Gamma_{c^m A^{*n}}(q), \quad (6.55)$$

temos

$$\Gamma_{c^m b^n}(q) = -iq^\nu \Gamma_{c^m A_\nu^{*n}}(q) = -iq^2 \Gamma_{c^m A^{*n}}(q). \quad (6.56)$$

Observando que derivada da integral funcional com respeito ao campo fantasma e anti-campo nos retorna o propagador fantasma (PESKIN; SCHROEDER, 1995), que agora denotaremos por  $D$  e para o propagador bosônico usaremos a notação  $\Delta$ ,

$$D^{ab} = \frac{i\delta^{ab}}{q^2}, \quad (6.57)$$

e como discutido em (4.56), o propagador é a inversa do vértice, temos

$$iD^{mr}(q)\Gamma_{c^r b^n}(q) = \delta^{mn}. \quad (6.58)$$

Substituímos agora em (6.53) para obter

$$\begin{aligned} q^\alpha \Gamma_{A_\alpha^a A_\mu^m A_\nu^n}(k_1, k_2) &= [q^2 D^{aa'}] \{ \Gamma_{c^{a'} A_\nu^b A_d^{*\gamma}}(k_2, k_1) \Gamma_{A_\gamma^d A_\mu^m}(k_1) \\ &\quad + \Gamma_{c^{a'} A_\mu^m A_d^{*\gamma}}(k_1, k_2) \Gamma_{A_\gamma^d A_\nu^n}(k_2) \}, \end{aligned} \quad (6.59)$$

e agora resta fazer as identificações, a primeira é a do propagador bosônico.

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_\alpha^a A_\beta^b}(q) &= \left[ \frac{\delta^2 W}{\delta J^a \delta J^b} \right]^{-1} = (\Delta^{-1})_{\alpha\beta}^{ab}(q) - i\delta^{ab} q_\alpha q_\beta, \\ &= i\delta^{ab} P_{\alpha\beta}(q) \Delta^{-1}(q^2), \end{aligned} \quad (6.60)$$

a função  $\Delta(q^2)$  que em tree-level é dada simplesmente pelo termo  $q^{-2}$ , contém toda a dinâmica do propagador do gluôn e além disso é relacionado ao correspondente fator escalar da auto energia do gluôn  $\Pi_{\mu\nu}(q)$ , outro fato é que tanto perturbativamente quanto não perturbativamente transversal, devido á simetria BRST, e vale também

$$\Delta^{-1}(q) = q^2 + i\Pi(q^2). \quad (6.61)$$

Identifiquemos agora o termo  $\Gamma_{cA_\mu A_\gamma^*}(k_1, k_2)$  que relaciona interação fantasma-gluôn em identidades de Slavnov-Taylor para três gluôn, assim, temos

$$\Gamma_{cA_\mu A_\gamma^*}(k_1, k_2) = H_{\mu\gamma}(k_1, k_2), \quad (6.62)$$

em tree-level para vértice de três gluôn, temos  $H_{\mu\nu}^{(0)} = ig_{\mu\nu}$ . Podemos agora finalmente escrever a identidade de Slavnov-Taylor para vértice de três gluôn

$$q^\alpha \Gamma_{A_\alpha A_\mu A_\nu}(k_1, k_2) = [q^2 D(q)] \{ H_\nu^\gamma(k_1, k_2) P_{\gamma\mu} \Delta^{-1}(k_1^2) + H_\mu^\gamma(k_1, k_2) P_{\gamma\nu} \Delta^{-1}(k_2^2) \}. \quad (6.63)$$

## 6.4 Identidades quânticas de fundo (BQI)

Uma vantagem de se trabalhar no formalismo de Batalin-Vilkovisky é que de fato as identidades de Slavnov-Taylor (identidades semelhantes às Identidades de Ward para teoria Abeliana) são independentes do calibre. O formalismo de BFM discutido na seção 5.6 mostrou grande importância por dois motivos: construir funções de Green invariantes por transformação de calibre e ser equivalente à técnica de pinça no calibre  $\xi = 1$ . Iremos obter agora identidades envolvendo campos de fundo e suas respectivas fontes de forma que serão construídos independentes do calibre, por consequência das identidades de Slavnov-Taylor.

O primeiro passo é estender a simetria BRST ao campo bosônico de fundo

$$s\hat{A}_\mu^m = \Omega_\mu^m, \quad s\Omega_\mu^m = 0. \quad (6.64)$$

A expressão  $\Omega_\mu^m$  representa o campo vetorial clássico de mesmo número quântico que o gluôn, mas de número fantasma de uma unidade  $gh(\Omega) = +1$ , além disso obedece a estatística de Fermi. Por consequência, a dependência das funções de Green dos campos de fundo são controladas pelo modificado funcional de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}'(\Gamma')[\phi] = \mathcal{S}(\Gamma')[\phi] + \int d^4x \Omega_\mu^m \left[ \frac{\delta\Gamma'}{\delta\hat{A}_\mu^m} - \frac{\delta\Gamma'}{\delta A_\mu^m} \right], \quad (6.65)$$

$$\mathcal{S}'(\Gamma')[\phi] = \frac{\delta\Gamma'}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta\Gamma'}{\delta A_\mu^{*a}} + \Omega \left[ \frac{\delta\Gamma'}{\delta\hat{A}_\mu^m} - \frac{\delta\Gamma'}{\delta A_\mu^m} \right], \quad (6.66)$$

com  $\Gamma'$  denotando a ação efetiva que depende das fontes de fundo  $\Omega_\mu^m$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & A_\mu^{*a} [\partial_\mu c^a - g f^{abc} (A_\mu^b + \hat{A}_\mu^b) c^c] - \frac{1}{2} g f^{abc} C^{*a} c^b c^c \\ & + ig (\bar{\psi}^* c^a T^a \psi) + \Omega_\mu^a [\partial b^a - g f^{abc} (A_\mu^b + \hat{A}_\mu^b) b^c], \end{aligned} \quad (6.67)$$

de forma que  $\Gamma \equiv \Gamma'|_{\Omega=0}$

A equação (6.49) encontrada depende claramente da Lagrangiana fantasma e consequentemente, da função escolhida para fixação de calibre. Como visto o formalismo BFM se baseia em escolher uma função de fixação de calibre que tem embutida o campo de fundo. Desta forma temos

$$\frac{\delta\Gamma'}{\delta b^m} + \left( \hat{D}^\mu \frac{\delta\Gamma'}{\delta A_\mu^*} \right)^m - (D^\mu \Omega_\mu)^m = 0, \quad (6.68)$$

e se as fontes de campo de fundo são tomadas a zero, obtemos novamente a equação (6.49).

A primeira identidade quântica de fundo vem de

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{S}'(\Gamma')}{\delta \Omega_\alpha^a(p) \delta A_\beta^b(q)} \right|_{\phi, \phi^*, \Omega=0} = 0, \quad (p + q = 0), \quad (6.69)$$

diferenciando funcionalmente a equação (6.66) temos

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\beta^b A_\mu^a} \Gamma_{A_\mu^{*a}} + \Gamma_{A_\beta^b A_\mu^a}(p) \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\mu^{*a}}(q) + \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\mu^a} \Gamma_{A_\beta^b A_\mu^{*a}}(q) + \Gamma_{A_\mu^a} \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\beta^b A_\mu^{*a}}(p, q) \\ & + \Gamma_{A_\beta^b \hat{A}_\mu^m}(q) + \Omega_\mu^m \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\beta^b \hat{A}_\mu^m} - \Gamma_{A_\beta^b} - \Omega_\alpha^a \Gamma_{\Omega_\mu^a A_\mu^a A_\beta^b} = 0, \end{aligned} \quad (6.70)$$

após fazer os campos irem a zero  $\phi, \phi^*, \Omega = 0$ , temos

$$i\Gamma_{\hat{A}_\alpha^a A_\beta^b}(q) = [ig_\alpha^\gamma \delta^{ab} + \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}(q)] \Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q). \quad (6.71)$$

A próxima diferenciação que faremos é em relação aos campos  $\Omega_\alpha^a(p) \delta \hat{A}_\beta^b(q)$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{S}'(\Gamma')}{\delta \Omega_\alpha^a(p) \delta \hat{A}_\beta^b(q)} \right|_{\phi, \phi^*, \Omega=0} = 0, \quad (6.72)$$

resultando em

$$i\Gamma_{\hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\beta^b}(q) = [ig_\alpha^\gamma \delta^{ad} + \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}] \Gamma_{A_\gamma^d \hat{A}_\beta^b}(q). \quad (6.73)$$

Inserimos agora o termo  $\Gamma_{A_\gamma^d \hat{A}_\beta^{*b}}(q)$  da equação (6.73) com os devidos índices, na equação (6.71), resultando em

$$i\Gamma_{\hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\beta^b}(q) = i\Gamma_{A_\alpha^a A_\beta^b}(q) + 2\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}(q) \Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q) - i\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}(q) \Gamma_{A_\gamma^d A_\epsilon^e}(q) \Gamma_{\Omega_\beta^b A_\epsilon^{*e}}(q), \quad (6.74)$$

Lembremos da forma funcional dos termos  $\Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$  e  $\Gamma_{AA}$ , que são as funções de dois pontos dos respectivos campos clássico e quântico

$$\Gamma_{\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta} = i\hat{\Delta}_{\alpha\beta}^{-1}(q) = iP_{\alpha\beta}(q) \hat{\Delta}^{-1}(q^2) + iq_\alpha q_\beta, \quad (6.75)$$

$$\Gamma_{A_\alpha A_\beta} = i\hat{\Delta}_{\alpha\beta}^{-1}(q) = iP_{\alpha\beta}(q) \Delta^{-1}(q^2) + iq_\alpha q_\beta, \quad (6.76)$$

$$P_{\alpha\beta}(q) = g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}. \quad (6.77)$$

Queremos deixar agora esta equação mais sugestiva de maneira que mostre explicitamente a ligação dos propagadores dos campos envolvidos, para tal, fazemos uma análise para resolver esta equação tensorial, isto é, a forma de  $\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\gamma^{*d}}(q)$  só pode depender da forma  $g_{\alpha\gamma}$  e  $q_\alpha q_\beta / q^2$ , desta forma supomos a existência de dois funcionais  $G(q^2)$  e  $L(q^2)$

$$\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\gamma^{*d}}(q) = i\delta^{ad} \left[ g_{\alpha\gamma} G(q^2) + \frac{q_\alpha q_\gamma}{q^2} L(q^2) \right], \quad (6.78)$$

agora equacionamos termo a termo conforme a componente tensorial e em especial para termos multiplicando a métrica, temos

$$\begin{aligned} \delta^{ab} i g_{\alpha\beta} \hat{\Delta}^{-1}(q^2) &= i g_{\alpha\beta} \delta^{-1}(q^2) + 2i \delta_d^a g_\alpha^\gamma G(q^2) i g_{\gamma\beta} \delta^{db} \delta^{-1}(q^2) \\ &\quad - i (i \delta_d^a g_\alpha^\gamma G(q^2)) \delta^{de} i g_{\gamma\epsilon} \delta^{-1}(q^2) (i \delta_e^b g_\beta^\epsilon G(q^2)) \\ &= i g_{\alpha\beta} \Delta^{-1}(q^2) + 2i \delta_d^a \delta^{db} \Delta^{-1}(q^2) G(q^2) \\ &\quad + i \delta_d^a \delta^{de} \delta_e^b g_{\alpha\beta} G(q^2) \Delta^{-1}(q^2) G(q^2), \\ &= i g_{\alpha\beta} \delta^{ab} [1 + 2G(q^2) + G(q^2)^2] \Delta^{-1}(q^2), \\ &= i g_{\alpha\beta} \delta^{ab} [1 + G(q^2)]^2 \Delta^{-1}(q^2). \end{aligned} \quad (6.79)$$

A equação

$$\hat{\Delta}^{-1}(q^2) = [1 + G(q^2)]^2 \Delta^{-1}(q^2), \quad (6.80)$$

tem o papel de grande importância no truncamento da série de Schwinger-Dyson e em especial de fazer truncar de forma manifestamente invariante do calibre. A ultima observação a ser feita é como podemos ligar explicitamente as identidades de Slavnov-Taylor, em especial  $H_{\alpha\beta}$ , com as equações integrais de Schwinger-Dyson.

Calculamos as série de Schwinger-Dyson dos vértices encontrados, para isso temos

$$-\Gamma_{c^m A_d^{*\gamma}}(q) = -\delta_d^m q_\gamma + g f_{ned} \int_{k_1} D(k_1) \Delta^{\gamma\nu}(k_2) \Gamma_{c^m A_p^b b^e}(k_2, k_1), \quad (6.81)$$

$$i\Gamma_{c^a A_p^b A^{*\gamma}_d}(k, q) = i g f_d^{an} g_\nu^\gamma - i g f_{der} \int_{k_1} D(k_1) \Delta^{\gamma\rho}(k_2) \mathcal{K}_{c^a A_p^b A_p^c b^e}(k, k_1, k_2), \quad (6.82)$$

$$\Gamma_{\Omega_a^c A_d^{*\gamma}}(q) = g f_{en}^a \int_{k_1} D(k_1) \Delta_\alpha^\nu(k_2) \Gamma_{c^e A_p^b A_d^{*\gamma}}(k_2, -q). \quad (6.83)$$

## 6.5 Decomposição PT da auto-energia do gluôn

Na seção 5.4 foi mencionado que o fato de conseguirmos construir um vértice de três gluôn, de quark-gluôn ou ainda a auto-energia do gluôn que obedece a identidade de Ward não era trivial e que consequentemente deveria haver uma ligação entre os termos rearranjados pela técnica de pinça e as identidades de Slavnov-Taylor, aqui isto ficará claro.

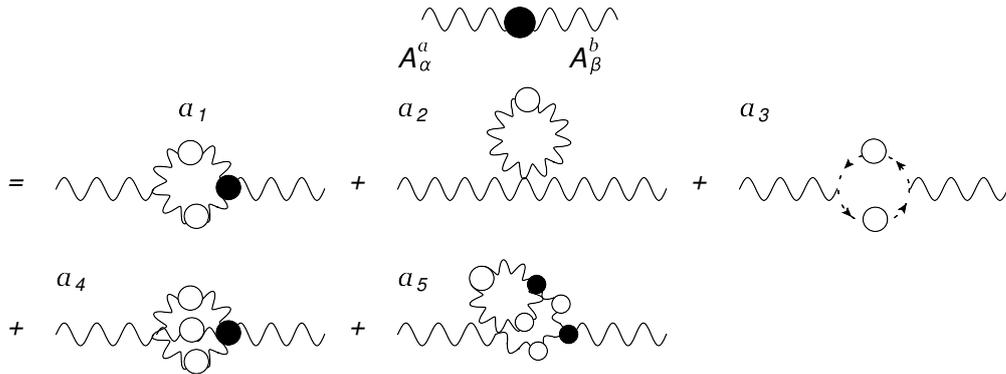


Figura 10 – Equação de Schwinger-Dyson satisfeita pela auto-energia do gluôn.

Para a convencional equação de Schwinger-Dyson para a auto-energia do gluôn (diagramaticamente dada pela Figura 10), em um calibre qualquer  $R_\xi$ , por exigir transversalidade, deveria valer

$$q^\alpha \sum_{i=1}^5 (a_i)_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.84)$$

mas diferente de teorias Abelianas, existe uma complicação devido às complicadas identidades de Slavnov-Taylor satisfeita pelos vértices e uma consequência base disso é que

não se faz possível truncar a série de Schwinger-Dyson de maneira direta e sem violar a transversalidade da auto-energia.

Queremos descrever a aplicação da técnica de Pinça ao caso (não-perturbativo) das equações de Schwinger-Dyson, tal aplicação é realizado pelas seguintes etapas

$$\Gamma_{AA} \xrightarrow{\text{PT}} \Gamma_{\hat{A}\hat{A}} \quad \Gamma_{\hat{A}\hat{A}} \xrightarrow{\equiv} \Gamma_{AA} \quad \Gamma_{AA} \xrightarrow{\text{PT}} \Gamma_{\hat{A}\hat{A}}. \quad (6.85)$$

O primeiro termo da série de Schwinger-Dyson se lê

$$(a_1) = -\frac{i}{2} g f^{am'n'} \int_{k_1} \Gamma_{\alpha\mu'\nu'}(q, k_1, k_2) \Delta_{m'm}^{\mu'\mu}(k_1) \Delta_{n'n}^{\nu'\nu}(k_2) \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n A_\beta^b}(-q, k-2), \quad (6.86)$$

aplicando a decomposição PT

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu'\nu'} &= (k_1 - k_2)_\alpha g_{\mu\nu} + 2q_\nu g_{\alpha\mu} - 2q_\mu g_{\alpha\nu} + k_{2\nu} g_{\alpha\mu} - k_{1\mu} g_{\alpha\nu} \\ &= \Gamma_{\alpha\mu\nu}^F + \Gamma_{\alpha\mu\nu}^P, \end{aligned} \quad (6.87)$$

onde vale para um momento físico  $q$

$$q^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu}^F = (k_2^2 - k_1^2) g_{\mu\nu}. \quad (6.88)$$

Logo, temos

$$(a_1)^P = \frac{i}{2} g f^{am'n'} \int_{k_1} (k_{2\nu'} g_{\alpha\mu'} - k_{1\mu'} g_{\alpha\nu'}) \Delta_{m'm}^{\mu'\mu} \Delta_{n'n}^{\nu'\nu}(k_2) \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n A_\beta^b}(k_2, -q), \quad (6.89)$$

desde que

$$\frac{q^\mu}{q^2} = \frac{1}{\xi} q_\nu \Delta^{\mu\nu}, \quad (6.90)$$

temos

$$(a_1)^P = \frac{i}{2} g f^{am'n'} \int_{k_1} \frac{k_1^\mu}{k_1^2} g_{\alpha\nu'} \Delta_{n'n}^{\nu'\nu}(k_2) \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n A_\beta^b}(k_2, -q). \quad (6.91)$$

Agora usamos as identidades de Slavnov-Taylor (6.60), (6.59) e (6.54) e o termo  $k_1^\mu \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n A_\beta^b}$  de (6.91) obtemos

$$\begin{aligned} k_1^\mu \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n A_\beta^b}(k_2, -q) &= D^{m'm}(k_1) \{ \Gamma_{c^{m'} A_\beta^b A_d^{*\gamma}}(k_2, -q) (\Delta^{-1})_{\gamma\nu}^{dn}(k_2) + \Gamma_{c^{m'} A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(k_2, -q) \Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q) \\ &\quad - i \delta^{dn} k_{2\gamma} k_{2\nu} \Gamma_{m' A_\beta^b A_d^{*\gamma}}(k_2, q) \}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

e o termo  $k_{2\gamma} \Gamma_{c^{m'} A_\beta^b A_d^{*\gamma}}$  é igual á  $\Gamma_{c^m A_\beta^b b_d}$ . Seguindo, temos por fim para o diagrama  $(a_1)^P$

$$\begin{aligned} (a_1)^P &= i g f^{am'n'} g_{\alpha\nu'} \int_{k_1} D^{m'm}(k_1) \Delta_{n'n}^{\nu'\nu}(k_2) \Gamma_{c^m A_\nu^n A_d^{*\gamma}}(k_2, -q) \Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q) \\ &\quad + g f^{am'd} \int_{k_1} g_{\alpha\gamma} D^{m'm}(k_1) \Gamma_{c^m A_\beta^b A^{*\gamma}}(-q, k_2) \\ &\quad - i g f^{am'n'} g_{\alpha\nu'} \int_{k_1} \delta^{dn'} \frac{k_2^{\nu'}}{k_2^2} D^{m'm}(k_1) \Gamma_{c^m A_\beta^b b_d}(-q, k_2) \\ &= (s_1) + (s_2) + (s_3), \end{aligned} \quad (6.93)$$

e fazemos a identificação do termo  $(s_1)$  com a equação (6.83)

$$(s_1) = -i\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}(q)\Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q). \quad (6.94)$$

Usando

$$k_{2\nu'} D^{dn'}(k_2) = \delta^{dn'} \frac{k_{2\nu'}}{k_2^2} - \Gamma'_{c^g A_{\nu'}^{*n'}}(k_2) D^{gd}(k_2), \quad (6.95)$$

temos

$$(s_2) = -g f^{am'd} g_{\alpha\gamma} \int_{k_1} i D^{m'm}(k_1) [i\Gamma_{c^m A_\beta^b A^{*\gamma}}(-q, k_2) + \Gamma'_{c^g A_d^{*\gamma}} D^{gg'}(k_2) \Gamma_{c^m A^b b^g}(-q, k_2)], \quad (6.96)$$

e

$$(s_3) = -ig f^{am'n'} \int_{k_1} k_{2\alpha} D^{m'm}(k_1) D^{n'n}(k_2) \Gamma_{c^m A_\beta^b b^m}(-q, k_2), \quad (6.97)$$

agora definimos para  $(s_2)$

$$(s_2) = -g f^{am'd} g_{\alpha\gamma} \int_{k_1} k_{k_{2\alpha}} [(s_{2a}) + (s_{2b})]. \quad (6.98)$$

Para o primeiro termo de  $(s_{2a})$  temos

$$i\Gamma_{c^a A_\nu^b A^{*\gamma}}(k, q) = ig f^{mdb} g_\beta^\gamma - ig f^{e'ds'} g_{\sigma'}^\gamma \int_{k_1} D^{ee'}(k_1) \Delta_{ss'}^{\sigma\sigma'}(k_2) \mathcal{K}_{c^m A_\beta^b A_\sigma^s b^e}(k, k_2, k_1), \quad (6.99)$$

e desta forma escrevemos

$$(s_{2a}) = g^2 f^{am'd} f^{mdb} g_{\alpha\beta} \int_{k_1} D^{m'm}(k_1) + g^2 f^{am'd} f^{dn's'} g_{\alpha\sigma'} \int_{k_1} \int_{k_3} D^{m'm}(k_1) \Delta_{s's}^{\sigma'\sigma}(k_3) D^{n'n}(k_4) \mathcal{K}_{c^m A_\beta^b A_\sigma^s b^m}(-q, k_3, k_4), \quad (6.100)$$

e para  $(s_{2b})$  usamos

$$\Gamma'_{c^m A^{*\gamma}}(q) = g f^{dn'e'} g_{\nu'}^\gamma \int_{k_1} D^{ee'}(k_1) \Delta_{ss'}^{\sigma\sigma'} \mathcal{K}_{c^a A_\nu^b A_\sigma^s b^e}. \quad (6.101)$$

E por fim, temos

$$(s_{2b}) = ig^2 f^{am'd} f^{dse} g_\alpha^\sigma \int_{k_1} \int_{k_3} D^{m'm}(k_1) \Delta_{\sigma\sigma'}^{ss'}(k_3) D^{ee'}(k_4) \Gamma_{c^g A_{s'}^{\sigma'} b^e}(k_3, k_4) \times D^{gg'}(k_2) \Gamma_{c^m A_\beta^b b^g}(-q, k_2). \quad (6.102)$$

Se realizarmos a expansão em série de Schwinger-Dyson do vértice  $\Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$  (representação diagramática dada pela Figura 11) podemos inferir

$$(s_1) = -i\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}(q)\Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q), \quad (6.103)$$

$$(s_3) + (a_3) = (b_3), \quad (6.104)$$

$$(s_{2a}) = (b_4) + (b_7) + (b_8) + (b_{10}), \quad (6.105)$$

$$(s_{2b}) = (b_9), \quad (6.106)$$

$$(a_2) = (b_2), \quad (a_5) = (b_5), \quad (a_6) = (b_6), \quad (a_1)^F = (b_1). \quad (6.107)$$

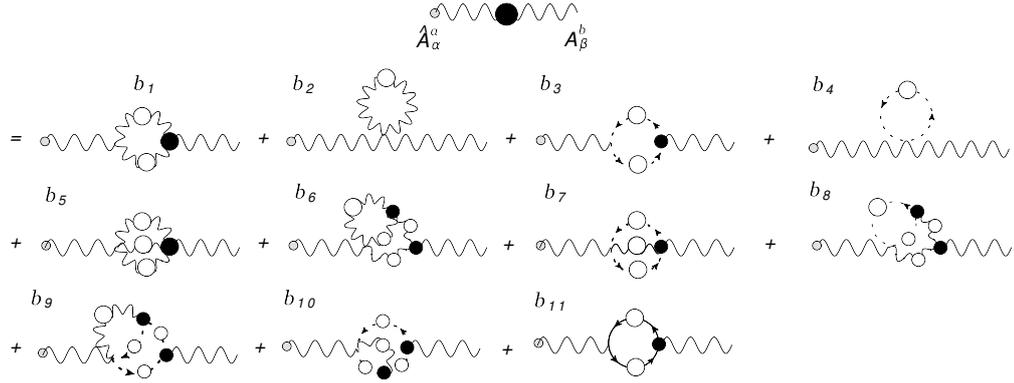


Figura 11 – Equação de Schwinger-Dyson satisfeita pela auto-energia do gluôn  $-\Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$ .

Podemos concluir

$$(s_2) + (s_3) + \left[ (a_1)^F + \sum_{i=2}^6 (a_i) \right] = \sum_{i=1}^{11} (b_i), \quad (6.108)$$

e por fim

$$-\Gamma_{A_\alpha^a A_\beta^b}(q) = -i\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_d^{*\gamma}}(q)\Gamma_{A_\gamma^d A_\beta^b}(q) - \Gamma_{\hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\beta^b}(q). \quad (6.109)$$

Queremos agora usar a equivalência oposta, isto é, trocar do diagrama identificado a perna de fundo pela perna quântica

$$\Gamma_{\hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\beta^b}(q) = \Gamma_{A_\alpha^a A_\beta^b}(q), \quad (6.110)$$

isto simplificará as identificações dos diagramas, como será visto.

O terceiro passo é finalmente fazer a transição  $\Gamma_{A\hat{A}} \rightarrow \Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$ , chegando em um diagrama completamente escrito em termos de campos de fundo que como visto é equivalente à técnica de Pinça no calibre de Feynman  $\xi = 1$  e desta forma resultará em uma nova série de Schwinger-Dyson onde suas propriedades e vantagens serão discutidas a seguir.

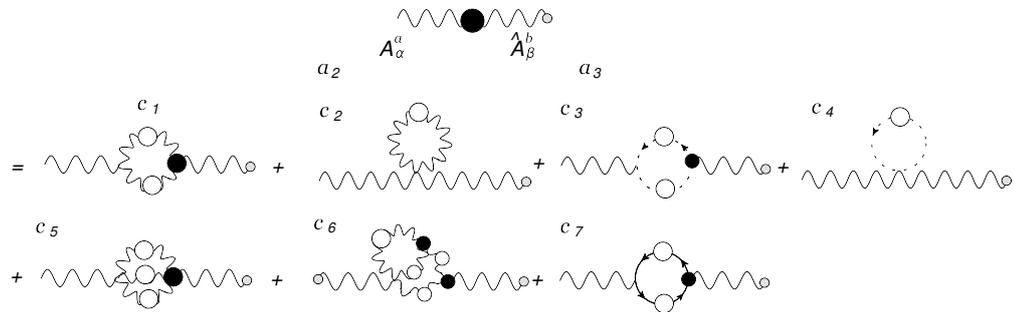


Figura 12 – Equação de Schwinger-Dyson satisfeita pela auto-energia do gluôn  $-\Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$ .

Realizando a expansão da PT de  $\Gamma_{A\hat{A}}$  (diagramaticamente representado pela Figura 12). Para o primeiro diagrama ( $c_1$ ), temos

$$(c_1)^P = igf^{amn} \int_{k_1} \frac{1}{k_1^2} \Delta_\alpha^\nu(k_2) k_1^\mu \Gamma_{A_\mu^m A_\nu^n \hat{A}_\beta^b}(k_2, q), \quad (6.111)$$

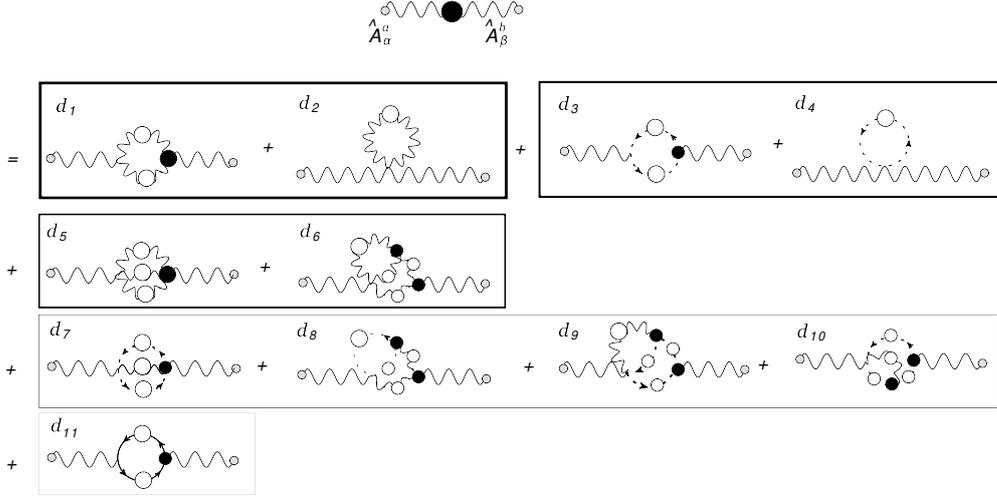


Figura 13 – Equação de Schwinger-Dyson satisfeita pela auto-energia do gluôn  $-\Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$ .

mas temos

$$k_1^\mu \Gamma_{\hat{A}_\alpha A_\mu^m A_\nu^n}(k_1, k_2) = [k_1^2 D^{mm'}] \{ \Gamma_{c^{m'} A_\nu^m A_\epsilon^{*e}}(k_2, q) \Gamma_{\hat{A}_\alpha A_\epsilon^e}(q) + \Gamma_{c^{m'} \hat{A}_\alpha A_\epsilon^{*e}}(q, k_2) \Gamma_{A_\epsilon^e A_\nu^n}(k_2) \} - ig f^{amn} (k_1^2 g_{\alpha\nu} - k_{1\alpha} g_{2\nu}), \quad (6.112)$$

agora usamos novamente (6.59) e (6.54), só que agora com o termo  $\hat{A}$ , já que como visto, é equivalente. Temos então

$$k_1^\mu \Gamma_{\hat{A}_\alpha A_\mu^m A_\nu^n}(k_1, k_2) = [k_1^2 D^{mm'}] \{ \Gamma_{c^{m'} A_\nu^m A_\epsilon^{*e}}(k_2, q) \Gamma_{\hat{A}_\alpha A_\epsilon^e} + \Gamma_{c^{m'} \hat{A}_\alpha A_\epsilon^{*e}}(q, k_2) (\Delta^{-1})_{\epsilon\nu}^{en}(k_2) + k_{2\nu} \Gamma_{c^{m'} \hat{A}_\alpha b^n}(q, k_2) \} - ig f^{amn} k_1^2 g_{\alpha\nu}, \quad (6.113)$$

inserindo de volta em (6.111), temos

$$(c_1)^P = -i [ig_\beta^\gamma \delta^{bd} + \Gamma_{\Omega_\beta^a A_d^{*\gamma}}(q)] (a_1^P)_{\alpha\gamma}^{ad} + g f^{amn} \int_{k_1} \Delta_\alpha^\nu(k_2) \frac{k_1^\mu}{k_1^2} \Gamma_{\Omega_\beta^a A_\mu^m A_\nu^n}(k_1, k_2), \quad (6.114)$$

desta forma, o termo  $ig_\beta^\gamma \delta^{bd} + \Gamma_{\Omega_\beta^a A_d^{*\gamma}}(q)$  permite perfeitamente a conversão dos termos do tipo  $\Gamma_{cAb}$  e  $\Gamma_{cAA^*}$  para a forma  $\Gamma_{c\hat{A}b}$  e  $\Gamma_{c\hat{A}A^*}$ . Concluimos a prova da conversão fazendo as seguintes identificações com os termos da série de Schwinger-Dyson (Figura 13) de  $\Gamma_{\hat{A}\hat{A}}$ , como a seguir

$$(r_1)^P + (c_3) = -i \Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\epsilon^{*e}}(q) \Gamma_{A_\epsilon^e \hat{A}_\beta^b} + (d_3) + (d_4) + (d_7) + (d_8) + (d_9) + (d_{10}), \quad (6.115)$$

$$(r_2)^P + (c_2) = g^2 C_A \delta^{ab} \int_{k_1} \Delta_{\alpha\beta}(k_1) + (c_2) = (d_2). \quad (6.116)$$

Usamos novamente o fato que

$$(c_1)^F = (d_1). \quad (6.117)$$

Obtendo por fim

$$(r_1)^P + (r_2)^P + [(c_1)^F + \sum_{i=2}^7 (c_i)] = -i\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\epsilon^{*e}}(q)\Gamma_{A_\epsilon \hat{A}_\beta^b}(q) + \sum_{i=1}^{11} (d_i), \quad (6.118)$$

e finalmente

$$-\Gamma_{A_\alpha^a \hat{A}_\beta^b}(q) = -i\Gamma_{\Omega_\alpha^a A_\epsilon^{*e}}(q)\Gamma_{A_\epsilon \hat{A}_\beta^b}(q) - \Gamma_{\hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\beta^b}, \quad (6.119)$$

que é exatamente a identidade (6.73).

Podemos agora usar a equação (6.74) para escrever

$$i\Gamma_{A_\alpha A_\beta} + 2\Gamma_{\Omega_\alpha A^* \gamma} \Gamma_{A_\gamma A_\beta} - i\Gamma_{\Omega_\alpha A^* \gamma} \Gamma_{A_\gamma A_\epsilon} \Gamma_{\Omega_\beta A^* \epsilon} = i \sum_{i=1}^{11} (d_i)_{\alpha\beta}, \quad (6.120)$$

realizamos novamente a decomposição de  $\Gamma_{\Omega_\beta A^*}$  em termos de tensores da equação como na equação (6.78) e abrindo  $\Gamma_{AA}$  como na equação (6.76) temos

$$\Delta^{-1}(q^2)[1 + G(q^2)]^2 P_{\alpha\beta}(q) = q^2 P_{\alpha\beta}(q) + i \sum_{i=1}^{11} (d_i)_{\alpha\beta}, \quad (6.121)$$

ou ainda

$$\Delta^{-1}(q^2) P_{\alpha\beta}(q) = \frac{q^2 P_{\alpha\beta}(q) + i \sum_{i=1}^{11} (d_i)_{\alpha\beta}}{[1 + G(q^2)]^2}. \quad (6.122)$$

O diagrama da Figura 13 pode ser dividido em cinco blocos, correspondendo á contribuições em um-loop ou dois-loop de glúons e fantasmas, ou ainda como no ultimo, contribuição vinda do quark. O fato mais importante do resultado encontrado na equação (6.122) é que temos os blocos da Figura 13 que satisfazem individualmente a condição de transversalidade pois satisfazem identidades do tipo de Ward. Se pegarmos os dois primeiros diagramas da Figura 13, temos

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = [1 + G(q^2)]^{-2} [(d_1) + (d_2)]_{\alpha\beta}, \quad (6.123)$$

e vale

$$q^\alpha [(d_1) + (d_2)] = 0, \quad (6.124)$$

desde que temos

$$q^\alpha \Gamma_{\hat{A}_\alpha^a A_\mu^m A_\nu^n}(k_1, k_2) = g f^{amn} [\Delta_{\mu\nu}^{-1}(k_1) - \Delta_{\mu\nu}^{-1}(k_2)], \quad (6.125)$$

e a auto-energia encontrada é transversal, um fato curioso, desde que omitimos a contribuição fantasmas, por exemplo. Outra propriedade que ganhamos foi de poder tratar os blocos da Figura 13 individualmente, exemplo  $(d_1)$  e  $(d_2)$  não-perturbativamente e os termos  $(d_3)$  e  $(d_4)$  perturbativamente de maneira que ainda satisfaça transversalidade. Mas estas vantagens vem somente com o adicional termo  $G(q^2)$  que está sempre presente. Pode-se ainda tratar outros vértices usando o mesmo procedimento desta seção como também utilizar outros calibres, exemplo o de Landau que tem vantagens em certas simulações na rede.



# Conclusão

O presente trabalho de conclusão de curso teve como objetivo revisar conceitos de quantização em teorias de calibre não-Abelianas onde em especial foi escolhido estudar e aplicar, os formalismos propostos a serem estudados, no contexto da cromodinâmica quântica. O trabalho dividiu-se em três partes, primeiramente foi realizado um projeto de iniciação científica de título “Teoria de Yang-Mills: Geometria de Fibrados Principais” realizado com foco na descrição geométrica de teorias de calibre via maço de fibras. A segunda etapa foi a realização do Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso, de título “Formalismo BRST de quantização em teorias de calibre não-Abelianas”, com objetivo de entender os formalismos de quantização para teorias de calibre abelianas e não-Abelianas. Em especial o formalismo de Gupta-Bleuler, fantasmas de Faddeev-Popov e o formalismo BRST, onde o ultimo teve sua motivação cohomologica estudada com grande extensão. A ultima etapa consistia em estudar a generalização do formalismo BRST, o formalismo de Batalin-Vilkovisky, porém já no contexto de aplicações e assim foi escolhido a teoria das interações fortes. Entre estas etapas foi escrito sobre matriz-S, identidade de Ward, teorema Óptico, propagadores, diagramas de Feynman, entre outros conceitos de teoria quântica de campos. A técnica de Pinça discutida no presente trabalho foi um intermediário para ligar aplicações do formalismo de anticampos e o estudo de regimes de baixas energias. A cromodinâmica quântica, apesar de apresentar grandes resultados ainda é uma teoria nova e que há importantes problemas em estudo, exemplo o problema de geração dinâmica de massa, em que simulações na rede são tratadas como o laboratório desta teoria.



# Referências

- ABBOTT, L. F. The Background Field Method Beyond One Loop. *Nucl. Phys. B*, v. 185, p. 189–203, 1981. Citado na página 70.
- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. *The gluon mass generation mechanism: a concise primer*. arXiv, 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1511.08361>>. Citado na página 9.
- BARNICH, G.; BRANDT, F.; HENNEAUX, M. Local brst cohomology in gauge theories. *Physics Reports*, v. 338, n. 5, p. 439–569, 2000. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730000491>>. Citado na página 8.
- BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Pinch technique and the batalin-vilkovisky formalism. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 66, n. 2, jul 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.025024>>. Nenhuma citação no texto.
- BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gauge-invariant truncation scheme for the schwinger-dyson equations of QCD. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 6, mar 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.061702>>. Nenhuma citação no texto.
- BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. New schwinger-dyson equations for non-abelian gauge theories. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2008, n. 11, p. 063–063, nov 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/11/063>>. Nenhuma citação no texto.
- BOGOLIUBOV, N.; SHIRKOV, D. *Introduction to the Theory of Quantized Fields [by] N.N. Bogoliubov [and] D.V. Shirkov: Authorized English Ed., Rev. and Enl. by the Authors*. [S.l.]: Interscience Publishers, 1959. (Interscience monographs in physics and astronomy, v.3). Citado na página 7.
- CORNWALL, J. M. Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 26, p. 1453–1478, Sep 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.26.1453>>. Nenhuma citação no texto.
- CORNWALL, J. M.; PAPAVALASSILIOU, J. Gauge-invariant three-gluon vertex in qcd. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 40, p. 3474–3485, Nov 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.3474>>. Nenhuma citação no texto.
- CORNWALL, J. M.; PAPAVALASSILIOU, J.; BINOSI, D. *The Pinch Technique and its Applications to Non-Abelian Gauge Theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-511-92274-9, 978-0-521-43752-3. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.
- GIACCHINI, B. L.; LAVROV, P. M.; SHAPIRO, I. L. Background field method and nonlinear gauges. *Physics Letters B*, v. 797, p. 134882, 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319305969>>. Nenhuma citação no texto.

- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. *Quantization of Gauge Systems*. [S.l.]: Princeton University Press, 1992. (Princeton paperbacks). ISBN 9780691037691. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 71.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486134697. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 14, 33 e 45.
- KACHELRIESS, M. *Quantum Fields: From the Hubble to the Planck Scale*. [S.l.]: Oxford University Press, 2018. (Oxford graduate texts). ISBN 9780198802877. Citado na página 8.
- KUGO, T.; OJIMA, I. Manifestly Covariant Canonical Formulation of the Yang-Mills Field Theories. I: — General Formalism —. *Progress of Theoretical Physics*, v. 60, n. 6, p. 1869–1889, 12 1978. ISSN 0033-068X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTP.60.1869>>. Nenhuma citação no texto.
- KUGO, T.; OJIMA, I. Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 66, p. 1–130, 02 1979. ISSN 0375-9687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTPS.66.1>>. Citado na página 35.
- NASTASE, H. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 9781108493994. Citado 4 vezes nas páginas 9, 30, 44 e 73.
- PASCUAL, P.; TARRACH, R. *QCD: RENORMALIZATION FOR THE PRACTITIONER*. [S.l.: s.n.], 1984. v. 194. Nenhuma citação no texto.
- PESKIN, M.; SCHROEDER, D. *An Introduction To Quantum Field Theory*. [S.l.]: Avalon Publishing, 1995. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813345437. Citado 4 vezes nas páginas 16, 61, 63 e 79.
- PIGUET, O.; SORELLA, S. *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Lecture Notes in Physics Monographs). ISBN 9783540491927. Nenhuma citação no texto.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 46, 47, 48 e 49.
- SREDNICKI, M. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139462761. Citado 3 vezes nas páginas 7, 53 e 67.
- TROOST, W.; NIEUWENHUIZEN, P. van; PROEYEN, A. V. Anomalies and the Batalin-Vilkovisky Lagrangian Formalism. *Nucl. Phys. B*, v. 333, p. 727–770, 1990. Citado na página 71.