

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

RODRIGO MENDES RIBEIRO

**TEORIA DE VÍNCULOS E QUANTIZAÇÃO DE
TEORIAS DE CALIBRE**

BRASÍLIA
14 DE JANEIRO DE 2024

Rodrigo Mendes Ribeiro

Teoria de Vínculos e Quantização de Teorias de Calibre

Projeto de trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física

Brasília

14 de janeiro de 2024

Resumo

O objetivo do projeto é desenvolver o formalismo de vínculos, no contexto da teoria de campos, e aplicar na quantização de teorias de calibre. O método de abordagem consiste na fundamentação da teoria clássica e teoria de campos, com ênfase no conceito de calibre. Com base nesta abordagem, desenvolveu-se o formalismo necessário para a quantização e, por fim, aplicou-se na teoria quântica de campos. Neste contexto, há o surgimento de formalismos que incluem teorias de calibre e campos de calibre não abelianos.

Palavras-chaves: Teoria de Vínculos. Quantização. Teorias de Calibre. Teoria Quântica de Campos.

Lista de abreviaturas e siglas

QFT	Quantum Field Theory (Teoria Quântica de Campos)
BRST	Refere-se aos nomes: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora e Igor Tyutin)
BV	Batalin-Vilkovisky

Lista de símbolos

$g_{\mu\nu}$	métrica
$c = \hbar = 1$	unidades naturais
$\alpha = 0, 1, 2, 3$	índices gregos
$i = 1, 2, 3$	índices latinos

Sumário

	Introdução	9
	Metodologia	11
1	A TEORIA CLÁSSICA	13
1.1	Formalismo Lagrangeano	13
1.2	Formalismo Hamiltoniano	13
2	VÍNCULOS	15
2.1	Equações de Movimento	15
2.2	Funções de Primeira e Segunda Classe	18
2.3	Transformações de Calibre	20
2.4	Mudança no Princípio Variacional	24
2.5	Parênteses de Dirac	25
2.6	Fixação de Calibre	27
3	CAMPOS	29
3.1	Lagrangeana e Hamiltoniana para Campos	29
3.2	Campo Eletromagnético	30
4	QUANTIZAÇÃO	33
4.1	Quantização de Sistemas Vinculados	33
4.2	Integral de Caminho	34
4.3	Fontes	36
5	PRÓXIMAS ETAPAS DO PROJETO: TEORIAS DE CALIBRE	37
5.1	Quantização do Campo Eletromagnético	37
5.2	Quantização no Calibre de Lorenz	37
5.3	Campos de Calibre não Abelianos	38
5.4	BRST	39
	Conclusão	41
	REFERÊNCIAS	43

Introdução

Com base na teoria de vínculos, é possível estabelecer um dos procedimentos mais fundamentais da física moderna, conhecido como “quantização”. O estudo deste formalismo foi iniciado por Dirac ([DIRAC, 2001](#)), no século XX, e é a base para a Mecânica Quântica. O desenvolvimento paralelo da Teoria da Relatividade, por Einstein, resultou numa série de tentativas de incluir este formalismo na teoria quântica. A conexão ocorreu por meio do conceito físico conhecido como “campo”. As teorias de campos ganharam um de seus primeiros reconhecimentos com a equação de Dirac, levando à previsão de novas partículas. A Teoria Quântica de Campos é um dos maiores sucessos da física moderna. Em termos de previsões e descrição atual do universo, esta teoria já obteve resultados extremamente acurados e levaram à construção do Modelo Padrão, que corresponde às partículas elementares. Neste contexto, as teorias de calibre possuem um papel essencial, pois contribuem com o formalismo e interpretação de campos fundamentais no universo.

Tendo em vista os temas abordados, este projeto consiste em um estudo aprofundado sobre a teoria de vínculos e quantização das teorias de calibre.

Metodologia

A metodologia do projeto inicia-se no estudo amplo da teoria clássica, com ênfase na teoria de vínculos. Neste formalismo, constrói-se toda a base necessária para a descrição e fundamentação do procedimento de quantização.

Para explicar o processo de quantização na teoria de campos, há uma explicação sobre os conceitos básicos que envolvem os campos e um foco especial ao caso do campo eletromagnético. Os conceitos de vínculos foram desenvolvidos e ampliados para o formalismo de campos, onde desempenham um papel fundamental na quantização.

O conceito de “transformações de calibre”, desenvolvido na teoria clássica, é aplicado na teoria de campos e, por fim, recorre-se a uma generalização dos campos que possuem calibre como propriedade intrínseca. Esta generalização ocorre por meio dos formalismos BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin) e BV (Batalin-Vilkovisky), que dizem respeito aos campos de calibre não abelianos.

O objetivo do projeto é desenvolver o formalismo de vínculos, no contexto da teoria de campos, e aplicar na quantização de teorias de calibre.

1 A Teoria Clássica

A teoria clássica é composta pelos princípios básicos que ditam as leis da dinâmica. Estes princípios são descritos, de maneira completa e equivalente, pelos formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano.

1.1 Formalismo Lagrangeano

A ação S é definida pela seguinte integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1.1)$$

onde L é uma função, chamada "Lagrangeana", que depende do tempo t , coordenadas generalizadas $q(t)$ e suas derivadas $\dot{q}(t)$:

$$L = L(q_n, \dot{q}_n, t), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2)$$

O Princípio da Mínima Ação consiste na variação funcional da ação, tal que $\delta S = 0$. Este princípio variacional implica na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0. \quad (1.3)$$

1.2 Formalismo Hamiltoniano

A Hamiltoniana é a função definida pela transformada de Legendre da Lagrangeana com relação às velocidades \dot{q}_n :

$$H(q_n, p_n) = \sum_n p_n \dot{q}_n - L(q_n, \dot{q}_n), \quad (1.4)$$

onde \dot{q}_n aparece apenas como função das novas variáveis p_n chamadas "momentos", que são obtidas por meio da inversão da seguinte equação:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (1.5)$$

As equações de movimento são obtidas a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad (1.6)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}. \quad (1.7)$$

O “espaço de fase” é o espaço definido pelas variáveis q_n e p_n . A evolução temporal de uma função $F(q, p)$ definida neste espaço pode ser escrita em termos dos parênteses de Poisson:

$$\dot{F} = \{F, H\}, \quad (1.8)$$

onde

$$\{F, G\} = \sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q_n}, \quad (1.9)$$

para funções F e G definidas no espaço de fase.

No contexto da teoria clássica, será utilizado o somatório implícito sempre que houver índices repetidos.

2 Vínculos

2.1 Equações de Movimento

“Vínculos” é um dos dos temas centrais neste trabalho e a sua definição tem origem no seguinte questionamento: Existem casos onde a transformada de Legendre da Lagrangeana não é bem definida? A resposta é “sim”. Isto ocorre quando não é possível inverter os momentos (dado pela equação (1.5)) e escrever as velocidades \dot{q}_n como funções dos momentos, isto é, $\dot{q}_n = \dot{q}_n(p_n)$. O estudo deste caso, então, inicia-se com a análise de consistência das equações de movimento. A equação de Euler-Lagrange (1.3) pode ser reescrita na forma:

$$\ddot{q}_n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}} = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \dot{q}_{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_{n'}}. \quad (2.1)$$

Nesta forma, é possível ver que as acelerações \ddot{q}_n só podem ser unicamente determinadas se a matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}$ for inversível. Isto significa que o determinante $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}\right) \neq 0$ é condição para que seja possível definir os momentos. Caso o determinante seja nulo, os momentos (1.5) não serão independentes entre si e ocasionará o surgimento de funções do tipo:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad (2.2)$$

onde ϕ_m é alguma relação entre coordenadas e momentos e $m = 1, 2, \dots, M$. Estas funções são chamadas de *vínculos*.

Definição 1 *Vínculos são funções de coordenadas e momentos cujo valor numérico é nulo.*

Os vínculos que surgem naturalmente da definição de momento (1.5) são chamados de “vínculos primários”. Como consequência direta da definição de vínculos, o conjunto de equações ϕ_m define uma variedade no espaço de fase (superfície de vínculos).

Se o rank da matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}$ for $N - M'$, significa que há M' equações independentes entre os vínculos. Dado um conjunto específico de coordenadas e suas respectivas velocidades, é possível determinar unicamente um conjunto de momentos e coordenadas. Entretanto, o contrário não é satisfeito. A relação (1.5) define um mapa do espaço de fase, que possui dimensão $2N$, para uma variedade de dimensão $2N - M'$. Este fato está contido matematicamente na teoria por meio do determinante nulo. Ou seja, não é possível recuperar a informação completa do espaço de fase a partir de uma transformação que parta da superfície de vínculos. Para que essa transformação possa ser recuperada de

maneira única, é necessário introduzir novos parâmetros que atuarão como multiplicadores de Lagrange. Para iniciar esta abordagem, é necessário estudar as funções de vínculos (2.2). Considere a seguinte variação:

$$\delta\phi_m(q, p) = \frac{\partial\phi_m}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial\phi_m}{\partial p_n}\delta p_n. \quad (2.3)$$

Localmente, os gradientes $d\phi_i$ são linearmente independentes na região definida pela variedade dos vínculos. A fim de aprofundar neste conceito, analisa-se a função Hamiltoniana. Por definição, a Hamiltoniana é uma função que depende das posições q_n e dos momentos p_n . Tomando a variação da Hamiltoniana, obtém-se:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n. \quad (2.4)$$

Por outro lado, é possível tomar a variação a partir da equação (1.4):

$$\delta H = \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \delta L \quad (2.5a)$$

$$\delta H = \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \left[\frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \right] \quad (2.5b)$$

$$\delta H = \delta p_n \dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n. \quad (2.5c)$$

Igualando as equações (2.4) e (2.5), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_n} + \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) \delta q_n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta p_n = 0. \quad (2.6)$$

Aqui, é importante salientar que a variação na Hamiltoniana depende apenas de variações nas coordenadas e momentos, como mostrado na equação (2.5). Isto evidencia a dependência funcional da Hamiltoniana $H = H(q, p)$. Entretanto, no caso onde há vínculos no sistema, as variações δp_n e δq_n não são independentes, pois existe alguma relação entre momentos e coordenadas determinada pela equação (2.2) que os impedem de variar livremente. Isto faz com que a Hamiltoniana só seja bem definida na variedade definida pelos vínculos primários. Entretanto, pode-se estender a função Hamiltoniana para todo o espaço adicionando funções arbitrárias que se anulam na superfície definida pelos vínculos.

$$H \rightarrow H + f(q, p)\phi_m \quad (2.7)$$

Teorema 2.1 *Se uma função no espaço de fase $F = F(q, p)$ se anula na superfície definida pelos vínculos $\phi_m = 0$, então F pode ser escrita como uma combinação dos vínculos $F = f_m\phi_m$. (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)*

Este teorema justifica uma mudança do tipo (2.7), que é desejada para definir a Hamiltoniana em todo o espaço de fase futuramente. O seguinte teorema, todavia, irá garantir imediatamente a consistência das equações de movimento neste formalismo.

Teorema 2.2 Se $F_n \delta q_n + G_n \delta p_n = 0$ para variações arbitrárias δq_n e δp_n na superfície dos vínculos ϕ_m , então: (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)

$$F_n = u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \quad (2.8)$$

$$G_n = u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}. \quad (2.9)$$

Por meio do teorema (2.2) e a equação (2.6) é possível obter as novas equações de movimento, análogas às equações de Hamilton:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (2.10)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}. \quad (2.11)$$

Então é possível reescrever a evolução temporal de uma grandeza $F(q, p)$:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial F}{\partial p_n} \dot{p}_n \quad (2.12)$$

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \right) \quad (2.13)$$

$$\dot{F} = \{F, H\} + u_m \{F, \phi_m\}. \quad (2.14)$$

Para manter a consistência nas equações de movimento, é necessário impor a condição de que os vínculos não variem no tempo:

$$\{\phi_m, H\} + u_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} = 0. \quad (2.15)$$

A condição pode ocasionar o surgimento de novos vínculos

$$\Phi_k(q, p) = 0. \quad (2.16)$$

Vínculos que surgem em decorrência da condição (2.15) são chamados de “vínculos secundários” e devem ser novamente submetidos à mesma condição de invariância:

$$\{\Phi, H\} + u_m \{\Phi, \phi_m\} = 0. \quad (2.17)$$

Neste ponto, torna-se necessário introduzir uma nova notação que contempla vínculos primários e secundários. Além disso, o sinal de igualdade fraca (\approx) será utilizado para identificar essas funções. Portanto, o conjunto completo de vínculos será escrito como:

$$\phi_j(q, p) \approx 0. \quad (2.18)$$

É importante ressaltar que a igualdade fraca não representa uma quantidade que é identicamente nula, mas sim uma função efetiva no espaço de fase. O índice j contempla o conjunto dos índices m (2.2) e k (2.16).

Dado o conjunto completo dos vínculos ϕ_j , são válidas as seguintes equações:

$$\{\phi_j, H\} + u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0, \quad (2.19)$$

cuja solução geral é:

$$u_m \approx U_m + v_a V_{am}, \quad (2.20)$$

onde U_m é uma solução particular do sistema de equações (2.19) e $v_a V_{am}$ é uma combinação de soluções linearmente independentes composta por coeficientes arbitrários v_a e soluções V_{am} , tal que

$$v_a V_{am} \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.21)$$

Com esta solução, define-se uma nova Hamiltoniana que inclui os vínculos no formalismo:

$$H_T = H + u_m \phi_m = H + (U_m + v_a V_{am}) \phi_m. \quad (2.22)$$

A Hamiltoniana Total (H_T) fornece as mesmas equações de movimentos que as equações (2.10) e (2.11). Desta forma, recuperamos uma forma conveniente de escrever as equações de movimento:

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (2.23)$$

2.2 Funções de Primeira e Segunda Classe

Dentro da teoria de vínculos, há uma classificação de funções que desempenha um papel fundamental na teoria. Esta classificação será aplicada aos vínculos e conterà informações sobre o sistema físico analisado. A nova classificação é feita pela definição de funções de primeira e segunda classe:

Definição 2 *Uma função é dita “de primeira classe” quando o parênteses de Poisson entre a função e todos os vínculos for fracamente nulo. Uma função é dita “de segunda classe” quando ao menos um dos parênteses de Poisson não for fracamente nulo.*

$$\{F, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.24)$$

Como consequência direta da definição, a soma de duas funções de primeira classe resulta em outra de primeira classe:

$$\{F + G, \phi_j\} = \{F, \phi_j\} + \{G, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.25)$$

Teorema 2.3 *O parênteses de Poisson entre duas funções de primeira classe resulta em outra função de primeira classe:*

□

Considere duas funções de primeira classe F e G .

$$\{\{F, G\}, \phi_j\} = \{F, \{G, \phi_j\}\} - \{G, \{F, \phi_j\}\} \quad (2.26a)$$

$$= \{F, g_{jj'}\phi_{j'}\} - \{G, f_{jj'}\phi_{j'}\} \quad (2.26b)$$

$$= \{F, g_{jj'}\}\phi_{j'} + g_{jj'}\{F, \phi_{j'}\} - \{G, f_{jj'}\}\phi_{j'} - f_{jj'}\{G, \phi_{j'}\} \quad (2.26c)$$

Todos os termos na equação (2.26) são fracamente iguais a zero e portanto:

$$\{\{F, G\}, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.27)$$

■

Considere as seguintes novas funções:

$$H' = H + U_m\phi_m \quad (2.28)$$

$$\phi_a = V_{am}\phi_m. \quad (2.29)$$

Há um interesse particular nessas definições: as funções H' e ϕ_a são de primeira classe. Desta forma a Hamiltoniana Total pode ser escrita como a soma de funções de primeira classe:

$$H_T = H' + v_a\phi_a. \quad (2.30)$$

Por consequência, a Hamiltoniana total H_T também é de primeira classe.

A verificação de que H' é de primeira classe segue diretamente da definição:

$$\{H', \phi_j\} = \{H, \phi_j\} + \{U_m\phi_m, \phi_j\} \quad (2.31a)$$

$$= \{H, \phi_j\} + U_m\{\phi_m, \phi_j\} \quad (2.31b)$$

$$\approx 0. \quad (2.31c)$$

De forma semelhante, verifica-se para ϕ_a :

$$\{\phi_a, \phi_j\} = \{v_a V_{am}\phi_m, \phi_j\} \quad (2.32a)$$

$$= v_a V_{am}\{\phi_m, \phi_j\} \quad (2.32b)$$

$$\approx 0. \quad (2.32c)$$

2.3 Transformações de Calibre

O fato de existir coeficientes arbitrários (v_a) na Hamiltoniana Total e ela ser usada para determinar as equações de movimento implica que o formalismo matemático possui mais parâmetros do que o necessário para se descrever um estado físico. Isto significa o eventual surgimento de funções distintas que representam o mesmo estado físico. A transformação que relaciona estas funções é chamada de “Transformação de Calibre”. O “calibre”, então, será algum parâmetro presente no formalismo que possui liberdade para ser alterado, de forma que os estados físicos permaneçam inalterados.

Definição 3 (Calibre) *Parâmetro no formalismo onde há a liberdade de escolha sem a alteração do estado físico.*

Definição 4 (Transformação de Calibre) *Transformação que relaciona funções que representam o mesmo estado físico.*

Nos seguintes passos, será explicitado que a existência dessas transformações são consequências da teoria de vínculos. Observando a evolução temporal de uma função F , tem-se:

$$F(t + \delta t) = F(t) + \dot{F}\delta t + \dots \quad (2.33)$$

$$F(t + \delta t) \approx F(t) + \{F, H_T\}\delta t + \dots \quad (2.34)$$

onde o último termo pode ser aberto como

$$\{F, H_T\} = \{F, H' + v_a\phi_a\} = \{F, H'\} + \{F, v_a\phi_a\}. \quad (2.35)$$

Dada a arbitrariedade do conjunto $\{v_a\}$, a expansão das soluções linearmente independentes poderia ser feita considerando um outro conjunto de coeficientes $\{\tilde{v}_a\}$. Então, podemos obter a mesma expressão, mas com coeficientes diferentes.

$$F(t + \delta t) \approx F(t) + \{F, H'\} + \{F, v_a\phi_a\}\delta t \quad (2.36a)$$

$$F(t + \delta t) \approx F(t) + \{F, H'\} + \{F, \tilde{v}_a\phi_a\}\delta t. \quad (2.36b)$$

Neste caso, as funções representam o mesmo estado físico, embora seus valores numéricos sejam diferentes. A diferença (variação) entre as funções é, portanto:

$$\delta F = (v_a - \tilde{v}_a)\delta t \{F, \phi_a\}. \quad (2.37)$$

Isto significa que, por meio do resultado obtido (2.37), pode-se realizar transformações do tipo

$$F \rightarrow F + \delta F \quad (2.38)$$

e a nova função representará o mesmo estado físico que a antiga.

Teorema 2.4 *O parênteses de Poisson entre dois vínculos de primeira classe gera uma transformação de calibre.*

□

Renomeando a variação dos coeficientes arbitrários por:

$$\varepsilon_a = (v_a - \tilde{v}_a)\delta t, \quad (2.39)$$

é possível definir um operador δ_ε que atua numa função F da seguinte forma:

$$\delta_\varepsilon F = \varepsilon_a \{F, \phi_a\}. \quad (2.40)$$

Ao realizar 4 transformações do tipo (2.40), obtém-se, individualmente, transformações de calibre. Para cada uma delas, define-se uma nova função resultante:

$$F_1 = F + \delta_\varepsilon F \quad (2.41a)$$

$$F_2 = F_1 + \delta_\eta F_1 \quad (2.41b)$$

$$F_3 = F_2 + \delta_{-\varepsilon} F_2 \quad (2.41c)$$

$$F_4 = F_3 + \delta_{-\eta} F_3. \quad (2.41d)$$

O objetivo, agora, é determinar a transformação $F \rightarrow F_4$. Ou seja, partindo de F , qual é a variação total δ_T que leva até F_4 ? Esta variação total δt respeita a relação:

$$F_4 = F + \delta_T F \quad (2.42)$$

Utilizando o conjunto de equações (2.41), é possível escrever a transformação (2.42) apenas com variações que atuam em F :

$$F_4 = F_3 + \delta_{-\eta} F_3 \quad (2.43a)$$

$$F_4 = F_2 + \delta_{-\varepsilon} F_2 + \delta_{-\eta}(F_2 + \delta_{-\varepsilon} F_2) \quad (2.43b)$$

$$F_4 = F_1 + \delta_\eta F_1 + \delta_{-\varepsilon}(F_1 + \delta_\eta F_1) + \delta_{-\eta}(F_1 + \delta_\eta F_1 + \delta_{-\varepsilon}(F_1 + \delta_\eta F_1)) \quad (2.43c)$$

$$F_4 = F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F) + \delta_{-\varepsilon}(F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F)) + \delta_{-\eta}(F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F)) + \delta_{-\varepsilon}(F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F)) \quad (2.43d)$$

Nota-se que a equação (2.43) está no formato desejado, pois é possível comparar com a equação (2.42). Do lado esquerdo, tem-se F_4 e do lado direito apenas termos com F . O operador definido em (2.40) é linear, pelo fato de que o próprio parênteses de Poisson é linear. Então, pode-se escrever a variação $\delta_T F$ dando destaque aos termos que possuem variação em primeira e segunda ordem:

$$\begin{aligned} \delta_T F &= \delta_\varepsilon F + \delta_{-\varepsilon} F + \delta_{-\eta} F + \delta_{-\eta} F + \\ &+ \delta_\eta \delta_\varepsilon F + \delta_{-\varepsilon} \delta_\varepsilon F + \delta_{-\varepsilon} \delta_\eta F \\ &+ \delta_{-\eta} \delta_\varepsilon F + \delta_{-\eta} \delta_\eta F + \delta_{-\eta} \delta_{-\varepsilon} F + \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

As variações em primeira ordem se cancelam e os termos que contém operadores com índice ε e η podem ser expandidos de acordo com a equação (2.40) :

$$\delta_T F = \eta_b \varepsilon_a (\{ \{ F, \phi_a \}, \phi_b \} - \{ \{ F, \phi_b \}, \phi_a \}) + \dots \quad (2.45)$$

Aplicando a identidade de Jacobi no segundo termo e a propriedade antissimétrica do parênteses de Poisson, obtém-se:

$$\delta F = \eta_b \varepsilon_a \{ \{ \phi_b, \phi_a \}, F \}, \quad (2.46)$$

onde os termos de ordem superior podem simplesmente ser condensados na notação δF .

■

Teorema 2.5 *O parênteses de Poisson entre um vínculo de primeira classe e a Hamiltoniana Total H_T gera uma transformação de calibre.*

□

O intuito é construir duas funções, F_1 e F_2 , que sejam transformações de calibre de uma determinada função F . No primeiro caso, aplica-se a evolução temporal na função F e depois realiza a transformação de calibre. No segundo caso, realiza-se a transformação de calibre e, em seguida, aplica a evolução temporal. Começando pela função F_1 :

$$F_1 = F + \delta F. \quad (2.47)$$

Ao seguir os passos descritos, tem-se :

$$F_1(t + \delta t) = F_1(t) + \dot{F}_1 \delta t \quad (2.48a)$$

$$F_1(t + \delta t) = F(t) + \delta F + \frac{d}{dt}(F + \delta F) \delta t \quad (2.48b)$$

$$F_1(t + \delta t) = F(t) + \delta F + \dot{F} \delta t + \frac{d}{dt}(\delta F) \delta t. \quad (2.48c)$$

Agora, de forma semelhante, define-se a função F_2 :

$$F_2 = F(t) + \delta F(t) \quad (2.49)$$

e a continuação segue os passos mencionados:

$$F_2(t + \delta t) = F(t + \delta t) + \delta(F(t + \delta t)) \quad (2.50a)$$

$$F_2(t + \delta t) = F(t) + \dot{F} \delta t + \delta(F(t) + \dot{F} \delta t) \quad (2.50b)$$

$$F_2(t + \delta t) = F(t) + \dot{F} \delta t + \delta F + \delta \dot{F} \delta t. \quad (2.50c)$$

Como ambas as funções são transformações de calibre da função F , é possível calcular uma variação total δ_T entre elas:

$$F_2(t + \delta t) - F_1(t + \delta t) = \delta_T F, \quad (2.51)$$

o que fornece o seguinte resultado:

$$\delta_T F = \delta t \left[\frac{d}{dt}(\delta F) - \delta \left(\frac{dF}{dt} \right) \right]. \quad (2.52)$$

Explicitando as evoluções temporais por meio da Hamiltoniana total (2.23):

$$\delta_T F = \delta t \left[\{\delta F, H_T\} - \delta \{F, H_T\} \right] \quad (2.53a)$$

$$\delta_T F = \delta t \left[\{\varepsilon_a \{F, \phi_a\}, H_T\} - \varepsilon_a \{ \{F, H_T\}, \phi_a \} \right] \quad (2.53b)$$

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \left[\{ \{F, \phi_a\}, H_T \} - \{ \{F, H_T\}, \phi_a \} \right]. \quad (2.53c)$$

Por fim, ao aplicar a identidade de Jacobi no segundo termo e a propriedade antissimétrica do parênteses de Poisson, obtém-se:

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \{ \{H_T, \phi_a\}, F \} \quad (2.54)$$

■

Corolário 2.5.1 *O parênteses de Poisson entre um vínculo de primeira classe e a Hamiltoniana de primeira classe H' gera uma transformação de calibre.*

□

A demonstração segue os mesmos passos do teorema, mas, ao chegar na equação (2.53), é possível expandir a Hamiltoniana Total de acordo com a equação (2.30):

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \left[\{ \{F, \phi_a\}, H' + v_b \phi_b \} - \{ \{F, H' + v_b \phi_b\}, \phi_a \} \right]. \quad (2.55)$$

Entretanto, todos os termos que contém ϕ_b se anulam, pois podem ser escritos da seguinte forma, pela propriedade de Jacobi:

$$\{ \{F, \phi_a\}, \phi_b \} - \{ \{F, \phi_b\}, \phi_a \} = \{ \{ \phi_b, \phi_a \}, F \}. \quad (2.56)$$

onde $\{ \phi_b, \phi_a \} = 0$ (Teorema 2.3). Portanto, obtém-se um resultado análogo com a Hamiltoniana de primeira classe:

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \{ \{H', \phi_a\}, F \}. \quad (2.57)$$

■

Os teoremas 2.3 e 2.5 são de grande relevância para uma compreensão mais abrangente da teoria clássica. Uma função $F(q, p)$ que define um estado físico pode ser submetida a uma transformação $F \rightarrow F + \delta F$ tal que a função transformada ainda descreve o

mesmo estado físico. A transformação na função corresponde também a uma mudança nos conjuntos q_n e p_n , significando a existência de outros respectivos pares de conjuntos que descrevem o estado físico. Os vínculos de primeira classe ganham, então, um papel importante, pois podem ser usados como geradores dessas transformações, como mostrado nos teoremas.

2.4 Mudança no Princípio Variacional

Desde a introdução neste formalismo, não houve menção em como ele afetaria o princípio variacional. É conveniente definir uma ação cujo princípio variacional já leve em consideração o formalismo de vínculos e, neste caso, é fácil verificar que a seguinte ação proporciona as equações de movimento adequadas:

$$S_T = \int_{t_1}^{t_2} \left[p_n \dot{q}_n - H - u_m \phi_m \right] dt. \quad (2.58)$$

Ao calcular a variação $\delta S_T = 0$, obtém-se as equações de movimento da forma (2.10) e (2.11).

É importante ressaltar que a transformada de Legendre é involutiva, ou seja, ela retorna à mesma função quando aplicada duas vezes. Sendo assim, não há motivos, até então, para dizer qual formalismo (Lagrangeano ou Hamiltoniano) é “mais fundamental”. Afinal, pode-se deduzir ambos de seus respectivos processos variacionais e definir a transformada de Legendre que os relaciona. A intenção nesta etapa do formalismo é, portanto, tornar as definições iniciais de vínculos primários e secundários menos relevantes. Observe que estas definições dependem exclusivamente do formalismo Lagrangeano, pois são consequência direta da transformada de Legendre e momentos. O princípio variacional (2.58) é correto do ponto de vista de consistência das equações de movimento. Entretanto, ele considera apenas os vínculos primários ϕ_m em sua definição. Partindo de um formalismo puramente Hamiltoniano, fica clara a necessidade de definir um princípio variacional que leve em consideração todos os vínculos (não só primários), isto é, o conjunto ϕ_j . Este princípio será apresentado a seguir:

$$S_E = \int_{t_1}^{t_2} \left[p_n \dot{q}_n - H - u_j \phi_j \right] dt. \quad (2.59)$$

Para manter a notação consistente, será utilizado γ para vínculos de primeira classe e χ para vínculos de segunda classe. Os conjuntos de vínculos γ_a e χ_b formam o conjunto completo de vínculos ϕ_j . O princípio (2.59) é equivalente a definir uma Hamiltoniana Estendida (H_E) que adiciona todos os vínculos de primeira classe, sem a distinção entre primários e secundários:

$$H_E = H + u_a \gamma_a. \quad (2.60)$$

A Hamiltoniana Estendida contribui de forma inédita à teoria, adicionando todos os vínculos de primeira classe de forma explícita. Como estes vínculos são considerados geradores de transformações de calibre, a Hamiltoniana Estendida inclui todos os geradores ao formalismo. A evolução temporal se mantém da mesma forma ao realizar o cálculo com a Hamiltoniana estendida:

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}. \quad (2.61)$$

2.5 Parênteses de Dirac

A classificação de vínculos entre primeira e segunda classe, como mencionado anteriormente, se mostrou efetiva pelos significados físicos que elas apresentam. Vínculos de primeira classe têm um papel fundamental nas transformações de calibre, enquanto que os vínculos de segunda classe se apresentarão como uma restrição específica no sistema. Vínculos de segunda classe não contribuem para a dinâmica do sistema. Estes mostram, entretanto, que o sistema possui menos graus de liberdade do que inicialmente foram concebidos, ou seja, existem conjuntos de coordenadas e momentos que podem ser retirados da análise do sistema físico sem que haja qualquer alteração na dinâmica. Para evidenciar este fato sobre os vínculos de segunda classe, pode-se analisar o caso mais simples onde $q_1 \approx p_1 \approx 0$. Neste caso, o parênteses de Poisson $\{q_1, p_1\} = 1$ indica que q_1 e p_1 são vínculos de segunda classe. Analisando o espaço de fase composto por N coordenadas e N momentos, é fácil perceber que este vínculo apenas exclui um dos possíveis graus de liberdade que o sistema pode atuar. A dinâmica do sistema, então, está restrita às outras $N - 1$ coordenadas e $N - 1$ momentos. No caso de uma partícula que pode mover-se em 3 dimensões x , y e z , estabelecer que $y \approx p_y \approx 0$ é o mesmo que fixá-la no plano xy . Portanto, toda a análise física está contida nas coordenadas x e y . O estudo mais profundo de vínculos de segunda classe levará a mais uma generalização da teoria de vínculos, o parênteses de Dirac. O parênteses de Dirac irá generalizar o exemplo dado para um conjunto qualquer de vínculos de segunda classe.

Dado o conjunto completo de vínculos ϕ_j , se estabelece a seguinte matriz:

$$C_{jj'} = \{\phi_j, \phi_{j'}\}, \quad (2.62)$$

tal que $C_{jj'} \approx 0$ sempre que há vínculos de primeira classe na operação. Pode-se verificar o teorema a seguir.

Teorema 2.6 *Se o determinante da matriz $C_{jj'}$ for 0, existe pelo menos um vínculo de primeira classe no conjunto ϕ_j . (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)*

Considerando o teorema, pode-se reorganizar a matriz de vínculos em submatrizes, utilizando o determinante como critério de organização. A única submatriz onde o deter-

minante não se anula é, pelo teorema, composta exclusivamente por vínculos de segunda classe. A matriz tem a seguinte forma:

$$C_{jj'} = \begin{pmatrix} \{\gamma_a, \gamma_{a'}\} & \{\gamma_a, \chi_{b'}\} \\ \{\chi_b, \gamma_{a'}\} & \{\chi_b, \chi_{b'}\} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Todos os seguintes termos: $\{\gamma_a, \gamma_{a'}\}$, $\{\gamma_a, \chi_{b'}\}$, $\{\chi_b, \gamma_{a'}\}$ contém vínculos de primeira classe e, portanto, se anulam. Restando apenas o termo $\{\chi_b, \chi_{b'}\}$, a matriz se torna:

$$C_{jj'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \{\chi_b, \chi_{b'}\} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

A submatriz de vínculos de segunda classe $\{\chi_b, \chi_{b'}\}$ será identificada pelo índice b , isto é, $C_{bb'}$. Novamente, pelo teorema 2.6, a matriz $C_{bb'}$ possui determinante não nulo e, portanto, possui uma inversa tal que:

$$C_{bb'} C_{b'b'}^{-1} = \delta_{bb'}. \quad (2.65)$$

A partir da inversa da matriz $C_{bb'}$ é definido o parênteses de Dirac para duas funções F e G definidas no espaço de fase (DIRAC, 2001):

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi_b\} C_{bb'}^{-1} \{\chi_{b'}, G\}. \quad (2.66)$$

A definição implica na seguinte propriedade:

$$\{\chi, F\}_D = 0. \quad (2.67)$$

O parênteses de Dirac entre vínculos de segunda classe e uma função F é fortemente igual a zero para qualquer F . Quando este caso ocorre durante a análise de um sistema, não é necessário o cálculo do parênteses, pois ele pode ser avaliado previamente como zero (diferentemente dos vínculos no parênteses de Poisson). O parênteses de Dirac para vínculos de primeira classe é fracamente igual ao parênteses de Poisson:

$$\{F, \gamma\}_D \approx \{F, \gamma\}. \quad (2.68)$$

Para todo F , a evolução temporal não é modificada pelo parênteses de Dirac:

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}_D. \quad (2.69)$$

Por fim, o parênteses de Dirac obedece as mesmas propriedades do parênteses de Poisson:

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D \quad (2.70)$$

$$\{F, GK\}_D = \{F, G\}_D K + G \{F, K\}_D \quad (2.71)$$

$$\{\{F, G\}_D, K\}_D + \{\{K, F\}_D, G\}_D + \{\{G, K\}_D, F\}_D = 0 \quad (2.72)$$

2.6 Fixação de Calibre

A fixação de calibre consiste em realizar uma escolha sobre o parâmetro livre determinado pelo formalismo. Como consequência da teoria de vínculos, observou-se que há mais de um conjunto de coordenadas e momentos que satisfazem um determinado estado físico. A fixação do calibre vai tornar esta relação única, ou seja, dado um estado físico, existe um único conjunto de coordenadas e momentos que o satisfaz e vice-versa. Como as transformações de calibre são obtidas por meio de equações do tipo (2.37), tem-se um número específico de parâmetros que podem ser fixados, que não pode ser maior do que o número de vínculos de primeira classe γ_a .

3 Campos

3.1 Lagrangeana e Hamiltoniana para Campos

O formalismo clássico pode ser estendido para as quantidades físicas conhecidas como “campos”. Os campos são funções definidas no espaço-tempo (PESKIN, 2018) que serão usadas para construir a Lagrangeana do sistema. Ao invés de coordenadas discretas, a Lagrangeana será função de campos que dependem de variáveis contínuas. Partindo da ação clássica, que é uma integral no tempo da Lagrangeana, é possível redefinir a Lagrangeana como a seguinte integral:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} é conhecida como a “densidade de Lagrangeana” e é uma função dos campos φ_a e suas derivadas $\partial_\mu \varphi_a$, onde $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a). \quad (3.2)$$

No contexto de relatividade, a métrica utilizada será de maioria positiva $(-, +, +, +)$. A ação pode ser escrita da seguinte maneira, incluindo a integral no tempo:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (3.3)$$

O princípio variacional $\delta S = 0$ implica na equação de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right). \quad (3.4)$$

A Hamiltoniana, é definida de forma análoga à transformada de Legendre:

$$H = \int d^3x \left[\sum_a p_a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L} \right] \quad (3.5)$$

onde p é o momento associado ao campo φ dado por:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}. \quad (3.6)$$

A quantidade entre colchetes na equação (3.5) é denominada por “densidade de Hamiltoniana”:

$$\mathcal{H} = \sum_a p_a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L}. \quad (3.7)$$

Pelo fato de que a ação é determinada em função das quantidades \mathcal{L} ou \mathcal{H} , estas também podem eventualmente ser chamadas de “Lagrangeana” e “Hamiltoniana” do sistema. O parênteses de Poisson de duas funções F e G é:

$$\{F, G\} = \int d^3x \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_a} \frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial G}{\partial \varphi_a} \right]. \quad (3.8)$$

3.2 Campo Eletromagnético

O campo eletromagnético no vácuo (ausência de fontes) tem a ação da seguinte forma:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.10)$$

Da definição dada, nota-se que o tensor $F_{\mu\nu}$ possui a propriedade antissimétrica, isto é : $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

A ação (3.9) e o tensor (3.10) já permitem observar que o campo eletromagnético possui uma invariância por escolha de calibre. Considere a seguinte variação:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad (3.11)$$

onde Λ é uma função arbitrária. A invariância pode ser verificada pela direta aplicação na definição:

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = 0. \quad (3.12)$$

Chega-se à conclusão de que a ação do campo eletromagnético se mantém inalterada por transformações do tipo :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (3.13)$$

Dado a Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

é desejado transitar para o formalismo Hamiltoniano a fim de obter-se uma análise mais completa, a começar pelo cálculo dos momentos:

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,0}}, \quad (3.15)$$

onde $A_{\mu,\nu} = \partial_\nu A_\mu$. Este cálculo fica mais evidente ao escrever a Lagrangeana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}, \quad (3.16)$$

que implica na equação para o momento a seguir:

$$p^\mu = -F^{0\mu}. \quad (3.17)$$

Agora, voltando para o formalismo de vínculos desenvolvido, já é possível notar que existe um vínculo entre os momentos p^μ :

$$p^0 \approx 0. \quad (3.18)$$

Seguindo com o cálculo da Hamiltoniana, obtém-se:

$$H = \int d^3x \left[p^\mu A_{\mu,0} - \mathcal{L} \right] \quad (3.19)$$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} p^i p_i - A_0 p^i{}_{,i} \right] \quad (3.20)$$

Pelo fato da existência de vínculos no sistema, deve-se impor a condição de que os vínculos são preservados no tempo:

$$\{p^0, H\} + u_0 \{p^0, p^0\} \approx 0. \quad (3.21)$$

Ao impor a condição, obtém-se o resultado:

$$\{p^0, H\} = p^i{}_{,i} \quad (3.22)$$

e, portanto, tem-se o surgimento dos seguintes vínculos secundários:

$$p^i{}_{,i} \approx 0. \quad (3.23)$$

Neste caso, todos os vínculos são de primeira classe:

$$\{p^0, p^i{}_{,i}\} \approx \{p^i{}_{,i}, p^j{}_{,j}\} \approx 0. \quad (3.24)$$

É possível, então, simplesmente adicionar estes vínculos à Hamiltoniana H para formar a Hamiltoniana Estendida H_E :

$$H_E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} p^i p_i - A_0 p^i{}_{,i} \right] + \int d^3x u_1(x) p^0 + \int d^3x u_2(x) p^i{}_{,i}. \quad (3.25)$$

([NASTASE, 2019](#)) ([SCHWARTZ, 2014](#)) ([DAS, 2020](#))

4 Quantização

Na mecânica quântica, os estados de um sistema físico são descritos por vetores no espaço de Hilbert. As grandezas físicas (observáveis) são descritas por meio de operadores hermitianos que atuam nos estados.

O procedimento conhecido como “quantização” baseia-se em estabelecer uma analogia entre as grandezas definidas na mecânica clássica e seus correspondentes na mecânica quântica. O parêntese de Poisson entre duas grandezas clássicas é associado ao comutador de seus respectivos operadores:

$$\{F, G\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{G}]. \quad (4.1)$$

Este procedimento foi estabelecido por Dirac ([DIRAC, 2001](#)). A constante de Planck (\hbar) estará explícita para enfatizar o assunto de quantização.

4.1 Quantização de Sistemas Vinculados

Na mecânica clássica, os vínculos são funções das coordenadas q e dos momentos p . É natural que, ao transitar para a mecânica quântica, os vínculos se tornem relações entre os operadores de posição e momento. Entretanto, como lidar com o fato de que os vínculos possuem sempre o valor numérico igual a zero? Podemos impor que esta relação específica entre os operadores de posições e momentos (vínculo), ao ser aplicada em um estado, resulta em um valor nulo :

$$\hat{\phi} |\psi\rangle = 0. \quad (4.2)$$

Esta relação entra em contradição com um dos procedimentos que foi estabelecido anteriormente. O processo de quantização foi construído por meio da relação (4.1), mas note que se houver vínculos de segunda classe no sistema, como por exemplo:

$$\hat{q}_1 |\psi\rangle = \hat{p}_1 |\psi\rangle = 0, \quad (4.3)$$

o operador resultante do comutador entre eles também vai fornecer o resultado nulo ao ser aplicado no estado:

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] |\psi\rangle = 0 \quad (4.4)$$

e, portanto, esta equação não está de acordo com a quantização de posições e momentos:

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i\hbar. \quad (4.5)$$

A solução para o problema de quantização é realizar um mapeamento diferente da mecânica clássica para a mecânica quântica, que utiliza o parêntese de Dirac (equação 2.66),

ao invés do parênteses de Poisson. Isto é:

$$\{F, G\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{G}] \quad (4.6)$$

O parênteses de Dirac, como foi desenvolvido na teoria de vínculos, permite utilizar a igualdade forte para os vínculos de segunda classe. Por consequência, a quantização destes vínculos vai resultar em operadores nulos:

$$\hat{\chi} = 0 \quad (4.7)$$

e, portanto, o comutador não envolve mais nenhuma contradição:

$$[\hat{\chi}, \hat{F}]|\psi\rangle = 0. \quad (4.8)$$

De forma geral, pode-se calcular o comutador entre dois operadores de vínculos $\hat{\phi}_j$. Como o comutador também resulta no valor nulo ao ser aplicado em um estado, o resultado do comutador deve ser um outro vínculo:

$$[\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_{j'}] = c_{jj'a} \hat{\gamma}_a \quad (4.9)$$

Os vínculos resultantes serão combinações de vínculos de primeira classe ($\hat{\gamma}_a$), dado que os vínculos de segunda classe podem ser todos igualados fortemente a zero.

O parênteses de Poisson entre duas funções de primeira classe resulta em outra função de primeira classe. Pela propriedade (2.68) dos parênteses de Dirac pode-se fazer a seguinte quantização:

$$\{\gamma, H_e\} \approx \{\gamma, H_e\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{\gamma}, \hat{H}_e]. \quad (4.10)$$

Como o resultado de $\{\gamma, H_e\}_D$ é de primeira classe, obtém-se exatamente o análogo quântico:

$$[\hat{\gamma}_a, \hat{H}_e] = d_{aa'} \hat{\gamma}_{a'}. \quad (4.11)$$

Ou seja, a evolução temporal dos vínculos γ resulta em uma combinação de vínculos, preservando as mesmas propriedades clássicas.

4.2 Integral de Caminho

Para analisar o comportamento de uma partícula na mecânica quântica, é de interesse conhecer a probabilidade de uma partícula ser encontrada em um estado final $|\psi_f\rangle$, dado um determinado estado inicial $|\psi_i\rangle$. Esta probabilidade está associada à quantidade $\langle\psi_f|\psi_i\rangle$. No caso de uma partícula percorrendo uma determinada trajetória, é necessário estabelecer algumas quantidades que representem este fenômeno na mecânica quântica, dado que o conceito de “trajetória” não é definido neste contexto. No caso, a partícula

pode estar associada a alguma posição q e tempo t , mas estes respeitam o princípio de incerteza de Heisenberg.

Primeiramente, a amplitude de probabilidade $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ pode ser calculada tal que a probabilidade é dada por:

$$\mathcal{P} = |K(q_f, t_f; q_i, t_i)|^2, \quad (4.12)$$

onde $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ segue a definição usual:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle. \quad (4.13)$$

É possível definir um estado que dependa das posições e do tempo por meio de um operador de evolução temporal:

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle, \quad (4.14)$$

tal que uma função de onda pode ser calculada por:

$$\psi(q, t) = \langle q, t | \psi \rangle. \quad (4.15)$$

A motivação para definir um estado da maneira (4.14) é que não haja distinção entre posições e tempo, a fim de calcular a amplitude de probabilidade $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$. Considerando um pequeno segmento discretizado entre (q_i, t_i) e (q_f, t_f) , obtém-se a seguinte equação:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}(t_{j+1}-t_j)} | q_j \rangle. \quad (4.16)$$

É possível, agora, renomear a variação no tempo como $\tau = t_{j+1} - t_j$ e realizar uma expansão da exponencial em torno desta variável:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | 1 - i\hat{H}\tau + \dots | q_j \rangle \quad (4.17)$$

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | q_j \rangle - \langle q_{j+1} | i\hat{H}\tau | q_j \rangle + \dots \quad (4.18)$$

Inserindo a relação de completeza, na base dos momentos, no primeiro termo:

$$\langle q_{j+1} | q_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \quad (4.19)$$

e portanto:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle. \quad (4.20)$$

O operador Hamiltoniana é função dos operadores momento e posição, no geral, mas considera-se, por simplicidade, o caso onde $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(q)$:

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle. \quad (4.21)$$

O termo com o operador momento pode ser reescrito aplicando a relação de completeza:

$$\langle q_{j+1} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | q_j \rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{\hat{P}^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle, \quad (4.22)$$

enquanto que o termo potencial se torna:

$$\langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle = V(q_j) \langle q_{j+1} | q_j \rangle, \quad (4.23)$$

onde $V(q_j)$ é uma função que pode levar q_j e q_{j+1} como argumentos. Então, a atuação do operador Hamiltoniana resulta em

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} H(q, p). \quad (4.24)$$

Inserindo este resultado de volta na equação (4.20), tem-se:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} (1 - i\tau H(q, p)), \quad (4.25)$$

onde o termo obtido dentro da integral corresponde à expansão exponencial (4.17) realizada anteriormente e, portanto:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int dp e^{i[p(q_{j+1}-q_j) - \tau H(q, p)]}. \quad (4.26)$$

Esta amplitude de probabilidade corresponde apenas a um pequeno segmento de trajetória possível. A grandeza que corresponde $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ deve generalizar a equação (4.26) para o caso contínuo. Para que isso ocorra, é necessário que haja múltiplos momentos p_j associados a cada segmento de posição q_j e tempo t_j . Como consequência, haverá uma multiplicação de cada exponencial do tipo (4.26), resultando numa integração no expoente. Além disso, há uma integração de múltiplos q , que corresponde a segmentos completos. Toda essa informação está contida na equação a seguir:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}, \quad (4.27)$$

onde $\mathcal{D}q$ e $\mathcal{D}p$ correspondem a $(\prod_{j=1}^n dq_j)$ e $(\prod_{j=1}^n dp_j)$, respectivamente. O termo em colchetes na exponencial corresponde à ação e portanto a equação pode ser escrita na forma:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{iS}. \quad (4.28)$$

(RYDER, 1996)

4.3 Fontes

O caso da Teoria Quântica de Campos não é coerente com o formalismo de integral de caminho para partículas clássicas. Para campos, a Lagrangeana é modificada com a adição de uma fonte $J(t)$ que vai gerar uma amplitude de transição do vácuo para o vácuo:

$$L \rightarrow L + J(t)q(t). \quad (4.29)$$

Esta amplitude é dada por:

$$Z(J) = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ i \int dt [L + Jq + \frac{1}{2}i\epsilon q^2] \right\}, \quad (4.30)$$

onde o termo $\frac{1}{2}i\epsilon q^2$ corresponde a uma pequena contribuição imaginária. A relação é utilizada no contexto de Teoria Quântica de Campos, onde há criação e destruição de partículas.

5 Próximas Etapas do Projeto: Teorias de Calibre

Este capítulo tem o objetivo de apresentar temas que serão desenvolvidos na próxima etapa do Trabalho de Conclusão de Curso.

5.1 Quantização do Campo Eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético envolve dificuldades associadas à preservação da covariância (RYDER, 1996). A escolha de calibre, entretanto, tem o papel fundamental na definição do campo. Na quantização por meio do calibre de Lorenz, opta-se por manter a covariância ao estabelecer os comutadores da mecânica quântica.

5.2 Quantização no Calibre de Lorenz

As equações de movimento para o campo eletromagnético no vácuo possuem a seguinte forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (5.1a)$$

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \quad (5.1b)$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.1c)$$

A fixação no calibre de Lorenz consiste em realizar a transformação

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (5.2)$$

de modo que o calibre Λ satisfaça a seguinte relação:

$$\square \Lambda = -\partial_\mu A_\mu. \quad (5.3)$$

Como consequência desta escolha de calibre, tem-se:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.4)$$

É possível definir uma Lagrangeana de modo que, ao calcular a equação de Euler-Lagrange, o calibre de Lorenz já esteja fixado. Esta Lagrangeana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (5.5)$$

e as equações de movimento se tornam:

$$\square A_\mu = 0. \quad (5.6)$$

É importante salientar que, ao calcular o momento baseado na Lagrangeana (5.5), obtém-se exatamente a relação (5.4):

$$p^0 = -\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.7)$$

A quantização dos campos é realizada de forma covariante para preservar as transformações de Lorenz:

$$[A_\mu(\vec{x}, t), p_\nu(\vec{x}', t)] = ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.8)$$

$$[A_\mu, A_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0. \quad (5.9)$$

Nota-se que há um vínculo no sistema dado pela equação (5.7), portanto a quantização resultará em:

$$\hat{p}^0 |\psi\rangle = \partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0. \quad (5.10)$$

Esta relação vai garantir que não haja valores esperados negativos para a energia dos campos, mas neste contexto foi naturalmente trazida pela teoria de vínculos. (Este fato foi inicialmente verificado por outra abordagem, por Gupta e Bleuler.) (GAZEAU; RENAUD; TAKOOK, 2000)

5.3 Campos de Calibre não Abelianos

A eletrodinâmica, assim como outros campos fundamentais da natureza, podem ser analisados do ponto de vista de suas simetrias. Os campos são grandezas definidas para um dado ponto no espaço-tempo e, de forma geral, há um desejo de que as simetrias construídas sejam válidas localmente (SREDNICKI, 2007).

$$\phi(x) \rightarrow U(x)\phi(x). \quad (5.11)$$

Com o objetivo de manter a teoria covariante, muda-se a derivada ∂_μ para a derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (5.12)$$

de forma que a transformação seja:

$$D_\mu \rightarrow U(x)D_\mu U^\dagger(x). \quad (5.13)$$

Um campo de calibre se transforma, portanto, de acordo com:

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{e}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x). \quad (5.14)$$

O eletromagnetismo é um caso onde a teoria é invariante por:

$$U(x) = \exp\{-ie\Gamma(x)\}, \quad (5.15)$$

o que resulta em:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\Gamma(x). \quad (5.16)$$

5.4 BRST

O formalismo BRST permite uma generalização do procedimento de quantização, que pode ser aplicado a teorias onde há simetrias locais e há a necessidade da fixação de calibre. Este é construído baseado numa extensão da teoria de vínculos (NASTASE, 2019). É possível construir uma Lagrangeana completa que contenha somente termos invariantes por um tipo de transformação, chamada BRST. Os campos de calibre não abelianos (chamados de Yang-Mills) são invariantes por estas transformações e, quando somados a um termo, também invariante por BRST que realiza o papel de fixação de calibre, produzem a Lagrangeana completa (SREDNICKI, 2007).

A simetria BRST tem uma carga associada Q_B , obtida através do teorema de Noether, que estabelece grandezas conservadas. A Lagrangeana que engloba as simetrias mencionadas tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + [Q_B, \Psi]^*, \quad (5.17)$$

onde \mathcal{L}_c é a Lagrangeana Clássica e $[Q_B, \Psi]^*$ é um anticomutador. Quando esta Lagrangeana é colocada na ação, a variação da amplitude de transição, escrita em termos da integral de caminho, resulta em estados físicos invariantes por BRST:

$$Q_B |\psi\rangle = 0. \quad (5.18)$$

(FUSTER; HENNEAUX; MAAS, 2005) (NIEMI, 1989)

Conclusão

Este projeto apresenta uma fundamentação em teoria de vínculos, teoria clássica de campos, quantização e teorias de calibre. Estabeleceu-se a base para o estudo mais aprofundado que deverá ser feito na etapa seguinte, abordando mais extensamente os temas voltados à Teoria Quântica de Campos, formalismo BRST e formalismo BV.

Referências

- DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2020. Citado na página 31.
- DIRAC, P. A. M. *Lectures on quantum mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2001. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 9, 26 e 33.
- FUSTER, A.; HENNEAUX, M.; MAAS, A. Brst-antifield quantization: a short review. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 2, n. 05, p. 939–963, 2005. Citado na página 39.
- GAZEAU, J.; RENAUD, J.; TAKOOK, M. Gupta-bleuler quantization for minimally coupled scalar fields in de sitter space. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 6, p. 1415, 2000. Citado na página 38.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. *Quantization of gauge systems*. [S.l.]: Princeton university press, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 25.
- NASTASE, H. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 39.
- NIEMI, A. J. Pedagogical introduction to brst. *Physics reports*, Elsevier, v. 184, n. 2-4, p. 147–165, 1989. Citado na página 39.
- PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 29.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge university press, 2014. Citado na página 31.
- SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.