Universidade de Brasília
Instituto de Física

Quantização do Modelo Gravitacional Dilatônico (G2dD)

Relatório apresentado como requisito parcial para conclusão do PIBIC

Marcos Pereira[1]
marcos.p.10@hotmail.com

Arsen Melikyan[2]
amelik@gmail.com

Abstract

Nesse projeto estudamos sobre a integrabilidade do modelo G2dD. Quando solucionamos esse modelo através da tecnologia dos pares de Lax, tomamos os parênteses de Poisson tensorial entre os operadores de transição de forma semelhante à outros modelos integráveis permitindo a constatação de algumas singularidades, que são canceladas devido à presença de um campo escalar no modelo denominado dilaton que devido ao seu comportamento assintótico cancela tais singularidades definindo uma álgebra bem definida e única que satisfaz as identidades de Jacobi e é totalmente antissimétrica. Vimos também que esse modelo possui uma estrutura simplética não ultralocal e portanto bem definida o que permite a quantização desse modelo, visto que há desenvolvimentos recentes na quantização de sistemas não ultralocais.

KEYWORDS: Integrabilidade, Gravitação Dilatônica, Gravitação, Par de Lax, Quantização

1 Introdução

Modelos gravitacionais bidimensionais servem como modelos padrões para o estudo da gravitação 4-dimensional ou superior. Resultam da compactação de dimensões maiores para duas, são muito interessantes devido à sua estrutura de integração que permite utilizarmos um número finito de métodos não perturbativos bem definidos para encontrar uma solução não trivial.

Esses modelos trazem a possibilidade de realizar a quantização através do método do espalhamento inverso, que é comum na teoria de modelos integráveis. Além disso, tem sido mostrado que na teoria das cordas encontramos claramente a mesma estrutura de integração apresentado pelo modelo gravitacional bidimensional, eles são particularmente interessantes em relação à correspondência AdS/CFT, que afirma que a teoria de cordas bidimensional é uma formulação dual das teorias de calibres em quatro dimensões. A dualidade na AdS/CFT é uma das mais importantes descobertas na física teórica, permitindo o estudo não-perturbativo em teorias de calibres. O estudo das propriedades de integrabilidade em modelos gravitacionais bidimensionais e sua quantização podem nos levar à uma melhor compreensão da quantização das cordas, e sendo assim, nos prover um entendimento não-perturbativo da teorias de calibres, o exemplo mais importante é o Modelo Padrão.

Esses modelos apresentam uma não ultralocalidade, modelos integráveis não ultralocais apresentam algumas singularidades na álgebra das matrizes de monodromia e apesar de existirem vários métodos para resolver modelos não ultralocais, nenhum deles apresenta uma solução fundamental e a quantização desses modelos continua sendo um problema em aberto, ao contrário dos modelos que apresentam ultralocalidade encontrados na literatura, estes não possuem singularidades e o processo de quantização é bem compreendido e estabelecido.

Propomos estabelecer, para o modelo gravitacional dilatônico (ou bidimensional), uma conexão entre esse mecanismo de quantização recentemente desenvolvido para qualquer modelo não ultralocal e para campos dilatônicos que regularizam singularidades e efetivamente reduz a gravidade bidimensional à um sistema bem definido. Um entendimento profundo e tais conexões podem criar novos caminhos para proceder com a quantização de cordas e por sua vez, as teorias de calibres duais.

2 Integrabilidade Clássica

Um sistema clássico é dito integrável quando pode ser descrito por equações diferenciais lineares, ou, não lineares que possuem solução analítica. A solução pode ser encontrada a partir de passos finitos de operações algébricas e integrações.

2.1 Integrabilidade de Liouville e variáveis ângulo-ação

Primeiro devemos ser introduzidos à seguinte definição para sistema integrável.

Definição 1. *Um sistema integrável é um espaço de fase par, associado à n campos escalares independentes definidos globalmente*[1] $\{f_\mu\}_{\mu=1}^{n}$, *dizemos que esses campos comutam quando*

$$\{f_\mu, f_\nu\} = \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{z}} \boldsymbol{\omega} \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{z}} = 0, \ \ \mu, \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

onde a notação acima refere-se ao parênteses de Poisson

O **Teorema de Arnold-Liouville permite a verificação de que os sistemas integráveis permitem obter equações de movimento solúveis**.

A transformação canônica univalente de transformação de coordenadas no espaço de fase

$$\Big\{ \mathbf{z} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to \tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})$$

preserva a forma simplética dos parênteses de Poisson

$$\{\tilde{\mathbf{z}}, H\} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} = \{\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}\}_{\mathbf{z}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} = \boldsymbol{\omega}' \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \tag{1}$$

portanto

$$\{f, g\}_{\mathbf{z}} = \{f, g\}_{\tilde{\mathbf{z}}}$$

os parênteses de Poisson são invariantes sob transformações canônicas.

Com γ e γ_0 sendo duas curvas fechadas de eventos simultâneos no tubo de vórtices, obtemos a partir da integral de Poincaré-Cartan [1]:

$$\oint_{\gamma} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - H' dt = \xi \oint_{\gamma_0} \mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt \implies \oint_{\gamma} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \xi \mathbf{p} d\mathbf{q} + \big(H' - \xi H\big)\, dt + dS = 0$$

inserir dS na integral acima não altera seu resultado[2] e portanto obtemos a forma diferencial da função geradora das transformações canônicas $dS = \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \xi \mathbf{p} d\mathbf{q} + (H' - \xi H)\, dt$[3]

2.2 Integrabilidade na Teoria Clássica de Campos

Os sistemas tratados na Mecânica Clássica possuem graus de liberdade finitos, estudar a integrabilidade desses sistemas é razoável visto que há uma quantidade finita de cargas conservadas. No entanto, na Teoria Clássica de Campos, onde os sistemas apresentam graus de liberdade contínuos há a necessidade de estender o conceito de integrabilidade para esses sistemas, através do Método do Espalhamento Inverso Clássico (MEIC) podemos obter uma estratégia que possibilite encontrarmos as soluções dessas equações diferenciais parciais não lineares.

[1] gradientes das funções são linearmente independentes no **espaço tangente** a qualquer ponto no espaço de fase.
[2] $dS = \nabla S \cdot d\mathbf{r} \implies \oint dS = 0$
[3] Daqui tiramos que se $S(q, \tilde{q}, t)$ então $\partial_{\tilde{\mathbf{q}}} S = \tilde{\mathbf{p}}, \ \ \partial_{\mathbf{q}} = -\xi \mathbf{p}, \ \ \partial_t S = H' - \xi H$

2.2.1 Estrutura de Simplética

Considere um espaço de fase $\mathscr{M}$, m-dimensional com coordenadas $\left(z^1, \cdots, z^m\right)$.

Definição 2. *A matriz simplética $\omega^{ij} = \omega^{ij}(\mathbf{z})$ é chamada estrutura de Poisson se há um parêntese de Poisson definido como:*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \boldsymbol{\omega} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \tag{2}$$

satisfazendo a relação de antissimetria e a identidade de Jacobi. Além disso

$$\left\{z^i, z^j\right\} = \omega^{ij} \tag{3}$$

da identidade de Jacobi obtemos [2]:

$$\omega^{in} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial z^n} + \omega^{jn} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial z^n} + \omega^{kn} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial z^n} = 0 \tag{4}$$

2.2.2 Teoria Clássica de Campos

Para analisarmos sobre a integrabilidade de um sistema cujos graus de liberdades são contínuos, devemos fazer algumas adaptações, para obtermos uma versão do Teorema de Arnold-Liouville em infinitos graus de liberdade.

Ao contrário da Mecânica Clássica, na Teoria Clássica de Campos os graus de liberdade são contínuos, portanto devemos tomar algumas transformações [3]:

$$\begin{gathered}
q_\mu(t),\ \mu \in \mathbb{N} \longrightarrow\ \psi(q,t),\ q \in D \subset \mathbb{R} \\
\sum_\mu \longrightarrow \int_D dq \\
f(q) \longrightarrow F\left[\psi(q,t)\right] \\
\frac{\partial}{\partial q_\mu} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta \psi}
\end{gathered}$$

note que f são funções reais e F funcionais lineares[4] das variáveis dinâmicas $\psi(q,t)$. Também é importante definir as derivadas variacionais

$$\frac{\delta F}{\delta \psi} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial q^n} \left(\frac{\partial F}{\partial \partial_q^n \psi} \right); \qquad \frac{\delta \psi(x,t)}{\delta \psi(y,t)} = \delta\left(x-y\right). \tag{5}$$

Daqui definimos os parênteses de Poisson entre dois funcionais

$$\{F, G\} = \iint_{D \times D} d^2 q \frac{\delta F}{\delta \psi(q_1,t)} \omega(q_1, q_2, \psi) \frac{\delta G}{\delta \psi(q_2,t)}, \tag{6}$$

com $\omega(q_1, q_2, t)$ sendo uma estrutura de Poisson que garanta a propriedade de antissimetria dos parênteses e a identidade de Jacobi. Utilizando

$$\omega(x,y,t) = \frac{1}{2}\left(\partial_y \delta\left(x-y\right) - \partial_x \delta\left(x-y\right)\right)$$

obtemos

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \int_D dx \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta F}{\delta \psi(x,t)} \right) \frac{\delta G}{\delta \psi(x,t)} - \frac{\delta F}{\delta \psi(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta G}{\delta \psi(x,t)} \right) \right]. \tag{7}$$

[4]Funcionais lineares são: $F : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ na forma: $F[\psi(q,t)] = \int_D dq \mathscr{L}\left(\psi, \partial_q \psi, \cdots\right)$

2.3 A representação de Lax e MEIC

O Método do espalhamento inverso clássico (MEIC) baseia-se no problema linear fundamental, certas EDP's bidimensionais podem ser descritas pelo sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} = \mathbf{L}_x\,(x,t;\lambda)\,\boldsymbol{\Psi} \\ \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = \mathbf{L}_t\,(x,t;\lambda)\,\boldsymbol{\Psi} \end{cases} \tag{8}$$

$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}\,(x,t;\lambda)$.

A condição para consistência da 8 é:

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{c} \partial_x \partial_t \boldsymbol{\Psi} = (\partial_x \mathbf{L}_t + \mathbf{L}_t \mathbf{L}_x)\,\boldsymbol{\Psi} \\ \partial_t \partial_x \boldsymbol{\Psi} = (\partial_t \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_x \mathbf{L}_t)\,\boldsymbol{\Psi} \end{array}}} \tag{9}$$

portanto

$$\partial_x \partial_t \mathbf{\Psi} - \partial_t \partial_x \mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \tag{10}$$

devido ao fato de que $d\mathbf{\Psi}$ é uma 1-forma fechada, $d\,(d\mathbf{\Psi}) = 0$ e somos levados aos comutadores entre os operadores $\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_t$:

$$\boxed{\boxed{[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_t]\,\boldsymbol{\Psi} = (\partial_x \mathbf{L}_t - \partial_t \mathbf{L}_x)\,\boldsymbol{\Psi}}} \tag{11}$$

ou seja

$$[\partial_x - \mathbf{L}_x, \partial_t - \mathbf{L}_t]\,\boldsymbol{\Psi} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}] = \mathbf{0} \tag{12}$$

e o par de operadores diferenciais

$$\mathbf{M} := \partial_x - \mathbf{L}_x, \qquad \mathbf{N} := \partial_t - \mathbf{L}_t$$

é denominado **par de Lax** [4].

A Condição de curvatura nula para a conexão de Lax $\mathbf{L}_x$ é

$$\partial_x \mathbf{L}_t - \partial_t \mathbf{L}_x + [\mathbf{L}_t, \mathbf{L}_x] = \mathbf{0}. \tag{13}$$

As conexões devem ser escolhidas de forma que tanto a CCN como o par de Lax impliquem que a EDP seja satisfeita para qualquer λ.

Note que a escolha das conexões de Lax resultam na CCN e no par de Lax e dessas devemos obter a equação do modelo original para qualquer parâmetro λ.

Proposição 1. *A CCN é invariante sob transformações de calibre*

$$\mathbf{L}_\mu \to \mathbf{L}'_\mu = \mathbf{r}\mathbf{L}_\mu \mathbf{r}^{-1} + \left(\partial_\mu \mathbf{r}\right)\mathbf{r}^{-1}$$

com $\mathbf{r}$ *sendo uma matriz arbitrária que normalmente depende de variáveis dinâmicas do modelo e do parâmetro espectral* λ.

O par de Lax e a CCN são formas equivalentes de representar uma EDP não-linear e integrável bidimensional.

Exemplo 1 (Par de Lax no modelo NLS)**.** *Par de Lax possível para o modelo NLS é*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t &= \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{2}\boldsymbol{\sigma}_3 + \lambda\boldsymbol{\Omega}(x) + \boldsymbol{\sigma}_3\left(\partial_x \boldsymbol{\Omega}(x) + g\Psi\Psi^*\right) \\ \mathbf{L}_x &= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\boldsymbol{\sigma}_3 - \boldsymbol{\Omega}(x) \end{aligned}$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega}(x) = \mathrm{i}\sqrt{g}\begin{bmatrix} 0 & \Psi^*(x) \\ -\Psi(x) & 0 \end{bmatrix}$$

o par de Lax deste exemplo implica na equação NLS ao utilizarmos a CCN

$$\partial_x \mathbf{L}_t - \partial_t \mathbf{L}_x + [\mathbf{L}_t, \mathbf{L}_x] = \mathbf{0}$$

teremos como resultado:

$$[\mathbf{M},\mathbf{N}] = \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}_3 \partial_x^2 \boldsymbol{\Omega} + \partial_t \boldsymbol{\Omega} - \mathrm{i}\, g\Psi\Psi^* \left[\boldsymbol{\sigma}_3, \boldsymbol{\Omega}\right]$$

devido aos pares de Lax comutarem então encontramos duas equações a partir da matriz do item anterior:

2.3.1 Quantidades conservadas

Operadores de Transição

Considere um PLF e um deslocamento de $\boldsymbol{\Psi}(x,t;\lambda)$ ao longo da direção $x : x_1 \to x_2$ com um t fixo:

$$\boldsymbol{\Psi}(x_2,t;\lambda) = \mathbf{T}(x_2,x_1;\lambda)\,\boldsymbol{\Psi}(x_1,t;\lambda)\,. \tag{14}$$

O operador $\mathbf{T}(x_2,x_1;\lambda)$ é denominado *operador de transição*, ele apresenta as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{T}(x_1,x_1;\lambda) = \mathbb{1} \implies \boldsymbol{\Psi}(x_1,t;\lambda) = \mathbf{T}(x_1,x_1;\lambda)\boldsymbol{\Psi}(x_1,t;\lambda)$
2. $\mathbf{T}(x_2,r';\lambda)\mathbf{T}(x',x_1;\lambda) = \mathbf{T}(x_2,x_1;\lambda)$
3. $\mathbf{T}(x_2,x_1;\lambda) = \mathbf{T}^{-1}(x_1,x_2;\lambda)\,.$

Ele é definido no intervalo $[x_1,x_2]$ temos então

$$\mathbf{L}_x(x_2)\mathbf{T}(x_2,x_1)\boldsymbol{\Psi}(x_1) = (\partial_2 \mathbf{T}(x_2,x_1))\,\boldsymbol{\Psi}(x_1) \implies [\partial_2 - \mathbf{L}_x(x_2)]\,\mathbf{T}(x_2,x_1) = \mathbf{0}\,.$$

O PLA é uma EDP de operadores $\partial_2 \mathbf{T}(x_2,x_1) = \mathbf{L}_x(x_2)$, cuja solução é

$$\mathbf{T}(x_2,x_1;\lambda) = \mathbf{P}\exp\left(\int_{x_1}^{x_2} dx \mathbf{L}_x(x,t;\lambda)\right)\,. \tag{15}$$

Definição 3 (Matriz de monodromia)**.** *Seja $[x_1,x_2]$ é um intervalo completo $[-L,L]$ o operador de transição que atua nesse intervalo será:*

$$\mathbf{T}(-L,L) \equiv \mathbf{T}_L(\gamma)\,.$$

esse é o operador de monodromia (ou matriz de monodromia).

O operador de transição $\mathbf{T}$ desloca $\boldsymbol{\Psi}$ no espaço para um t constante, análogo ao $\mathbf{T}$ atuará da mesma forma transladando o tempo t para uma coordenada espacial fixa x:

$$\boldsymbol{\Psi}(x,t_2;\lambda) = \mathbf{S}(t_2,t_1;\lambda)\boldsymbol{\Psi}(x,t_1;\lambda) = \mathbf{P}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{L}_t\,(x,t;\lambda)\right)\boldsymbol{\Psi}(x,t_1;\lambda)\,. \tag{16}$$

Estamos munidos das informações obtidas para construir as cargas conservadas do sistema, para tanto segue a proposição:

Proposição 2. *Considere uma EDP não linear que possui representação de Lax. Se os campos $\boldsymbol{\Psi}(x,t;\lambda)$ são periódicos nas coordenadas espaciais e apresentam um período $2L$, então as quantidades*

$$\rho(\lambda) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{T}_L(t;\lambda)\right) \tag{17}$$

não possuem dependência temporal. Portanto, o traço do operador de monodromia, ρ, é o funcional gerador das quantidades conservadas.

Pela prova acima concluímos que

$$\mathrm{tr}\,(\partial_t \mathbf{T}_L(\lambda) = \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}(L,t;\lambda),\mathbf{T}_L] = 0 \implies \mathrm{tr}\,\partial_t\,\mathrm{tr}\,[\mathbf{T}_L] = \partial_t \rho(\lambda) = 0 \tag{18}$$

e ρ representa as quantidades conservadas.

O operador de transição também obedece a relação de involução:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{T}^*(x,y;\lambda^*) = \mathbf{T}(x.y;\lambda) \tag{19}$$

Exemplo 2 (Operadores de Transição no modelo NLS)**.** *Escrevemos o operador de transição para esse caso como*

$$\mathbf{T}(x,y;\lambda) = \mathbf{P}\exp\left\{\int_0^x dz \mathbf{L}_\mu(z,t;\lambda\right\} = \mathbf{P}\exp\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\,\frac{\lambda}{2}(x-y) & -\mathrm{i}\sqrt{g}\int_y^x dz\Psi^*(z) \\ \mathrm{i}\sqrt{g}\int_y^x dz\Psi(z) & \frac{\mathrm{i}\lambda}{2}(x-y) \end{bmatrix}$$

portanto

$$\det \mathbf{T}(x,y;\lambda) = \mathbf{P}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}(x-y) + \frac{\mathrm{i}\lambda}{2}(x-y)\right] = \mathbb{1}$$

2.3.2 Matriz r clássica

Verificamos que a construção de infinitas cargas conservadas de um sistema dinâmico bidimensional contínuo pode ser realizada caso a equação que descreve esse sistema admite uma representação de Lax. Precisamos averiguar se as integrais de movimento estão em involução, podemos fazer isso calculando um parênteses de Poisson entre os elementos da matriz de monodromia. Verificaremos que a existência de uma matriz r garantirá um método eficiente para calcularmos os parênteses de Poisson.

A matriz $\mathbf{r}$ é uma matriz $k^2 \times k^2$ que satisfaz os parênteses de Poisson

$$\left\{\mathbf{L}_x(x,t;\lambda) \overset{\otimes}{,} \mathbf{L}_x(x',t;\mu)\right\} = \left[\mathbf{r}(\lambda-\mu), \mathbf{L}_x(x,t;\lambda)\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\mathbf{L}_x(x',t;\mu)\right]\delta\left(x-x'\right) \tag{20}$$

que são conhecidos como parênteses de Poisson fundamentais (PPF).

Dois pontos importantes a se considerar acerca do PPF e da matriz $\mathbf{r}$ são:

1. Os operadores $\mathbf{r}$ utilizados são não-dinâmicos, i.e., não dependem explicitamente das variáveis dinâmicas
2. O PPF é ultralocal.

A matriz h independe das variáveis dinâmicas, ela representa uma propriedade geral das conexões de Lax envolvidas na representação da CCN.

O leitor pode encontrar todas as contas que derivam os resultados dessa sessão com detalhes na literatura [5].

Exemplo 3 (Operador r para o modelo NLS)**.** *Primeiro reescrevemos os operadores*

$$\mathbf{L}_x(x,t;\lambda) = \mathrm{i}\,\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\sigma}_z - \sqrt{g}\left(\boldsymbol{\sigma}_+\Psi^*(x) - \boldsymbol{\sigma}_-\Psi(x)\right) \tag{21}$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}_+ = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}_x + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}_y\right) \qquad \boldsymbol{\sigma}_- = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}_x - \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}_y\right) \tag{22}$$

calculamos então

$$\left\{\mathbf{L}_x(x,t;\lambda) \overset{\otimes}{,} \mathbf{L}_x(x',t;\mu)\right\} = -g\left(\left\{\boldsymbol{\sigma}_+\Psi^*(x) \overset{\otimes}{,} \boldsymbol{\sigma}_-\Psi(x')\right\} + \left\{\boldsymbol{\sigma}_-\Psi(x) \overset{\otimes}{,} \boldsymbol{\sigma}_+\Psi^*(x')\right\}\right) \tag{23}$$

com

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}_+\Psi^*(x) \overset{\otimes}{,} \boldsymbol{\sigma}_-\Psi(x')\right\} = -\mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}_+\otimes\boldsymbol{\sigma}_-\delta\left(x'-x\right) \tag{24}$$

e

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}_{-}\Psi(x) \overset{\otimes}{,} \boldsymbol{\sigma}_{+}\Psi^{*}(x')\right\} = \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}_{-}\otimes\boldsymbol{\sigma}_{+}\delta\left(x'-x\right) \tag{25}$$

os outro termos se anulam por possuírem entrada constante

$$\left\{\mathbf{L}_x(x,t;\lambda) \overset{\otimes}{,} \mathbf{L}_x(x',t;\mu)\right\} = -\mathrm{i}\,g\left(\boldsymbol{\sigma}_{-}\otimes\boldsymbol{\sigma}_{+} - \boldsymbol{\sigma}_{+}\otimes\boldsymbol{\sigma}_{-}\right)\delta\left(x'-x\right). \tag{26}$$

Podemos verificar que os PPF são ultralocais devido a presença do delta de Dirac. Para expressar o PPF em termos do operador **r** *expandimos o resultado em termos do operador de permutação [5]*

$$[\mathbb{P}, \boldsymbol{\sigma}_z\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}_z] = 2\left(\boldsymbol{\sigma}_{-}\otimes\boldsymbol{\sigma}_{+} - \boldsymbol{\sigma}_{+}\otimes\boldsymbol{\sigma}_{-}\right), \tag{27}$$

logo

$$\begin{aligned}\left\{\mathbf{L}_x(x,t;\lambda) \overset{\otimes}{,} \mathbf{L}_x(x',t;\mu)\right\} &= -\frac{g}{\lambda-\mu}\left[\mathbb{P}, \frac{\lambda}{2\mathrm{i}}\boldsymbol{\sigma}_z\otimes\mathbb{1} + \frac{\mu}{2\mathrm{i}}\mathbb{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}_z\right]\delta\left(x'-x\right)\\ &= \left[\frac{g}{\mu-\lambda}\mathbb{P}, \mathbf{L}_x(x,\lambda;t)\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\mathbf{L}_x(x',\mu;t)\right]\end{aligned} \tag{28}$$

e

$$\mathbf{r}(\lambda-\mu) = -\frac{g}{\lambda-\mu}\mathbb{P}. \tag{29}$$

3 Integrabilidade no modelo G2dD

A gravitação bidimensional acoplada com o campo dilaton (G2dD) ou gravitação dilatônica, mostra-se na teoria clássica como um sistema integrável com uma estrutura não trivial. A estruturação da integrabilidade permite através do método do espalhamento inverso descrever bem as soluções clássicas.

3.1 Campo gravitacional acoplado com campo dilatônico

A redução dimensional de modelos de gravitação reduz a teoria de campos quadridimensionais para bidimensionais, apresenta um resultado efetivo devido sua estrutura acoplada a espaços cosets para modelos do tipo σ.

Seja S um espaço bidimensional Lorentziano, parametrizado por $\{x^{\mu}\}_{\mu=0,1}$, definimos os campos físicos da G2dD como mapeamentos

$$\psi\left(x^{\mu}\right) : S \longrightarrow \mathfrak{G}_{\mathfrak{H}},$$

onde $\mathfrak{G}_{\mathfrak{H}}$ é um espaço coset, implicando na invariância de calibre sob multiplicação destrógena[5] do subgrupo maximal compacto do grupo de Lie $\mathfrak{G}$ [6]. Definindo as correntes destrógenas

$$J_{\mu} = J^{\alpha}_{\mu}t_{\alpha} = \psi^{-1}\partial_{\mu}\psi = Q_{\mu} + P_{\mu} \qquad\qquad \text{com } Q_{\mu}\in\mathfrak{h} \quad \text{e} \quad P_{\mu}\in\mathfrak{p} \tag{30}$$

com $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{p}$ sendo álgebras de Lie, definidas de forma que se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie $\mathfrak{G}$ então $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$.[6] As transformações de calibre para essas estrutura apresentam-se como

$$Q_{\mu} \mapsto \chi^{-1}Q_{\mu}\chi + \chi^{-1}\partial_{\mu}\chi \qquad\qquad P_{\mu} \mapsto \chi^{-1}P_{\mu}\chi \tag{31}$$

que se assemelham às transformações de calibre da proposição 1. A lagrangiana do modelo G2dD é

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{tr}\left(P_{\mu}P^{\mu}\right) \tag{32}$$

se assemelha bastante com a lagrangiana do PCM, porém além de correntes coset P_{μ} temos um diláton ou campo dilatônico ρ, que está relacionado à parte reduzida da métrica das outras duas dimensões. O campo dilatônico satisfaz a equação de Laplace bidimensional, ou seja, é um campo livre

$$\eta_{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial^{\nu}\rho = 0.$$

[5] Também são invariantes sob multiplicação levógena.

[6] Note que $\mathfrak{H}$ é o subgrupo maximal compacto de $\mathfrak{G}$

A solução do campo dilatônico apresenta-se na forma[7]

$$\rho(x,t) = \rho_+\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}\right) + \rho_-\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right),$$

cujo respectivo campo axiônico[8] [7] é definido como:

$$\tilde{\rho}(x,t) = \rho_+\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}\right) - \rho_-\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right).$$

Através de transformações conformes identificamos ρ como coordenadas espacial radial $x = r$ e $\tilde{\rho}$ como uma coordenada temporal[9] e o campo axion deve satisfazer

$$\partial_\mu \tilde{\rho} = -\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu \rho \tag{33}$$

aqui utilizaremos $J_1(x)$ como coordenada espacial generalizada em termos da derivada covariante[10] [3], para tanto definimos a ação de onde utilizaremos o momento canônico correspondente

$$S = -\frac{1}{2}\iint dxdt\,\mathrm{tr}\left[(\partial_0 J_1)\nabla_1^{-1}(\rho P_0) + \rho P_1^2\right] \tag{34}$$

que terão a forma

$$\pi_J = \pi_Q + \pi_P$$

e sempre obedecerão a estrutura de Poisson canônica

$$\left\{J_1^\alpha(x), \pi_J^\beta(y)\right\} = \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y) \tag{35}$$

assim como $\pi_J(\rho P_0) = -\pi_J$, então $\nabla_1 \pi_J = -\rho P_0$ e pela CCN para o momento conjugado[11] obtemos

$$\rho P_0 = -(\partial_1 \pi_J + [J_1, \pi_J]) \tag{36}$$

que nos permite encontrar duas relações resultantes correspondentes às álgebras $\mathfrak{p}, \mathfrak{h}$:

$$\begin{cases} \mathfrak{p}: & \rho P_0 = -\partial_1 \pi_P - [P_1, \pi_Q] - [Q_1, \pi_P] \\ \mathfrak{h} & \partial_1 \pi_Q = [\pi_P, P_1] + [\pi_Q, Q_1] \end{cases}$$

essas equações definem um conjunto de vínculos de primeira ordem, tal que

$$\phi = -\partial_1 \pi_Q + [\pi_Q, Q_1] + [\pi_P, P_1] \approx 0 \tag{37}$$

3.2 Par de Lax e cargas conservadas (G2dD)

A equação de movimento do G2dD é dada por

$$\nabla_\mu\left(\rho P_\mu\right) = \nabla_0(\rho P_0) - \nabla_1(\rho P_1) \equiv \eta_{\nu\mu}\nabla^\nu\left(\rho P_\mu\right) \tag{38}$$

onde ∇_μ é uma derivada covariante[12] e o par de Lax para o G2dD é dado por

$$L_\mu(x,t;\gamma) = Q_\mu + \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}P_+\mu + \frac{2\gamma}{1-\gamma^2}\varepsilon_{\mu\nu}P^\nu \tag{39}$$

[7] Importante notar que $x^0 = t$ e $x_1 = x$.
[8] Na literatura referem-se ao dual do dilaton como campo axion.
[9] Coordenadas canônicas de Weyl
[10] $\nabla_1 T_\mu = \partial_1 T_\mu - q_\nu T_\gamma F^{\nu\gamma\mu}$
[11] $\nabla_1 \pi_J = \partial_1 \pi_J + [J_1, \pi_J]$
[12] $\nabla_\mu P_\nu = \nabla_\mu P_\nu + \left[Q_\mu, P_\nu\right]$

aqui γ é função das coordenadas e apresenta-se na forma

$$\gamma(x,t;\omega) = \frac{1}{\rho}\left(\omega + \tilde{\rho} - \sqrt{(\omega+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}\right). \tag{40}$$

Os cálculos da álgebra de Poisson entre as matrizes de transição no G2dD são feitos de forma familiar, no entanto, a função γ possui um comportamento característico, de onde segue[13]

$$\begin{aligned}\left\{L_1(\gamma) \overset{\otimes}{,} L_1(\gamma')\right\} = \Bigg[&\frac{2\gamma\gamma'}{(\gamma'-\gamma)}\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, L_1(\gamma)\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes L_1(\gamma')\right] + \frac{2}{(\gamma'-\gamma)(1-\gamma\gamma')}\left(\frac{\gamma^2(1-\gamma^2)}{(1-\gamma^2)}\left[\Omega_{\mathfrak{p}}, L_1(\gamma)\otimes\mathbb{1}\right]\right. \\ &\left. + \frac{\gamma^2(1-\gamma'^2)}{(1-\gamma^2)}\left[\Omega_{\mathfrak{p}}, \mathbb{1}\otimes L_1(\gamma')\right]\right) - \frac{2\Omega_{\mathfrak{p}}}{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)}\left(\frac{\gamma'\left(1+\gamma^2\right)}{\rho(z')} + \frac{\gamma\left(1+\gamma'^2\right)}{\rho(z)}\right)\partial_z\Bigg]\delta\left(z-z'\right)\end{aligned} \tag{41}$$

e a partir daqui encontramos os parênteses de Poisson entre os operadores de transição, utilizando resultados dos parenteses de Poisson entre os campos obtidos previamente [3]:

$$\begin{aligned}\left\{L_1(\gamma) \overset{\otimes}{,} L_1(\gamma')\right\} = \Bigg[&\frac{2(\gamma+\gamma')(\gamma\gamma'+1)}{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)\rho(x)}\left[\Omega_{\mathfrak{p}}, Q_1(\gamma)\otimes\mathbb{1}\right] + \frac{2\gamma'}{(1-\gamma'^2)\rho(x')}\left[\Omega_{\mathfrak{p}}, P_1(\gamma)\otimes\mathbb{1}\right] \\ &- \frac{2\gamma}{(1-\gamma^2)\rho(x)}\left[\Omega_{\mathfrak{p}}, \mathbb{1}\otimes P_1(\gamma)\right] - \frac{2\Omega_{\mathfrak{p}}}{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)}\left(\frac{\gamma'\left(1+\gamma^2\right)}{\rho(x')} + \frac{\gamma\left(1+\gamma'^2\right)}{\rho(x)}\right)\partial_x\Bigg]\delta\left(x-x'\right)\end{aligned} \tag{42}$$

e a partir da estrutura do par de Lax para o G2dD obtemos

$$P_1(x) \equiv P_1(\gamma(x)) = \frac{\left(\gamma' - \gamma^2\gamma'\right)L_1(\gamma) - \left(\gamma - \gamma\gamma'^2\right)L_1(\gamma')}{(\gamma'-\gamma)(1-\gamma\gamma')} - \frac{1+\gamma\gamma'}{1-\gamma\gamma'}Q_1(\gamma(x)) \tag{43}$$

esse resultado pode ser introduzido nos parênteses de Poisson acima para obtermos o resultado de 41.

Podemos finalmente encontrar os parênteses de Poisson entre os operadores de transição

$$\left\{T(x,z;\omega) \overset{\otimes}{,} T(x',z';\omega')\right\} \tag{44}$$

aqui surgirão termos centrais, do tipo

$$\left(\frac{\gamma(\omega')\left(1-\gamma(\omega)^2\right)}{\gamma(\omega)\left(1-\gamma(\omega')^2\right)}\right) \tag{45}$$

que apresentam dependência implícita dos parâmetros espectrais (ω,ω') e permitem expressar eq. 45 em termos dos campos axiônicos e dilatônicos, como por exemplo para o caso $x' < x, \quad z' > z$:

$$\left\{T(\omega) \overset{\otimes}{,} T(\omega')\right\} = \frac{1}{\omega'-\omega}\left(\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, T(\omega)\otimes T(\omega')\right] - \sqrt{\frac{(\omega+\tilde{\rho})^2-\rho^2}{(\omega'+\tilde{\rho})^2-\rho^2}}\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, T(\omega)\otimes T(\omega')\right]\right), \tag{46}$$

para $x' > x, \quad z' < z$:

$$\left\{T(\omega) \overset{\otimes}{,} T(\omega')\right\} = \frac{1}{\omega'-\omega}\left(\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, T(\omega)\otimes T(\omega')\right] - \sqrt{\frac{(\omega'+\tilde{\rho})^2-\rho^2}{(\omega+\tilde{\rho})^2-\rho^2}}\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, T(\omega)\otimes T(\omega')\right]\right). \tag{47}$$

Definindo ρ como uma coordenada de Weyl [8], no limite os campos dilatônicos e axiônicos divergem $\rho, \tilde{\rho} \to \pm\infty$ e verificamos que

$$\lim_{\rho,\tilde{\rho}\to\pm\infty}\sqrt{\frac{(\omega'+\tilde{\rho})^2-\rho^2}{(\omega+\tilde{\rho})^2-\rho^2}} = \lim_{\rho,\tilde{\rho}\to\pm\infty}\sqrt{\frac{(\omega+\tilde{\rho})^2-\rho^2}{(\omega'+\tilde{\rho})^2-\rho^2}} = 1, \tag{48}$$

[13] Adotando $L(\gamma) = L(x;\gamma(x,t;\omega)$, e $L(\gamma') = L(x';\gamma(x',t;\omega')$.

$$\left\{T(\omega) \overset{\otimes}{,} T(\omega')\right\} = \frac{1}{\omega' - \omega}\left(\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, T(\omega)\otimes T(\omega')\right] - \left[\Omega_{\mathfrak{p}}, T(\omega)\otimes T(\omega')\right]\right), \tag{49}$$

mostrando que a álgebra é bem definida e única, satisfazendo as identidades de Jacobi e sendo totalmente antissimétrica, mostrando que o G2dD possui uma estrutura simplética viável para prosseguirmos com a quantização. Os parênteses encontrados não são invariantes por transformações de calibre, devemos portanto definir esse operador de transição de forma a garantir sua invariância por transformações de calibre

$$T(x,z,\omega) \mapsto \tilde{T}(x,z,\omega) = \xi(x)\, T(x,z,\omega)\, \xi^{-1}(z) \tag{50}$$

encontrando um parênteses de Poisson mais geral:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\xi^{-1}(x)\otimes\xi^{-1}(x')}_{\mathfrak{U}^{-1}(x,x')}\left\{\xi^{1}(x)T^{1}(x,z,\omega){\xi^{-1}}^{1}(x) \overset{\otimes}{,} \xi_{1}(x')T_{1}(x',z',\omega'){\xi^{-1}}_{1}(z')\right\}\underbrace{\xi(z)\otimes\xi(z')}_{\mathfrak{U}(z,z')} \\
&= \mathfrak{U}^{-1}(x,x')\left\{\xi^{1}(x)T^{1}(x,z,\omega){\xi^{-1}}^{1}(x) \overset{\otimes}{,} \xi_{1}(x')T_{1}(x',z',\omega'){\xi^{-1}}_{1}(z')\right\}\mathfrak{U}(z,z') \equiv \left\{T(x,y,\omega) \overset{\otimes}{,} T(x',z',\omega')\right\}_{\mathfrak{U}(\xi)},
\end{aligned}$$

aqui utilizamos,

$$A^{1} = A\otimes\mathbb{1}, \quad A_{1} = \mathbb{1}\otimes A,$$

e a expressão resultante é, no limite geral:

$$\begin{aligned}
\left\{T(x,y,\omega) \overset{\otimes}{,} T(x',z',\omega')\right\}_{\mathfrak{U}(\xi)} = \frac{1}{\omega'-\omega}\Bigg[&\Theta(x',x,z')\mathbb{1}\otimes T(x',x,\omega')\Omega_{\mathfrak{h}}T(x,z,\omega)\otimes T(x,z',\omega') \\
&+\Theta(x,x',z)T(x,x',\omega)\otimes\mathbb{1}\Omega_{\mathfrak{h}}T(x',z,\omega)\otimes T(x',z',\omega') \\
&-\Theta(x',z,z')T(x,z,\omega)\otimes T(x',z,\omega')\Omega_{\mathfrak{h}}\mathbb{1}\otimes T(z,z',\omega') \\
&-\Theta(x,z',z)T(x,z',\omega)\otimes T(x',z',\omega')\Omega_{\mathfrak{h}}T(z',z,\omega)\otimes\mathbb{1} \qquad (51)\\
&+\Theta(x',z,z')\left(\frac{1-2\gamma(z,\omega')\,\gamma(z,\omega)+\gamma^{2}(z,\omega')}{1-\gamma^{2}(z,\omega')}\right)\boldsymbol{\Xi}_{\mathfrak{p}}(w,z) \\
&+\Theta(x,z',z)\left(\frac{1-2\gamma(z',\omega)\,\gamma(z',\omega')+\gamma^{2}(z',\omega)}{1-\gamma^{2}(z,\omega)}\right)\boldsymbol{\Xi}_{\mathfrak{p}}(w,z') \\
&-\Theta(x',x,z')\left(\frac{1-2\gamma(x,\omega')\,\gamma(x,\omega)+\gamma^{2}(x,\omega')}{1-\gamma^{2}(x,\omega')}\right)\boldsymbol{\Xi}_{\mathfrak{p}}(w,x) \\
&-\Theta(x,x',z)\left(\frac{1-2\gamma(x',\omega)\,\gamma(x',\omega')+\gamma^{2}(x',\omega)}{1-\gamma^{2}(x',\omega)}\right)\boldsymbol{\Xi}_{\mathfrak{p}}(w,x')\Bigg] \qquad (52)
\end{aligned}$$

onde

$$\Theta(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1 & \text{para } x_1 < x_2 < x_3 \\ 0 & \text{ao contrário} \end{cases}, \tag{53}$$

são funções que tornam as fronteiras multi valoradas, porém vimos que eliminado devido à dependência de $\gamma(x,t,\omega)$,

$$\Omega_{\mathfrak{g}} = t^{\mu}\otimes t_{\mu} \tag{54}$$

é o elemento de Casimir sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ na base $\eta_{\nu\mu}t^{\mu}$ os termos $\boldsymbol{\Xi}_{\mathfrak{p}}$ e

$$\boldsymbol{\Xi}_{\mathfrak{p}} = T(x,w,\omega)\otimes T(x',w',\omega')\Omega_{\mathfrak{p}}T(w,z,\omega)\otimes T(w',z',\omega').$$

Como a estrutura não-invariante é uma estrutura simplética, a equação invariante também forma uma estrutura de Poisson, ao contrário do modelo PCM, cuja álgebra é não-ultralocal tornando os parênteses de Poisson anômalos [9], [10], demonstrando que a presença do campo dilatônico no modelo G2dD retira essa anomalia de sua estrutura simplética.

4 Conclusão

Verificamos que a presença do dilaton e seu comportamento assintótico é uma característica notável do modelo G2dD. Devido ao seu campo dilatonico em conjunto com seu comportamento assintótico, usuais singularidades de sistemas não ultralocais somem resultando uma estrutura algébrica bem definida

$$\left\{T(\omega) \overset{\otimes}{,} T\left(\omega'\right)\right\} = \frac{1}{\omega' - \omega}\left(\left[\Omega_{\mathfrak{h}}, T(\omega) \otimes T(\omega')\right] - \left[\Omega_{\mathfrak{p}}, T(\omega) \otimes T\left(\omega'\right)\right]\right),$$

essa estrutura a princípio permite a quantização.

Os desenvolvimentos recentes na quantização de sistemas gerais não ultralocalmente integráveis, os quais não contém campos dilatônicos, são de extrema importância para a teoria das cordas atualmente em comparação com a correspondência AdS/CFT. Para tais sistemas a abordagem mais aceita foi desenvolvida por Maillet [11], que introduziu o então chamado processo de simetrização a fim de lidar com as singularidades que apareciam nas equações que descrevem a integrabilidade. Recentemente, uma explicação mais fundamental e derivação do processo de simetrização dos primeiros princípios foram propostos, consistem em tratar campos quânticos como distribuições de operadores-avaliados [12].

Foi provado que o processo de simetrização de Maillet na teoria clássica provem da necessidade de regularizar produto de operadores que normalmente são mal definidos na teoria quântica. A quantização continua sendo um problema aberto.

Referências

[1] I. Vladimir, "Arnol d. mathematical methods of classical mechanics graduate texts in mathematics, 60," 1989.

[2] A. Deriglazov, *Classical mechanics*. Springer, 2016.

[3] T. V. Trufini, "Integrabilidade na gravitação bidimensional," 2012.

[4] P. D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 21, no. 5, pp. 467–490, 1968.

[5] L. Faddeev and L. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Springer Science & Business Media, 2007.

[6] H. Nicolai, "Two-dimensional gravities and supergravities as integrable systems," in *Recent aspects of quantum fields*, pp. 231–273, Springer, 1991.

[7] H. Nicolai, D. Korotkin, and H. Samtleben, "Integrable classical and quantum gravity," in *Quantum fields and quantum space time*, pp. 203–243, Springer, 1997.

[8] C. Hoenselaers and W. Dietz, "Solutions of einstein's equations: techniques and results," in *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, vol. 205, 1984.

[9] L. Faddeev and N. Y. Reshetikhin, "Integrability of the principal chiral field model in 1+ 1 dimension," *Annals of physics*, vol. 167, no. 2, pp. 227–256, 1986.

[10] A. Duncan, H. Nicolai, and M. Niedermaier, "On the poisson bracket algebra of monodromy matrices," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 46, no. 1, pp. 147–150, 1990.

[11] J.-M. Maillet, "New integrable canonical structures in two-dimensional models," *Nuclear Physics B*, vol. 269, no. 1, pp. 54–76, 1986.

[12] A. Melikyan and G. Weber, "On the quantization of continuous non-ultralocal integrable systems," *Nuclear Physics B*, vol. 913, pp. 716–746, 2016.