

# Bethe Ansatz Termodinâmico em Teoria de Cordas

Lorena Reis de Lima<sup>1</sup>, Arsen Melikyan<sup>1,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Universidade de Brasília - Instituto de Física (IF-UnB)

<sup>b</sup>Universidade de Brasília - Instituto de Física (IF-UnB)

---

## Abstract

In this work, we introduce one of the most important methods to solve integrable systems: the thermodynamic Bethe Ansatz (TBA). The main focus is explaining TBA applied on spinless Bose and Fermi gases, calculation of the ground state, zero temperature thermodynamics and finite temperature thermodynamics. Then we study some techniques to turn TBA applicable in finite volumes, as shown in literature.

**Keywords:** String Theory, Thermodynamic Bethe Ansatz, Integrable Models, Condensed Matter Physics.

---

## Introdução

Em mecânica clássica, dizemos que um sistema dinâmico de corpos interagindo entre si, num espaço de fase com  $2N$  dimensões é dito *integrável* se existem  $N$  funções – ou cargas – conservadas cujos parênteses de Poisson anulam-se. Em Teoria Quântica de Campos, existe um conjunto infinito de cargas conservadas que comutam entre si. A presença dessas cargas conservadas nos permite resolver esses sistemas físicos de *maneira exata*, ou seja, de maneira tal que todas as informações físicas sobre o sistema são conhecidas. Isto nos permite fazer uma modelagem direta do sistema sob estudo, sem necessidade de aproximações. Contudo, o artifício da integrabilidade limita-se a baixas dimensões [1].

Em geral, dividimos os sistemas integráveis em dois grandes grupos: homogêneos e inhomogêneos. Sistemas integráveis homogêneos têm formulação em um domínio finito com condições de contorno periódicas ou tomadas como infinitas. Já os sistemas integráveis inhomogêneos são tomados em domínios infinitos, como por exemplo, na presença de uma barreira impenetrável para as partículas.

Se quisermos, por exemplo, solucionar um sistema quântico unidimensional – ou seja, encontrar a solução da equação de Schrodinger desse sistema – podemos reduzir o problema de encontrar o espectro da Hamiltoniana a resolver um conjunto de equações algébricas acopladas. Isto pois, com essas equações, temos apenas de resolver polinômios, que possuem uma complexidade menor do que as exponenciais da Mecânica Quântica. A essas equações algébricas acopladas, damos o nome de *Bethe Ansatz*. Elas existem em diferentes tipos, que podem ser combinados para encontrar a solução de um determinado problema.

Além disso, podemos também encontrar a solução das equações de Bethe que correspondem ao estado fundamental, i.e., o autoestado da Hamiltoniana com a menor energia e temperatura termodinâmica igual a zero. Assim, podemos introduzir pequenas excitações sobre o estado fundamental do sistema e, a partir disso, encontrar a expressão assintótica, no limite termodinâmico, para a energia dessas excitações. Desse modo, podemos fazer a derivação da termodinâmica (energia livre) do sistema, à temperatura  $T > 0$ . Nesse caso, as equações algébricas recebem o nome de *Bethe Ansatz Termodinâmico*.

Neste trabalho, introduzimos os principais conceitos do TBA e mostramos algumas aplicações em Teoria de Cordas. No capítulo 1, deduzimos as equações de Bethe para o estado fundamental de um sistema 1-dimensional. No capítulo 2, estudamos o sistema do ponto de vista de sua termodinâmica, à temperatura  $T = 0$ . No capítulo 3, introduzindo o conceito de buracos, analisamos um sistema a uma temperatura finita diferente de zero. Por fim, no capítulo 4, mostramos como obter as energias do estado fundamental e excitado em sistemas com volume finito.

## 1. Equações de Bethe e o Estado Fundamental

### 1.1. Formalismo

Sabemos que as partículas elementares possuem graus de liberdade internos, que chamamos *spin*. Definimos o *operador Spin*  $\hat{S} = S^x, S^y, S^z$  como uma espécie não-clássica de momento angular intrínseco a uma partícula elementar [2]. Spins podem assumir valores inteiros ou semi-inteiros positivos. Valores inteiros de spin correspondem a *bósons*. As funções de onda bosônicas são simétricas sob quaisquer intercâmbios entre duas partículas que compõem um determinado sistema físico. Por outro lado, partículas com spin semi-inteiro são conhecidas como *férmions*, cujas funções de onda são anti-simétricas com respeito a quaisquer intercâmbio entre duas partículas do sistema fermiônico. Partículas cujo spin assume valores do tipo

---

\*Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil.

\*\*Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil.

Email addresses: limalreis@gmail.com (Lorena Reis de Lima), amelik@gmail.com (Arsen Melikyan)

$S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$  podem estar em um dos  $(2s + 1)$  diferentes estados. Por hora, iremos trabalhar apenas com bósons e férmions sem spin [3].

Vamos começar nosso estudo com o sistema integrável mais simples possível, que nos permite introduzir os conceitos básicos que serão desenvolvidos mais à frente. Seja um sistema unidimensional, não-relativístico, constituído de  $N$  partículas sem spin e com massa  $m$  cada, denotadas por  $j = 1, \dots, N$ . As coordenadas dessas partículas estão vinculadas a um círculo de circunferência  $L$ ,  $0 \leq x_j \leq L$ , com condições de contorno periódicas, impostas da seguinte maneira:

$$x + L \rightarrow x. \quad (1.1)$$

Um cenário interessante, que deve ser levado em consideração, é o de quando atingimos o limite termodinâmico  $N, L \rightarrow \infty$ , com uma densidade de partículas fixa  $n = \frac{N}{L}$ . Neste caso, as partículas interagem em pares, sendo essa interação regida por um potencial reflexivo e simétrico, a saber

$$v(x - x') = v(x' - x), \quad (1.2)$$

cujo período é:

$$v(x + L) = v(x). \quad (1.3)$$

Agora, fazendo  $\hbar = 2m = 1$ , temos que a hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum_{j < k=1}^N v(x_j - x_k). \quad (1.4)$$

O espectro de energia do sistema é determinado pela equação de Schrodinger independente do tempo:

$$H\Psi(x_1, \dots, x_N) = E\Psi(x_1, \dots, x_N), \quad (1.5)$$

tal que a função de onda  $\Psi$  satisfaz às seguintes condições de contorno periódicas:

$$\Psi(\dots, x_j, \dots) = \Psi(\dots, x_j + L, \dots), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.6)$$

É importante levar em consideração que a função de onda satisfaz às condições de contorno expressas em 1.6.

A função de onda pode ser determinada a menos de uma constante fixada pela condição de normalização. No caso mais simples, ou seja, quando  $N = 1$ , a solução da equação 1.5 – reduzida a uma equação de Helmholtz – é uma onda plana com número de onda  $k$ :

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp ikx, \quad E = k^2. \quad (1.7)$$

Devido às condições de contorno periódicas

$$\Psi(x) = \Psi(x + L), \quad (1.8)$$

o número de onda é quantizado como

$$kL = 2\pi I, \quad I = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.9)$$

Ademais, como o sistema está vinculado a uma linha contínua, temos que o espaço de Hilbert tem dimensão infinita e os valores possíveis de  $I$  são ilimitados.

É esperado que as partículas desse sistema obedeçam a alguma estatística conhecida – como a de bósons ou a de férmions – no sentido de que sua função de onda obedeça às propriedades de simetria ou antissimetria relativas a bósons e férmions. Como o sistema é unidimensional, podemos reordenar as partículas na linha contínua de  $N!$  maneiras distintas. Assim, vamos denominar de  $S_N$  o grupo simétrico de todas as  $N!$  permutações dos números  $(12\dots N)$ . Também definimos o objeto  $Q$ , que é a entidade responsável por rotular os setores em que as partículas possuem determinada ordem, sendo  $Q = (Q_1, \dots, Q_N) \in S_N$  de acordo com o seguinte modelo:

$$Q : 0 \leq x_{xQ_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_N} \leq L. \quad (1.10)$$

Para entender melhor como a ordenação das partículas funciona, vamos, por exemplo, imaginar que temos  $N = 3$  partículas em um sistema. Neste caso,  $Q = 132$  rotula o setor de ordem  $x_1 < x_3 < x_2$ ;  $Q = 123$ , o setor  $x_1 < x_2 < x_3$  e assim sucessivamente, conforme vamos varrendo as permutações possíveis de  $N$  partículas do sistema. O *setor fundamental*, que é identificado com a identidade de permutação  $I = (12\dots N)$  – neste caso, o setor fundamental é  $Q = 123$  – corresponde à seguinte ordem das partículas:

$$I : 0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq L. \quad (1.11)$$

Por fim, temos que cada setor  $Q$  é adjacente a  $N - 1$  outros setores nos pontos  $x_{Q_1} = x_{Q_2}, x_{Q_2} = x_{Q_3}, \dots, x_{Q_{(N-1)}} = x_{Q_N}$ .

Vamos denotar por  $\Psi_Q(x_1, \dots, x_N)$  a função de onda no setor de ordem  $Q$ . Ainda, vamos assumir que a função de onda do setor fundamental, ou seja,  $\Psi_I(x_1, \dots, x_N)$ , é conhecida. Essa função de onda não possui nenhuma mudança em sua simetria, em respeito às coordenadas das partículas que compõem esse setor. Assim, podemos definir as propriedades matemáticas de simetria e anti-simetria das demais funções de onda dos setores não-fundamentais a partir dela, da seguinte maneira:

$$\Psi_Q(x_1, \dots, x_N) = (\pm)^{\eta_Q} \Psi_I(x_{Q_1}, \dots, x_{Q_N}), \quad (1.12)$$

onde os sinais  $+/-$  correspondem, respectivamente, a bósons e férmions e  $\eta_Q$  corresponde ao número de transposições dos elementos da vizinhança mais próxima, que trazem a permutação  $Q$  para  $I$ . Podemos também reduzir a notação dada na equação acima, usando simplesmente  $(-1)^{\eta_Q} = \text{sign}(Q)$ . Dessa maneira, podemos escrever a função de onda generalizada, a saber

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{Q \in S_N} \Theta_H(x_{Q_2} - x_{Q_1}) \Theta_H(x_{Q_3} - x_{Q_2}) \dots \Theta_H(x_{Q_N} - x_{Q_{(N-1)}}) \Psi_Q(x_1, \dots, x_N),$$

onde  $\Theta_H$  é a função de Heaviside.

Agora, vamos considerar que queremos resolver um problema de dois corpos. Neste caso, o mais indicado é trabalhar com o centro de massa do sistema. Por exemplo, sejam 1 e 2 duas partículas identificadas, respectivamente, em uma linha contínua,

por suas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ . Elas movem-se por todo comprimento dessa linha infinita. A equação de Schrodinger independente do tempo que descreve esse movimento é dada por:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Psi + v(x_1 - x_2)\Psi = E\Psi. \quad (1.13)$$

Assumimos que o potencial  $v$  é simétrico e vai para zero, quando a distância entre as partículas é assintoticamente grande. Além disto, quando isso ocorre, as partículas – praticamente livres, devido ao anulamento do potencial – possuem movimento descrito por soluções de ondas planas, com números de onda  $k_1$  e  $k_2$  e energia  $E = k_1^2 + k_2^2$ . Podemos também chamar esses números de onda de *momentos*. Os momentos total e relativo são expressos, respectivamente, por:

$$K = k_1 + k_2, \quad k = k_1 - k_2, \quad (1.14)$$

e a energia total, por:

$$E = \frac{(K^2 + k^2)}{2}. \quad (1.15)$$

Nas coordenadas do centro de massa, a equação 1.13 é reescrita conforme a seguinte separação de variáveis:

$$\Psi(x_1, x_2) = \exp iKX\Psi(x), \quad (1.16)$$

onde  $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  e  $\Psi(x)$  satisfaz à seguinte equação de movimento:

$$-\Psi''(x) + \frac{1}{2}v(x)\Psi(x) = \left(\frac{k}{2}\right)^2\Psi(x). \quad (1.17)$$

Desse modo, vemos que o problema de dois corpos é reduzido à solução de uma equação de Schrodinger para uma única partícula, com energia  $E = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ . Ainda, considerando o potencial simétrico que se anula quando a distância entre as duas partículas é muito grande, temos que a equação 1.17, sob a influência desse potencial, assume uma solução par – ou bosônica – e uma solução ímpar – ou fermiônica.

### 1.1.1. Interações pontuais

Consideremos um sistema 1-dimensional, cuja dinâmica da partícula seja descrita pela sua respectiva função de onda – tal que  $\Psi(x)$  e  $\Psi'(x)$  sejam absolutamente convergentes. Digamos que o sistema seja regido por um potencial  $\delta$ . Representando implicitamente o potencial, a matriz de transferência  $\Lambda$  e as condições de contorno do sistema são dados por [4]:

$$\begin{pmatrix} \Psi(0^+) \\ \Psi'(0^+) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \Psi(0^-) \\ \Psi'(0^-) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\Lambda e^{i\phi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Para partículas com paridade de bósons, obtemos:

$$\Lambda_\delta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\Lambda_\delta(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Para funções de onda bosônicas com paridade par, obtemos a seguinte condição de contorno para  $\Lambda_\delta(c)$ :

$$\frac{c}{2} = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{ik(\alpha - \beta)}{2(\alpha + \beta)}. \quad (1.22)$$

Para  $\Lambda_\delta(b)$ ,  $\alpha = \beta$ , de modo que o potencial não afeta os bósons.

Para funções de onda fermiônicas (paridade ímpar), as condições de contorno para  $\Lambda_\delta(b)$  são:

$$\frac{2}{b} = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{ik(\alpha - \beta)}{2(\alpha + \beta)}. \quad (1.23)$$

Neste caso de férmions,  $\alpha = -\beta$ , de modo que, para  $\Lambda_\delta(c)$ , o potencial não afeta os férmions. Percebemos então que as funções  $f(x)$  coincidem para sistemas de dois férmions e para sistemas de dois bósons. Isto é o que chamamos de *dualidade bóson-fermion*, que também é válida para sistemas de  $N$  partículas [5].

### 1.1.2. Bethe Ansatz para bosons com potencial delta

Consideremos um sistema de Bose com  $N$  partículas, cujas interações são regidas por um potencial do tipo  $\delta$ . A hamiltoniana desse sistema é dada pela seguinte equação:

$$H = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{j < k} \delta(x_j - x_k). \quad (1.24)$$

As funções delta dessa hamiltoniana fazem com que as condições de contorno para a função de onda desse sistema sejam dadas por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Psi_I|_{x_{j+1}-x_j \rightarrow 0^+} = c\Psi_I|_{x_{j+1}=x_j}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (1.25)$$

Esse sistema pode ser resolvido pelas equações do Bethe Ansatz [6]. Uma maneira didática de encontrar essas equações e fazer acréscimos sucessivos no número de partículas do sistema, a fim de enxergar um padrão, que nos leva à forma geral da solução, para qualquer valor de  $N$  [1]. Fazendo esse processo algumas vezes, obtemos que, para um  $N$  arbitrário, o Bethe Ansatz desse sistema é

$$\Psi_I(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{P \in \mathcal{S}_N} \text{sign}(P) A(P) \exp\left(i \sum_{j=1}^N k_{Pj} x_j\right). \quad (1.26)$$

Os números de onda de  $\Psi$  são quantizados de acordo com o seguinte conjunto de equações acopladas de Bethe:

$$k_j L = 2\pi I_j + \sum_{l=1, l \neq j}^N \theta(k_j - k_l). \quad (1.27)$$

Os coeficientes  $A$ , que estão diretamente relacionados com a matriz  $S$  do sistema, são dados por:

$$A(P) = \prod_{j < l} (k_{Pj} - k_{Pl} + ic). \quad (1.28)$$

Os coeficientes  $A(P)$  satisfazem à seguinte condição:

$$A(\dots k_u, k_v \dots) = S(k_u, k_v) A(\dots, k_u, k_v \dots), \quad S(k_u, k_v) = 1. \quad (1.29)$$

Escolhendo um valor constante para  $A(P)$  – digamos,  $A(P) = 1$  e combinando 1.12 com a forma geral do Bethe Ansatz que encontramos, obtemos a seguinte equação para a função de onda do setor de ordenação  $Q$ :

$$\Psi_Q(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{P \in S_N} [Q, P]_f \exp\left(i \sum_{j=1}^N k_{P_j} x_{Q_j}\right), \quad (1.30)$$

onde

$$[Q, P]_f = \text{sign}(Q) \text{sign}(P) A(k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}), \quad (1.31)$$

de modo que  $A$  e os coeficientes de permutação  $P$  são relacionados por 1.29. Esse formalismo pode ser generalizado para um grande conjunto de sistemas integráveis de férmions.

### 1.1.3. Estados ligados para bósons

As equações de Bethe podem ser muito complicadas para um sistema integrável com  $L$  pequeno. Contudo, quando fazemos  $L \rightarrow \infty$ , elas se tornam mais simples. Nesse limite, também podemos entender as principais diferenças entre os espectros de energia para os casos atrativo ( $c < 0$ ) e repulsivo ( $c > 0$ ), definidos pelo coeficiente  $c$  da hamiltoniana do sistema.

Podemos obter as raízes das equações de Bethe Ansatz de um sistema integrável. As raízes complexas do Bethe Ansatz para uma linha infinita são chamadas *cordas*. Elas se encontram distribuídas de maneira simétrica, equidistantes entre si, em torno do eixo real. Procedendo da mesma forma que fizemos na seção anterior – ou seja, repetindo os cálculos para um aumento sucessivo no número de partículas do sistema – encontramos que, para um sistema atrativo formado por  $N$  bósons [7], existe uma  $N$  – corda com momento expresso por

$$k_j = u + i \frac{|c|}{2} (N + 1 - 2j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.32)$$

O momento total e a energia do sistema são então expressos por

$$K = Nu \quad (1.33)$$

e

$$E = \frac{K^2}{N} - N(N^2 - 1) \frac{c^2}{12}, \quad (1.34)$$

onde o valor mínimo da energia corresponde ao estado fundamental da energia no setor das  $N$  partículas, de modo que a função de onda simétrica correspondente é

$$\Psi = \exp\left(\frac{c}{2} \sum_{j < l} |x_j - x_l|\right). \quad (1.35)$$

### 1.1.4. Equações do Bethe Ansatz para bósons repulsivos Existência e unidade das soluções

Para encontrar as equações de Bethe Ansatz para um sistema de bósons repulsivos, devemos levar em conta que, para

um conjunto de números quânticos  $I_1, I_2, \dots, I_N$  as soluções do conjunto de equações, para os momentos  $k_1, k_2, \dots, k_N$ , são únicas e reais. Essas soluções são dadas pelos extremos da seguinte função:

$$B(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{L}{2} \sum_{j=1}^N k_j^2 - 2\pi \sum_{j=1}^N I_j k_j + \sum_{j>l=1}^N \Theta(k_j - k_l), \quad (1.36)$$

onde

$$\Theta(k) = \int_0^k dk' \theta(k') = 2k \arctan \frac{k}{c} - c \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{c^2} \right]. \quad (1.37)$$

### Energia do estado fundamental do sistema

Quando  $c \rightarrow \infty$ , o valor mínimo da energia é obtido através de uma sequência ordenada de números quânticos  $I$ , distribuídos simetricamente em torno de zero, de modo que  $I_{max}$  está relacionado com  $N$ , o número do momento. Esses números são inteiros para  $N$  ímpar e semi-inteiros ímpares para  $N$  par. A energia do estado fundamental é então determinada pela seguinte equação:

$$E_0 = \left(2 \frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{j=1}^N I_j^2 = \frac{\pi^2}{3L^2} (N-1)N(N+1). \quad (1.38)$$

A função de onda dos férmions livres anti-simétrica – ou simétrica, se consideramos o caso de bósons – no estado fundamental é dada por:

$$\Psi_0 = \prod_{j>k=1}^N \psi(x_j - x_k), \quad \psi = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{para férmions livres,} \\ \sin\left(\frac{\pi|x|}{L}\right), & \text{para bósons de núcleo duro} \end{cases} \quad (1.39)$$

Para  $c > 0$ , os mesmos  $I$  servem para encontrarmos a energia do estado fundamental. Assim, reescrevemos as equações de Bethe da seguinte maneira:

$$k_j = 2\pi \frac{I_j}{L} + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^N \theta(k_j - k_l), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.40)$$

onde, no limite termodinâmico [8], definimos a densidade de estado como

$$f_j = \frac{I_j}{L}, \quad f \in \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]. \quad (1.41)$$

A partir dessa densidade de estado e das equações de Bethe em 1.40, podemos definir

$$k_{j+1} - k_j = \frac{1}{L\rho(k_j)}, \quad \rho(k) \geq 0, \quad (1.42)$$

que correspondem a uma sequência de raízes das equações de Bethe. Podemos entender  $\rho(k)$  como uma distribuição, de modo que, para  $L$  grande,  $L\rho(k)dk$  representa o número de raízes de Bethe num intervalo  $(k, k + dk)$ . Em outras palavras,  $\rho(k)$  corresponde à densidade de partículas no estado fundamental. Temos ainda:

$$\frac{d}{dk} f(k) = \rho(k), \quad f(k) = \int_0^k dk' \rho(k'). \quad (1.43)$$

A partir disto, podemos definir o momento por unidade de comprimento e a energia do estado fundamental por unidade e comprimento, respectivamente, da seguinte forma:

$$n = \frac{N}{L} = \int_{-q}^q dk \rho(k), \quad (1.44)$$

$$e_0 = \frac{E_0}{L} = \int_{-q}^q dk k^2 \rho(k). \quad (1.45)$$

Tomando o limite das equações de Bethe, podemos obter a expressão da densidade  $\rho(k)$  e escrever equações para as densidades de energia e partículas [1].

### 1.1.5. Partículas com interações finitas

Consideremos um sistema 1-dimensional composto de  $N$  partículas sem spin, cujo núcleo possui um diâmetro  $\alpha$ , que interagem sob a influência de um potencial da seguinte forma [9]:

$$\begin{cases} \infty & \text{para } |x| < \alpha, \\ 0 & \text{para } |x| > \alpha \end{cases}. \quad (1.46)$$

A função de onda do setor fundamental  $I$  desse sistema é dada por:

$$\Psi_I(x_1, x_2, \dots, x_N) = (\text{Det})_{l \leq j, l \leq N} \exp(ik_j, y_l), \quad (1.47)$$

e o momento e a energia totais são dados em termos dos números de onda, respectivamente, por:

$$K = \sum_{j=1}^N k_j, \quad E = \sum_{j=1}^N k_j^2. \quad (1.48)$$

Esses números de onda são quantizados através das equações de Bethe

$$k_j L = 2\pi I_j + \alpha \sum_{l=1}^N (k_j - k_l), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.49)$$

Esse procedimento é equivalente para bósons e férmions, desde que eles tenham o mesmo espectro de energia.

## 2. Bethe Ansatz e Temperatura Termodinâmica $T = 0$

Para um grande número de sistemas integráveis, as equações de Bethe têm a forma genérica:

$$kL = 2\pi I(k) + \sum_{k'} \theta(k - k'), \quad (2.1)$$

de modo que  $\theta(k)$  depende do tipo de interação entre as partículas que compõem o sistema. No limite termodinâmico, a distribuição de probabilidades  $\rho(k)$  é dada por

$$\frac{1}{2\pi} = \rho(k) + \int_{-q}^q dk' \frac{\theta'(k - k')}{2\pi} \rho(k'), \quad |k| \leq q. \quad (2.2)$$

A equação acima pode ser escrita numa forma de matriz, a saber:

$$\frac{1}{2\pi} = \rho + G\rho = (I + G)\rho, \quad (2.3)$$

onde  $I$  é o operador identidade e  $G$  é um operador na forma integral, com um núcleo real e simétrico no intervalo  $[-q, q]$ . Seja  $J$  um operador resolvente, de modo que

$$(I + J)(I + G) = (I + G)(I + J) = I. \quad (2.4)$$

O operador  $J$  também tem um núcleo simétrico, mas sua definição é diferente da definição do núcleo de  $G$ . Usando a equação 2.3, podemos reescrever a expressão de  $\rho$  da seguinte forma:

$$\rho = (I + J) \frac{\eta}{2\pi}, \quad (2.5)$$

onde  $\eta = 1$ . Assim, usando a notação de matriz para  $\rho$ , escrevemos a densidade número, a densidade de momento e a densidade de energia no estado fundamental como, respectivamente,

$$\frac{N}{L} = \eta^+ \rho, \quad \frac{K_0}{L} = k^+ \rho = 0, \quad \frac{E_0}{L} = (k^2)^+ \rho. \quad (2.6)$$

### 2.0.1. Reação do sistema no estado fundamental a uma perturbação externa

Vamos imaginar que nosso sistema integrável sofra a ação de uma perturbação externa  $\phi(k)$ . Essa perturbação causa uma pequena mudança no momento  $k$  por, digamos, um  $\Delta(k)$ , da ordem de  $\frac{1}{L}$ . Então, temos que  $k \rightarrow k + \Delta(k)$ . Neste caso, as equações de Bethe se tornam:

$$[k + \Delta(k)]L = 2\pi I(k) + \sum_{k'} \theta[k + \Delta(k) - k' - \Delta(k')] + \phi[k + \Delta(k)]. \quad (2.7)$$

Fazendo uma expansão em  $\Delta(k)$  nessa equação, subtraindo 2.1 e substituindo os somatórios por integrais, obtemos a seguinte equação para  $\rho(k)$ :

$$2\pi \rho(k) \Delta(k) L + \int_{-q}^q dk' \theta'(k - k') \rho(k') \Delta(k') L = \phi(k). \quad (2.8)$$

Fazendo  $\rho(k) \Delta(k) L = \omega(k)$ , encontramos as seguintes equações:

$$(I + G)\omega = \frac{\phi}{2\pi}, \quad \omega = (I + J) \frac{\phi}{2\pi}, \quad (2.9)$$

que correspondem à resposta do sistema à perturbação  $\phi$ . Qual deve ser o efeito dessa perturbação nas quantidades termodinâmicas  $K$ ,  $N$  e  $E$ ? Ora, o fato de  $\phi$  agir sobre o sistema não mudou o número de partículas do mesmo, de modo que

$$\Delta N = 0. \quad (2.10)$$

A situação é diferente para a energia e para o momento, já que eles são dados em termos dos números de onda  $k$ . O momento será dado pela soma dos deslocamentos  $k$  introduzidos pela perturbação, ou seja,

$$\Delta K = \sum_k \Delta(k) \rightarrow L \int_{-q}^q dk \rho(k) \Delta(k) = \int_{-q}^q dk \omega(k) = \eta^+ \omega. \quad (2.11)$$

Para a energia, o efeito do deslocamento fará com que a sua equação se torne:

$$\Delta E = \phi^+ (I + J) \frac{k}{\pi}. \quad (2.12)$$

### 2.0.2. Termodinâmica à temperatura zero

Vamos definir  $\epsilon(k)$ , que é a solução da equação

$$(I + G)\epsilon = k^2 - \mu, \quad (2.13)$$

como uma nova função de energia, onde  $\mu$  é um parâmetro que garante que  $\epsilon$  se anula nos pontos  $(\pm q)$ . A partir dessa nova definição, podemos reescrever a equação 2.12 como

$$\Delta E = \phi^+ \frac{\epsilon'}{2\pi}. \quad (2.14)$$

Reescrevendo a equação da energia do estado fundamental em termos de  $\epsilon$ , podemos escrever a relação de Gibbs [10] como

$$E_0 = -PL + \mu N, \quad (2.15)$$

onde  $P$  é a pressão do sistema e  $\mu$ , neste caso, tem o papel físico de um potencial químico do sistema.

Nas equações de Bethe, a perturbação  $\phi(k)$  é tomada como  $-k\Delta L$  – para o caso em que aumentamos o tamanho  $L$  do sistema. A relação de Gibbs para esse caso é

$$\Delta E = -P\Delta L + \mu N, \quad (2.16)$$

onde a pressão é dada por

$$P = -\frac{\eta^+}{2\pi}, \quad (2.17)$$

e o potencial químico é dado por

$$\mu = \frac{\partial e_0}{\partial n}. \quad (2.18)$$

Portanto, quando  $T = 0$ , temos

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = n. \quad (2.19)$$

### 2.0.3. Regime de baixas excitações

Consideremos um ponto, num sistema composto de gás de Fermi, em que não há interações entre partículas. O momento – que chamamos ”Momento de Fermi”, neste caso, é dado por  $q = n\pi$ . A energia e a mudança no momento, no estado fundamental desse sistema, são dados por:

$$\Delta E(k_h, k_p = k_p^2 - k_h^2), \quad K(k_h, k_p) = k_p - k_h. \quad (2.20)$$

O espectro de energia de um gás de Fermi é um pouco problemático, no sentido de que a descrição das excitações não se dá da mesma maneira que em um gás de Bose. Num gás de Fermi, as excitações são descritas em termos de dois parâmetros, de modo que  $\Delta(E)$  não possui uma curva de dispersão única. Para resolver este problema, são definidos dois tipos de excitações elementares – que dependem só de um parâmetro: as excitações de partículas e as excitações de buraco. Assim, denotamos  $k_h$  como o momento do buraco e  $k_p$  como o momento da partícula. Para excitações do tipo partículas, tomamos o momento do sistema de seu valor inicial, por exemplo,  $q$  até algum  $k_p > q$ . Assim, a relação de dispersão 2.20 assume a seguinte forma:

$$\Delta E_p(K) = K^2 + 2\pi n|K|, \quad -\infty < K < \infty. \quad (2.21)$$

Para excitações do tipo buraco, tomamos o momento do sistema de algum valor  $0 < k_h < q$  até, digamos  $q + \frac{2\pi}{L}$ . Neste caso, a relação de dispersão se torna:

$$\Delta E_h(K) = 2\pi n|K| - K^2, \quad -\pi n < K < \pi n. \quad (2.22)$$

É importante notar que excitações do tipo partícula e buraco podem ocorrer simultaneamente e, particularmente, 2.20 é obtida através de aplicações sucessivas dos dois tipos de excitação. Particularmente, se este número for finito – por exemplo, se fizermos  $n$  excitações do tipo partícula e  $m$  excitações do tipo momento no sistema – o momento total e a mudança na energia serão dados, respectivamente por:

$$K = \sum_{j=1}^n K_j + \sum_{j=1}^m K'_j, \quad (2.23)$$

$$\Delta E = \sum_{j=1}^n \Delta E_p(K_j) + \sum_{j=1}^m \Delta E_h(K'_j), \quad (2.24)$$

onde  $K_j, K'_j$  são momentos.

Mesmo para sistemas cujos parâmetros são diferentes desses modelos mais bem-comportados como o de férmions livres, este método pode ser aplicado, pois as excitações seguem a mesma análise qualitativa. Contudo, neste caso, devemos realizar uma continuação analítica na probabilidade de distribuição  $\rho(k)$  e na energia  $\epsilon(k)$ , obtendo as seguintes equações integrais:

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} - \int_{-q}^q dk' \frac{\theta'(k-k')}{2\pi} \rho(k'), \quad -\infty < k < \infty, \quad (2.25)$$

$$\epsilon(k) = k^2 - \mu - \int_{-q}^q dk' \frac{\theta'(k-k')}{2\pi} \epsilon(k'), \quad -\infty < k < \infty. \quad (2.26)$$

Submetendo o sistema a uma excitação do tipo partícula, produzimos uma perturbação nas equações de Bethe do sistema, o que implica uma mudança na energia  $\Delta E(k_p) = \epsilon(k_p)$ , onde  $\epsilon(k)$  é a energia de uma excitação elementar. O Momento é dado por:

$$K(k_p) = 2\pi[f(k_p) - f(q)]. \quad (2.27)$$

Analogamente, para excitações do tipo buraco, também é gerada uma perturbação nas equações de Bethe do sistema, que corresponde a mudanças na energia e no momento do mesmo. Assim,

$$\Delta E(k_h) = -\epsilon(k_h), \quad (2.28)$$

e

$$K(k_h) = 2\pi[f(q) - f(k_h)]. \quad (2.29)$$

## 3. Temperatura termodinâmica finita

### 3.1. Buracos

Quando o sistema encontra-se em  $T = 0$ , o estado fundamental é caracterizado pelo que chamamos de *números quânticos de partícula*, expressos pela seguinte sequência:

$$\left\{ -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \right\}. \quad (3.1)$$

Contudo, quando  $T > 0$ , as flutuações térmicas fazem com que surjam outros tipos de números quânticos, que chamamos *números quânticos de buraco*, expressos por

$$\left\{ -\frac{N+1}{2}, -\frac{N+3}{2}, \dots, \frac{N+1}{2}, \frac{N+3}{2}, \dots \right\}. \quad (3.2)$$

Seja  $\{I_j\}_{j=1}^N$  um conjunto de números quânticos do tipo partícula, e seja  $\{\bar{I}\}$  o conjunto de números quânticos do tipo buraco. Cada momento  $k_j$  de partícula  $\bar{k}$  de buraco é dado pelas respectivas expressões:

$$Lf(k_j) = I_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3)$$

$$Lf(\bar{k}) = \bar{I}. \quad (3.4)$$

No limite termodinâmico, partículas e buracos estão distribuídos no sistema como funções dos momentos  $k$ , com densidade de distribuição  $\rho(k)$ . Devido ao fato de o conjunto de partículas e buracos abranger todos os valores possíveis de números quânticos do sistema, podemos dizer que entre eles existe um vínculo, dado por

$$\rho(k) + \bar{\rho}(k) = f'(k). \quad (3.5)$$

Isto nos leva à seguinte equação integral:

$$2\pi f(k) = k - \int_{-\infty}^{\infty} dk' \theta(k - k') \rho(k'). \quad (3.6)$$

Se diferenciarmos a equação acima, obtemos:

$$\rho(k) + \bar{\rho} = \frac{1}{2\pi} - G\rho(k). \quad (3.7)$$

A partir disso, podemos escrever as equações da densidade de partículas e de energia por unidade de comprimento  $L$  do sistema, a saber:

$$n = \frac{N}{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \rho(k), \quad (3.8)$$

e

$$e = \frac{E}{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 \rho(k). \quad (3.9)$$

### 3.2. Equilíbrio Termodinâmico

Até aqui, vimos já os casos em que a temperatura é igual a zero e em que a temperatura é maior do que zero. Agora, especificamente, vamos estudar o caso em que o sistema atinge o equilíbrio termodinâmico. Neste caso, para o ensemble canônico, escrevemos a seguinte função de partição:

$$\Xi = \sum_{\rho, \bar{\rho}} \delta[\Xi(\rho, \bar{\rho})] W[\rho, \bar{\rho}] \exp(\beta\mu N[\rho] - \beta E[\rho]), \quad (3.10)$$

onde  $W[\rho, \bar{\rho}]$  representa o número de microestados relacionado às densidades macroscópicas de partículas e buracos. Assim, a entropia do sistema é dada por:

$$S[\rho, \bar{\rho}] = \ln[\rho, \bar{\rho}]. \quad (3.11)$$

Definindo a entropia por unidade de comprimento e escrevendo a energia livre de Gibbs a partir dos parâmetros  $\rho, \bar{\rho}$ , no limite termodinâmico, 3.10 se torna:

$$\Xi = \sum_{\rho, \bar{\rho}} \delta[\rho, \bar{\rho}] \exp(-\beta g[\rho, \bar{\rho}]L) \exp-\beta g[\rho_{eq}, \bar{\rho}_{eq}]L. \quad (3.12)$$

Tomando

$$\delta \Big|_{\rho=\rho_{eq}, \bar{\rho}=\bar{\rho}_{eq}} = 0, \quad (3.13)$$

temos a distribuição de equilíbrio das partículas e dos buracos. Calculando a energia livre de Gibbs por unidade de comprimento, temos:

$$g[\rho, \bar{\rho}] = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( -\frac{1}{\beta} [(\rho + \bar{\rho}) \ln(\rho + \bar{\rho}) - \rho \ln \rho - \bar{\rho} \ln \bar{\rho}] + (k^2 - \mu)\rho \right). \quad (3.14)$$

Combinando 3.13 e 3.14, encontramos:

$$\ln\left(\frac{\bar{\rho}_{eq}}{\rho_{eq}}\right) - G \ln\left(1 + \frac{\rho_{eq}}{\bar{\rho}_{eq}}\right) + \beta(\mu - k^2) = 0. \quad (3.15)$$

Agora, é possível definir uma função  $\epsilon(k)$ , em termos de  $\rho_{eq}, \bar{\rho}_{eq}$ , que possui dependência implícita de  $\mu$  e  $\beta$ , a saber:

$$\frac{\bar{\rho}_{eq}}{\rho_{eq}} \equiv \exp[\beta\epsilon(k)]. \quad (3.16)$$

Resolvendo a equação 3.15 para  $K^2$  e  $\mu$ , obtemos uma equação integral, da qual  $\epsilon(k)$  é solução. Essa nova equação contém uma função de deslocamento  $\theta(k)$ , cuja forma é crucial para a obtenção de  $\epsilon(k)$ . Fisicamente,  $\epsilon(k)$  é a energia relacionada a uma excitação elementar do sistema, dada uma determinada temperatura  $T$ .

Quanto  $T = 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , de modo que obtemos:

$$\begin{cases} \rho_{eq}(k) = 0, & \text{para } |k| > q, \\ \bar{\rho}_{eq} = 0, & \text{para } |k| < q \end{cases}. \quad (3.17)$$

A pressão do sistema é então dada por:

$$P = -\frac{G}{L} = -g. \quad (3.18)$$

Desta forma, pode-se escrever a pressão em termos de  $\mu, \epsilon, \beta$ , a saber:

$$P(\mu, \beta) = \frac{1}{2\pi\beta} \eta^+ \ln(1 + \exp(-\beta\epsilon)). \quad (3.19)$$

A densidade de partículas é calculada como:

$$n = z \frac{\partial}{\partial z} \beta P(z, \beta), \quad (3.20)$$

onde  $z = e^{\beta\mu}$  é a *fugacidade*, que é utilizada para substituir o potencial químico  $\mu$ .

Duas últimas observações são importantes. A primeira, é que podemos escrever a pressão de um sistema unidimensional, de comprimento  $L$ , em termos da fugacidade, da seguinte forma:

$$\beta PL = \ln\left(\sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\text{estados}} \exp(-\beta E(N))\right), \quad (3.21)$$

onde  $E(N)$  corresponde à energia dos estados, e o sistema é composto de bósons com potencial  $\delta$  (repulsivo), com uma constante de acoplamento  $c$ , tal que  $c \in [0, \infty]$  [11].

Por fim, à temperatura finita, um sistema de partículas de núcleo duro possui a seguinte pressão [12]:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 \frac{1}{\exp[\beta(k^2 - \mu + aP)] + 1} = \frac{2e}{1 - an}, \quad (3.22)$$

que é conhecida como equação de Bernoulli [13].

#### 4. Integrabilidade em Volumes Finitos

Nas últimas seções, aprendemos a utilizar as equações do Ansatz de Bethe para obter o espectro de energia de determinados sistemas quânticos, bem como para obter quantidades termodinâmicas do sistema, através do Bethe Ansatz Termodinâmico. Contudo, em nossos cálculos, consideramos sempre que o sistema estava no limite termodinâmico, ou seja,  $N, L \rightarrow \infty$ . O problema é que, quando consideramos sistemas com volume finito, a descrição do sistema através da matriz de espalhamento (Matriz-S) – que é essencial para que possamos usar a hipótese da corda de Bethe – não é mais possível, de modo que o uso de métodos de sistemas integráveis não é mais aplicável. Todavia, este problema pode ser contornado através de algumas técnicas, como será explicado a seguir [14].

##### 4.1. Rotação de Wick e simetria de espelho

Suponha que queiramos calcular a energia do estado fundamental em uma teoria com volume finito. Neste caso, temos que a termodinâmica do sistema é descrita pela seguinte função de partição:

$$Z = \sum_n \exp -\beta E_0, \quad (4.1)$$

onde temos que, considerando que a temperatura do sistema seja muito pequena, o fator  $\beta \rightarrow \infty$  e, deste modo, a energia do sistema é a energia do estado fundamental. Essa função de partição vive num espaço Euclidiano. Podemos obter  $Z$  e a teoria quântica de campos a ela associada através de uma *Rotação de Wick*. O método da rotação de Wick consiste em encontrar a solução de um problema do espaço de Minkowski resolvendo um problema similar num espaço euclidiano, transformando algum número imaginário do problema em um número real. No nosso caso, tomamos  $\tau \rightarrow \tilde{\sigma} = i\tau$ . Geometricamente, estudamos o problema num toroide que se degenera num cilindro quando a temperatura termodinâmica do sistema tende a zero. Fazendo uma continuação analítica de  $\sigma \rightarrow \tilde{t}$ , podemos obter um *modelo de espelho*. Isto consiste numa rotação dupla de Wick sobre o sistema, o que nos dá as seguintes relações para a hamiltoniana e o momento do sistema:

$$H \rightarrow i\tilde{p}, \quad (4.2)$$

$$p \rightarrow -i\tilde{H}. \quad (4.3)$$

A "nova" função de partição no modelo de espelho é dada por

$$Z = \exp(-L\tilde{F}), \quad (4.4)$$

onde  $L$  é o volume do sistema e  $\tilde{F}$  é a energia livre do sistema nesse modelo. Assim, obtemos a energia do estado fundamental do sistema como

$$E_0 = \frac{L}{R}\tilde{F} = L\tilde{f}, \quad (4.5)$$

onde  $R = \frac{1}{T}$ , que, no modelo do espelho, corresponde ao volume do sistema, enquanto  $\frac{1}{L}$ , à sua temperatura. A equação 4.5 corresponde à energia exata do estado fundamental do sistema que estamos considerando.

##### 4.2. Continuação Analítica

A equação 4.5 corresponde à energia exata do estado fundamental do sistema que estamos considerando. Contudo, o Bethe Ansatz é capaz de nos fornecer a energia do espectro inteiro, não faz sentido conseguir obter apenas a energia do estado fundamental. Contudo, o truque da rotação de Wick nos deu apenas a energia mais baixa. Isto pode ser contornado através de uma *continuação analítica* da equação do espectro de energia do sistema.

Para ilustrar, vamos considerar estado físico que possua a seguinte hamiltoniana [15] :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Se calcularmos os autovalores da hamiltoniana da forma usual, ou seja, usando álgebra linear, encontramos a seguinte equação:

$$E(\lambda) = \pm \sqrt{1 + \lambda^2}, \quad (4.7)$$

sendo então a energia do estado fundamental dada pelo autovalor

$$E_0(\lambda) = -\sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (4.8)$$

Essa equação tem um polo em  $\lambda = \pm i$ , quando fazemos uma continuação analítica da mesma. Contudo, quando fazemos isto – ou seja, quando damos uma "volta" pelo plano complexo e voltamos aos reais, num contorno fechado – obtemos não a energia do estado fundamental, mas sim a energia dos estados excitados!

Se resolvermos o problema de autovalores através de uma equação integral, obtemos a seguinte expressão para a energia do estado fundamental

$$E(\lambda) = - \int_{-1}^1 dz \frac{1}{2\pi i} f(z)g(z) - 1, \quad (4.9)$$

$$f(z) = \frac{1}{z - i/\lambda}, \quad (4.10)$$

$$g(z) = 2\lambda \sqrt{1 - z^2}. \quad (4.11)$$

Novamente, essa equação tem polos em  $\lambda = \pm i$ .  $g(z)$  pode representar alguma função conhecida, mas  $f(z)$  não necessariamente o é. Tudo o que sabe-se sobre ela é que é meromórfica e tem polo em  $\frac{i}{\lambda}$ . Fazendo uma continuação analítica em 4.11, obtemos:

$$E^c(\lambda) = - \int_{-1}^1 dz \frac{1}{2\pi i} f(z)g(z) + g(i/\lambda) - 1, \quad (4.12)$$

onde obtemos não exatamente a função original, dado que agora temos a contribuição do resíduo. Isto nos permite obter exatamente a energia dos estados excitados do sistema, sabendo apenas quais são os polos de  $f$  e não necessariamente conhecendo a expressão explícita de  $E$  e  $f$ .

##### Considerações finais

O Bethe Ansatz termodinâmico é uma ferramenta matemática muito importante para o estudo de sistemas integráveis, permitindo encontrar a expressão exata do espectro de energia do sistema, bem como suas propriedades termodinâmicas.

Neste trabalho, fizemos uma breve introdução sobre esta técnica, mostrando sua derivação e aplicação em alguns sistemas encontrados na literatura. Também mostramos que, mesmo que essas equações sejam utilizadas para encontrar o espectro de energia de sistemas que "vivem" em um cilindro, podemos fazer rotações de Wick e encontrar as quantidades termodinâmicas e as expressões de energia do sistema através desse *truque do espelho*. Assim, não necessariamente precisamos estudar um sistema de volume infinito. Também vimos que, fazendo uma continuação analítica na equação de espectro de energia do estado fundamental, podemos obter os estados excitados do sistema.

O Bethe Ansatz Termodinâmico também pode ser aplicável em sistemas onde as matrizes de espalhamento não são diagonais. Isso pode ser feito porque a teoria não diagonal pode ser escrita em termos de uma teoria diagonal com algumas excitações auxiliares, que não alteram seu espectro de energia. A hipótese das cordas permanece a mesma e podemos resolver - agora via Bethe Ansatz Algébrico - o sistema integrável com um procedimento muito semelhante ao que estudamos aqui [16].

## Referências

- [1] L. Šamaj, Z. Bajnok, Introduction to the statistical physics of integrable many-body systems, Cambridge University Press, 2013.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Quantum mechanics, vol. 2 (1977), Hermann, Paris.
- [3] P. A. M. Dirac, Lectures on quantum mechanics, Vol. 2, Courier Corporation, 2001.
- [4] E. H. Lieb, W. Liniger, Exact analysis of an interacting bose gas. i. the general solution and the ground state, Physical Review 130 (4) (1963) 1605.
- [5] T. Cheon, T. Shigehara, Fermion-boson duality of one-dimensional quantum particles with generalized contact interactions, Physical review letters 82 (12) (1999) 2536.
- [6] E. H. Lieb, Exact analysis of an interacting bose gas. ii. the excitation spectrum, in: Condensed Matter Physics and Exactly Soluble Models, Springer, 2004, pp. 617–625.
- [7] J. B. McGuire, Study of exactly soluble one-dimensional n-body problems, Journal of Mathematical Physics 5 (5) (1964) 622–636.
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifšic, E. M. Lifshitz, L. Pitaevskii, Statistical physics: theory of the condensed state, Vol. 9, Butterworth-Heinemann, 1980.
- [9] L. Tonks, The complete equation of state of one, two and three-dimensional gases of hard elastic spheres, Physical Review 50 (10) (1936) 955.
- [10] R. K. Pathria, Statistical mechanics, Vol. 45, Pergamon, 1972.
- [11] C. Yang, One-dimensional system of bosons with repulsive  $\delta$ -function interactions at a finite temperature  $t$ , Physical Review A 2 (1) (1970) 154.
- [12] M. Wadati, G. Kato, One-dimensional hard-core bose gas, Chaos, Solitons & Fractals 14 (1) (2002) 23–28.
- [13] B. Sutherland, Quantum many-body problem in one dimension: thermodynamics, in: Exactly Solvable Models Of Strongly Correlated Electrons, World Scientific, 1994, pp. 469–474.
- [14] S. J. van Tongeren, Introduction to the thermodynamic bethe ansatz, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 49 (32) (2016) 323005.
- [15] P. Dorey, Exact finite-size effects in relativistic field theories, Talk at the IGST (2008).
- [16] Z. Bajnok, Review of ads/cft integrability, chapter iii. 6: thermodynamic bethe ansatz, Letters in Mathematical Physics 99 (1-3) (2012) 299–320.