

Singularidades Cosmológicas e Simetrias de Dimensão Infinita

Jéssica S. Martins e Arsen Melikyan

*Instituto de Física, Universidade de Brasília,
70910-900, Brasília, DF, Brasil*

E-mail: jessicasm137@gmail.com; amelik@gmail.com

ABSTRACT: A questão das singularidades cosmológicas na Teoria da Relatividade Geral de Einstein está aberta desde que A. Friedmann desenvolveu sua solução de universo homogêneo e isotrópico, em 1922. Nesse modelo a singularidade temporal em $t = 0$ ficou conhecida como Big Bang, o momento de início do cosmos, mas pouco ainda se sabe desse instante inicial, mesmo após 90 anos de sua descoberta. Dentre os trabalhos desenvolvidos a cerca desse tema está a conjectura BKL, que além de ditar uma solução geral das equações de Einstein que contém uma singularidade, mostra como o espaço-tempo se comporta perto de um ponto tão singular.

KEYWORDS: Singularidade Cosmológica, Singularidade Temporal, BKL, Relatividade Geral

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria da Relatividade	2
3	Sistema de Referência Síncrono	4
4	Representação Tetrada das Equações de Einstein	5
5	Espaços Homogêneos	7
5.1	Classificações de Bianchi	9
5.2	Equações de Einstein em Espaços Homogêneos	11
6	Métrica de Kasner	12
7	Aproximação à Singularidade Temporal	13
8	Álgebras de Kac-Moody e a Conjectura BKL	17
9	Considerações Finais	18

1 Introdução

O propósito deste projeto é estudar os recém-descobertos fenômenos gravitacionais [1–3] na vizinhança de singularidades cosmológicas. O primeiro estudo do assunto foi iniciado por Belinskii, Khalatnikov e Lifshitz (BKL) ao descobrir que a solução geral em torno de uma singularidade cosmológica, na gravidade quadri-dimensional, tem um complicado caráter oscilatório e caótico, e ao mostrar que os pontos espaciais desacoplam quando há uma aproximação da singularidade [4–8]. Devido ao teorema Hawking-Penrose sobre geodésicas incompletas [9], as singularidades cosmológicas, sob certas condições, passaram a ser características gerais e inevitáveis da teoria clássica da relatividade. No entanto, pouco se sabe sobre a natureza das singularidades e a aproximação BKL é o primeiro passo na direção de uma maior compreensão.

Por outro lado, a presença de tais singularidades mostra que a teoria clássica da gravitação falha perto desses pontos, e é necessário considerar a quantização da gravidade. Entretanto, é bem conhecido que a quantização direta da gravidade por métodos convencionais gera uma teoria quântica inconsistente. Os candidatos mais promissores a resolver essas dificuldades são a Teoria das Cordas e a Gravidade Quântica em Loop. O melhor entendimento do comportamento assintótico do campo gravitacional na vizinhança de singularidades cosmológicas é especialmente importante, já que pode conduzir a dicas cruciais sobre uma teoria quântica da gravitação correta e coerente.

Houve durante os últimos anos um grande desenvolvimento da teoria BKL. Primeiro, teorias de Supergravidade em dimensões $D < 11$ mostraram o caráter oscilatório e caótico do BKL. Depois, a estrutura matemática associada ao comportamento BKL em torno de singularidades cosmológicas mostrou ser descrita pela álgebra hiperbólica escondida de dimensão infinita de Kac-Moody. O estudo de tais estruturas algébricas reponsáveis pela natureza caótica e oscilatória na vizinhança de singularidades forneceu novas perspectivas para o desenvolvimento da teoria quântica da gravitação. Algumas possibilidades têm sido consideradas recentemente por Damour, Henneaux, Nicolai e West [10–15].

Tais simetrias escondidas de dimensão infinita já haviam aparecido antes em teorias gravitacionais, quando se considerava a redução dimensional de quatro ou mais dimensões para apenas duas. Neste caso, o sistema se torna integrável nos níveis clássico e quântico. É notável que a álgebra hiperbólica de Kac-Moody, como o resultado da integrabilidade do sistema, também apareça nessa redução quando são consideradas teorias supersimétricas. Mesmo que a conexão exata entre simetrias de dimensão infinita nas bi-dimensionais e o limite da teoria BKL ainda não seja muito bem entendida, fica claro que esta estrutura algébrica terá um papel crucial na procura de uma teoria quântica da gravitação completa.

2 Teoria da Relatividade

A principal mudança que a Teoria da Relatividade implantou na Física foi o fato de o tempo não ser uma quantidade absoluta para todos os observadores do espaço. A ideia pré-einsteiniana de que, dado um evento no continuum do espaço-tempo, existe uma noção natural de eventos que ocorrem ao mesmo tempo do primeiro se mostrou absolutamente errada. Mostrou-se verdade que não existe uma noção absoluta de simultaneidade, e sim uma que depende do estado do movimento.

Na relatividade especial existe um sistema de coordenadas associado a cada observador inercial, e as transformações de coordenadas de um referencial inercial O para outro O' se movendo com velocidade v com relação à O são dadas pelas transformações de Lorentz:

$$t' = \frac{1 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

onde c é a velocidade da luz. Agora fica claro que o tempo medido muda de um observador a outro, mesmo que estes meçam um mesmo evento. Na relatividade especial a quantidade que tem significado absoluto entre dois eventos para todos os observadores do espaço-tempo não é o intervalo espacial ou temporal entre eles, mas sim o intervalo de espaço-tempo, que representa um elemento de arco no continuum do espaço-tempo, definido como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski $diag(1 - 1 - 1 - 1)$ de assinatura (-2) . Os índices gregos serão usados para as quantidades em quatro dimensões e podem assumir os valores $(0, 1, 2, 3)$, onde as variáveis $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, e os índices latinos para as quantidades tridimensionais, e podem assumir os valores $(1, 2, 3)$.

A Teoria da Relatividade Geral foi formulada por Einstein em 1915 partindo da ideia de que todos os corpos sofrem influência da gravidade, e que todos os corpos caem da mesma maneira em um campo gravitacional. Este fato é conhecido como princípio de equivalência, e também pode ser formulado com a afirmação de que todo referencial não inercial é localmente equivalente à um campo gravitacional homogêneo. Como o caminho seguido pelos corpos é independente de sua natureza, as trajetórias de corpos livres sob ação de um campo gravitacional definem um conjunto preferencial de curvas, assim como o caminho de corpos inerciais o fazia na relatividade especial. Isso sugere que talvez fosse possível atribuir à própria estrutura do espaço-tempo as características de um campo gravitacional, e foi essa conexão que Einstein fez. Ele formulou que corpos caindo sob à ação de um campo gravitacional seguem geodésicas, como corpos inerciais seguem geodésicas no espaço-tempo de Minkowski, mas agora a geometria do espaço-tempo é diferente e o intervalo fica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

onde agora $g_{\mu\nu}$ é uma função que depende das coordenadas curvilíneas x^0, x^1, x^2, x^3 de forma mais arbitrária. Einstein também assertou que as leis da física deveriam ser as mesmas para todos os referenciais, e a maneira de escrevê-las de forma a atender tal condição é a covariante, em termo de tensores.

Um tensor covariante de rank 2 é uma quantidade que se transforma como:

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A'_{\lambda\sigma} \quad (2.3)$$

e um tensor contravariante se transforma como:

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} A'^{\lambda\sigma} \quad (2.4)$$

onde é usada a convenção de Einstein para somatório de índices.

É possível transformar uma quantidade covariante em uma contravariante e vice e versa usando as relações:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (2.5)$$

É importante também definir uma derivada para tensores, chamada derivada covariante, que também forme um tensor, e as expressões usuais são:

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\beta, \quad \nabla_\alpha A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta A_\beta \quad (2.6)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ são chamados símbolos de Christoffel, simétricos nos índices inferiores, e podem ser escritos em termo da métrica como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (2.7)$$

É fácil verificar que a derivada covariante da métrica $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$. A equação da geodésica é obtida usando do fato que a quadri-aceleração de um objeto inercial é zero, ou seja $\nabla_{\alpha}u^{\mu} = 0$ ($u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$), de onde segue que:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}u^{\alpha}u^{\beta} = 0 \quad (2.8)$$

O fato de o transporte paralelo de um vetor, em uma superfície com curvatura, ao longo de uma curva fechada não reproduzir vetores iniciais e finais em uma mesma direção induz a definição de um tensor de quarta ordem dado por:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \quad (2.9)$$

Tal tensor recebe o nome de tensor de Riemann, ou tensor de curvatura, e possui as seguintes simetrias:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} = -R_{\alpha\gamma\beta}^{\sigma}, \quad g_{\lambda\sigma}R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda}R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\sigma\beta\gamma}, \quad R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = -R_{\sigma\alpha\gamma\beta}, \quad R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\sigma\alpha} \quad (2.10)$$

de onde segue:

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma} + R_{\sigma\gamma\alpha\beta} + R_{\sigma\beta\gamma\alpha} = 0$$

e a identidade de Bianchi:

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} + \nabla_{\gamma}R_{\alpha\lambda\beta}^{\sigma} + \nabla_{\beta}R_{\alpha\lambda\gamma}^{\sigma} = 0 \quad (2.11)$$

Existe uma relação entre a derivada covariante de tensores e o tensor de Riemann, dada por:

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}A_{\mu} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}A_{\mu} = A_{\sigma}R_{\mu\beta\alpha}^{\sigma} \quad (2.12)$$

Outras duas quantidades importantes que ajudam a calcular as propriedades geométricas do espaço são o tensor de Ricci, que é um tensor simétrico definido como a contração do tensor de Riemann

$$g^{\sigma\beta}R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\gamma} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} \quad (2.13)$$

e a curvatura escalar, definida como a contração do tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.14)$$

Einstein então formulou suas equações para o campo gravitacional em termos da geometria do espaço-tempo envolvido, usando a ideia de que um corpo com massa distorce o continuum do espaço-tempo ao redor, curvando o espaço-tempo nessa região e alterando sua geometria. Seu resultado final foi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

onde G é contante universal da gravitação e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dos corpos em questão, que interagem com o espaço e o distorcem.

A equação de Einstein também contém uma característica interessante. Diferentemente das equações de Maxwell, onde além das equações do campo também é necessário especificar a força de Lorentz, ou seja, como o campo interage com as cargas, as equações de Einstein já contém a interação campo-massa. Com uma só equação é possível especificar o campo gravitacional, que é a distorção do tecido do espaço-tempo causada pelas massas, e a trajetória dos corpos nesse campo, que são as geodésicas desse próprio espaço. Logo, para resolver as equações de Einstein é preciso especificar as condições iniciais para os corpos como suas posições e velocidades, e também sua energia e pressões (elementos do tensor energia-momento), de forma a obter uma completa descrição do problema.

3 Sistema de Referência Síncrono

Um sistema de referência em que,

$$g_{0i} = 0, \quad g_{00} = 1 \quad (3.1)$$

de forma que $x^0 = t$ é o tempo próprio em cada ponto espacial ($c = 1$), é dito síncrono. Nesse sistema de referência o intervalo é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - g_{ik} dx^i dx^k \quad (3.2)$$

onde $g_{ik} = -\gamma_{ik}$ é a métrica espacial tridimensional.

No sistema de referência síncrono as linhas temporais são geodésicas do espaço-tempo. Isso pode ser observado do fato de o 4-vetor tangente à linha de mundo de $x^1, x^2, x^3 = \text{constante}$ (ou seja, linhas temporais), $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, tem componentes $u^0 = 1$ e $u^i = 0$ e consequentemente obedecem à equações da geodésica:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = \Gamma_{00}^\mu = 0$$

já que Γ_{00}^i e Γ_{00}^0 são identicamente nulos. Tais linhas também são normais às hipersuperfícies de tempo constante, pois o 4-vetor normal a tal superfície, $n_\mu = \frac{\partial t}{\partial x^\mu}$, tem componentes $n_0 = 1, n_i = 0$, e os respectivos contravariantes $n^0 = 1, n^i = 0$, pois $g^{00} = 1$. Tais componentes coincidem com as de u^μ , tangentes as linhas temporais.

Essa propriedade do sistema de referência síncrono pode ser usada para construir geometricamente um sistema desse tipo em qualquer espaço-tempo. Para isso, começa-se primeiro com uma hipersuperfície tipo espaço (hipersuperfície cuja normal em cada ponto seja tipo tempo, ou seja, esteja dentro do cone de luz de vértice nesse ponto). Todos os elementos de intervalo dessa hipersuperfície serão claramente tipo espaço. Em seguida, constrói-se a família de geodésicas normais à essa hipersuperfície. Se agora tais linhas geodésicas forem escolhidas como as linhas de coordenada temporal, e a coordenada temporal t for determinada como o comprimento s das linhas geodésicas medido a partir da hipersuperfície, obtém-se um sistema de referência síncrono. Dessa construção fica claro que é sempre possível a escolha de um sistema de referência síncrono a princípio. Tal escolha também não é única, pois permite transformações das coordenadas espaciais que não afetem o tempo, e ainda transformações que garantem a arbitrariedade da escolha da hipersuperfície inicial.

Para escrever as equações de Einstein no sistema de referência síncrono, separa-se as diferenciações espaciais e temporais nas mesmas. Introduzindo a notação

$$\kappa_{ik} = \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial t} \quad (3.3)$$

para as derivadas temporais do tensor métrico tridimensional introduzimos também outro tensor tridimensional. Todas as operações de subir índices e derivação covariante para κ_{ik} são feitas no espaço tridimensional com a métrica γ_{ik} . O somatório κ_i^i é a derivada do logaritmo do determinante $\gamma \equiv |\gamma_{ik}| = -g$:

$$\kappa_i^i = \gamma^{ik} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial t} = -g^{ik} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{g} g g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \ln \gamma}{\partial t} \quad (3.4)$$

onde foi usado que $dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$. Calculando os símbolos de Christoffel, obtém-se as expressões:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^l = \Gamma_{0k}^0 = 0, \quad \Gamma_{ik}^0 = \frac{1}{2} \kappa_{ik}, \quad \Gamma_{0k}^l = \frac{1}{2} \kappa_k^l, \quad \Gamma_{ik}^l = \lambda_{ik}^l \quad (3.5)$$

onde λ_{ik}^l são os símbolos de Christoffel tridimensionais, construídos a partir do tensor γ_{ik} da mesma forma que $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ é formado a partir da métrica $g_{\mu\nu}$. Usando as equações (2.13) e (3.5) para computar as componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, as equações de Einstein em componentes mistas ficam:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \kappa_i^i}{\partial t} - \frac{1}{4} \kappa_i^k \kappa_k^i = 8\pi G \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) \quad (3.6)$$

$$R_i^0 = \frac{1}{2} (\nabla_k \kappa_i^k - \nabla_i \kappa_k^k) = 8\pi G T_i^0 \quad (3.7)$$

$$R_k^i = -P_k^i - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \kappa_k^i) = 8\pi G \left(T_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i T \right) \quad (3.8)$$

onde P_{ik} é o tensor de Ricci tridimensional expresso em termos de γ_{ik} de forma análoga a $R_{\mu\nu}$ em termos de $g_{\mu\nu}$ e foi usado na última expressão que $\gamma^{il}A_{lk} = -A_k^i$ e que

$$\frac{\partial\gamma^{il}\kappa_{lk}}{\partial t} = \frac{\partial\kappa_k^i}{\partial t} = \frac{\partial\gamma^{il}}{\partial t}\kappa_{lk} + \gamma^{il}\frac{\partial\kappa_{lk}}{\partial t} = \kappa^{il}\kappa_{lk} + \gamma^{il}\frac{\partial\kappa_{lk}}{\partial t}$$

Uma das características do sistema de referência síncrono é o fato dele não ser estacionário (as componentes da métrica dependem do tempo), ou seja, o campo gravitacional em tal sistema não pode ser constante. De fato, em um campo constante $\kappa_{ik} = 0$, mas na presença de matéria o lado direito da equação (3.6) é diferente de zero, o que leva a uma contradição. Em um espaço-tempo vazio ($\gamma_{ik} = \text{const}$), a equação (3.8) leva a todos os P_{ik} , e conseqüentemente, todas as componentes do tensor de curvatura tridimensional P_{iklm} , nulos. Portanto, em um sistema de referência síncrono com métrica espacial euclideana o espaço-tempo é plano.

4 Representação Tetrada das Equações de Einstein

Para determinar as componentes do tensor de Ricci geralmente é preciso fazer cálculos complicados e extensivos. No entanto, existem várias fórmulas que permitem simplificar esses cálculos e deixá-los mais inteligíveis. Entre essas fórmulas está a representação do tensor curvatura na forma tetrada.

Para contruir tal representação primeiro introduz-se um conjunto de quatro 4-vetores linearmente independentes $e_{(a)}^\mu$ (nomeados pelo índice a) e que obedecem a seguinte relação:

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab} \quad (4.1)$$

onde η_{ab} é uma métrica constante de assinatura (-2), normalmente escolhida como a métrica de Minkowski. Isso faz com que os vetores $e_{(a)}^\mu$ sejam ortogonais, sendo um deles tipo tempo e os outros três tipo espaço. A matriz inversa de η_{ab} é $\eta^{ab}(\eta^{bc}\eta_{ca}) = \delta_a^b$. Também introduz-se o inverso de $e_{(a)}^\mu$ como $e^{\mu(a)}$, de forma que:

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \delta_a^b \quad (4.2)$$

Cada 4-vetor $e_{(a)}^\mu$ é ortogonal aos outros 4-vetores $e_{(b)}^\mu$ quando $a \neq b$. Multiplicando (4.2) por $e_{(b)}^\nu$, tem-se que:

$$e_{(b)}^\nu e_{(a)}^\mu e_{(c)\mu} = \delta_a^b e_{(c)}^\nu \Rightarrow e_{(b)}^\nu e_{(a)}^\mu e_{(c)\mu} = e_{(b)}^\nu$$

de onde se conclui que:

$$e_{(b)}^\nu e_{(a)\mu} = \delta_{(a)}^{\nu} \quad (4.3)$$

Multiplicando (4.1) por η^{bc} , nota-se que $e_{(a)}^\mu (\eta^{bc}e_{(c)\mu}) = \delta_a^b$, o que implica que:

$$e_{(a)}^\mu = \eta^{bc}e_{(c)\mu}; e_{(b)\mu} = \eta_{bc}e_{(c)}^\mu \quad (4.4)$$

Portanto as ações de subir e descer os índices tetrados são feitas através dos tensores η^{bc} e η_{bc} . A importância dos vetores tetrados é o fato de ser possível expressar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ por meio deles. Pelas relações entre as componentes covariantes e contravariantes de um tensor, segue que $e_{(a)}^\mu = g_{\mu\rho}e^{(a)\rho}$, e multiplicando essa relação por $e_{(a)\nu}$ e usando (4.3), obtém-se que:

$$g_{\mu\nu} = e_{(a)\nu}e_{(a)\mu} \Rightarrow^{(4.4)} g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e_{(a)\mu}e_{(b)\nu} \quad (4.5)$$

O elemento de intervalo é dado por:

$$ds^2 = \eta_{ab} \left(e_{(a)}^\mu dx^\mu \right) \left(e_{(b)}^\nu dx^\nu \right) \quad (4.6)$$

As componentes tetradas de um quadrivetor A^μ são definidas como as projeções das componentes do quadrivetor na base tetrada, e dadas por:

$$A_{(a)} = e_{(a)\mu}A^\mu; \quad A^{(a)} = e_{(a)}^\mu A^\mu = \eta^{ab}A_{(b)} \quad (4.7)$$

E conversamente:

$$A_\mu = e_\mu^{(a)} A_{(a)}; \quad A^\mu = e_{(a)}^\nu A^{(a)} \quad (4.8)$$

Também é possível definir a diferenciação "ao longo da direção (a)" da forma:

$$\phi_{,(a)} = e_{(a)}^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (4.9)$$

Introduz-se agora os coeficientes de rotação de Ricci γ_{abc} dados por:

$$\gamma_{acb} = \nabla_\nu e_{(a)\mu} e_{(b)}^\mu e_{(c)}^\nu \quad (4.10)$$

e sua combinação linear:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} \gamma_{acb} = (\nabla_\nu e_{(a)\mu} - \nabla_\mu e_{(a)\nu}) e_b^\mu e_{(c)}^\nu = (e_{(a)\mu,\nu} - e_{(a)\nu,\mu}) e_b^\mu e_{(c)}^\nu \quad (4.11)$$

A última equação segue do fato de $\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$. A equação de γ_{abc} em termos de λ_{abc} também pode ser obtida facilmente:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2} (\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) \quad (4.12)$$

É possível também observar as seguintes simetrias:

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}; \quad \lambda_{abc} = -\lambda_{acb} \quad (4.13)$$

Para determinar o tensor de curvatura na forma tetrada, primeiro é necessário escrever a relação (2.12) usando os vetores tetrados.

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta e_{(a)\gamma} - \nabla_\beta \nabla_\alpha e_{(a)\gamma} = e_{(a)}^\delta R_{\delta\gamma\beta\alpha} = R_{(a)(e)(f)(g)} e_\gamma^{(e)} e_\beta^{(f)} e_\alpha^{(g)}$$

e multiplicando a equação por $e_{(b)}^\gamma e_{(c)}^\beta e_{(d)}^\alpha$, tem-se:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (\nabla_\alpha \nabla_\beta e_{(a)\gamma} - \nabla_\beta \nabla_\alpha e_{(a)\gamma}) e_{(b)}^\gamma e_{(c)}^\beta e_{(d)}^\alpha \quad (4.14)$$

Para escrever tal expressão em termos de γ_{abc} escreve-se,

$$\nabla_\nu e_{(a)\mu} = \gamma_{abc} e_\mu^{(b)} e_{(c)}^\nu \quad (4.15)$$

e após outra derivação covariante as derivadas dos vetores tetrados serão expressas da mesma maneira. A derivada covariante de γ_{abc} é a própria derivada ordinária. A expressão da derivada covariante de qualquer vetor A_α e tensor $A_{\alpha\beta}$ na representação tetrada é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A_\alpha e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta &= A_{(a),(b)} + A^{(d)} \gamma_{dab} \\ \nabla_\sigma A_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta e_{(c)}^\sigma &= A_{(a)(b),(c)} - A^{(d)} (b) \gamma_{dac} + A_{(a)}^{(d)} \gamma_{dbc} \\ \nabla_\sigma A_\alpha^\beta e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta e_{(c)}^\sigma &= A_{(a)}^{(b)}{}_{,(c)} - A^{(d)(b)} \gamma_{dac} + A_{(a)}^{(d)} \gamma_d{}^b{}_c \end{aligned} \quad (4.16)$$

Finalmente,

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf} (\gamma^f{}_{cd} - \gamma^f{}_{dc}) + \gamma_{afc} \gamma^f{}_{bd} - \gamma_{afd} \gamma^f{}_{bc} \quad (4.17)$$

onde $\gamma_{bc}^a = \eta^{ad} \gamma_{dbc}$.

Contraindo os índices (a) e (c), obtém-se o tensor de Ricci, dado em termos de λ_{abc} como:

$$R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2} \left(\lambda_{ab}{}^c{}_{,c} + \lambda_{ba}{}^c{}_{,c} + \lambda^c{}_{ca,b} + \lambda^c{}_{cb,a} + \lambda^{cd}{}_b \lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_b \lambda_{dca} - \frac{1}{2} \lambda_b{}^{cd} \lambda_{acd} + \lambda^c{}_{cd} \lambda_{ab}{}^d + \lambda^c{}_{cd} \lambda_{ba}{}^d \right) \quad (4.18)$$

Como os resultados obtidos não dependem da natureza da métrica quadridimensional, é possível também obter os tensores de Riemann e Ricci tridimensionais trocando a representação tetrada de quadrivetores por uma representação triedal de trivetores, e nesse caso a métrica η_{ab} tem assinatura +++.

5 Espaços Homogêneos

Grande parte da Cosmologia moderna se foca no estudo da evolução do universo considerando-o homogêneo e isotrópico. Tais hipóteses não são de todo descartadas por dados observacionais, quando se considera a aparente homogeneidade da distribuição de galáxias no espaço e a isotropia no mapa da radiação cósmica de fundo. Porém, tendo em vista que em escala menores o universo não é homogêneo, fica claro desde o início que analisar o universo dessa forma apenas resulta em boas descrições do cosmos no seu estado atual, e que tais suposições talvez não sejam o melhor ponto de partida para estudar os estágios iniciais da evolução do universo.

Assumir o espaço como homogêneo e isotrópico determina a métrica completamente, a menos do sinal da curvatura. No entanto, considerar o espaço sem quaisquer outras simetrias além da homogeneidade resulta em muito mais liberdade na escolha da métrica. Para analisar as propriedades de tal métrica é útil primeiro considerá-la em um dado instante de tempo t em um sistema de referência síncrono, de forma que t é o mesmo tempo sincronizado para todo o espaço.

Homogeneidade implica em uma métrica com propriedades idênticas em todos os pontos do espaço. Isso significa que, dado o conjunto G das transformações do espaço nele mesmo, um elemento de intervalo escrito como:

$$dl^2 = \gamma_{ik} (x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k$$

depois de uma transformação de G passa a ser dado por:

$$dl^2 = \gamma_{ik} (x'^1, x'^2, x'^3) dx'^i dx'^k$$

onde γ_{ik} tem a mesma dependência funcional das antigas e novas coordenada. Portanto, um espaço é homogêneo se for possível levar qualquer ponto do espaço em qualquer outro. Como o espaço é tridimensional, as três possíveis transformações diferentes são nomeadas por três parâmetros independentes.

Por exemplo, a homogeneidade do espaço euclidiano é expressa como a invariância da métrica sobre deslocamentos paralelos do sistema de coordenada cartesiano. As componentes dessas translações são determinadas por três parâmetros (são as componentes do vetor de deslocamento da origem), e essas transformações deixam invariantes os diferenciais (dx, dy, dz) dos quais o elemento de arco é construído. No caso geral não euclidiano as três formas diferenciais independentes invariantes não se reduzem a diferenciais totais de nenhuma função das coordenadas. Essas formas são escritas como:

$$e_i^{(a)} dx^i \tag{5.1}$$

onde o índice (a) nomeia os três vetores linearmente independentes, que são funções das coordenadas. O conjunto desse vetores é chamado de *frame*. A métrica espacial invariante sob as transformações de coordenadas é dada por:

$$dl^2 = \eta_{ab} \left(e_i^{(a)} dx^i \right) \left(e_k^{(b)} dx^k \right) \tag{5.2}$$

$$\Rightarrow \gamma_{ik} = \eta_{ab} e_i^{(a)} e_k^{(b)} \tag{5.3}$$

onde os coeficientes de η_{ab} são simétricos e dependem do tempo.

Dessa forma, foi obtida uma representação triedal da métrica espacial usando uma tripla de vetores coordenados. A escolha desses vetores é determinada pelas simetrias do espaço e portanto em geral esse triedo não é ortogonal, de forma que a matriz η_{ab} geralmente não é ortogonal. Todas as equações obtidas na seção 3 são aplicáveis aqui. Em particular, no caso tridimensional, a relação entre os vetores do *frame* e seus inversos pode ser escrita como (facilmente verificável multiplicando cada equação pelo respectivo inverso do termo do lado esquerdo e usando que $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A)$):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{v} \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{v} \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{v} \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2 \tag{5.4}$$

onde v é o determinante da matriz formada pelos vetores $e_i^{(a)}$ (vetores $\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}^{(a)}$ tem componentes $e_{(a)}^i, e_i^{(a)}$), com cada vetor (a) ocupando uma linha e as componentes dos mesmos uma coluna.

$$v = \left| e_i^{(a)} \right| = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) \tag{5.5}$$

Claramente,

$$\gamma = \eta v^2 \quad (5.6)$$

pois $|\gamma_{ik}| = \gamma = |\eta_{ab}| \left| e_i^{(a)} \right| \left| e_k^{(b)} \right| = \eta v \cdot v = \eta v^2$, onde η é o determinante de η_{ab} .

A invariância das formas (5.1) sob transformações de coordenadas significa que:

$$e_i^{(a)}(x) dx^i = e_i^{(a)}(x') dx'^i \quad (5.7)$$

onde $e_i^{(a)}$ permanece tem a mesma dependência funcional das velhas e novas coordenadas. Multiplicando esta última equação por $e_{(a)}^k(x')$ e fazendo $dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dx^i$, obtém-se:

$$\begin{aligned} e_{(a)}^k(x') e_i^{(a)}(x) dx^i &= e_{(a)}^k(x') e_i^{(a)}(x') dx'^i = \delta_i^k dx'^i = dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dx^i \\ &\Rightarrow \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = e_{(a)}^k(x') e_i^{(a)}(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Essas equações são um sistema de equações diferenciais que determinam as funções $x'^k(x)$ para um dado *frame*. Para que sejam integráveis, as equações (5.8) devem obedecer às condições:

$$\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^l \partial x^i}$$

Calculando essas derivadas e igualando-as, tem-se que:

$$\begin{aligned} e_l^{(a)}(x) \frac{\partial e_{(a)}^k(x')}{\partial x'^m} e_i^{(b)}(x) e_b^m(x') + e_{(a)}^k(x') \frac{\partial e_l^{(a)}(x)}{\partial x^i} &= e_{(a)}^k(x') \frac{\partial e_i^{(a)}(x)}{\partial x^l} + e_i^{(a)}(x) \frac{\partial e_{(a)}^k(x')}{\partial x'^m} e_l^{(b)}(x) e_b^m(x') \\ &\Rightarrow e_i^{(a)}(x) e_l^{(b)}(x) \left(e_{(b)}^m(x') \frac{\partial e_{(a)}^k(x')}{\partial x'^m} - e_{(a)}^m(x') \frac{\partial e_{(b)}^k(x')}{\partial x'^m} \right) = e_{(a)}^k(x') \left(\frac{\partial e_l^{(a)}(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial e_i^{(a)}(x)}{\partial x^l} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por $e_{(d)}^i(x) e_{(c)}^l(x) e_k^{(f)}(x')$, e usando que $\frac{\partial (e_k^{(f)} e_{(d)}^k)}{\partial x'^m} = \frac{\partial e_k^{(f)}}{\partial x'^m} e_{(d)}^k + e_k^{(f)} \frac{\partial e_{(d)}^k}{\partial x'^m} = \frac{\partial (\delta_d^f)}{\partial x'^m} = 0$ e após algumas manipulações obtém-se,

$$e_k^{(f)}(x') \left(e_{(c)}^m(x') \frac{\partial e_{(d)}^k(x')}{\partial x'^m} - e_{(d)}^m(x') \frac{\partial e_{(c)}^k(x')}{\partial x'^m} \right) = e_{(d)}^i(x) e_{(c)}^l(x) \left(\frac{\partial e_l^{(f)}(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial e_i^{(f)}(x)}{\partial x^l} \right)$$

Trocando os índices k e m no primeiro termo e a derivada no segundo termo do lado esquerdo da última equação, e trocando os índices i e l por m e k, respectivamente, leva a:

$$e_{(d)}^m(x') e_{(c)}^k(x') \left(\frac{\partial e_k^{(f)}(x')}{\partial x'^m} - \frac{\partial e_m^{(f)}(x')}{\partial x'^k} \right) = e_{(d)}^m(x) e_{(c)}^k(x) \left(\frac{\partial e_k^{(f)}(x)}{\partial x^m} - \frac{\partial e_m^{(f)}(x)}{\partial x^k} \right)$$

Como consequência essas expressões devem se reduzir a constantes:

$$\left(\frac{\partial e_i^{(c)}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_k^{(c)}}{\partial x^i} \right) e_{(a)}^i e_{(b)}^k = C_{ab}^c \quad (5.9)$$

As constantes C_{ab}^c são chamadas *constantes de estrutura* do grupo de transformações envolvido. Multiplicando essa equação por $e_{(c)}^l$, esta pode ser reescrita como:

$$e_{(a)}^i \frac{\partial e_{(b)}^l}{\partial x^i} - e_{(b)}^k \frac{\partial e_{(a)}^l}{\partial x^k} = C_{ab}^c e_{(c)}^l \quad (5.10)$$

Essas são as condições necessárias para a homogeneidade do espaço. A expressão à esquerda em (5.9) coincide com a definição de λ_{ab}^c em (4.11), e que portanto são constantes. Por definição, as constantes de estrutura são antissimétricas em seus dois índices inferiores.

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c \quad (5.11)$$

É possível ainda obter outra condição sobre as constantes de estrutura notando que (5.10) pode ser escrita como relações de comutação

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C_{ab}^c X_c \quad (5.12)$$

introduzindo o operador linear de diferenciação:

$$X_a = e_{(a)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.13)$$

A condição extra mencionada segue da identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned} & [[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] = 0 \\ & \Rightarrow C_{ab}^d C_{dc}^f + C_{bc}^d C_{da}^f + C_{ca}^d C_{db}^f = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

É útil também introduzir uma quantidade de dois índices através da transformação dual das constantes de estrutura:

$$C_{ab}^c = \varepsilon_{abd} C^{dc} \quad (5.15)$$

onde ε_{abc} é o tensor de Livi-Civita. Com essa forma das constantes de estrutura, a equação (5.12) fica (lembrando que $\varepsilon_{abc} \varepsilon^{dfc} = \delta_a^d \delta_b^f - \delta_a^f \delta_b^d$ e $\varepsilon_{abc} \varepsilon^{abd} = 2\delta_c^d$),

$$\varepsilon^{abf} X_a X_b = C^{fc} X_c \quad (5.16)$$

A antissimetriação dos índices inferiores já está contida na definição de C^{ab} , enquanto que (5.14) toma a forma:

$$\varepsilon_{ged} C^{ed} C^{gf} = 0 \quad (5.17)$$

5.1 Classificações de Bianchi

As condições em (5.17) são as únicas que as constantes de estrutura devem satisfazer. Mas dentre as constantes admissíveis existem conjuntos equivalentes no sentido de que, como a escolha dos vetores do *frame* não é única, já que estes podem sofrer transformações lineares com coeficientes constantes do tipo $\mathbf{e}_{(a)} = A_a^b \mathbf{e}_{(b)}$, é possível que haja constantes de estrutura cuja diferença esteja relacionada com essas transformações. A classificação dos espaços homogêneos então se reduz à determinação de todos os conjuntos não equivalentes das constantes de estrutura. Isso pode ser feito usando as propriedades tensoriais de C^{ab} .

Primeiro, é possível separar o tensor C^{ab} nas suas partes simétrica (n^{ab}) e antissimétrica (h^{ab}). Como existe, em três dimensões, uma correspondência biunívoca entre matrizes antissimétricas e vetores, pode-se representar h^{ab} em termos do vetor a_c definido como $h^{ab} = \varepsilon^{abc} a_c$. Portanto,

$$C^{ab} = n^{ab} + \varepsilon^{abc} a_c \quad (5.18)$$

A substituição dessa expressão em (5.17) leva a:

$$a_b n^{ba} = 0 \quad (5.19)$$

Como toda matriz simétrica pode ser posta em forma diagonal, escolhendo uma base apropriada por meio de transformações lineares dos vetores do *frame*, n^{ab} adquire a forma:

$$n^{ab} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

Tabela 1. Classificação de Bianchi preliminar

Caso	1	2	2*	2**	3	3*	3**	4	5	6	6*	7
a	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
n_1	0	-	0	0	-	-	0	-	0	0	0	0
n_2	0	0	-	0	-	0	-	-	0	0	-	-
n_3	0	0	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-

A equação (5.19) diz que o vetor a_b , se existir, é o ortogonal às direções principais definidas por n^{ab} , ou seja, jaz na direção correspondente ao autovalor zero de n^{ab} . Como a diagonalização não fixa completamente a base, pois transformações que permutem (n_1, n_2, n_3) ainda são permitidas, se houver um zero entre os autovalores de n^{ab} , este pode ser movido para a posição do canto superior esquerdo. Sem perda de generalidade pode-se escrever $a_b = (a, 0, 0)$, o que faz com que a equação (5.19) implique $an_1 = 0$. Portanto, a ou n_1 devem zerar. As relações de comutação (5.16) adquirem a forma:

$$[X_a, X_b] = \varepsilon_{abd} (n^{dc} + \varepsilon^{dcf} a_f) X_c$$

$$[X_1, X_2] = n_3 X_3 - a X_2, \quad [X_2, X_3] = n_1 X_1, \quad [X_3, X_1] = n_2 X_2 + a X_3 \quad (5.20)$$

As únicas liberdades restantes na escolha dos operadores X_a são mudanças de escala da forma $X_1 \rightarrow k_1 X_1, X_2 \rightarrow k_2 X_2, X_3 \rightarrow k_3 X_3, k_a \neq 0$. Nesse caso, as relações de comutação ficam (a', n'_1, n'_2, n'_3 foram introduzidos por conveniência, de forma que $n_1 = \frac{k_1 n'_1}{k_2 k_3}$, etc),

$$[X_1, X_2] = \frac{k_3}{k_1 k_2} n'_3 X_3 - \frac{a'}{k_1} X_2, \quad [X_2, X_3] = \frac{k_1}{k_2 k_3} n'_1 X_1, \quad [X_3, X_1] = \frac{k_2}{k_3 k_1} n'_2 X_2 + \frac{a'}{k_1} X_3 \quad (5.21)$$

Em particular, é possível simultaneamente mudar os sinais de todos os n_a e fazer a positivo, caso $a \neq 0$, se $k_1 = k_2 = k_3 = -1$. Também é admissível fazer todas as constantes de estrutura iguais a ± 1 , se ao menos uma das quantidades a, n_2, n_3 zerar. Mas se todas essas quantidades forem não-nulas, então a mudança de escala deixa a quantidade $a^2/n_2 n_3$ invariante (a construção explícita desses fatos é dada a seguir).

Uma classificação preliminar dos valores possíveis para a, n_1, n_2, n_3 está na Tabela 1. Os traços indicam valores a serem determinados. É importante ressaltar que os tipos 2, 2* e 2** são equivalentes pois quando $a = 0$ qualquer permutação em n_1, n_2, n_3 é permitida. Os tipos 3, 3* e 3** e 6 e 6* também são equivalentes pois, quando $a \neq 0$ ainda é possível permutar n_2 e n_3 . Na nomenclatura de Bianchi, os casos ficam:

(1) $a = n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Esta é denominada tipo I, e é o espaço euclideo.

(2) $a = n_2 = n_3 = 0, n_1 \neq 0$. Tomando $k_1 = \frac{k_2 k_3}{n'_1} \Rightarrow [X_2, X_3] = X_1 \Rightarrow n_1 = 1$ Esta é chamada tipo II.

(3) $a = n_3 = 0, n_1 \neq 0 \neq n_2$. Fazendo $k_1 = \frac{k_2 k_3}{n'_1} \Rightarrow n_1 = 1$. Porém nesse caso, $n_2 = \frac{n'_1 n'_2}{k'_3}$ e não é possível mudar o sinal de n_2 com uma escolha de k_3 . Considera-se então dois casos:

(3a) $n'_1 n'_2 > 0$. Então faz-se $k_3 = \sqrt{n'_1 n'_2} \Rightarrow n_2 = 1$. Hoje esse caso é conhecido como tipo VII₀ da classificação de Bianchi.

(3b) $n'_1 n'_2 < 0$. Nesse caso $k_3 = \sqrt{-n'_1 n'_2} \Rightarrow n_2 = -1$. Este é um subcaso do tipo VI nomeado tipo VI₀ da classificação de Bianchi.

(4) $a = 0, n_1, n_2, n_3 \neq 0$. Tomando $k_1 = \frac{k_2 k_3}{n'_1} \Rightarrow n_1 = 1$. Mas, como antes, $n_2 = \frac{n'_1 n'_2}{k'_3}$ e o sinal de $n_1 n_2$ deve ser considerado separadamente.

(4a) $n'_1 n'_2 > 0$. Fazendo $k_3 = \sqrt{n'_1 n'_2} \Rightarrow n_2 = 1$. Entretanto, $n_3 = \frac{n'_1 n'_3}{k'_2}$ e aparecem mais dois subcasos:

(4a₁) $n'_1 n'_3 > 0$. Introduzindo $k_2 = \sqrt{n'_1 n'_3} \Rightarrow n_3 = 1$ e finalmente $n_1 = n_2 = n_3 = 1, a = 0$. Esse subcaso é conhecido como tipo IX e contém como caso especial o espaço de curvatura constante positiva.

Tabela 2. Classificação de Bianchi

Tipo Bianchi	I	II	VII ₀	VI ₀	IX	VIII	V	IV	VII _a	VI _a	III
a	0	0	0	0	0	0	1	1	a	a	1
n_1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
n_2	0	0	1	-1	1	1	0	0	1	1	1
n_3	0	0	0	0	1	-1	0	1	1	-1	-1

(4a₂) $n'_1 n'_3 < 0$. Faz-se $k_2 = \sqrt{-n'_1 n'_3} \Rightarrow n_3 = -1$ e portanto $n_1 = n_2 = 1 = -n_3, a = 0$, caso conhecido como tipo VIII.

(4b) $n'_1 n'_2 < 0$. Fazendo $k_3 = \sqrt{-n'_1 n'_2} \Rightarrow n_2 = -1$. Entretanto, $n_3 = \frac{n'_1 n'_3}{k_2^2}$ e aparecem mais dois subcasos:

(4b₁) $n'_1 n'_3 > 0$. Tomando $k_2 = \sqrt{n'_1 n'_3} \Rightarrow n_3 = 1$. Fazendo uma mudança de base tal que $(X_3, X_2) = (X_2, -X_3)$, obtém-se novamente os parâmetros do subcaso (4a₂).

(4b₂) $n'_1 n'_3 < 0$. Escolhendo $k_2 = \sqrt{-n'_1 n'_3} \Rightarrow n_3 = -1$. Mudando a base de forma que $(X_1, X_3, X_2) = (-X_3, -X_2, -X_1)$ o caso (4a₂) é encontrado de novo.

(5) $a \neq 0, n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Fazendo $k_1 = a' \Rightarrow a = 1$. Esse é o subcaso tipo V, que contém como caso especial o espaço com curvatura constante negativa.

(6) $a \neq 0 \neq n_3, n_1 = n_2 = 0$. Escolhendo $k_1 = a', k_3 = \frac{a' k_2}{n_3} \Rightarrow a = 1 = n_3$. Este é o tipo IV.

(7) $a, n_2, n_3 \neq 0, n_1 = 0$. Tomando $k_2 \frac{k_1 k_3}{n_2} \Rightarrow n_2 = 1$. Nesse caso $n_3 = \frac{n'_2 n'_3}{C_1^2}$ é preciso considerar o sinal de $n'_2 n'_3$.

(7a) $n'_2 n'_3 > 0$. Então faz-se $C_1 = \sqrt{n'_2 n'_3} \Rightarrow n_3 = 1$. Porém, fixando C_1 dessa forma não é mais possível reescalar a . Portanto, com $n_3 = 1$ o valor de a passa a ser arbitrário, e álgebras com $n_2 = n_3 = 1$ e diferentes valor de a não são equivalentes. Esse subcaso, quando $a \neq 0$ é hoje conhecido como tipo VII_a, pois se quando $a = 0$ for feita uma mudança de base tal que $(X_1, X_3) = (X_3, -X_1)$, o tipo VII₀ é recuperado.

(7b) $n'_2 n'_3 < 0$. Escolhendo $C_1 = \sqrt{-n'_2 n'_3} \Rightarrow n_3 = -1$, e como antes tipos não equivalentes de álgebras surgem para diferentes valores de a . Quando $a \neq 0$ esse subcaso é denotado como VI_a, já que quando $a = 0$ e a mesma mudança de base de (7a) é feita, obtém-se o tipo VI₀. O caso particular do tipo VI em que $a = 1$ foi classificado por Bianchi separadamente e nomeado por ele como tipo III.

A classificação de Bianchi final para espaços homogêneos encontra-se na tabela 2.

5.2 Equações de Einstein em Espaços Homogêneos

As equações de Einstein em um universo que possui o espaço homogêneo se reduzem a um sistema de equações diferenciais de funções de que dependem apenas do tempo. Para mostrar isso, primeiro é necessário escrever a parte espacial dos 4-vetores e 4-tensores em termos do triado base dos vetores do espaço:

$$R_{(a)(b)} = R_{ik} e^i_{(a)} e^k_{(b)}, \quad R_{0(a)} = R_{ai} e^i_{(a)}, \quad u^{(a)} = u^i e^i_{(a)}.$$

onde todas as quantidades agora são funções apenas do tempo t . A densidade de energia ϵ e a pressão de matéria p também são funções do tempo.

De acordo com as equações (3.6), (3.7) e (3.8), as equações de Einstein em um sistema de referência síncrono são expressas apenas em termos os tensores tridimensionais κ_{ik} e P_{ik} . Para o primeiro (o ponto indica diferenciação com relação ao tempo),

$$\kappa_{(a)(b)} = \dot{\eta}_{ab}, \quad \kappa_{(a)}^{(b)} = \dot{\eta}_{ac} \eta^{cb}.$$

e as componentes de $P_{(a)(b)}$ podem ser expressas em termos de η_{ab} e as constantes de estrutura do grupo usando (4.18). Após substituir $\lambda_{bc}^a = C_{bc}^a$ pelos C^{ab} , usar que $\eta_{ad} \eta_{be} \eta_{cf} \varepsilon^{def} = \eta \varepsilon_{abc}$ e $C_a{}^b = \eta_{ac} C^{cb}, C_{ab} = \eta_{ac} \eta_{bd} C^{cd}$ é possível encontrar:

$$P_{(a)}^{(b)} = \frac{1}{2\eta} \left\{ 2C^{bd} C_{ad} + C^{db} C_{ad} + C^{bd} C_{da} - C_a^d (C^b{}_a + C_a{}^b) + \delta_a^b \left[(C^d{}_d)^2 - 2C^{df} C_{df} \right] \right\}. \quad (5.22)$$

A identidade de Bianchi toma a forma:

$$P_b^c C_{ca}^b + P_a^c C_{cb}^a = 0.$$

E por fim, as expressões finais para as componentes triadais do tensor de Ricci ficam:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}_{(a)}^{(a)} - \frac{1}{4}\kappa_{(a)}^{(b)}\kappa_{(b)}^{(a)}, \quad R_{(a)}^0 = -\frac{1}{2}\kappa_{(b)}^{(c)}(C_{ca}^b - \delta_a^b C_{dc}^d), \quad R_{(a)}^{(b)} = -P_{(a)}^{(b)} - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\left(\sqrt{\eta}\kappa_{(a)}^{(b)}\right)'. \quad (5.23)$$

6 Métrica de Kasner

Seja agora um espaço em que todas as componentes da métrica dependem apenas da coordenada $x^0 = t$ ($c = 1$). É possível mostrar que se o determinante dessa métrica satisfizer $|g_{ik}| \neq 0$, então as quantidades g_{0i} podem ser feitas iguais a zero. Por uma transformação na variável t também é possível fazer $g_{00} = 1$, de forma que o resultado final será um sistema de referência síncrono em que,

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ik} = -\gamma_{ik}(t). \quad (6.1)$$

Através das equações de Einstein (3.6)-(3.8), lembrando que agora γ_{ik} , e portanto $\kappa_{ik} = \dot{\gamma}_{ik}$, independem das coordenadas x^i o que faz com que $R_{0i} = P_{ik} = 0$, pode-se computar as equações do campo gravitacional no vácuo para o presente caso, o que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\kappa_i^i + \frac{1}{2}\kappa_i^k\kappa_k^i = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\sqrt{\gamma}\kappa_i^k\right)' = 0. \quad (6.3)$$

Da equação (6.3) segue que

$$\sqrt{\gamma}\kappa_i^k = 2\lambda_i^k. \quad (6.4)$$

onde λ_i^k são constantes. A contração dos índices i e k resulta em,

$$\kappa_i^i = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_i^i = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}.$$

de onde segue que:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}d\gamma = 2\lambda_i^i dt \Rightarrow \sqrt{\gamma} = Kt \Rightarrow \gamma = K't^2.$$

Sem perda de generalidade, K' pode ser feito igual a 1 por uma mudança de escala em x^i . Dessa forma,

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_i^i \Rightarrow \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{\sqrt{t^2}}\lambda_i^i \Rightarrow \lambda_i^i = 1.$$

Substituindo (6.4) em (6.2),

$$-\frac{2\dot{\gamma}}{2(\gamma)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{2\lambda_i^k}{\sqrt{\gamma}}\frac{2\lambda_k^i}{\sqrt{\gamma}} = 0 \Rightarrow \lambda_i^k\lambda_k^i = 1. \quad (6.5)$$

que relaciona as constantes λ_i^k .

Abaixando o índice k em (6.4) obtém-se as seguintes equações diferenciais:

$$\dot{\gamma}_{ik} = \frac{2}{t}\lambda_i^l\gamma_{lk}. \quad (6.6)$$

Os coeficiente λ_i^l pode ser visto como uma matriz de uma substituição linear, e com uma transformação linear adequada das coordenadas (x^1, x^2, x^3) é possível deixá-la na forma diagonal. Denota-se p_1, p_2 e p_3 os valores diagonais, e assume-se que são todos reais e distintos. Os vetores unitários ao longo das direções principais que diagonalizam λ_i^l são $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$. Resolvendo as equações diferenciais encontra-se:

$$\frac{d\gamma_{11}}{dt} = \frac{2}{t}p_1\gamma_{11} \Rightarrow \frac{d\gamma_{11}}{\gamma_{11}} = \frac{2}{t}p_1 dt \Rightarrow \ln \gamma_{11} = 2p_1 \ln t \Rightarrow \gamma_{11} = t^{2p_1}.$$

e analogamente para as outras componentes (as constantes de integração foram feitas nulas por simplicidade). A solução final da EDO pode ser escrita como:

$$\gamma_{ik} = t^{2p_1} n_i^{(1)} n_k^{(1)} + t^{2p_2} n_i^{(2)} n_k^{(2)} + t^{2p_3} n_i^{(3)} n_k^{(3)}. \quad (6.7)$$

Escolhendo os vetores $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$ como as direções dos eixos coordenados (x, y, z), a métrica é posta em sua forma final, obtida por E. Kasner em 1922:

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2. \quad (6.8)$$

Os números p_1, p_2, p_3 obedecem a duas relações. A primeira delas segue do fato de $g = -\gamma = -t^2$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t^{2p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{2p_3} \end{pmatrix} \Rightarrow g = -t^{2(p_1+p_2+p_3)}$$

Portanto, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. A segunda condição segue de (6.5), e conseqüentemente $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$.

Os três números p_1, p_2, p_3 claramente não podem ser todos iguais. O caso em que dois deles são iguais pode ser obtido facilmente e segue que:

$$\begin{aligned} p + p + p' = 1 &\Rightarrow p = \frac{1}{2} - \frac{p'}{2} \\ p^2 + p^2 + p'^2 = 1 &\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{p'}{2} \right)^2 + p'^2 = 1 \Rightarrow \frac{3p'^2}{2} - p' - \frac{1}{2} = 0 \\ \Rightarrow p'_{(+)} = 1, p'_{(-)} = -\frac{1}{3}, &\quad p'_{(+)} = 1 \Rightarrow p = 0, \quad p'_{(-)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Obtém-se as triplas (0, 0, 1) e (-1/3, 2/3, 2/3). Em todos os outros casos os números p_1, p_2 e p_3 são todos diferentes, sendo um deles negativo e os outros dois positivos. Se forem arranjados na ordem $p_1 < p_2 < p_3$, então os números ficam dentro dos intervalos:

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (6.9)$$

A métrica (6.8) corresponde a um espaço plano, homogêneo mas anisotrópico, cujo volume total aumenta proporcionalmente a t ($vol = \sqrt{-g} dx dy dz$). A distância linear ao longo de dois dos eixos (y e z) aumenta, enquanto que ao longo do terceiro (x) diminui. O momento $t = 0$ é um ponto singular da solução que não pode ser eliminado com nenhuma mudança de coordenada, pois nele o tensor de Riemann, Ricci e a curvatura escalar divergem para infinito.

7 Aproximação à Singularidade Temporal

O estudo da singularidade temporal ($t = 0$) em uma métrica será feito considerando o modelo de universo com espaço homogêneo de tipo IX, escolha feita por simplicidade. Como na métrica de Kasner, a matéria não irá alterar as propriedades qualitativas da solução, e portanto por simplicidade o espaço será considerado vazio.

A matriz $\eta_{ab}(t)$ é escolhida na sua forma diagonal, sendo os elementos diagonais denotados por a^2, b^2, c^2 , e $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ os três vetores $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ do *frame*. A métrica espacial então é escrita como:

$$\gamma_{ik} = a^2 l_i l_k + b^2 m_i m_k + c^2 n_i n_k. \quad (7.1)$$

Para o espaço tipo IX, as constantes de estrutura são:

$$C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1, \quad C_{23}^1 = C_{31}^2 = C_{12}^3 = 1. \quad (7.2)$$

De (5.23) é fácil ver que sob essas condições as componentes $R_{(a)}^0$ do tensor de Ricci e as componentes não diagonais de $P_{(a)(b)}$ zeram. Logo, para a equação de Einstein $R_{(1)}^1 = R_{(2)}^2 = R_{(2)}^2 = 0$ resultam no seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned}\frac{(\dot{abc})}{abc} &= \frac{1}{2a^2b^2c^2} [(b^2 - c^2) - a^4], \\ \frac{(\dot{abc})}{abc} &= \frac{1}{2a^2b^2c^2} [(a^2 - c^2) - b^4],\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\dot{abc})}{abc} &= \frac{1}{2a^2b^2c^2} [(a^2 - b^2) - c^4], \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= 0.\end{aligned}\tag{7.4}$$

As derivadas temporais dessas equações se simplificam se forem introduzidos, no lugar das funções a, b, c , seus logarítimos α, β, γ :

$$a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad c = e^\gamma,\tag{7.5}$$

e a variável τ no lugar de t :

$$dt = abcd\tau.\tag{7.6}$$

Logo, notando que $\frac{d\alpha}{d\tau} = \alpha_{,\tau} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \dot{abc} \Rightarrow \alpha_{,\tau,\tau} = (\dot{abc})'$, etc para β e γ :

$$\begin{aligned}2\alpha_{,\tau,\tau} &= (b^2 - c^2)^2 - a^4, \\ 2\beta_{,\tau,\tau} &= (a^2 - c^2)^2 - b^4, \\ 2\gamma_{,\tau,\tau} &= (a^2 - b^2)^2 - c^4,\end{aligned}\tag{7.7}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)_{,\tau,\tau} = \alpha_{,\tau}\beta_{,\tau} + \alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau} + \beta_{,\tau}\gamma_{,\tau}.\tag{7.8}$$

Somando as equações (7.7) e substituindo a soma de derivadas segundas pela expressão em (7.8), obtêm-se:

$$\alpha_{,\tau}\beta_{,\tau} + \alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau} + \beta_{,\tau}\gamma_{,\tau} = \frac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2).\tag{7.9}$$

Esta última relação contém apenas primeiras derivadas e é a primeira integral das equações (7.7). As equações (7.3) e (7.4) não podem ser resolvidas exatamente de forma analítica, mas permitem um estudo qualitativo detalhado na vizinhança do ponto singular. É possível notar que se os lados direitos das equações (7.3) e (7.7) forem nulos, elas podem ser resolvidas de forma exata. De fato, fazendo as constantes de integração zero por simplicidade,

$$\begin{aligned}\alpha_{,\tau,\tau} = 0 &\Rightarrow \alpha = \bar{p}_l\tau + B \Rightarrow a = e^{\bar{p}_l\tau} \\ \beta_{,\tau,\tau} = 0 &\Rightarrow \beta = \bar{p}_m\tau + C \Rightarrow b = e^{\bar{p}_m\tau} \\ \gamma_{,\tau,\tau} = 0 &\Rightarrow \gamma = \bar{p}_n\tau + D \Rightarrow c = e^{\bar{p}_n\tau}\end{aligned}$$

$$dt = abcd\tau \Rightarrow dt = e^{(\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m)\tau} d\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln[(\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m)t]}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}$$

$$\therefore a = (\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m) t^{\frac{\bar{p}_l}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}}, b = (\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m) t^{\frac{\bar{p}_m}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}}, c = (\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m) t^{\frac{\bar{p}_n}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}}.$$

Denotando $p_l \equiv \frac{\bar{p}_l}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}$, $p_m \equiv \frac{\bar{p}_m}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}$, $p_n \equiv \frac{\bar{p}_n}{\bar{p}_l + \bar{p}_n + \bar{p}_m}$, segue que

$$a \sim t^{p_l}, b \sim t^{p_m}, c \sim t^{p_n}, \quad p_l + p_m + p_n = 1.\tag{7.10}$$

Da equação (7.4) com lado direito igual a zero segue que:

$$p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1\tag{7.11}$$

Ainda não foram feitas suposições sobre a ordem dos números p_l, p_m, p_n ao denotá-los. A notação p_1, p_2, p_3 será mantida análoga à solução de Kasner quando $p_1 < p_2 < p_3$, sendo o intervalo dos números o mesmo de (6.9). Esses números podem ser escritos na forma paramétrica como:

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \quad (7.12)$$

Todos os valores diferentes de p_1, p_2, p_3 , preservando a ordem, podem ser obtidos se o parâmetro u cobrir o domínio $u \geq 1$. Os valores $u < 1$ são reduzidos à mesma região através das relações:

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}} = \frac{-u}{1+u+u^2} = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u). \quad (7.13)$$

A figura 1 mostra o gráfico de p_1, p_2 e p_3 como funções de $1/u$.

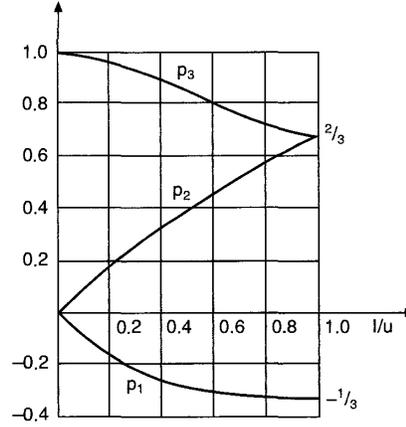


Figura 1.

Assumiu-se que os lados direitos de (7.7) são pequenos em algum intervalo de tempo, de forma a serem desprezíveis, e com isso foi obtido um solução em um regime tipo Kasner. Mas tal situação não pode continuar indefinidamente quando $t \rightarrow 0$, pois o termo que possui exponencial negativa em t aumenta nesse caso. Supondo que esse termo esteja na função $a(t)$ (portanto $p_l = p_1 < 0$), segue que a destruição do regime de Kasner acontece pelos termos a^4 , e outros termos vão pra zero a medida que t decresce.

Mantendo os elementos a^4 no lado direito de (7.7) obtém-se as seguintes equações:

$$\alpha_{,\tau,\tau} = -\frac{1}{2}e^{4\alpha}, \quad \beta_{,\tau,\tau} = \gamma_{,\tau,\tau} = \frac{1}{2}e^{4\alpha} \quad (7.14)$$

Por esse método perturbativo, a evolução da métrica de seu estado "inicial" (obviamente as condições iniciais correspondem a um tempo depois, e não antes de $t = 0$) deve ser dada pela solução das equações. Seja agora $p_l = p_1, p_m = p_2, p_n = p_3$, de forma que (os coeficientes de proporcionalidade foram feitos iguais a 1 sem perda de generalidade no resultado final):

$$a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3}$$

Como $abc = t, \tau = \ln t + const$, as condições iniciais para (7.14) são formuladas na forma:

$$\alpha_{,\tau} = p_1, \quad \beta_{,\tau} = p_2, \quad \gamma_{,\tau} = p_3$$

É interessante notar que a primeira das equações em (7.14) tem a forma da equação de movimento unidimensional de uma partícula na presença do campo de uma parede de potencial exponencial, com α fazendo o papel da coordenada. Seguindo essa analogia, as condições iniciais do regime de Kasner correspondem ao movimento livre com velocidade constante $\alpha_{,\tau} = p_1$. Segue dessas equações que, no caso de uma partícula, após colidir contra a parede a partícula irá novamente se

mover livremente, agora com velocidade de sinal opost $\alpha_{,\tau} = -p_1$. Também segue das equações em (7.14) que $\alpha_{,\tau} + \beta_{,\tau} = 0 \Rightarrow \alpha_{,\tau} + \beta_{,\tau} = \text{const}$, assim como $\alpha_{,\tau} + \gamma_{,\tau} = \text{const}$. Portanto, igualando essas somas antes e após a colisão:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= -p_1 + \beta'_{,\tau} \Rightarrow \beta'_{,\tau} = p_2 + 2p_1 \\ p_1 + p_3 &= -p_1 + \gamma'_{,\tau} \Rightarrow \gamma'_{,\tau} = p_3 + 2p_1. \end{aligned}$$

E determinando os novos α, β, γ e t encontra-se:

$$\begin{aligned} e^\alpha &\sim e^{-p_1\tau}, & e^\beta &\sim e^{(2+2p_1)\tau}, & e^\gamma &\sim e^{(p_3+2p_2)\tau}, & t &\sim e^{(1+2p_1)\tau} \\ \therefore a &\sim t^{p'_l}, & b &\sim t^{p'_m}, & c &\sim t^{p'_n}. \end{aligned}$$

onde

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_m = \frac{p_2 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_n = \frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|} \quad (7.15)$$

Logo, a ação da perturbação acaba por substituir um regime de Kasner por outro, com a potência negativa de t trocando da direção **l** para a **m**: se antes havia $p_l < 0$, agora há $p'_m < 0$. No curso da troca a função $a(t)$ atinge seu máximo enquanto $b(t)$ passa pelo seu mínimo. Então a quantidade $b(t)$ que antes diminuía começa então a aumentar, e a função crescente $a(t)$ começa a decair, enquanto $c(t)$ continua decrescendo. A própria perturbação em termos a^4 passa então a diminuir até ser desprezível, e a próxima evolução da perturbação estará em b^4 , que agora cresce com a diminuição de t , e portanto haverá outro regime de Kasner e assim sucessivamente.

A regra para as trocas em (7.15) é convenientemente representada na forma paramétrica (7.12) se:

$$\begin{aligned} p_l &= p_1, & p_m &= p_2, & p_n &= p_3, \\ \Rightarrow p_2(u-1) &= p'_l, & p'_m &= p_1(u-1), & p'_n &= p_3(u-1). \end{aligned} \quad (7.16)$$

O maior dos dois números positivos permanece positivo, como pode ser facilmente observado da figura 1.

As trocas sucessivas em (7.16), com o pulo do expoente negativo entre as direções **l** e **m** continua até a parte inteira do valor inicial u se esgotar e u se tornar menor que 1. Nesse momento, $u < 1$ é transformado a $u > 1$ pelas relações (7.13), e ou p_l ou p_m é negativo, enquanto p_n passa a ser o menor dos números positivos ($p_n = p_2$). A próxima série de oscilações será então entre as direções **n** e **l** ou **n** e **m**. Para um valor inicial arbitrário de u , que é irracional devido ao carácter estocástico das condições iniciais a ser comentado adiante, esse processo de trocas continua sem fim.

Portanto, o processo de evolução do modelo na direção do ponto singular é feito de sucessivas séries de oscilações, durante as quais a distância ao longo de dois eixos espaciais oscilam, enquanto diminui monotonicamente ao longo de um terceiro e o volume decai aproximadamente com t . Indo de uma série de oscilações para outra, a direção na qual há a diminuição monotônica de distância muda de um eixo para outro, e assintoticamente a ordem dessa troca passa a ser um processo randômico, assim como a quantidade de oscilações (épocas de Kaser) em cada série.

Um argumento que mostra esse característica estocástica do processo é considerar um valor "inicial" para o parâmetro u como sendo $u_0 = k_0 + x_0$, onde k_0 é um inteiro e $x_0 < 1$. O número de épocas de Kasner na primeira série de oscilações será k_0 , e dessa forma o valor inicial para a próxima série será $u_1 = \frac{1}{x_0} = k_1 + x_1$. A segunda série terá k_1 oscilações e o valor inicial para a terceira será $u_2 = \frac{1}{x_1} = k_2 + x_2$, etc. Consequentemente, a expansão do número u_0 é dado em termos da fração infinita:

$$u_0 = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}$$

e tal expansão é descrita segundo leis estatísticas.

As sucessivas séries de oscilações ficam cada vez mais próximas umas das outras à medida que a singularidade se aproxima, e um número infinito de épocas de Kasner está contido em um tempo universal finito t e o tempo $t = 0$. A variável mais natural para a descrição do comportamento do tempo nessa evolução não é o tempo t em si, mas seu logaritmo $\ln t$, pois em termos dessa nova variável todo o processo de aproximação do ponto singular tende à $-\infty$. O carácter qualitativo desenvolvido e descrito é uma versão simplificada da conjectura BKL.

8 Álgebras de Kac-Moody e a Conjectura BKL

O comportamento do tipo BKL próximo à singularidade revela diversas conexões intrigantes com outras teorias. Uma delas é o fato de que em dinâmicas cosmológicas em modelos baseados na teoria das supercordas, em um espaço-tempo de 10 dimensões e no modelo de supergravidade de 11 dimensões, a aproximação à vizinhança da singularidade expõe um comportamento oscilatório do tipo BKL. O interessante nesses modelos é que o fator responsável pelas transições dos regimes de Kasner são os campos bosônicos não-gravitacionais (p-formas), e para descrever essa dinâmica o formalismo hamiltoniano se torna conveniente. A ação usada é da forma:

$$S = \int d^D x \sqrt{g} \left[R - \partial^i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{(p+1)!} e^{\lambda_p \phi} F_{i_1 \dots i_{p+1}}^{p+1} F^{(p+1)i_1 \dots i_{p+1}} \right] \quad (8.1)$$

onde $F^{(p+1)}$ representam a intensidade dos campos gerados pelas p-formas A_p ($F_{i_1 \dots i_{p+1}}^{p+1} = \text{antisim}(\partial_{i_1} A_{i_2 \dots i_{p+1}})$) e os parâmetros reais λ_p são constantes de acoplamento. Essa relação é curiosa, pois o tratamento que foi feito para se chegar na conjectura BKL foi utilizando apenas a gravitação clássica.

Sob o ponto de vista desse formalismo, é possível fazer uma analogia entre o espaço de configuração dos parâmetros de Kasner que descrevem a dinâmica do universo, e uma bola ricocheteando em paredes de uma mesa, que representam os termos de curvatura espacial na teoria de Einstein ou o potencial das p-formas nas teorias de supercordas. Logo, a análise de uma dinâmica complicada do universo pode ser bem simplificada.

Existe uma correspondência, ainda mais inesperada, entre o comportamento caótico do universo na vizinhança da singularidade e uma estrutura matemática abstrata chamada álgebra de Kac-Moody hiperbólica.

Uma álgebra de Lie G sobre um corpo K , é um espaço vetorial munido de um mapa $G \times G \rightarrow G$, denotado por $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$, e que obedece às seguintes propriedades para todo $X, Y, Z \in G, a, b \in K$.

$$\begin{aligned} [X, aY + bZ] &= a[X, Y] + b[X, Z], & [X, Y] &= -[Y, X] \\ [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Se T_a for uma base para uma álgebra de Lie, também chamados de geradores da álgebra de Lie, então é possível escrever $[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c$, onde C_{ab}^c são as constantes de estrutura, que devem satisfazer $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$ e a identidade de Jacobi.

Uma álgebra de Lie pode ser descrita inteiramente por seus geradores de Chevalley $H_i, E_i, F_i, i = 1, \dots, r$, onde r é o rank da álgebra de Lie (o número de geradores H_i). Os geradores H_i são os elementos da subálgebra de Cartan da álgebra G , e essa subálgebra é composta do grupo maximal de elementos que comutam uns com os outros ($[H_i, H_j] = 0$). Os geradores E_i e F_i podem ser vistos como operadores de criação e aniquilação, respectivamente, similares aos utilizados em mecânica quântica. As relações de comutação entre esses geradores é dada por:

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i, \quad [H_i, E_j] = A_{ij} E_j, \quad [H_i, F_j] = -A_{ij} F_j, \quad [H_i, H_j] = 0 \quad (8.3)$$

e eles também obedecem as relações de Serre:

$$(\text{adj } E_i)^{1-A_{ij}} E_j = 0, \quad (\text{adj } F_i)^{1-A_{ij}} F_j = 0. \quad (8.4)$$

onde $(\text{adj } A)B \equiv [A, B]$. Os coeficientes A_{ij} formam a chamada matriz de Cartan da álgebra de Lie, e ela é tal que $A_{ii} = 2$, os termos não diagonais são inteiros não positivos e $A_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ji} = 0, i \neq j$.

As álgebras de Lie construídas sob uma matriz de Cartan A simetrizável podem ser classificadas de acordo com as propriedades de seus autovalores:

- Se A for positiva definida, então G é uma álgebra de Lie de dimensão finita;
- Se A admitir um autovalor nulo, sendo todos os outros estritamente positivos, então G é uma álgebra de Kac-Moody afim;
- Se A possuir um autovalor negativo e todos os outros estritamente positivos, então G é uma álgebra de Kac-Moody Lorentziana.

Existe uma correspondência entre a estrutura de uma álgebra de Lie e certos sistemas de vetores no espaço Euclidiano r -dimensional, chamados raízes, e que simplificam muito a classificação das álgebras de Lie. Para cada gerador de Chevalley é possível associar uma raiz, e as raízes associadas a E_i e F_i são ditas raízes simples. O sistema de raízes simples positiva (vetores relacionados a E_i) pode ser representado como nodos no diagrama de Dynkin (representação pictográfica da álgebra de Lie), enquanto que as linhas que conectam, ou não, esses nodos dão informação dos ângulos entre os vetores das raízes simples positivas.

As álgebras de Kac-Moody hiperbólicas são uma classe importante das álgebras de Kac-Moody Lorentzianas, e são definidas como uma álgebra de Lie tal que a retirada de um nodo do diagrama de Dynkin resulta na soma de álgebras de Lie finitas ou afins. Em particular, não existem álgebras hiperbólicas de rank maior que 10.

Outra definição importante da teoria das álgebras de Lie é a de reflexão de Weyl. Tal reflexão, realizada com respeito aos hiperplanos ortogonais às raízes simples, deixa o sistema de raízes invariante. O grupo dessas reflexões é chamado grupo de Weyl, e os hiperplanos mencionados dividem o espaço Euclidiano r -dimensional em regiões chamadas câmaras de Weyl. As transformações do grupo de Weyl levam uma câmara de Weyl à outra.

Agora é possível descrever a relação entre a bola ricocheteando em paredes, que descreve a evolução do universo em torno da singularidade cosmológica, e a correspondente álgebra de Kac-Moody, fazendo as seguintes relações:

Os índices de Kasner que descrevem o movimento do universo entre a reflexão de duas paredes correspondem aos elementos da subálgebra de Cartan da álgebra de KM.

As paredes, ou seja, os termos nas equações responsáveis pela transição de uma época de Kasner a outra, correspondem às raízes simples da álgebra de KM.

O grupo de reflexões nas paredes é o grupo de Weyl da álgebra de KM.

A mesa em que ocorrem as colisões pode ser definida como a câmara de Weyl da álgebra de KM.

É possível imaginar dois tipos de mesa: infinita, onde o movimento linear sem colisões com as paredes é possível e o regime não-caótico se instala, ou finita, onde reflexões com paredes é inevitável. Incrivelmente, as câmaras de Weyl das álgebras de KM hiperbólicas são dadas de um jeito que infinitas colisões com as paredes sempre ocorre repetidamente. Também já foi mostrado que todas as teorias com aproximação oscilatória à singularidade, tais como a teoria de Einstein em dimensões $d < 11$ e modelos cosmológicos baseados nas supercordas, correspondem às álgebras de Kac-Moody hiperbólicas.

9 Considerações Finais

Como frisado anteriormente, o fato de o modelo de Friedman se adequar bem para o estado atual do universo não requer que esse modelo também seja o melhor para descrevê-lo em seu início. Então surge o questionamento de se singularidades temporais, as físicas, que não podem ser eliminadas por mudança de coordenada, são características gerais de modelos cosmológicos ou apenas consequências das suposições em que esses modelos são baseados, como simetrias. Se a presença de singularidades for algo independente do que se assume como ponto de partida, então isso significaria que elas aparecem em soluções gerais das equações de Einstein, não apenas nas especiais. O critério de generalidade de uma solução é o número de funções fisicamente arbitrarias que ela contém. Uma solução geral precisa possuir um número de funções suficientes para que as condições iniciais possam ser quaisquer. No caso do espaço vazio esse número é 4, e para o espaço com matéria, 8.

A singularidade presente em $t = 0$ no modelo de Friedman só ocorre no espaço com matéria, e essa solução possui apenas 3 funções arbitrarias para ajustar condições iniciais. É possível mostrar que a solução da teoria BKL contém exatamente 4 funções arbitrarias para a solução no vácuo e seu grau de generalidade não é reduzido quando a matéria é considerada. Tal teoria indica uma solução geral das equações de Einstein que possui uma singularidade em $t = 0$, mesmo no espaço vazio, o que dá indícios de que as singularidades são características gerais da Relatividade Geral de Einstein. É importante notar que para equações não lineares como as de Einstein, mais de uma integral geral pode existir, de forma que a noção de uma solução geral não é exata. Não há motivos para duvidar que exista uma solução geral das equações do corpo gravitacional para um corpo estável com massa razoável.

Penrose já havia mostrado em 1965 que pontos singulares devem existir em soluções gerais das equações de Einstein, fato que ficou conhecido como o teorema de Hawking-Penrose. Porém, seus argumentos puramente topológicos não foram capazes de descrever as propriedades analíticas da singularidade. Pela teoria BKL, foi possível descobrir que próximo à singularidade a métrica tem carácter oscilatório, com sucessivas épocas de Kasner. A singularidade de características isotrópica e monotônica

e dependente da matéria, como a descrita pelo modelo de Friedman, tem apenas significado de um caso especial, já que a singularidade encontrada na teoria BKL é inerente ao próprio espaço-tempo.

Por último, vale ressaltar que as respostas obtidas através da análise próxima ao tempo $t = 0$ utilizando apenas a teoria clássica da gravitação dificilmente podem ser consideradas como gerais. É claro que uma solução geral correspondente ao universo real deve levar em consideração não apenas a gravitação, mas a mecânica quântica, o eletromagnetismo, ou quaisquer outras leis sob as quais a natureza é regida.

Referências

- [1] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, vol. 2 of *Course of theoretical physics*. Butterworth-Heinemann, 4 ed., 1975.
- [2] J. Plebanski and A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] R. M. Wald, *General Relativity*. University Of Chicago Press, first edition ed., 1984.
- [4] E. Lifshitz and I. Khalatnikov, “Investigations in relativistic cosmology,” *Adv.Phys.* **12** (1963) 185–249.
- [5] I. Khalatnikov and E. Lifshitz, “General cosmological solution of the gravitational equations with a singularity in time,” *Phys.Rev.Lett.* **24** (1970) 76–79.
- [6] V. Belinsky, I. Khalatnikov, and E. Lifshitz, “Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology,” *Adv.Phys.* **19** (1970) 525–573.
- [7] V. Belinskii, E. Lifshitz, and I. Khalatnikov, “On a general cosmological solution of the einstein equations with a time singularity,” *Zh.Eksp.Teor.Fiz.* **62** (1972) 1606–1613.
- [8] V. Belinsky, I. Khalatnikov, and E. Lifshitz, “A General Solution of the Einstein Equations with a Time Singularity,” *Adv.Phys.* **31** (1982) 639–667.
- [9] S. Hawking and G. Ellis, *The Large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [10] T. Damour, “Cosmological singularities, billiards and Lorentzian Kac-Moody algebras,” [arXiv:gr-qc/0412105](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0412105) [[gr-qc](#)].
- [11] T. Damour, M. Henneaux, B. Julia, and H. Nicolai, “Hyperbolic Kac-Moody algebras and chaos in Kaluza-Klein models,” *Phys.Lett.* **B509** (2001) 323–330, [arXiv:hep-th/0103094](https://arxiv.org/abs/hep-th/0103094) [[hep-th](#)].
- [12] T. Damour, M. Henneaux, and H. Nicolai, “Cosmological billiards,” *Class.Quant.Grav.* **20** (2003) R145–R200, [arXiv:hep-th/0212256](https://arxiv.org/abs/hep-th/0212256) [[hep-th](#)].
- [13] M. Henneaux, D. Persson, and P. Spindel, “Spacelike Singularities and Hidden Symmetries of Gravity,” *Living Rev.Rel.* **11** (2008) 1, [arXiv:0710.1818](https://arxiv.org/abs/0710.1818) [[hep-th](#)].
- [14] A. Y. Kamenshchik, “The Problem of singularities and chaos in cosmology,” *Phys.Usp.* **53** (2010) 301–309, [arXiv:1006.2725](https://arxiv.org/abs/1006.2725) [[gr-qc](#)].
- [15] I. Khalatnikov and A. Y. Kamenshchik, “Singularity, initial conditions and quantum tunneling in modern cosmology,” *Phys.Usp.* **41** (1998) 525–542.