Teoria de nós e suas aplicações em teoria quântica de campos e mecânica estatística

Isabella de Melo Silva e Arsen Melikyan*
Instituto de Física - Universidade de Brasília
(Data: Novembro de 2021)

Neste trabalho, estudou-se os nós e ligações: curvas no espaço, sem auto interseções e fechadas. Os movimentos principais que produzem equivalências, garantindo a isotopia entre tais curvas, são chamados movimentos de Reidemeister. O conceito-chave que permite caracterizar diferentes nós é o invariante do nó, onde verifica-se alguma propriedade ou grandeza mensurável sobre o nó. Investigando invariantes, chega-se à classe de invariantes polinomiais, onde determina-se uma regra para associar àquele nó, como no polinômio de Jones, Kauffman e invariantes de Vassiliev. Nos últimos anos, houveram grandes avanços na compreensão da correspondência entre Teoria de Calibre e Teoria de Cordas. Assim, foi demonstrado que o problema da determinação do espectro da teoria de calibre pode ser reduzido ao problema de resolver um conjunto de equações algébricas, coletivamente conhecidas como equação de Yang-Baxter. Devido à sua importância, qualquer entendimento inédito sobre essa equação contribui em algo para com a ciência.

Palavras-chave: Nós, Invariantes polinomiais, Polinômio de Jones, Equação de Yang-Baxter, Teoria Quântica de Campos, Mecânica Estatística.

INTRODUÇÃO

Neste projeto, estudou-se os fun[1**?** –3] e algumas de suas aplicações em teoria quântica de campos e mecânica estatística.

O estudo de nós, apesar de bem simples a primeira vista, pode ser uma tarefa bastante complicada quando considera-se a classificação dos nós. O desenvolvimento da teoria matemática dos nós começou no século XVIII, onde *Alexandre-Théophile Vandermonde* investigou propriedades de nós.

Alguns dos matemáticos que se envolveram com o estudo de nós ao longo desses anos foram *Gauss*, definindo o número de enlaces; *Lord Kelvin*; *Peter Guthrie Tait*, que criou uma das primeiras tabelas de classificação de nós. Já no século XX, *Max Dehn, J. Alexander* passaram a tratar nós com a ideia de invariantes.

Verificando alguma propriedade ou grandeza mensurável do nó, é possível caracterizar diferentes nós por meio do conceito de invariante do nó. Ao investigar invariantes, chega-se à classe de invariantes polinomiais, onde determina-se uma regra para associar àquele nó, como nos polinômios de Jones, Kauffman e invariantes de Vassiliev.

Conexões entre a Teoria de nós, teoria quântica de campos e mecânica estatística, por *Edward Witten*, *Maxim Kontsevich* e outros, foram possíveis com a descoberta de *Vaughan Jones* do polinômio de Jones, em 1984.

TEORIA DE NÓS

A Teoria de Nós tem sido uma área muito ativa na matemática, com diversas aplicações em áreas como física, biologia e química. Os matematicos se interessaram por nós, por causa de um estimulo muito maior da quimica, que dizia que átomos eram nós e que diferentes nós poderiam representar diferentes átomos. Isso os motivou pra tentarem entender quando dois nós são diferentes. No fim, aquela teoria quimica não funcionava, mas os matemáticos continuaram estudando ela.

Em matemática, representamos os nós como diagramas, como a figura projetada num plano e indicando nos cruzamentos, qual corda está em cima e qual está embaixo.

Hoje em dia nós sabemos que um DNA, por exemplo, se acomoda no núcleo de uma célula como um nó. Nisso, começaram a se perguntar quais nós aparecem, com "desatar"um nó e como reconhecer que um nó pode ser "desatável".

Aqui, estuda-se curvas no espaço, sem auto interseções e fechadas, ou seja, curvas que são imagens injetivas e suaves de um circulo no espaço tridimensional.

O nó trivial, ou não-nó, (Figura 1.a), trata-se de uma corda com as pontas juntas, mas não entrelaçada. A associação à nós de corda é bem útil para uma primeira investigação, considerando as pontas sempre unidas, pois tratam-se de curvas fechadas. Alguns outros exemplos de nós são o trifólio (Figura 1.b) e o nó de oito (Figura 1.c).

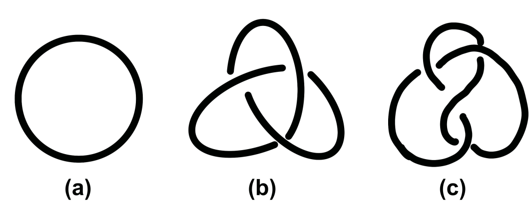


Figura 1. Alguns exemplos de nós, sendo eles: (a) O nó trivial; (b) Trifólio; (c) Nó de oito.

Um nó não é exatamente a curva ou projeção particular, mas todo o conjunto de posições que se pode assumir quando deformada adequadamente. Considerando-se o nó trivial, por exemplo, tal nó representa a classe de curvas que podem deformar-se até se tornarem círculos (Figura 2), o que significa dizer que a curva está na classe de equivalência do nó trivial.

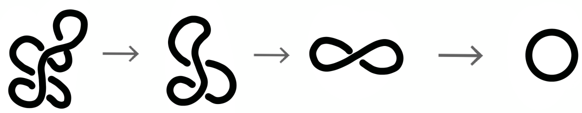


Figura 2. Um exemplo de curva desmanchável.

Existem também os objetos chamados ligações, ou enlaces, onde ao invés de apenas uma curva fechada no espaço, considera-se a coleção finita de curvas no espaço, eventualmente entrelaçadas. A ligação trivial (Figura 3.a) trata-se de um conjunto de nós triviais não interligados. Outros exemplos de ligações estão representadas na Figura 3.

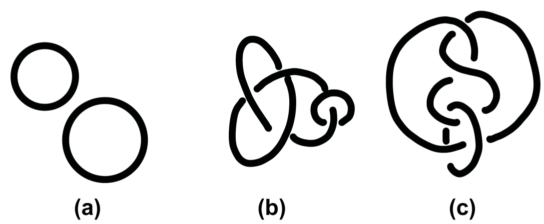


Figura 3. (a) Ligação trivial; (b) - (c) Outros exemplos de ligações.

Projeção de nós e ligações

Como os nós e ligações tratam-se de objetos tridimensionais, criou-se maneiras convenientes de representá-los através de um desenho no plano.

Para uma boa representação de um nó, desenha-se suas projeções perpendiculares no plano, escolhendo com cuidado o plano de projeção. Considerando pontos de cruzamento como o local onde dois pontos são projetados. Satisfazendo [4]:

- Linhas tangentes à ligação em todos os pontos devem ser projetadas em linhas no plano;
- Não mais que dois pontos distintos da ligação são projetados no mesmo ponto;
- O conjunto de pontos de cruzamento é finito e, em cada ponto, as projeções das duas tangentes não devem coincidir.

Desse modo, nenhuma projeção degenera em um ponto e temos duas situações (Figura 4) que são proibidas:

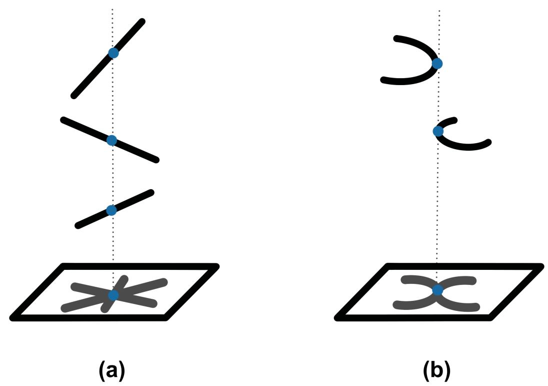


Figura 4. (a) - (b) Situações proibidas na representação de nós.

Quando pontos de três trechos se projetam em um ponto (Figura 4.a) ou quando as projeções de dois trechos são tangentes (Figura 4.b).

Aqui, a ideia é representar-se de modo que fique claro quais pedaços do nó passam *por cima* ou *por baixo*. Isso pode ser feito interrompendo o desenho da curva pouco antes do cruzamento. Outra exigência é que as projeções sejam regulares: cada cruzamento acontece apenas num ponto e em relação a dois segmentos da curva.

Composição de nós e ligações

A composição ou soma conectada de nós pode ser interpretada como se fizéssemos um nó K_1 seguido de K_2 numa mesma corda e depois juntássemos as pontas. Denota-se como $K_1\#K_2$.

Essa composição entre nós é comutativa, como segue:

Teorema .1. *Se o nó K_1 é não trivial, então sua soma conectada, $K_1\#K_2$, com algum nó K_2, também deve ser não trivial.*

Esse teorema permite dizer que, uma vez que sabe-se que um elemento é uma composição de um ou mais nós não triviais, não é possível obtermos uma circunferência (o não-nó).

Mas como classificar um nó? Talvez, um caminho natural seja classificar pelo número de cruzamentos. um nó trivial não tem nó. Com os esforços de classificação de nós conseguiram enumerar mais de 6 bilhões de nós e links até 2005 [3]. A sequência do número de nós principais de um determinado número de cruzamento, até o número de cruzamento 16, é 0, 0, 1, 1, 2, 3, 7, 21, 49, 165, 552, 2176, 9988, 46972, 253293 , 1388705.

Equivalência entre nós e ligações

O problema central da teoria de nós é classificá-los. Considera-se equivalentes, duas curvas tais que uma pode ser *deformada continuamente* de modo que fique idêntica à outra, sem que no processo de deformação: se criem auto-interseções; sem que a curva se rompa; e sem colapsos, como um nó tão apertado que desaparece.

Dois nós K_0 e K_1 são chamados equivalentes se existe uma família de parâmetros de difeomorfismos suavemente dependendo do parâmetro t. A família de difeomorfismos $f(t)$ é chamada uma isotopia, o conceito de deformação contínua e sem auto-interseções de uma curva no espaço, unindo os nós equivalentes e, por isso, chamados de nós isotópicos ou isotópicos ambientais. Portanto, dois nós K_0 e K_1 são equivalentes se eles são isotópicos e denota-se $K_0 \backsim K_1$, com $\backsim$ sendo a relação de equivalência.

Assim, surge a ideia de classe de equivalência de um nó, onde diagramas de ligações são chamados equivalentes ou isotópicos planos. Movimentos mais gerais que garantem a isotopia entre os nós e ligações são os chamados movimentos de Reidemeister Ω (Figura 5).

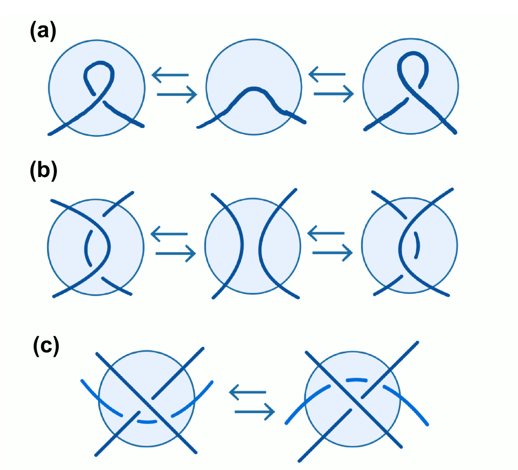


Figura 5. Movimentos de Reidemeister. (a) Ω_1, (b) Ω_2, (c) Ω_3

Toda isotopia entre duas projeções regulares pode ser efetuada com apenas três tipos de transições, essas transições são chamadas de movimentos de Reidemeister. Eles são classificados entre Ω_1, Ω_2 e Ω_3.

- O movimento Ω_1 trata de um laço simples que é criado ou deixa de existir.
- O movimento Ω_2 envolve dois segmentos. Na transição de uma projeção regular para outra há dois segmentos se tangenciando.
- O movimento Ω_3 envolve três segmentos e a transição é um cruzamento onde concorrem três segmentos.

Deles, temos o Teorema de Reidemeister, que diz que Duas ligações correspondem a ligações isotópicas se, e somente se, uma pode ser obtida por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister e isotopias planas. Enunciado a seguir:

Teorema .2 (Teorema de Reidemeister)**.** *Dois diagramas de ligações correspondentes, correspondem à ligações isotópicas se, e somente se, um pode ser obtido a partir do outro por meio de uma sequência finita de movimentos de Reidemeister e isotopias planas.*

Então, seria possível, realizando movimentos de Reidemeister ou isotopia plana, e transitar entre nós equivalentes. O nó de oito e o seu espelhado são iguais? Se sim, dizemos que ele tem antiquiralidade. No exemplo seguinte (Figura 6) vemos como nó de oito pode ser obtido a partir de seu correspondente espelhado, com movimentos de Reidemeister:

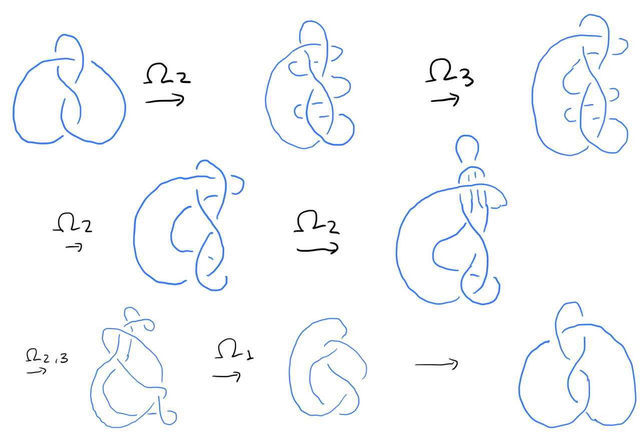


Figura 6. Exemplo 1.

Do mesmo modo, com esses movimentos, podemos mostrar que a projeção espelhada desse nó inicial pode ser obtida, então o nó de oito tem antiquiralidade.

Nós também podem ser compostos. Sendo possível separar um nó mais complicado (Figura 7) em nós conhecidos, mas esse processo nem sempre é muito óbvio.

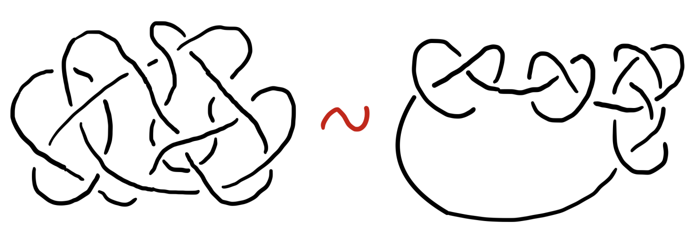


Figura 7. Composição de um nó.

INVARIANTES DE NÓS

O problema central da teoria de nós é classificá-los e essa classificação de nós envolve dois aspectos:

- Quando é que dois nós **são** o mesmo?
- Quando é que dois nós **não são** o mesmo?

O primeiro item envolve essa transformação de um diagrama de nó em outro, discutida na seção anterior. O segundo envolve a questão mais sutil de decidir quando é que uma tal transformação **não** é possível. Essa noção de quando dois nós não são um mesmo envolve a noção de invariantes. Resumidamente, cria-se uma regra e o produto desse invariante nos permite classificar nós de formas particulares com o objetivo de distingui-los.

Invariante de cor

Começando com um invariante bem visual, temos os invariantes de cor. Aqui, avalia-se a possibilidade de tricolorabilidade.

Nossas "regras" são:

- Pinta-se **arcos** da mesma cor; **Arco**: começa num cruzamento que passa por baixo e termina num cruzamento que também passa por baixo.
- Deve-se usar pelo menos duas cores;
- A cada cruzamento, três cores devem ser usadas ou apenas uma.

Nisso, teríamos casos como os seguintes (Figura 8):

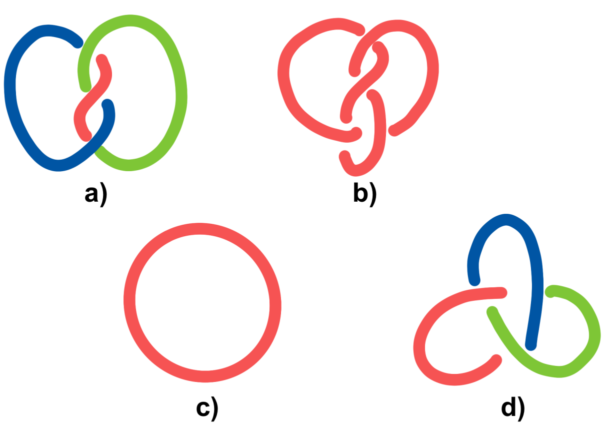


Figura 8. Exemplos de nós sob a perspectiva do invariante de cor. (a) e (d) Exemplos de nós tricoloridos. (b) - (c) Exemplos de nós que não podem ser tricoloridos.

Quando não conseguimos usar pelo menos duas cores, que é uma das regras, dizemos que o nó não pode ser

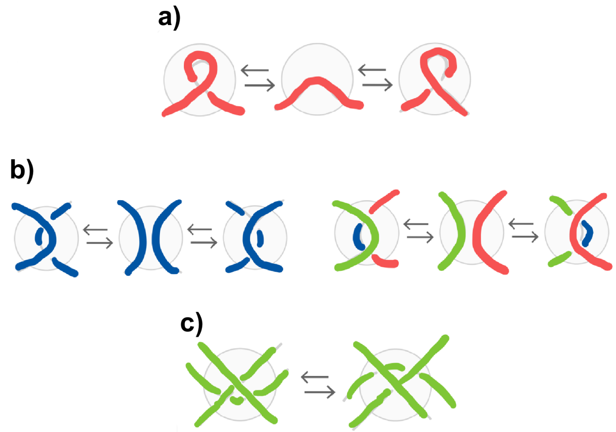


Figura 9. Movimentos de Reidemeister sob a perspectiva do invariante de cor.

tricolorido. Quando você passa de uma configuração para outra, o nó deve continuar sendo tricolor. Se ele era tricolor antes, a realização de operações permitidas não deve mudar isso.

Assim, se dois nós são equivalentes, então:

- ou ambos são tricolores
- ou ambos são nao tricolores

Um nó tricolorável é necessariamente não trivial. Isso nos garante que o trifólio (Figura 8.d), por exemplo, não é um nó trivial (Figura 8.c).

Os movimentos de Reidemeister também preservam a tricolorabilidade (Figura 9).

Para o movimento Ω_1 (Figura 9.a), conseguimos colorir apenas com uma cor. Para Ω_2 (Figura 9.b), temos dois casos: onde colorimos tudo com uma cor só; e onde temos dois arcos com cores diferentes que, quando sobrepostos, origina um terceiro arco com outra cor. No de tipo 3, Ω_3 (Figura 9.c), podemos colorir com única cor. No entanto, se testarmos usar 3 cores, ele não respeita a regra de que cada cruzamento deve ter três cores ou apenas uma. Ou seja, o movimento Ω_3 também não é tricolorido. Mas esse critério só nos ajuda a definir que os nós são diferentes.

Um exemplo é o caso do nó figura-oito: ele não é tricolor. Alguém pode tentar tricolori-lo, mas não seria em vão. Ele não é o trivial e também mostra-se diferente do trevo. O fato do trivial e do figura-oito não serem tricolores acaba não garantindo nada.

Então precisamos de um invariante mais adequado para garantirmos mais informação.

Invariantes polinomiais

Existem também os chamados Invariantes Polinomiais, onde se determina uma regra para associar àquele nó.

Dentre esses invariantes, um notável é o polinômio de Jones.

Invariante de Jones

Aqui, partimos [5] da ideia do cruzamento básico (Figura 10), onde um fio sobrepõe o outro assim, da esquerda pra direita, de cima pra baixo. Dizemos que esse cruzamento pode ser escrito como uma composição.

Figura 10. Cruzamento básico.

Definimos um bracket que decompõe o nosso diagrama em uma combinação de diagramas L_a e L_b. e suas respectivas constantes (Figura 11.a).

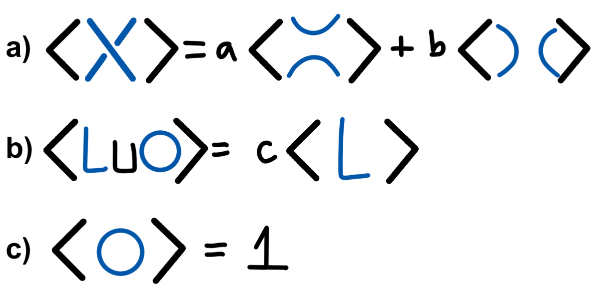


Figura 11. Bases para o invariante de Jones.

O bracket [1] de um diagrama qualquer, nosso polinômio, em união com um nó trivial é igual a uma constante c vezes o bracket daquele mesmo diagrama (Figura 11.b).

Essa redução em cada cruzamento desfaz o cruzamento de forma que (Figura 12):

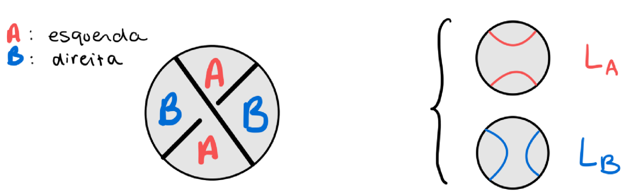


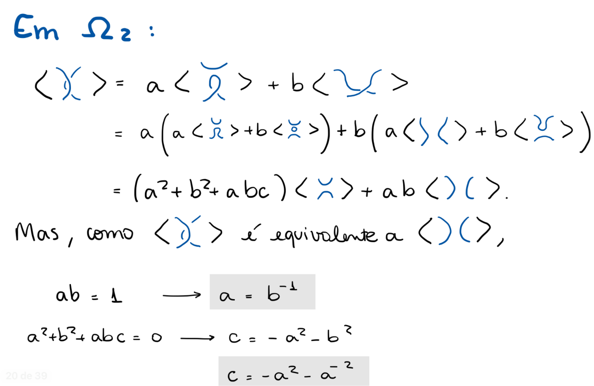
Figura 12. Cruzamento básico dividido em L_a e L_b.

Nós temos 2 tipos de cruzamentos, então nesse exemplo, nós podemos começar decompondo o primeiro cruzamento em diagramas de La e Lb e depois fazemos o mesmo com os cruzamentos restantes.

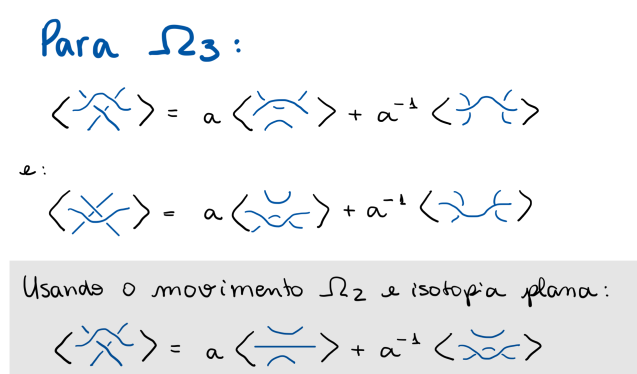
Note que o polinômio de Jones para o nó trivial é o mais simples, o termo constante igual a 1. Se escrevermos o trifólio de um jeito ou seu espelhado chegamos a dois polinômios diferentes, o que revela que ele realmente têm quiralidade. Se um nó tem um polinômio de jones igual a 1: ele é o trivial?

Assim como nos outros invariantes, podemos investigar esse parênteses polinomial nos movimentos de Reidemeister.

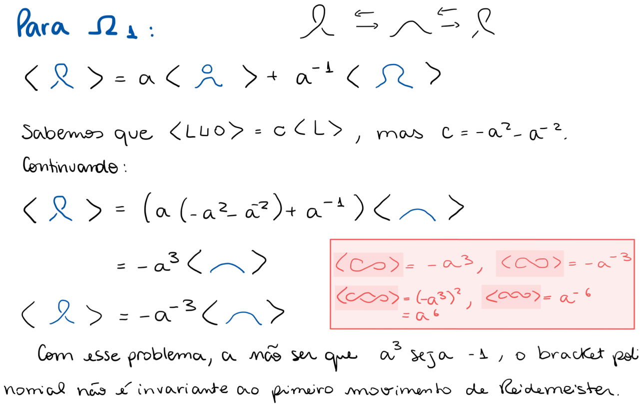
Assim, podemos investigar o parênteses polinomial no movimento Ω_2:



Para o movimento Ω_3:

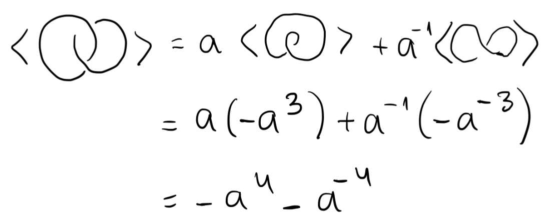


O movimento Ω_1:



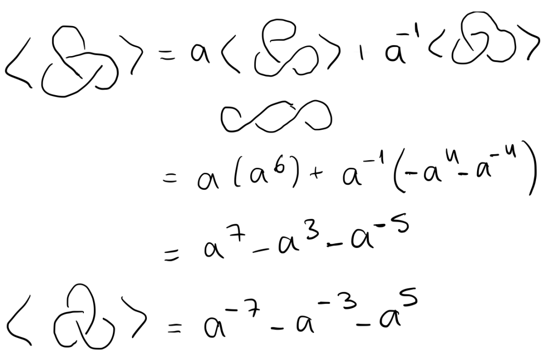
Agora, conseguimos explorar alguns nós e ligações sob a perspectiva do polinômio de Jones.

Exemplo: link de Hopf



Nesse exemplo seguinte, exploramos o nó trifólio e seu espelhado, vemos que eles produzem polinômios totalmente diferentes. Isso nos garante que o nó trifólio e seu espelhado são realmente diferentes nós, e não podem ser obtidos por meio dos movimentos estudados.

Exemplo: nó trifólio



Esses invariantes polinomiais são muito interessantes e existem alguns bastante sofisticados. A verdade é que, assim como temos invariantes palpáveis, como os de cor, podemos explorar estruturas bem interessantes dos nós ao criarmos invariantes mais detalhados.

Invariantes de Vassiliev

Para o que vamos ver em relação aos Invariantes de Vassiliev, é interessante lembrar de um teorema:

Teorema .3. *Qualquer link L com* $\boldsymbol{m}$ *componentes, pode ser transformado em um link trivial de* $\boldsymbol{m}$ *componentes por meio de uma sequência apropriada de mudanças de cruzamentos.*

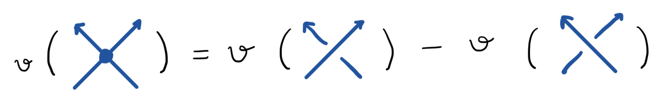
Isso significa dizer que [6], se temos um nó, transformando os seus cruzamentos, podemos transforma-lo em nó trivial.

Se quisermos pensar nessas mudanças de cruzamento como um processo contínuo, vai existir um momento crucial onde o nó vai se intersectar a si mesmo (se auto-intersectar).

Vassiliev introduziu um invariante numérico de nós baseado numa relação que reflete essas mudanças de cruzamento. Para isso, precisamos definir uma nova classe de objetos que serão denominados por nós singulares.

Nó singular: trata-se de um mapa $k : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sem singularidades, exceto por um número finito de auto-interseções transversais. Esses pontos são chamados pontos-duplos.

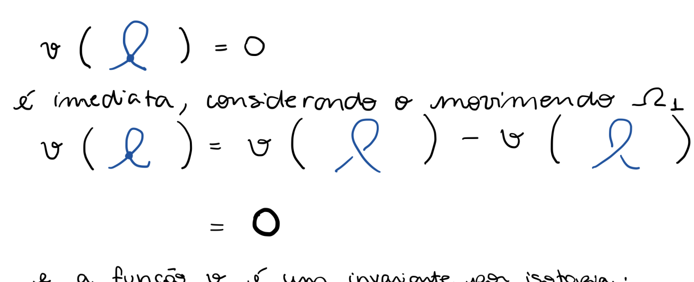
Aqui, os nós vão ser sempre orientados. O invariante numérico (v) é chamado de Invariante de Vassiliev se ele satisfaz a seguinte relação:



Por essa equação, podemos ver que os invariantes de Vassiliev não são únicos. Por exemplo, multiplicando a equação por uma constante, ela continua valendo. Então, multiplicar a equação por uma constante não afeta sua validade.

Algumas propriedades de um invariante de Vassiliev são as seguintes.

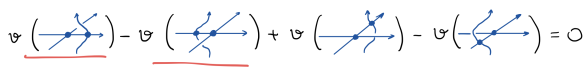
A relação de um termo:



que nos diz que v desse "laço" com uma auto-interseção é igual a zero. Essa relação é imediata, ainda mais considerando o movimento de Reidemeister de tipo 1.

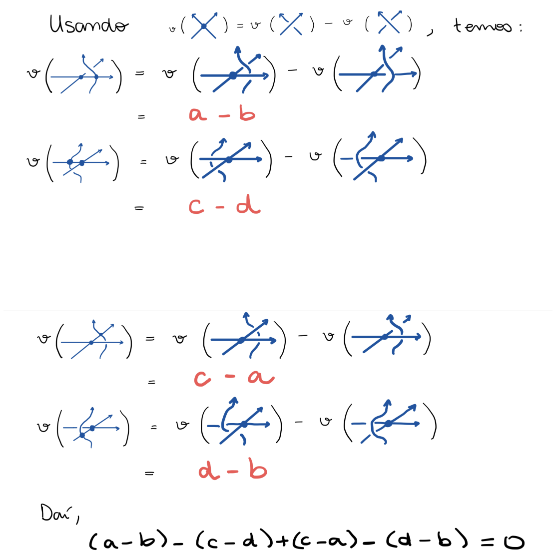
Outra relação importante é a relação de quatro termos, onde essa equação abaixo é aplicada para "fatorar" a auto-interseção.

A relação de quatro termos:



Prova:

A relação de quatro termos:



Os invariantes de Vassiliev formam um espaço linear em um campo, pois qualquer combinação linear de invariantes de Vassiliev vai satisfazer a relação linear que mencionada no início.

$$V_n = \{v | ord(v) \leq n\} \tag{1}$$

Esse espaço é infinito dimensional, então é conveniente definir um espaço finito dimensional que cresça com a inclusão de um número suficiente de invariantes de Vassiliev.

Um invariante de Vassiliev é de ordem não maior que n se ele é anulado em nós singulares com mais do que n pontos duplos. Assim, cada V_n forma um espaço linear com a sequência de inclusões. Desse modo, os de ordem zero estão contidos nos de ordem 1, que estão contidos nos de ordem 2 e assim por diante.

Um invariante de ordem zero desaparece em qualquer nó que contenha pelo menos um ponto duplo.

Se dois nós diferentes não têm nenhum ponto duplo, o invariante de Vassiliev de ordem zero vai ser igual para os dois.

Se algum nó não singular pode ser levado em um outro nó não singular por meio de mudanças finitas dos cruzamentos, então o invariante de Vassiliev de ordem zero (o v_0) dos dois nós têm o mesmo valor.

Como v_0 de um nó é um número real, então V_0, nosso espaço linear é o conjunto dos reais. Por tanto, a dimensão do V_0 é 1.

CONCLUSÕES

Modelar matematicamente sistemas como os da mecânica estatística tem sido um dos problemas mais difíceis dentro da Física. Valendo-se do Modelo de Ising é possível modelar um sistema onde apenas partículas próximas interagem. No entanto, isso se torna inviável para um número de partículas grande, onde o cálculo da função de partição se torna cada vez mais difícil. O que leva-nos à equação de Yang-Baxter. Demonstrou-se que a equação de Yang-Baxter tem conexão direta à Teoria de Nós. Devido à sua importância, qualquer entendimento inédito sobre essa equação contribui em algo para com a ciência. E, embora Teoria de Nós seja uma teoria matemática que existe há muitos anos, com aplicações como em Biologia e Química, recentemente mostrou-se que há conexões com a equação de Yang-Baxter. O que abre a possibilidade de estudar Yang-Baxter, fundamental para um enorme número de modelos na Física Estatística e Física da Matéria Condensada, do ponto de vista da Teoria de Nós.

---

* 170145255@aluno.unb.br; amelik@unb.br

[1] C. C. Adams, *The Knot Book An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. 2000.

[2] T. Deguchi, M. Wadati, and Y. Akutsu, "Knot theory based on solvable models at criticality," 1989.

[3] D. Bombardelli, "Lectures on s-matrices and integrability," 6 2016.

[4] K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*. 1996.

[5] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. 1991.

[6] E. Witten, "Quantum field theory and the jones polynomial," 1989.