Classes características

Bruno Rodrigues Soares*

Instituto de Física, Universidade de Brasília

Brasília, DF, Brasil

Resumo

Utilizamos o teorema de Chern-Weil para definir classes caracteristicas em fibrados principais, obtendo a conhecida forma de Chern-Simons. O operador de homotopia de cartan é utilizado no cálculo desta forma, e mostramos que as formas de Chern em geral não são invariantes de calibre, mas se transformam por uma forma exata.

Palavras-chave: variedade; fibrado; conexão; tensor; curvatura; Chern-Weil;

1 Introdução

A teoria de fibrados compreende uma decrição matemática para a física não perturbativa de campos, desse modo não nos restringimos apenas à uma aproximação infinitesimal ou local da realidade, mas também contemplamos os efeitos de fronteira na descrição dos campos de calibre. Como exemplo disso, mostraremos que os potenciais de calibre das teorias de Yang-Mills podem ser definidos globalmente, a despeito da abordagem local usualmente encontrada em diversos livros ao mencionarem essas teorias.

Um fato importante, que mostra a relação entre as teorias de calibre e a rica matemática utilizada em sua descrição, ocorre com os conhecidos instantons de Yang-Mills. Veremos que os instantons são classes de equivalência não triviais do fibrado que descreve o campo de calibre. Em particular, o número instanton na teoria de calibre em 4 dimensões, com grupo SU(2), é precisamente a segunda classe de Chern do fibrado que fundamenta a teoria.

Com base nestas ideias, nas seções 2 e 3 apresentamos uma introdução à teoria dos fibrados princiapis e conexões, com a maioria das definições necessárias para a compreensão da seção 4, onde estudamos o teorema de Chern-Weil, fornecendo uma estrutura cohomologica que descreve a não trivialidade dos fibrados principais. Em seguida faremos uma breve aplicação destes conceitos para mostrar a interpretação topológica no número de instanton em uma teoria clássica de Yang-Mills, definida no espaço euclideano.

*Aluno do programa de Iniciação Científica do ProIC/DGP/UnB, e-mail: brunorodriguesunb@gmail.com

2 O fibrado principal

A grande relevância dos fibrados principais reside no fato de ser o modelo geométrico do espaço-tempo nas teorias de calibre, tradicionalmente as seções desse fibrado são associadas com campos de partículas, de modo que os grupos de calibre correspondem às interações fundamentais. Em todo o texto, salvo menção contrária, P e M representarão variedades diferenciáveis, G um grupo de lie com álgebra de lie $\mathfrak{g}$, $\pi : P \to M$ uma aplicação diferenciável sobrejetora e $R : P \times G \to P$ uma ação livre

Definição 1. Um fibrado principal (P, π, M, G) é definido pelas seguintes condições:

1. Existe **difeomorfismo** $f : M \to P/G$, da variedade base M para o espaço das órbitas de P, satisfazendo a seguinte propriedade:

   $$\pi \circ p = \pi_e,$$

   onde π_e é a projeção quociente.

2. **P** é **localmente trivial**, ou seja, para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U_α de x e um difeomorfismo:

   $$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$$
   $$p \mapsto (\pi(p), \phi_\alpha(p))$$

   tal que $\phi_\alpha \circ R_g = R_g \circ \phi_\alpha$, para todo $g \in G$ e $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$

Observação 1. Dizemos que o fibrado é trivial se existe difeomorfismo $P \cong M \times G$. Um exemplo importante de fibrado principal é o fibrado dos referenciais (ou das bases).

Exemplo 1 (Fibrado de referenciais)**.** Consideramos o objeto $FM(M, Gl(n, \mathbb{R}))$ construido a partir de uma variedade M e seu fibrado tangente TM. FM é o conjunto de isomorfismos lineares entre $\mathbb{R}^n$ e T_xM, para cada $x \in M$. Este conjunto pode ser identificado com o grupo de matrizes inversíveis e herda um atlas diferenciável por uma construção análoga à de TM. A ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em FM é dada simplismente pela multiplicação de matrizes usual:

$$R_g(\Lambda) \equiv \Lambda \circ g, \quad \forall g \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ e } \Lambda \in FM$$

Esta ação é livre e transitiva, de modo que o espaço de órbitas, i.e. o espaço de classes de equivalência dos referenciais, pode ser identificado com o conjunto de pontos que compõem a variedade base, satisfazendo a condição (1) da definição.[Nakahara, p.359]

Sendo (P, π, M, G) fibrado principal e F uma variedade diferenciável, na qual temos uma ação à esquerda de G então, podemos construir a variedade $P_F := (P \times F)/\sim_G$, onde $\sim_G$ é a relação que define classes de equivalências dadas por: $[p, f] = \{(R_g p, L_{g^{-1}} f) \mid g \in G\}$. Pode-se então mostrar que (P_F, π_F, M, G) é um fibrado, com projeção $\pi_F : P_F \to M$, dada por $\pi[p, f] \equiv \pi(p)$. Diremos então que (P_F, π_F, M, G) é fibrado associado à (P, π, M, G).

Observação 2. Note que a fibra típica de fibrados associados passa a ser a variedade F posteriormente introduzida. Quando a fibra típica de fibrados associados tem a estrutura de espaço vetorial, eles são denominados fibrados vetoriais e são de grande importância no estudo de classes características. Diremos que dois fibrados vetoriais E e E', de mesmo espaço base, têm um morfismo quando existir uma aplicação diferenciável $f : E \to E'$, linear em cada fibra e satisfazendo a condição $\pi \circ f = \pi'$. Mostraremos algumas construções funtoriais mediante esta estrutura vetorial adicional nas fibras típicas.

Definição 2. Um **funtor covariante** $\mathcal{F}$ em espaços vetoriais com transformações lineares satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $\mathbb{F}$ é espaço vetorial, então $\mathcal{F}(\mathbb{F})$ é espaço vetorial.
2. Se $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ é linear, então $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(\mathbb{F}) \to \mathcal{F}(\mathbb{F}')$ é linear, tal que:

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \text{ e } \mathcal{F}(\mathbb{I}_{\mathbb{F}}) = \mathbb{I}_{\mathbb{F}'}$$

Proposição 1. Sendo $\mathcal{F}$ um funtor covariante em espaços vetoriais com transformações lineares, podemos construir um funtor em fibrados vetoriais com morfismo.

Demonstração. O espaço total será: $\mathcal{F}(E) := \underset{x \in B}{\cup} \mathcal{F}(E)_x$, onde $\mathcal{F}(E)_x \equiv \mathcal{F}(\pi^{-1}(x))$. Com projeção $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(E) \to B$, tal que $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(E)_x) = x, \forall x \in M$.
O espaço total herda a trivialidade local naturalmente, da seguinte forma:

$$\mathcal{F}(\psi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathcal{F}(\mathbb{F})$$

$$p \mapsto (\pi(p), \mathcal{F}(\phi_\alpha)(p))$$

Sendo $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{F}$ trivialização local de E, e $\mathcal{F}(\phi_\alpha)|_{\pi^{-1}(x)} := \mathcal{F}(\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)})$ $\square$

Observação 3. Esta construção pode ser feita analogamente para funtores contravariantes e/ou com dois ou mais argumentos, de modo que podemos construir diversos exemplos interessantes.

Exemplo 2. Sendo $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ espaços vetoriais, temos funtores induzidos de dual, soma direta e produto tensorial, além de composições e iterações dessas operações. Desse modo, sendo $(E_{\mathbb{F}_1}, \pi_{\mathbb{F}_1}, M, \mathbb{F}_1)$ e $(E_2, \pi_{\mathbb{F}_2}, M, \mathbb{F}_2)$ fibrados vetoriais podemos construir:

1. Fibrados tensoriais, como $\bigotimes^n E_1$ e $E_1 \otimes E_2$, com fibras típicas $\bigotimes^n \mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_2$ respectivamente.
2. Somas diretas (ou somas de Whitney), como $\bigoplus^n E_1$ e $E_1 \oplus E_2$, com fibras típicas $\bigoplus^n \mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$ respectivamente.
3. Fibrado dual E_1^* com fibra típica, $\mathbb{F}_1^*$.

Em todos estes casos, com os respectivos morfismos induzidos.

Terminaremos esta seção mostrando uma condição de trivialidade para os fibrados principais.

Definição 3. Uma seção em um fibrado principal, é um mapa diferenciável em um aberto da variedade base $\sigma : U \subseteq M \to E$, tal que $\pi \circ \sigma = \mathbb{I}_M$.

Proposição 2. Um fibrado principal é trivial se e somente se admite uma seção, definida em toda a variedade base, $\sigma : M \to E$.

Observação 4. Sendo E um fibrado vetorial sobre M, as seções do fibrado formado pelo produto tensorial da n-ésima potência exterior de T^*M com E denotado por $\bigwedge^n T^*M \otimes E$ são chamadas de n-formas com valores em E, denotamos o espaço dessas formas $\Omega^n(M, E)$.

3 Conexões e Curvaturas

Nesta seção trataremos de alguns aspectos da teoria de conexões. Veremos que uma conexão nos permite gerar noções de Verticalidade e Horizontalidade no fibrado tangente do espaço total, além disso, esta conexão será formulada de modo a garantir o princípio de covariância sob mudanças de coordendas, expresso na proposição 6, fundamentalmente relacionado à invariância dos espaços horizontais sob ação do grupo de calibre.

3.1 Conexão

Seja P(M,G) um fibrado principal. Para cada elemento da álgebra de lie podemos induzir um campo vetorial no espaço total.

Definição 4. Seja $\begin{array}{ccc} i : T_eG & \to & \Gamma(TP) \\ A & \mapsto & X^A \end{array}$, onde $X_p^A f \equiv \frac{df(R_{exp(tA)}\ p)}{dt}|_{t=0}$, $\forall\ p \in P$ e $f \in C^\infty(P)$. Diremos que X^A é o **campo vetorial fundamental** induzido por A

Proposição 3. Em cada ponto $p \in P$, o mapa i definido é um isomorfismo sobre o espaço vetorial vertical $V_pP := \{X \in T_pP | \pi_* X = 0\}$.

Seria interessante considerar um objeto que capaz de relacionar pontos idividuais de fibras vizinhas. Esta é de fato a motivação para a definição de conexões em fibrados principais.

Definição 5. Uma **conexão** ω **no fibrado principal** é uma 1-forma diferenciável em P com valores na àlgebra de lie $\mathfrak{g}$, e escrevemos: $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, tal que, para todo $p \in P$ e $g \in G$:

$$(\omega \circ i)_p = \mathbb{I}_{T_eG}, \quad R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega \tag{1}$$

onde Ad é a representação adjunta do grupo G em sua álgebra de lie.

Observação 5. Dada uma conexão no fibrado principal, podemos separar o espaço tangente para cada ponto $p \in P$ em uma soma direta dada por: $T_pP = H_pP \oplus V_pP$, onde $H_pP \equiv \{X \in T_pP \mid \omega(X) = 0\}$. Esta separação herda a diferenciabilidade da 1-forma no espaço total, de modo que o conjunto de espaços horizontais, $HP := \{H_pP | p \in P\}$, é invariante sob ação do grupo de estrutura, ou seja $R_g * H_pP = H_{R_g p}P$.

Proposição 4. Se $\mathbf{c} \in C_x(M) \equiv \{\mathbf{c} : [0,1] \to M \mid \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(1) = x\}$ é um curva fechada e orientada em M. Para cada $p \in \pi^{-1}(c(0))$, existe uma única curva $\tilde{c} : [0,1] \to P$, que começa em $\tilde{c}(0) = p$, tal que:

1. É projetada em $\mathbf{c}$, ou seja: $\quad \pi \circ \tilde{c} = c$
2. É uma curva horizontal: $\quad \tilde{c}'(t) \in H_{\tilde{c}(t)}P, \ \forall t$

Observação 6. A proposição anterior garante, atraves do teorema fundamental das EDO's, a existência do mapa de holonomia $H(\mathbf{c}, \omega) : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$, para cada loop $\mathbf{c}$, tal que $\mathbf{c}(0) = x$. Com isso definimos finalmente o grupo de holonomia em $p \in \pi^{-1}(x)$, como sendo o subgrupo de $G(p) \subset G$ denotado por:

$$G(p) \equiv \{g \in G \mid H(\mathbf{c}, \omega)(p) = R_g p, \ \mathbf{c} \in C_x(M)\}$$

Outra propriedade interessante das conexões é que elas formam um espaço afim, de fato podemos demonstrar a seguinte:

Proposição 5. Sendo ω_0 e ω_1, conexões em um fibrado principal, se definirmos $\phi \equiv \omega_1 - \omega_0$. Então ϕ é 1-forma com valores na álgebra de lie, tal que:

1. $\phi(v) = 0$ se v é vertical.
2. $R_g^*(\phi) = Ad_{g^{-1}}\phi$

Observação 7. Segue diretamente desta proposição que para cada par de conexões ω_0 e ω_1, temos uma familia de conexões dada por $\omega_t = \omega_0 + t\phi$, para $t \in [0,1]$.

Seja ω uma 1-forma de conexão em P, para cada trivialização local (U_α, ψ_α), podemos considerar o mapa diferenciável $\Delta_e : U_\alpha \to U_\alpha \times G$, tal que $\Delta_e(x) = (x, e)$, para então definir uma conexão local dada por $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega$, onde $s_\alpha \equiv \psi_\alpha^{-1} \circ \Delta_e$. Estas 1-formas locais são denominadas potenciais de calibre e se transformam sob mudança de coordenadas da seguinte forma,

Proposição 6. Sendo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, os respectivos potenciais de calibre ω_α e ω_β se transformam sob mudança de coordenadas pela seguinte igualdade:

$$\omega_\beta = Ad_{t_{\alpha\beta}^{-1}}(\omega_\alpha) + t_{\alpha\beta}^{-1} dt_{\alpha\beta} \tag{2}$$

onde, $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, é dada por $t_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha(p) \circ \phi_\beta^{-1}(p)$, $p \in \pi^{-1}(x)$

Observação 8. As aplicações $t_{\alpha\beta}$ são chamadas funções de transição, serão assumidas contínuas e satisfazem a propriedade de cociclo: $t_{\alpha\gamma}(x) = t_{\alpha\beta}(x) t_{\beta\gamma}(x)$, para $x \in U_\alpha \cup U_\beta \cup U_\gamma$.

Pela observação (5), temos uma projeção nos espaços horizontais, $h_p : T_pP \to H_pP$, para cada $p \in P$, de modo que a própria conexão permite extender a ideia de derivada exterior para 1-formas com valores em espaços vetoriais V. Como estamos interessados na derivação da conexão, nos restringiremos ao caso em que $V = \mathfrak{g}$.

3.2 Curvatura

O conceito de curvatura abordado nesta seção pode ser visto como uma generalização do tensor de curvatura de Riemann. Além disso, sob condições razoaveis, a subálgebra de lie correspondende ao grupo de holonomia pode ser gerada pela combinação de termos da 2-forma de curvatura aplicada em vetores horizontais. Esta relação fundamental entre a curvatura e o grupo de holonomia em fibrados principais é dada pelo teorema de Ambrose-Singer.

Definição 6. A derivada exterior de uma p-forma diferenciável $\varphi = \varphi_i \otimes T_i$ em P, com valores na àlgebra de lie $\mathfrak{g}$, é dada por:

$$d_\omega \varphi(X_1, ..., X_{p+1}) \equiv d\varphi(h(X_1), ..., h(X_{p+1})) \tag{3}$$

onde $\{T_i\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, e $d\varphi = (d\varphi_i) \otimes T_i$

Dada uma conexão em P podemos definir sua respectiva curvatura a partir da sua derivada covariante $\Omega \equiv d_\omega \omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$. Segue diretamente da definição que $\Omega(X, Y)$ é nula se X ou Y for vertical, em outras palavras dizemos que Ω é forma horizontal. Além disso, utilizando as propriedades de ω, a proposição 3, bem como a antissimetria e linearidade da curvatura, podemos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 7. A curvatura Ω, associada à conexão ω, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Herda a equivariância da conexão: $R_g^* \Omega = Ad_{g^{-1}} \Omega$
2. Equação de estrutura de cartan: $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$
3. Identidade de Bianchi: $d_\omega \Omega = 0$

Observação 9. O colchete de formas diferenciais com valores na álgebra de lie é definido da seguinte maneira. Sendo $\{T_\alpha\}$ uma base de $\mathfrak{g}$, e $\omega = \omega^\alpha T_\alpha \in \Omega^r(P, \mathfrak{g})$, $\theta = \theta^\beta T_\beta \in \Omega^s(P, \mathfrak{g})$, definimos:

$$[\omega, \theta] \equiv \omega \wedge \theta - (-1)^{rs} \theta \wedge \omega = \sum_{\alpha\beta} [T_\alpha, T_\beta] \omega^\alpha \wedge \theta^\beta$$

Observação 10. De maneira análoga a conexão temos a forma local da curvatura dada por: $\Omega_\alpha \equiv s_\alpha^* \Omega$. Quando dois potenciais são relacionados pela equação 2, dizemos que são localmente equivalentes, além disso, $\omega_\beta = 0$ se, e somente se, $\omega_{\alpha\mu}(x) = -\partial_\mu t_{\alpha\beta}(x) t_{\alpha\beta}^{-1}(x)$. Expandindo esta última igualdade obtemos $\Omega_\alpha = 0$, ou seja um potencial de calibre é localmente equivalente à zero se, e somente se, sua respectiva curvatura local é nula.

Finalizaremos essa seção com um exemplo que revelará uma estrutura de grupo que é imprescindível para uma compreensão topológica mais profunda a cerca dos fibrados.

Exemplo 3. Sendo $P(S^4, SU(2))$ um fibrado principal, onde S^4 é obtida pela compactificação por um ponto: $S^4 \equiv \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$. Podemos considerar uma cobertura do espaço total dada por $\{U_N, U_S\}$, definidas da seguinte forma: $U_N \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | \; |\vec{x}| < R + \epsilon\}$, e $U_S \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | \; |\vec{x}| > R - \epsilon\}$, onde R e ε são numeros positivos e ε infinitesimal. Observamos que a função de transição é definida na esfera S^3_R, que corresponde à intercessão dos abertos U_N e U_S. Além disso, podemos assumir, pela observação 10, que $\omega_S = 0\ \forall x \in U_S$ Por outro lado, o grupo de estrutura $SU(2)$ é difeomorfo à S^3, de modo que as funções de transição, ou seja, as aplicações $t : S^3 \to SU(2)$ podem ser caracterizadas topologicamente pelo seu grau[1]:

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_R} \mathrm{tr}(t^{-1}dt)^3 \tag{4}$$

Este é o substrato básico da teoria de Chern-Weil, o nosso objetivo agora será associar a essas conexões uma estrutura cohomologica que possa descrever a não trivialidade do fibrado principal.

4 Teoria de Chern-Weil

Consideraremos a álgebra $S(\mathfrak{g})$ das aplicações multilineares simétricas $S : \bigotimes^r \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, invariantes, ou seja, $S(Ad_g A_1, ..., Ad_g A_r) = S(A_1, ..., A_r)$, $\forall A_i \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$. Para cada aplicação $S \in S(\mathfrak{g})$, existe um único polinômio, dado pelo mapa $p_S : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, tal que $p_S(V) = S(V, ..., V)$, para todo elemento $V \in \mathfrak{g}$. É fácil ver que p_S também é invariante. De fato, podemos mostrar que a álgebra das aplições multilineares simétricas invariantes é isomorfa a àlgebra das funções polinomiais invariantes.

Para o teorema a seguir estaremos interessados em polinômios associados a formas com valores na algebra de lie, pois este é o caso da conexão e curvatura em fibrados principais.

Proposição 8. Seja (P, π, M, G) fibrado principal, ω e Ω uma conexão com sua respectiva curvatura e S uma aplicação k-multilinear simetrica. Então, para a 2k-forma $S(\Omega)$ em P dada pela seguinte soma em todas as $(2k)!$ permutações σ possíveis:

$$S(\Omega)(X_1, ..., X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) S(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), ..., \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)}))$$

Então existe uma única 2k-forma $\overline{S}(\Omega)$ em M, tal que: $S(\Omega) = \pi^* \overline{S}(\Omega)$. Esta forma é fechada e sua classe de cohomologia independe da 1-forma de conexão.

Demonstração. Sendo $V_1, ..., V_{2k} \in T_x M$, para algum $x \in M$, definimos a 2k-forma pela relação:

$$\overline{S}(\Omega)(V_1, ..., V_{2k}) \equiv S(\Omega)(X_1, ..., X_{2k}),$$

onde $X_1, ..., X_{2k} \in T_p P$, e $p \in \pi^{-1}(x)$. Pela transitividade da ação do grupo de lie nas fibras, podemos considerar quaisquer $Y_1, ..., Y_{2k} \in T_p P$, de modo que, para cada $i = 1, ..., 2k$; temos $X_i - Y_i \in V_p P$, portanto $S(\Omega)(X_1, ..., X_{2k}) = S(\Omega)(Y_1, ..., Y_{2k})$.

[1]Cada mapa contínuo $t : S^n \to S^n$ induz um homomorfismo $t_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$, onde $H_n(S^n)$ é o n-ésimo grupo de homologia da n-esfera. Como $H_n(S^n)$ é isomorfo ao grupo de numeros inteiros, o homomorfismo induzido deve obedecer a seguinde regra: $t_*(a) = n \cdot a$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Sejam $X_1, ..., X_{2k+1} \in T_pP$. Pelas propriedades da derivada exterior e da curvatura:

$$\begin{aligned} dS(\Omega)(X_1, ..., X_{2k+1}) &= d(\pi^*\overline{S})(X_1, ..., X_{2k+1}) = \pi^* d(\overline{S})(X_1, ..., X_{2k+1}) = \\ &= d(\overline{S})(\pi_* X_1, ..., \pi_* X_{2k+1}) = d(\overline{S})(\pi_* h(X_1), ..., \pi_* h(X_{2k+1})) \\ &= dS(\Omega)(h(X_1), ..., h(X_{2k+1})) = d_\omega S(\Omega)(X_1, ..., X_{2k+1}) = 0 \end{aligned}$$

Onde, na ultima igualdade utilizamos a identidade de Bianchi. Portanto $\overline{S}(\Omega)$ é forma fechada.

Vamos agora mostrar que a classe de cohomologia de $\overline{S}(\Omega)$ é invariante pela escolha do potencial de calibre. Para isso precisamos extender o domínio dos polinômios invariantes, logo associaremos cada mapa S, r-multilinear e simétrico, com formas diferenciáveis dadas por:

$S(A_1, ..., A_k)(X_1, ..., X_{q_1+...+q_k}) =$

$$= \frac{1}{(\sum_{i=1}^{r} q_i)!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) S(A_1(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(q_1)}), ..., A_r(X_{\sigma(q_1+...+q_{k-1}+1)}, ..., X_{\sigma(q_1+...+q_k)}))$$

Onde cada $A_i \in \otimes\Omega^{q_i}(P, \mathfrak{g})$ e $X_j \in T_pP$.

Escolhendo duas conexões ω_0 e ω_1, temos a família de curvaturas Ω_t associadas às conexões ω_t (proposição 5), utilizando o fato $\frac{d}{dt}\Omega_t = d_{\omega_t}\phi$, não é difícil verificar a seguinte igualdade.

$$\overline{S}(\Omega_1) - \overline{S}(\Omega_0) = d\left[\pi^*\left(k\int_0^1 S(\phi, \Omega_t, ..., \Omega_t)dt\right)\right] \equiv dQ_{CS}^{(2k-1)}(\omega_1, \omega_0) \tag{5}$$

Onde, na expressão 5 definimos a forma de Chern-Simons $Q_{CS}^{(2k-1)}(\omega_1, \omega_0)$. □

Em resumo, temos que cada polinômio invariante corresponde à uma classe de cohomologia no espaço base, a qual denotaremos classe característica. Essa correspondência é independente da 1-forma de conexão utilizada e é conservada por difeomorfismos de fibrados, portanto constitui um invariante topológico. Veremos a seguir um exemplo importante de classes características: As classes de Chern.

Exemplo 4 (Classes de Chern)**.** Escolhendo um fibrado principal $(E, \pi, M, GL(k, \mathbb{C}))$, com fibra típica $\mathbb{F} \equiv \mathbb{C}^k$, 1-forma de conexão ω e respectiva curvatura Ω. Definimos $k+1$ polinômios invariantes através da seguinte relação:

$$\det\left(\lambda\mathbf{1} - \frac{1}{2\pi i}\Omega\right) = \sum_{j=0}^{k} S_j(\Omega)\lambda^{k-j} \tag{6}$$

Pela proposição 8, podemos definir as j-classes de chern como $c_j(E) \equiv [c_j(\Omega)]$, onde $\pi^* c_j(\Omega) = S_j(\Omega)$. Além disso, tomando $\lambda = 1$, a equação 6 define a classe de chern total

$$c(E) \equiv \bigoplus_{j=0}^{k} c_j(E) \tag{7}$$

Proposição 9. As classes de chern satisfazem às seguintes propriedades

1. $c_0(E) = 1 \in H^0(M, \mathbb{R})$

2. (Naturalidade) $c(f^*E) = f^*c(E)$

3. (Fórmula da soma de Whitney) $c(\bigoplus_{i=1}^n E_i) = \bigwedge_{i=1}^n c(E_i)$

Exemplo 5. Considerando o fibrado $P(S^4, SU(2))$, do exemplo 3, temos uma classe caracteristica dada pelo caráter de Chern:

$$\mathrm{ch}(\Omega) \equiv \mathrm{tr}\left[\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\Omega\right)\right] = 2 + \mathrm{tr}\left(\frac{i\Omega}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{i\Omega}{2\pi}\right)^2 \tag{8}$$

Nessas condições é possivel mostrar que as forma de Chern-Simons correspondentes aos dois últimos termos do lado direito da equação 8, são dadas respectivamente por:

$$Q_{CS}^{(1)} = \frac{i}{2\pi}\mathrm{tr}(\omega) \quad \& \quad Q_{CS}^{(3)} = \frac{-1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\left[\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right]$$

Por fim, mostraremos que a forma de Chern Simons não é invariante por transformações de calibre mas se transforma por uma forma exata. Utilizando a proposição 5 e sendo S um polinômio invariante podemos definir:

Definição 7. O operador de homotopia de Cartan k_{01} é dado por

$$k_{01}S(\omega_t, \Omega_t) \equiv \int_0^1 l_t S(\omega_t, \Omega_t) \tag{9}$$

onde l_t é tal que: $l_t\omega_t \equiv 0$, e $l_t\Omega_t \equiv \delta t(\omega_1 - \omega_2)$

Proposição 10. Sendo ω_α e ω_β potenciais de calibre equivalentes, então a forma de chern-simons satisfaz a seguinte equação:

$$Q_{CS}^{2k+1}(\omega_\beta) - Q_{CS}^{2k+1}(\omega_\alpha) = Q_{CS}^{2k+1}(t_{\alpha\beta}^{-1}dt_{\alpha\beta}) + d(k_{01}Q_{CS}^{2k+1}(\omega_{\beta t})) \tag{10}$$

Exemplo 6 (Instantons)**.** Considerando uma teoria de Yang-Mills em $\mathbb{R}^4$, com grupo de calibre $SU(2)$. Realizamos a projeção de $S^4 \equiv \{(r_1, ..., r_5) \in \mathbf{R}^5 | \ |\vec{r}| \equiv \sum_{i=1}^5 r_i^2 = 1\}$ em $\mathbf{R}^4$ através do mapa:

$$r_i = \frac{2x_i}{1 + |\vec{x}|^2}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$
$$r_5 = \frac{1 - |\vec{x}|^2}{1 + |\vec{x}|^2}$$

Assumimos que o potencial de calibre não tem singularidades em qualquer região da hiperesfera S^4, inclusive no infinito espacial corrrespondente ao polo sul ($\mathbf{r} \equiv (0, 0, 0, 0, -1)$). Como consequência disso, temos que o potencial descresce pelo menos tão rápido quanto o inverso de $|\vec{x}|^2$, para distâncias suficientemente grandes, e portanto $\Omega_S = 0$ diretamente da observação 10. Pela invariância conforme das soluções da teoria, podemos considerar a compactificação de R^4, como no exemplo 3.

Desse modo o invariante dado pela forma de Chern-Simons, correspondente ao segundo caráter de Chern:

$$Q \equiv \int_{S^4} dQ_{CS}^{(3)}$$

se reduz a soma de integrais na fronteira pela proposição 10. Concluimos portanto que este número coincide com o grau das funções de transição que caracterizam a torção do fibrado $\mathrm{P}(\mathbb{R}^4, SU(2))$, e é claramente um invariante por transformações de calibre. Esta grandeza é chamada de número de instanton, e como vimos no exemplo 3, ela determina o número de vezes que SU(2) é coberto, pela função de transição, quando consideramos todo o S^3.

5 Conclusão

Neste projeto, estabelecemos uma introdução à matemática das teorias de calibre. Grande parte da geometria diferencial que fundamenta essas teorias de campo foi abordada, revelando seus aspectos globais. O próximo objetivo é entender as implicações matemáticas da quantização dessas teoriais, em particular, temos interesse em teorias do tipo Chern-Simons, cuja ação é proporcional à integral da forma de Chern simons, vista no exemplo 3. Nas últimas três décadas ela têm se mostrado uma fonte de muitas ideias diferentes e aplicações na física teórica de altas energias e física da matéria condensada, bem como em vários ramos da matemática, pois fornece um método para a obtenção de invariantes polinômios invariantes.

Referências

[1] S. Morita, Geometry of Differential Forms; AMS, 2001

[2] Baez, J., & Muniain, J. P. (1994). Gauge fields, knots and gravity (Vol. 4). World Scientific Publishing Company.

[3] Nakahara, M. Geometry, topology and physics. Graduate student series in physics. Hilger, Bristol, 1990.