

Renormalização e Hiperfunções na Teoria Quântica de Campos

Bruno H. S. Nogueira e Arsen Melikyan

*Instituto de Física, Universidade de Brasília,
70910-900, Brasília, DF, Brasil*

E-mail: 858bruno@gmail.com; amelik@gmail.com

ABSTRACT: Na teoria quântica, campos são trabalhados como distribuições, porém as distribuições de Schwartz necessitam de um alto nível matemático para serem usadas, além de que muitas demonstrações não existem para teorias não-perturbativas. Uma alternativa é o uso de hiperfunções que são mais simples de trabalhar do que distribuições e, pelo teorema de Sato, todas as distribuições podem ser reformuladas em termos de hiperfunções. Propomos nesse projeto o uso de hiperfunções para obter a expansão do produto de operadores, além da generalização para outras teorias, onde as complicações da distribuição de Schwartz não permitem avançar, esse é um problema original e ainda em aberto.

KEYWORDS: Teoria Quântica de Campos, Renormalização, Expansão do Produto de Operadores (OPE), Distribuições, Hiperfunções de Sato.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Integral de caminhos e a mecânica quântica	2
2.1	Formulação da integral de caminhos da mecânica quântica	2
2.2	Teoria de Pertubação e matriz S	2
3	Quantização da integral de caminhos e regras de Feynman: Campos escalares	4
3.1	Funcional gerador para campos escalares.	4
3.2	Funções de Green para partículas livre	5
3.3	Funcionais geradores para campo com interação	5
3.3.1	Funcional Gerador com interação ϕ^4	6
4	Renormalização	6
4.1	Divergências na teoria ϕ^4	6
4.2	Análise dimensional	7
4.3	Regularização dimensional da teoria ϕ^4	7
4.4	Renormalização da Teoria ϕ^4	8
5	Expansão do Produto de Operadores	9
6	Hiperfunções	10
6.1	Fundamentação teórica	10
6.2	Hiperfunção	11
6.3	Integração de Hiperfunções	11
7	Conclusão	12

1 Introdução

O propósito deste projeto é explorar a conexão entre a teoria de renormalização [1] na teoria quântica de campos, onde campos são tratados como distribuições - desenvolvida originalmente por Bogolubov, Porosyuk, Heep, Wilson, Zimmerman (nos anos 70) e depois por Polchinski em 1985 - e a teoria de distribuições formulada em termos da teoria de hiperfunções de Sato. A teoria de distribuições de Schwartz [2] foi de extrema importância para o avanço da física em teorias perturbativas, pois deu soluções satisfatórias a problemas relacionados a delta função e as singularidades que ocorrem no produto de operadores.

A teoria, demonstração e análise das distribuições de Schwartz requerem um rebuscado trabalho matemático, além de uma base matemática bem desenvolvida. O teorema de Sato [3] - em que qualquer distribuição pode ser reformulada em termos de hiperfunções - é de extrema importância, pois para compreensão da base dessa teoria é necessário, comparado com distribuições, apenas o conhecimento de topologia e análise complexa. Isso transforma o uso da teoria de hiperfunções mais sólido, com demonstrações mais simples, menos abstratas e com maior capacidade de se retirar sentido físico da teoria.

A utilização das hiperfunções de Sato, permite uma correta formulação matemática do procedimento de renormalização, e uma bem definida teoria quântica de campos, que pode ser considerada como uma alternativa, por exemplo, da teoria das cordas. Outro ponto seria reobter a expansão do produto de operadores e a sua generalização para outras teorias, por exemplo, não-perturbativas, como a gravitação. Isso é um problema original, importante e ainda em aberto que recentemente tem atraído muito atenção, e, até agora, não foi tentado resolver via hiperfunções de Sato.

2 Integral de caminhos e a mecânica quântica

2.1 Formulação da integral de caminhos da mecânica quântica

Na formulação da mecânica quântica as quantidades [4] q e p são substituídas por operadores que obedecem as relações de comutação de Heisenberg. A formulação da integral de caminhos na mecânica quântica é diretamente baseada na noção de um propagador $K(q_f t_f; q_i t_i)$. Dada a função de onda $\psi(q_i, t_i)$ no tempo t_i , o propagador dá a função de onda correspondente no tempo t_f , por um apelo ao princípio de Huygens:

$$\psi(q_f, t_f) = \int K(q_f t_f; q_i t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i \quad (2.1)$$

De acordo com a interpretação usual da mecânica quântica $\psi(q_f, t_f)$ é a amplitude de probabilidade da partícula estar no ponto q_f no tempo t_f , então $K(q_f t_f; q_i t_i)$ é a amplitude de probabilidade de uma partícula transitar de $(q_i t_i)$ para $(q_f t_f)$. A probabilidade que é observada em q_f no tempo t_f :

$$P(q_f t_f; q_i t_i) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2 \quad (2.2)$$

Temos que o propagador é $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$, assim:

$$\langle q_f t_f | \psi \rangle = \int K(q_f t_f; q_i t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i \quad (2.3)$$

Dividindo o intervalo de tempo em

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.4)$$

é,

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{h} \exp \left\{ \frac{i}{h} \sum_{j=0}^n [p_j (q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, \bar{q}_j)] \right\} \quad (2.5)$$

Numa forma simbólica, pode ser escrito como:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} \exp \frac{i}{h} \left[\int_{t_i}^{t_f} dt [p \dot{q} - H(p, q)] \right] \quad (2.6)$$

Efetuada a integração em p_j e o limite para o contínuo temos:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right] \quad (2.7)$$

No limite $n \rightarrow \infty$, N é infinito, mas não há problema, pois sempre trabalhamos com amplitudes de transição normalizadas.

2.2 Teoria de Perturbação e matriz S

O nosso interesse agora é mostrar como o método da integral de caminhos é utilizado no processo do cálculo de espalhamento, no próximo tópico iremos considerar o espalhamento de Coulomb. O espalhamento de uma partícula com outra é descrito, não-relativisticamente, por um potencial $V(x)$. Já que a expressão para a amplitude de transição não é exatamente calculável, como recurso, usamos a teoria de perturbação. Isso é válido quando $\int V dt$ é pequeno em comparação com \hbar . Nesse caso escrevemos:

$$\exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right] = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt - \frac{1}{2! \hbar^2} \left[\int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right]^2 + \dots \quad (2.8)$$

Essa é a expansão de perturbação. Quando substituída em 2.7 temos uma expansão em séries:

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \quad (2.9)$$

Onde K_0 é o propagador livre e tem a forma:

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \theta(t_f - t_i) \left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right] \quad (2.10)$$

E $\theta(t_f - t_i)$ é um ordenador do tempo. K_1 é a primeira ordem de correção, com a forma:

$$K_1(x_f t_f; x_i t_i) = \frac{-i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{-\infty} K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) dx \quad (2.11)$$

Similarmente K_2 :

$$K_2(x_f t_f; x_i t_i) = \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{-\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{-\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{-\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{-\infty} dx_2 K_0(x_f t_f; x_2 t_2) V(x_2, t_2) K_0(x_2 t_2; x_1 t_1) V(x_1 t_1) K_0(x_1 t_1; x_i t_i) \quad (2.12)$$

Para os outros K_n na expressão as formas são parecidas. Assim:

$$K(x_f t_f; x_i t_i) = K_0(x_f t_f; x_i t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{-\infty} K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) dx \quad (2.13)$$

$$X - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{-\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{-\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{-\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{-\infty} dx_2 K_0(x_f t_f; x_2 t_2) V(x_2, t_2) K_0(x_2 t_2; x_1 t_1) V(x_1 t_1) K_0(x_1 t_1; x_i t_i) + \dots \quad (2.14)$$

Essa é a solução perturbativa em séries para K , e é chamada de *Born Series*. Agora vamos para o cálculo da amplitude de transição. Na medida do processo de espalhamento as condições experimentais são que a partícula é livre em $t = -\infty$, então espalha e fica livre novamente em $t = +\infty$. Isso é a fonte do problema, porque uma partícula livre é descrita como uma onda plana que se estende por todo o espaço-tempo, incluindo o centro na interação $V(x)$, então a partícula nunca poderia ser livre! Para contornar o problema usamos a hipótese adiabática. O potencial V é ligado e desligado repetidamente de forma lenta, assim $V = 0$ em $t = +\infty$ e a partícula será livre. V não deve ser ligado e desligado muito rápido pois isso implicaria em uma dependência do tempo em V , o que não deve acontecer. A condição inicial era que ψ é uma onda plana. Assumimos que $V \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, tomando a primeira aproximação de Born, temos:

$$\psi^{(+)}(x_f, t_f) = \int K_0(x_f t_f; x_i t_i) \psi_{in}((x_i, t_i) dx_i - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}((x_i, t_i) dx_i dx dt \quad (2.15)$$

O (+) denota que isso corresponde a uma onda que era livre em $t = \infty$, e então envolve o propagador retardado $K_0(xt, x't')$ que é zero para $t' > t$. Estamos interessados na amplitude de detectar uma partícula final com momento definido, ou seja, uma onda plana ψ_{out} . Isso é chamado de amplitude de espalhamento S , e é um conjunto de funções de onda sobrepostas.

$$S = \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) \psi^{(+)}(x_f, t_f) dx_f \quad (2.16)$$

Substituindo $\psi^{(+)}(x_f, t_f)$, temos:

$$S = \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) \phi(x_f, t_f) - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}(x_i, t_i) dx_i dx_f dt \quad (2.17)$$

Se o momento inicial e final são $\vec{p}_i = \hbar \vec{K}_i$ e $\vec{p}_f = \hbar \vec{K}_f$, temos com a normalização de caixa:

$$\psi_{in}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \vec{x} - E_i t) \right]; \quad \psi_{out}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_f \vec{x} - E_f t) \right] \quad (2.18)$$

Onde $E = \frac{p^2}{2m}$ e τ o volume da caixa (arbitrário), substituindo ψ_{out} e usando $\tau = (2\pi)^3$ por conveniência¹, temos agora

$$S_{fi} = \delta(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in} dx_f dx_i dx dt \quad (2.19)$$

¹Também foi usado $\int e^{i\vec{q}\vec{p}} d\vec{x} = (2\pi)^3 \delta(\vec{q})$

A amplitude de espalhamento parece então ser um elemento da matriz S do qual o elemento (fi) aparece acima, essa é a matriz de espalhamento ou matriz S . O primeiro termo corresponde ao caso sem interação dando uma conservação do momento e uma matriz S unitária. Interações genuínas estão no segundo termo e a amplitude que um certo "out" tem a partir de um certo "in" é:

$$A = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f t_f; x t) V(x, t) K_0(x t; x_i t_i) \psi_{in} dx_f dx_i dx dt \quad (2.20)$$

Agora temos uma expressão para a amplitude de espalhamento em termos do propagador livre K_0 e potencial V . O segundo termo pode ser traduzido em um conjunto de regras para a amplitude de espalhamento, essas regras são as "Feynman rules".

3 Quantização da integral de caminhos e regras de Feynman: Campos escalares

3.1 Funcional gerador para campos escalares.

Suponha que o campo escalar $\phi(x)$ tenha uma fonte J , podemos definir a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença da fonte como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i\epsilon\phi^2}{2} \right] \right\} \quad (3.1)$$

Ao invés de dividir o tempo em segmentos, vamos dividir o espaço de Minkowski em cubos 4-dimensionais de volume δ^4 e tomar em cada volume ϕ como uma contante. Derivadas são aproximadas por:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i,j,k,l} \simeq \frac{\phi(x_i + \delta, y_j, z_k, t_l) - \phi(x_i, y_j, z_k, t_l)}{\delta} \quad (3.2)$$

Podemos, formalmente, substituir os índices (i, j, k, l) por n , assim:

$$\mathcal{L}(\phi(x_i, y_j, z_k, t_l), \partial_\mu \phi(x_i, y_j, z_k, t_l)) = \mathcal{L}(\phi_n, \partial_\mu \phi_n) \quad (3.3)$$

Dessa forma $Z[J]$ discretizado será:

$$Z[J] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N^4} d\phi_n \exp \left\{ i \sum_{n=1}^{N^4} \delta^4 \left[\mathcal{L}_n + J_n \phi_n + \frac{i\epsilon\phi_n^2}{2} \right] \right\} \quad (3.4)$$

Quando $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2}$ (partícula livre), temos para Z contínuo:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi - J(x)\phi(x) \right] \right\} \quad (3.5)$$

Observe que ϕ não obedece a eq. de Klein-Gordon, então vamos substituir ϕ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \phi_0(x), \quad \text{onde } \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0 = \phi_0 (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi. \quad (3.6)$$

Assim,

$$Z_0[J] = \int \left(\frac{\phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi}{2} + \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0 + \frac{\phi_0 (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0}{2} - \phi_0 J - \phi J \right) \quad (3.7)$$

Escolhendo ϕ_0 de tal forma que:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0 = J \quad (3.8)$$

onde a solução é:

$$\phi_0(x) = - \int \Delta_F(x-y) J(y) d^4y, \quad \text{que obedece } (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \Delta_F(x) = -\delta^4(x). \quad (3.9)$$

Sendo $\Delta_F(x-y)$ chamado de propagador de Feynman². Usando essas informações temos,

$$Z_0[J] = \exp \left\{ \frac{-i}{2} \int (x) \Delta_F(x-y) J(y) d^4x d^4y \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{-i}{2} \int \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi d^4x \right\} \quad (3.10)$$

Temos agora uma expressão para $Z_0[J]$ em que J e ϕ estão separados, como Z depende somente de J , podemos considerar o termo dependente de ϕ como um número, tendo assim o funcional gerados para campos escalares

$$Z_0[J] = N \exp \left\{ \frac{-i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) d^4x d^4y \right\} \quad (3.11)$$

3.2 Funções de Green para partículas livre

Funções de Green, ou funções n -ponto, da teoria são os valores esperados no vácuo de produtos ordenados no tempo de operadores de campo.

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)) | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} \quad (3.12)$$

Onde T é o operador de ordenamento temporal. Agora vamos calcular τ para a função 1-ponto, temos:

$$\tau(x_1) = \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_1)} \Bigg|_{J=0} = \frac{N}{i} \left(\frac{-i}{2} \int \Delta_F(x_1-y) J(y) d^4y \right) \exp \left\{ \frac{-i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) d^4x d^4y \right\} \Bigg|_{J=0} = 0 \quad (3.13)$$

Para 2-ponto:

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Bigg|_{J=0} = i \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (3.14)$$

Para 3-ponto:

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{i^3} \frac{\delta^3 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \Bigg|_{J=0} = 0 \quad (3.15)$$

Para 4-ponto:

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Bigg|_{J=0} = -\Delta_F(x_2 - x_3) \Delta_F(x_1 - x_4) - \Delta_F(x_2 - x_1) \Delta_F(x_3 - x_4) - \Delta_F(x_3 - x_1) \Delta_F(x_2 - x_4) \quad (3.16)$$

$$\Delta_F(x_2 - x_1) \Delta_F(x_3 - x_4) - \Delta_F(x_3 - x_1) \Delta_F(x_2 - x_4) \quad (3.17)$$

Essa é simplesmente a soma de produtos de funções 2-ponto, então podemos escrever:

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\tau(x_2, x_3) \tau(x_1, x_4) - \tau(x_2, x_1) \tau(x_3, x_4) - \tau(x_3, x_1) \tau(x_2, x_4) \quad (3.18)$$

Em ordens maiores temos que para n ímpar $\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ e para n par:

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \sum_{perm} \tau(x_{p1}, x_{p2}) \dots \tau(x_{p2n-1}, x_{p2n}) \quad (3.19)$$

3.3 Funcionais geradores para campo com interação

Temos que para uma Lagrangiana com interação no formato $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, Z_0 pode ser escrito na forma:

$$Z[J] = N \exp \left[i \int \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] Z_0[J] \quad (3.20)$$

O que vem de um resultado impressionante já que a parte com interação está explicitamente separada da parte livre. Agora podemos calcular as funções de Green para o caso de campos com interação. Nesse trabalho iremos calcular para o campo com interação ϕ^4 por meio da teoria de perturbação.

²A representação de Fourier de $\Delta_F(x)$ é dada por: $\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4K e^{-iKx}}{K^2 - m^2 + i\epsilon}$

3.3.1 Funcional Gerador com interação ϕ^4

O termo de interação da Lagrangiana na teoria com interação ϕ^4 é $\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4}\phi^4$, onde g é a constante de acoplamento. Escrevendo $Z[J]$ normalizado,

$$Z[J] = \frac{N \exp \left[i \int \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x) \Delta(x-y) J(y) \right]}{\left\{ N \exp \left[i \int \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x) \Delta(x-y) J(y) \right] \right\} \Big|_{J=0}} \quad (3.21)$$

A forma de tratar $\exp(i \int \mathcal{L}_{int})$ é como uma série de potências na constante de acoplamento por teoria de perturbação. Substituindo \mathcal{L}_{int} em $Z[J]$ e expandindo em série de potências de g , temos no numerador:

$$\left[1 - \frac{ig}{4!} \int \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4 + O(g^2) \right] \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x) \Delta(x-y) J(y) \right] \quad (3.22)$$

Resolvendo as derivadas, temos:

$$\left\{ -3[\Delta_F(0)]^2 + 6i\Delta_F(0) \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^2 + \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^4 \right\} \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \quad (3.23)$$

Assim no numerador, temos:

$$1 - \frac{ig}{4!} \left\{ -3[\Delta_F(0)]^2 + 6i\Delta_F(0) \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^2 + \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^4 \right\} \exp \left[\frac{-i}{2} \int J \Delta_F J \right] \quad (3.24)$$

No denominador, temos com $J = 0$:

$$1 - \frac{ig}{4!} \{ -3[\Delta_F(0)]^2 \} \quad (3.25)$$

Expandindo o denominador na forma binomial, temos que $Z[J]$ é:

$$Z[J] = 1 - \frac{ig}{4!} \left\{ 6i\Delta_F(0) \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^2 + \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^4 \right\} \exp \left[\frac{-i}{2} \int J \Delta_F J \right] \quad (3.26)$$

No caso de uma função 2-ponto, temos que $\tau(x_1, x_2)$ será:

$$\tau(x_1, x_2) = - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2} \Delta_F(0) \int \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) dz + O(g^2) \quad (3.27)$$

No caso de uma função 4-ponto, temos que $\tau(x_1, x_2, x_3, x_4)$ será:

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) - 3ig\Delta_F(0) \int \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(z - x_3) \Delta_F(z - x_4) dz - \quad (3.28)$$

$$-ig \int \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) \Delta_F(z - x_3) \Delta_F(z - x_4) dz \quad (3.29)$$

Esses são os funcionais geradores da teoria com interação ϕ^4 para os casos com 2 e 4 pontos.

4 Renormalização

4.1 Divergências na teoria ϕ^4

Uma quantidade importante que apareceu na seção anterior foi $\Delta_F(0)$, mas:

$$\Delta_F(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{q^2 - m^2} \quad (4.1)$$

Podemos perceber que existe quatro potências de q no numerador e somente duas no denominador, então essa integral diverge quadraticamente quando q é grande. Um caso de diagrama de ordem g^2 que também diverge é:

$$g^2 \int \frac{dq_1}{(2\pi)^4} \frac{dq_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} \quad (4.2)$$

Temos quatro potências de q no numerador e no denominador, obtendo uma divergência logarítmica para q grande. Para saber o grau de divergência superficial de um diagrama usamos:

$$D = dL - 2I \quad (4.3)$$

Onde d é o número de dimensões do espaço-tempo, I o número de linhas internas e L o número de momentos independentes. Também podemos escrever D em termos do número das linhas externas E e o número de vértices n como:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right)E + n(d - 4) \quad (4.4)$$

Para ϕ^4 , temos $D = 4 - E$, o que nos dá o resultado correto para os diagramas acima (quando $E = 2$, $D = 2$ e quando $E = 4$, $D = 0$). Mas no caso em que E é maior do que 4 não significa obrigatoriamente que o diagrama converge. Segundo o teorema de Weinberg também temos que considerar se divergência de todos os sub-diagramas também é negativa.

4.2 Análise dimensional

A análise dimensional nos dá algumas ideias interessantes, a ação para d dimensões:

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \quad (4.5)$$

é adimensional (desconsiderando \hbar). Portanto \mathcal{L} tem dimensão $-d$. O termo de energia cinética de \mathcal{L} é $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ (desconsidere as dimensões de $g_{\mu\nu}$), como $[\partial_\mu] = L^{-1}$ (L aqui é comprimento), nós temos $[\phi] = L^{1-\frac{d}{2}}$. Agora considerando uma interação $g\phi^r$, onde $[g] = L^{-\delta}$, então:

$$\delta = d + r - \frac{rd}{2} \quad (4.6)$$

A constante de acoplamento tem as seguintes dimensões nestas teorias:

$$g\phi^4 : \delta = 4 - d; \quad g\phi^3 : \delta = 3 - \frac{d}{2}; \quad \phi^6 : \delta = 6 - 2d \quad (4.7)$$

4.3 Regularização dimensional da teoria ϕ^4

Regularização é um método de isolar as divergências nas integrais de Feynman, faz com que a renormalização seja muito mais explícita. Um método elegante e menos problemático é o da regularização dimensional. A ideia é tratar as integrais de Loop (as que causam divergência) como integrais sobre um momento d -dimensional e então fazer o limite $d \rightarrow 4$. O primeiro passo é generalizar a Lagrangiana 4-dimensional para d dimensões, obtendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 - \frac{g}{4!} \phi^4 \rightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 - \frac{\mu^{4-d} g}{4!} \phi^4 \quad (4.8)$$

Onde, para manter g adimensional em d dimensões multiplicamos pelo termo μ^{4-d} , sendo μ um termo arbitrário de massa. Agora usamos as regras de Feynman correspondentes para calcular a correção de ordem g para o propagador livre.

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{g}{2} \int \frac{d^4 p}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{g\mu^{4-d}}{2} \int \frac{d^d p}{p^2 - m^2} \quad (4.9)$$

Usando que

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 + 2pq + m^2)^\alpha} = i(-1)^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - \frac{d}{2}}} \quad (4.10)$$

temos que a integral d -dimensional é igual a

$$-\frac{ig}{32\pi^2}m^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \quad (4.11)$$

Então expandindo sobre $d = 4$, usando que:

$$\Gamma(-n + e) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n + 1) + O(\epsilon) \right] \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

E colocando que $\epsilon = 4 - d$, temos

$$\Gamma(1 - d/2) = \Gamma(-1\epsilon/2) = \frac{-2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon) \quad (4.14)$$

Usando que $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln(a) + \dots$,

$$\frac{-igm^2}{32\pi^2} \left[\frac{-2}{\epsilon} - 1 + \gamma + (\epsilon) \right] \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2}\right) \right] \quad (4.15)$$

$$= \frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} + \text{finita} \quad (4.16)$$

Calculando para a função 4-ponto para ordem g^2 , obtemos

$$\frac{g^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2} \rightarrow \frac{(\mu^2)^{4-d}g^2}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2} \quad (4.17)$$

$$\rightarrow -ig\mu^\epsilon \left(1 - \frac{3g}{16\pi^2\epsilon} \right) + \text{finita} \quad (4.18)$$

Vale a pena lembrar que as correções feitas não são da mesma ordem na constante de acoplamento g , $\Gamma^{(2)}$ é para a ordem g e $\Gamma^{(4)}$ para a ordem g^2 . O parâmetro que permanece nos cálculos é o número de Loops (nesse caso um). Assim tendo mais razões para acreditar que a expansão em número de Loops tem mais significado físico do que uma expansão na constante g .

4.4 Renormalização da Teoria ϕ^4

Começaremos considerando as funções vértices $\Gamma^{(2)}(p)$ e $\Gamma^{(4)}(p)$. Para a aproximação de 1-Loop nós estamos considerando que seja finito, então:

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 \left(1 - \frac{g}{16\pi^2\epsilon} \right) \rightarrow p^2 - m_1^2 \quad (4.19)$$

Onde³

$$m^2 = m_1^2 \left(1 + \frac{g}{16\pi^2\epsilon} \right) \quad (4.20)$$

A massa física, m_1 , é dada por $-\Gamma^{(2)}(0)$. Aplicando o mesmo tratamento para $\Gamma^{(4)}$

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g\mu^\epsilon - \frac{g^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\epsilon} - \gamma - F(s, m, \mu) - F(t, m, \mu) - F(u, m, \mu) \right] \quad (4.21)$$

Definimos um novo parâmetro g_1 , que é a constante de acoplamento renormalizada⁴

$$g_1 = g\mu^\epsilon - \frac{g^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\epsilon} - \gamma - 3F(0, m, \mu) \right] \quad (4.22)$$

Aqui g_1 é considerado finito e, g infinito. Colocando $\Gamma^{(4)}$ em termos de g_1

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g_1 + \frac{g_1^2\mu^{-\epsilon}}{32\pi^2} (F(s, m, \mu) + F(t, m, \mu) + F(u, m, \mu)) \quad (4.23)$$

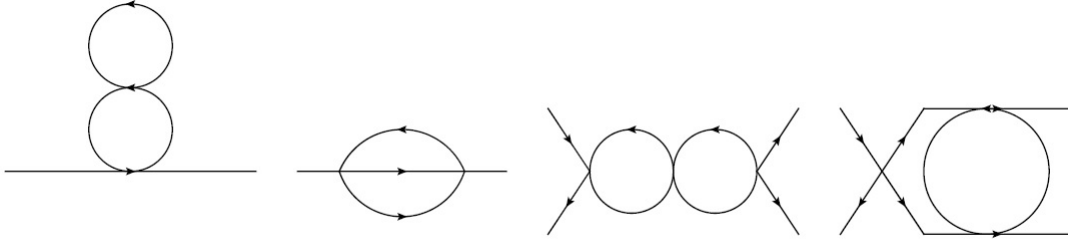


Figura 1. Diagramas relevantes para 2-Loop

Onde $i\Gamma^{(4)}(p_i = 0) = g_1$, pois quando $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0 \rightarrow s = t = u = 0$). Até agora renormalizamos a teoria ϕ^4 para 1-Loop. Para uma aproximação 2-Loop, temos de relevantes os diagramas na figura 1.

Pela análise das integrais envolvidas, se acha que (veja, Amit 1978) para $\Gamma^{(4)}$ a adição dos diagramas acrescenta divergências, que podem ser resolvidas com a renormalização da massa e redefinição da constante de acoplamento. Entretanto, $\Gamma^{(2)}$ permanece divergente - a renormalização da massa não remove a divergência do segundo diagrama. A divergência é removida por absorção num fator multiplicativo, e definimos a função 2-ponto $\Gamma_r^{(2)}$ por

$$\Gamma_r^{(2)} = Z_\phi(g_1, m_1, \mu)\Gamma^{(2)} \quad (4.24)$$

Agora $\Gamma_r^{(2)}$ é finito e Z_ϕ é infinito. $Z_\phi^{1/2}$ é chamado de constante de acoplamento da renormalização da função de onda (ou do campo). Z_ϕ pode ser expandido no número de Loops, dando⁵

$$Z_\phi = 1 + g_1 Z_1 + g_2 Z_2 + \dots = 1 + g_2 Z_2 + g_3 Z_3 + \dots \quad (4.25)$$

A equação para $\Gamma_r^{(2)}$ equivale a renormalização da amplitude do campo, mas o valor não pode ser completamente arbitrário. Da mesma forma que fizemos para 1-Loop quando definimos $\Gamma^{(2)}(0) = m_1$ e $i\Gamma^{(0)} = g_1$ nós queremos que em algum ponto⁶, por exemplo, $p^2 = 0$, a amplitude do campo é unidade, então

$$\left. \frac{\partial \Gamma_r^{(2)}}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = 1 \quad (4.26)$$

O fato que $\Gamma_r^{(2)}(p, m_1, \mu)$ era divergente significa que na aproximação 2-Loop m_1 é infinito (quando $\epsilon \rightarrow 0$). O vértice $\Gamma_r^{(2)}$ renormalizado, entretanto, dá uma massa finita agora $m_r = Z_\phi m_1^2$ renormalizada. Isto quer dizer que a divergência entre Z_ϕ e m_1 cancelam. E, da mesma forma que a introdução de Z_ϕ mudou a massa também irá mudar a constante de acoplamento. Analogamente a $\Gamma_r^{(2)} = Z_\phi \Gamma^{(2)}$

$$\Gamma_r^{(4)} = Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(p, m_1, \mu) \rightarrow g_r = Z_\phi^2 g_1 \quad (4.27)$$

Z_ϕ é uma função de $g_1 = g\mu^\epsilon$, então escrevendo explicitamente a função vértice de n-partículas renormalizada é

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) = Z_\phi^{n/2} (g\mu^\epsilon) \Gamma^{(n)}(p_i, g, m) \quad \text{ou} \quad \Gamma^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\phi^{-n/2} (g\mu^\epsilon) \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \quad (4.28)$$

5 Expansão do Produto de Operadores

Na teoria quântica de campos, para muitas aplicações precisamos calcular o produto de alguns operadores, como por exemplo o produto de campos na lagrangiana, mesmo se esses operadores locais são quantidades bem definidas (ao menos no

³Substituímos $m \rightarrow m_1$ na correção de Loop, pois o erro é de ordem g^2 .

⁴ g em termos de g_1 é $g = g_1 \mu^\epsilon + \frac{3g_1^2 \mu^{-2\epsilon}}{32\pi^2} [\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0, m_1, \mu)]$

⁵Não há contribuição de 1-Loop

⁶A escolha $p^2 = 0$ é arbitrária

caso perturbativo). Além do mais, em algumas aplicações como a seção de espalhamento para a formação de hádrões por aniquilação total e^+e^- no limite de altas energias, precisamos controlar o comportamento singular do produtos de operadores quando o ponto de aplicação deles coincide. O objetivo de expansão de operadores introduzida por Wilson [5] (Wilson, 1964) é a análise precisa de quando o ponto de aplicação coincide, no nível de operadores, mesmo para o produto usual de operadores locais.

O principal resultado, conhecido como expansão do produto de operadores (OPE), é que para qualquer dois operadores locais no espaço-tempo $A(x_1)$ e $B(x_2)$ o produto deles pode ser expresso numa base de operadores locais regulares \mathcal{O}^i acompanhados por coeficientes singulares $C_i(x_1, x_2)$ quando $x_1 \rightarrow x_2$

$$A(x_1)B(x_2) = \sum_i C_i(x_1, x_2) \mathcal{O}^i\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad (5.1)$$

Enfatizamos que esses resultados, formulados por Wilson, são obtidos a partir do tratamento de campos na teoria quântica como distribuições de Schwartz. Além disso, a prova de 5.1 existe somente para teoria quântica de campos renormalizável e não pode ser generalizada para teorias não-perturbativas mais complexas, como por exemplo, teoria de gravitação. O principal motivo, é que a análise dentro [6] da teoria de distribuições de Schwartz requer matemática de alto nível para se trabalhar deixando problemas não-perturbativos muito complicados.

6 Hiperfunções

6.1 Fundamentação teórica

Pelo teorema de Sato toda distribuição pode ser reformuladas como uma hiperfunção. A ideia de trabalhar com hiperfunções é que hiperfunções são matematicamente mais simples de serem trabalhados quando comparado a distribuições. Antes de entrar no assunto de hiperfunções propriamente dito precisamos comentar sobre alguns assuntos de análise complexa e topologia. Primeiro precisamos definir o que é vizinha complexa [7].

Num plano complexo, dado um intervalo aberto $\mathcal{I} = (a, b)$ (no eixo real), a vizinhança complexa $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ é um conjunto aberto em \mathbb{C} que contém \mathcal{I} , sendo que \mathcal{I} é fechado em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ e os pontos $a, b \notin \mathcal{D}(\mathcal{I})$ (ver figura 2). Outro objeto importante a

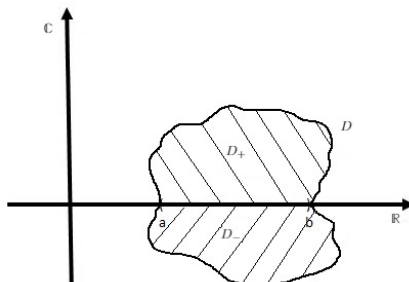


Figura 2. Vizinhança complexa $\mathcal{D}(\mathcal{I})$

definir é $\mathcal{H}(V)$, $\mathcal{H}(V)$ é a família de todas as funções holomorfas em V , assim um elemento de $\mathcal{H}(V)$ é uma função holomorfa dentro do conjunto aberto $V \in \mathbb{C}$.

- Definição: Sendo $F_1 \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_1(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I})$ e $F_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_2(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I})$, onde \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 são duas vizinhanças complexas quaisquer de \mathcal{I} , definimos a relação de equivalência⁷ $F_1 \sim F_2$ se, e somente se, existe função holomorfa ϕ em $(\mathcal{D}_1(\mathcal{I}) \cap \mathcal{D}_2(\mathcal{I})) \setminus \mathcal{I}$, tal que

$$F_1 - F_2 = \phi \Big|_{(\mathcal{D}_1(\mathcal{I}) \cap \mathcal{D}_2(\mathcal{I})) \setminus \mathcal{I}} \quad (6.1)$$

⁷Com uma equivalência temos acompanhado uma classe de equivalência, é importante notar que a classe de equivalência não dependente da vizinhança D .

6.2 Hiperfunção

Dado $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I})$ a hiperfunção $[F]$ é a classe de equivalência gerada pela função F , ou seja, todas as funções equivalentes a F . Dividindo o conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I}$ na forma $\mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$ onde $\mathcal{D}_\pm = \mathbb{C}_\pm \cap \mathcal{D}(\mathcal{I})$ ⁸ (ver figura 2) podemos escrever F em componentes $F_+ \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_+(\mathcal{I}))$ e $F_- \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_-(\mathcal{I}))$.

- Definição: Dado F ou F_+ e F_- o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F_+(x+i\epsilon) - F_-(x-i\epsilon)] \equiv f(x) \quad (6.2)$$

é chamado de função induzida. O limite pode ser reduzido a dois casos:

- 1º Caso - O limite existe e então o ponto é chamado de ponto regular⁹
- 2º Caso - O limite não existe e então o ponto é chamado de ponto singular¹⁰

- Lema: Se $x \in \mathcal{I}_0$ e $G \sim F$ então a função induzida por G é igual a função induzida por F .

Exemplo: Dado F e G abaixo, encontrar a função induzida $f(x)$ e $g(x)$

$$a) F = \begin{cases} g(x), & \text{se } F \in \mathcal{D}_+ \\ 0, & \text{se } F \in \mathcal{D}_- \end{cases} \quad b) G = -\frac{1}{2\pi iz} \quad (6.3)$$

Onde $g(x)$ é analítica e $z \in \mathbb{C}$. No caso a), temos

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F_+(x+i\epsilon) - F_-(x-i\epsilon)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x+i\epsilon) - 0 = g(x) \quad (6.4)$$

ou seja, qualquer função analítica pode ser escrita como hiperfunção. Escrevendo o limite para b), temos para quando $x \neq 0$

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F_+(x+i\epsilon) - F_-(x-i\epsilon)] = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x+i\epsilon} - \frac{1}{x-i\epsilon} \right] = 0 \quad (6.5)$$

Para $x = 0$, temos que o limite não existe, ou seja, $x = 0$ é ponto singular. Assim, podemos concluir que $[G]$ é a definição do que conhecemos como delta função, mas agora temos ela bem definida.

6.3 Integração de Hiperfunções

Considere uma hiperfunção qualquer $[F] = [F_+, F_-]$ dentro de um domínio $\mathcal{D}_+(\mathcal{I}) \cup \mathcal{D}_-(\mathcal{I})$, onde dentro do intervalo aberto $\mathcal{I} = (a, b)$, consideramos um intervalo fechado $[p, q] \subset \mathcal{I}$ (ver figura 3). Escolhemos qualquer caminho $\gamma_+ \in \mathcal{D}_+$ e $\gamma_- \in \mathcal{D}_-$ e o contorno $C = -(\gamma_+ - \gamma_-)$ e, assim, definimos

$$\int_p^q [F] dx = \int_{\gamma_+} F_+ dz - \int_{\gamma_-} F_- dz = - \oint_C F dz \quad (6.6)$$

Exemplo: Sendo $\mathcal{I} = \mathbb{R}$; $[F] = [\delta] = \left[\frac{(-1)}{2\pi i Z} \right]$, encontrar o valor das integrais abaixo

$$a) \int_p^q [\delta] dx \quad b) \int_p^q [\delta] \Psi(x) dx \quad (6.7)$$

Sabemos que o ponto singular da hiperfunção $[\delta]$ é em $x = 0$, então escolhemos qualquer p e q que contenha a singularidade, no caso a)

$$\int_p^q [\delta] dx = - \oint \frac{(-1)}{2\pi iz} = 1 \quad (6.8)$$

Para b)

$$b) \int_p^q [\delta] \Psi(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z} \Psi(z) dz = \Psi(0) \quad (6.9)$$

Aqui percebe-se a facilidade de demonstrar resultados já conhecidos na teoria de distribuições usando as hiperfunções de Sato, também vemos como uma distribuição pode ser equivalentemente expressa em termos de hiperfunções.

⁸ $\mathbb{C}_+ = \{ \forall z \mid \text{Im}(z) > 0 \}$ e $\mathbb{C}_- = \{ \forall z \mid \text{Im}(z) < 0 \}$

⁹ $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ - Conjunto de todos os pontos regulares.

¹⁰ $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ - Conjunto de todos os pontos singulares.

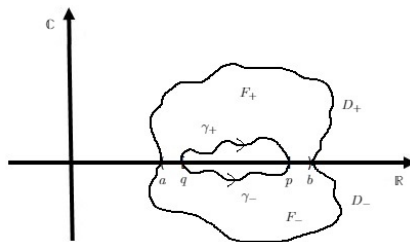


Figura 3.

7 Conclusão

O principal objetivo desse estudo foi compreender a conexão entre a teoria de renormalização na teoria quântica de campos e a teoria de distribuições desenvolvida no formato da teoria de hiperfunções de Sato. Iniciamos esse trabalho com a formulação da integral de caminhos da mecânica quântica para teoria quântica de campos, depois quantizamos o campo escalar por quantização da integral de caminhos. Isso nos permitiu encontrar os propagadores para o campo escalar e introduzir interação na teoria. Obtivemos dentro da teoria propagadores divergentes ($\Delta(0)$), como a nossa abordagem foi feita por teoria de perturbação, tínhamos a preocupação de que para termos de ordem mais alta o grau da divergência fosse aumentar, mas os problemas criados por essas divergências foram renormalizados para termos uma teoria de campos confiável.

Como campos são tratados também como operadores muitas vezes precisamos saber o resultado do produto entre eles, mas quando os pontos de aplicação se aproximam temos singularidades. Para contornar esse problema podemos expandir o produto em uma base de operadores regulares acompanhado de coeficientes singulares quando o ponto de aplicação de um operador se aproxima do outro usando a teoria de distribuições de Schwartz. Entretanto o uso da teoria de distribuições traz inconvenientes por se tratar de uma teoria rebuscada que necessita de alto nível matemático e que em problemas não perturbativos não permite avançar.

O teorema de Sato nós dá uma alternativa que tem grande potencial de resolver os problemas onde a matemática de distribuições não permite avançar. A teoria, demonstração e análise dentro da teoria de hiperfunções é mais compreensível quando comparado a teoria de distribuições dando uma capacidade maior a teoria de se retirar significado físico. Um problema ainda em aberto seria o uso de hiperfunções para reobter a expansão do produto de operadores que existe para teoria quântica de campos, além da generalização para outras teorias onde a matemática da distribuição de Schwartz não permite progredir.

Referências

- [1] T. Lancaster and S. J. Blundell, “Quantum Field Theory for the Gifted Amateur.,” *Oxford University Press* **1** .
- [2] L. Schwartz, “Théorie des distributions,” *Hermann*. (1951) 1–2.
- [3] M. Sato, “Theory of Hyperfunctions, I,” *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry* **1** (1959) 139–193.
- [4] L. H. Ryder, “Quantum field theory.,” *Cambridge University Press*. **2** (1996) .
- [5] K. Wilson and W. Zimmermann, “Operator Product Expansions and Composite Field Operators in the General Framework of Quantum Field Theory,” *Commun. math. Phys.* **24** (1972) 87–106.
- [6] R. F. Streater and A. S. Wightman, “PCT, spin and statistics and all that.,” *W.a. Benjamin* **1** (1964) .
- [7] M. Nakahara., “Geometry, Topology and Physics.,” *Taylor Francis* **2** (1990) .