

Integrabilidade Clássica e Quântica: Funções de Baker-Akhiezer

Bárbara Andrade¹, Arsen Melikyan²

Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brasil

E-mail: 1. andradesantosb@gmail.com;

2. amelik@gmail.com .

ABSTRACT: Nesse projeto, procuramos a solução da equação de KdV em duas situações: primeiro em um espaço infinito onde o perfil $u(x, t)$ da onda vai para zero para x suficientemente grande e depois para um espaço finito com a solução $u(x, t)$ periódica. No primeiro caso, reescrevemos a equação no formalismo de pares de Lax e aplicamos a técnica do espalhamento inverso para deduzir a forma geral da solução, que permite explicar o comportamento de N sólitons. No caso periódico, a técnica anterior não funciona e utilizamos as funções de Baker-Akhiezer, funções meromorfas definidas em uma superfície de Riemann, para explicar o comportamento solitônico.

KEYWORDS: Funções de Baker-Akhiezer, Espalhamento Inverso, Integrabilidade, KdV

1 Introdução: KdV Linear e Transformada de Fourier

Os sólitons, ou ondas solitárias, são ondas capazes de percorrer grandes distâncias sem perder sua forma. Elas foram descobertas pelo inglês John Scott Russel em 1834, entretanto, a explicação do fenômeno só foi dada em 1895 por D. J. Korteweg e G. de Vries, que formularam a equação de KdV:

$$u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0. \quad (1.1)$$

As derivadas parciais foram denotadas por subíndices, de forma que a derivada parcial de u em relação a t é escrita como u_t . Os outros termos com subíndices são definidos da mesma maneira. O termo $-6uu_x$ representa a não linearidade dessa equação e podemos reescalar as variáveis sem alterar fundamentalmente o problema.¹ Nesse trabalho, iremos resolver essa equação não linear com diferentes condições para a solução. Mas antes disso iremos resolver o problema linear usando Transformada de Fourier para fazer uma analogia e entendermos melhor o espalhamento inverso.

Considere então o problema linear com uma condição inicial conhecida:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.3)$$

Supondo que $u(x, t) \rightarrow 0$ para x muito grande, podemos usar transformada de Fourier para resolver esse problema. Uma vez que estamos lidando com o perfil de uma onda no infinito, esta suposição é bastante razoável. Vamos denotar a transformada de Fourier de $u(x, t)$ por $\tilde{u}(\lambda, t)$ e a definição usada será

$$\tilde{u}(\lambda, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\lambda x} dx. \quad (1.4)$$

Aplicando a transformada na equação linearizada (1.3), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}(\lambda, t)) - (-i\lambda)^3 \tilde{u}(\lambda, t) = 0, \text{ ou seja, } \tilde{u}(\lambda, t) = c(\lambda) e^{i\lambda^3 t}. \quad (1.5)$$

Para encontrar a constante de integração $c(\lambda)$, usamos a condição inicial: $\tilde{u}(x, 0) = c(\lambda)$. Então,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{u}(x, 0) e^{i\lambda^3 t}. \quad (1.6)$$

¹ Temos liberdade para fazer mudanças do tipo

$$x \rightarrow \alpha x; \quad t \rightarrow \beta t; \quad u \rightarrow \gamma u. \quad (1.2)$$

Para voltar a $u(x, t)$, usamos transformada inversa:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, 0) e^{i\lambda^3 t - i\lambda x} d\lambda. \quad (1.7)$$

Em síntese, começamos com a equação linearizada com uma condição inicial, aplicamos a transformada de Fourier e determinamos a solução do problema transformado a partir da condição que tínhamos. Depois disso construímos a evolução temporal do problema e, usando a transformada inversa, obtemos a solução do problema original. Assim, resolvemos indiretamente o problema de partir da condição inicial e encontrar uma solução geral.

2 KdV Não Linear: Par de Lax e Espalhamento Inverso

Para resolver o problema não linear, vamos aplicar procedimento análogo, onde iremos facilitar a evolução temporal. A técnica que iremos desenvolver é chamada de espalhamento inverso (ver [1] e [2]). Vamos introduzir o conceito de pares de Lax, demonstrar que para um determinado par é possível escrever a equação de *KdV* como duas equações lineares e depois resolver o problema usando o formalismo de Lax. Pares de Lax - nesse caso, L e A - são operadores representados por matrizes de ordem 2 que satisfazem as equações

$$\psi_x = L \psi, \quad (2.1)$$

$$\psi_t = A \psi. \quad (2.2)$$

A matriz ψ , também de ordem 2, é escrita como:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Além das equações (2.1) e (2.2), os operadores do par de Lax devem ser tais que a condição de consistência $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ é satisfeita. Usando as equações (2.1) e (2.2) e essa condição de consistência, derivamos

$$L_t - A_x - [A, L] = 0, \quad (2.4)$$

onde $[A, L]$ é o comutador entre A e L . A equação (2.4) é chamada equação de compatibilidade ou condição de curvatura zero². Usando diferentes matrizes L e A nessa condição, conseguimos escrever diversas equações, como KdV, Sine-Gordon, Schrödinger Não Linear (ver [2], [3] e [4]). A escolha que leva a KdV em sua forma não linear é

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Para verificar que (2.5) e (2.6) nos levam de fato a equação de KdV não linear, colocamos essa escolha de operadores na condição de curvatura zero (2.4). O resultado será uma combinação linear de potências de λ que implica a própria equação de KdV:

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^0 \begin{pmatrix} 0 & i(u_t - 6u u_x - u_{xxx}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ então, } u_t - 6u u_x - u_{xxx} = 0.$$

Assim concluímos que podemos tratar a equação *KdV* usando duas equações lineares, (2.1) e (2.2), com operadores L e A dados por (2.5) e (2.6), que obedecem a condição de curvatura zero (2.4).

Iremos escrever as equações diferenciais envolvendo os elementos da primeira coluna de ψ para depois obter uma equação de Schrödinger de ψ_{21} , a solução $u(x, t)$ vai aparecer como um potencial. Substituindo (2.5) em (2.1), temos

$$\psi'_{11} = i\lambda \psi_{11} + iu \psi_{21}, \quad \psi'_{21} = i\psi_{11} - i\lambda \psi_{21}, \quad (2.7)$$

²Para cada par A e L que satisfaz essa condição existe um par de operadores L' e A' tais que $[L', A'] = \partial_t L'$. Essa equação também é equivalente a $[L', \partial_t - A'] = 0$

onde ψ' denota derivada parcial em relação a x . Derivando ψ'_{21} em relação a x , utilizando as equações (2.7) e definindo $\Phi := \psi_{21}$,

$$\Phi'' + (\lambda^2 + u) \Phi = 0. \quad (2.8)$$

Na equação de Schrödinger, λ representa o momento e u o potencial. A partir de agora, assim como fizemos na transformação de Fourier, iremos considerar $u(x, t) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Mais precisamente, considere $u(x, t) \rightarrow 0$ para $|x| \gg 1$. Nesse limite, a equação (2.8) possui solução do tipo

$$\Phi = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}. \quad (2.9)$$

Temos liberdade de escolher o comportamento assintótico dessa solução, então considere

$$\Phi = \gamma e^{-i\lambda t}, \quad x \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \Phi = \gamma (a(\lambda, t) e^{-i\lambda t} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.10)$$

Chamaremos as funções $a(\lambda, t)$ e $b(\lambda, t)$ de dados de espalhamento. Já que queremos encontrar $u(x, t)$, poderíamos ter escolhido outros comportamentos assintóticos para $\Phi(x, \lambda)$, fizemos essa escolha - que corresponde à função de Jost - como uma simplificação (ver [4]). Os passos que iremos seguir agora se assemelham com o que fizemos usando transformada de Fourier. Substituindo $u(x, 0)$ na equação (2.8), é possível encontrar $a(\lambda, 0)$ e $b(\lambda, 0)$. Agora precisamos determinar a evolução temporal, isto é, encontrar $a(\lambda, t)$ e $b(\lambda, t)$.

Colocando (2.6) em (2.2), no limite $|x| \gg 1$ com $u(x, t) \rightarrow 0$, obtemos as seguintes equações envolvendo os elementos ψ_{11} e ψ_{21} :

$$\dot{\psi}_{11} = -4i \lambda^3 \psi_{11}, \quad \dot{\psi}_{21} = -4i \lambda^2 \psi_{11} + 4i \lambda^3 \psi_{21}, \quad (2.11)$$

onde $\dot{\psi}$ denota derivada parcial em relação a t . Considerando o mesmo limite em (2.7), temos

$$\psi'_{11} = i \lambda \psi_{11} \quad \text{e} \quad \psi'_{21} = i \psi_{11} - i \lambda \psi_{21}. \quad (2.12)$$

Para determinar ψ_{11} e ψ_{21} quando $|x| \rightarrow \infty$, utilizamos os comportamentos assintóticos (2.10) de ψ_{21} nas equações (2.12). Assim obtemos

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, \quad \text{quando } x \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\gamma \lambda b e^{i\lambda x} \\ \gamma (a e^{-i\lambda x} + b e^{i\lambda x}) \end{pmatrix}, \quad \text{quando } x \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Substituindo esses resultados em (2.11), determinamos os parâmetros que faltam

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = e^{4i\lambda^3 t}. \quad (2.14)$$

2.1 Propriedades e Teoremas

Determinados os dados de espalhamento $a(\lambda, t)$ e $b(\lambda, t)$, iremos investigar algumas propriedades dessas funções e das soluções da equação de Schrödinger para construir uma expressão para $u(x, t)$. Nessas contas, decidimos omitir $\gamma(t)$, pois ele será fatorizado de todas as expressões.

A. $|a(\lambda, t)|^2 - |b(\lambda, t)|^2 = 1$.

A equação de Schrödinger (2.8) pode ser escrita em termos de operadores da seguinte maneira:

$$-(\partial_x^2 + u)\Phi = \lambda^2 \Phi. \quad (2.15)$$

Definindo $L = \partial_x^2 + u$, podemos mostrar que L é hermiteano, ou seja, $L = L^\dagger$. Observando a equação (2.15) percebemos que $L = L^\dagger$ implica $\lambda^2 = \overline{(\lambda^2)}$. Isso significa que λ^2 deve ser real. Agora podemos concluir que $\bar{\Phi}$ também deve ser solução de (2.15). Calculando o Wronskiano dessas duas soluções nos limites $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$ e exigindo que ele seja constante, provamos a nossa relação

$$W(\Phi, \bar{\Phi}) \Big|_{x \rightarrow -\infty} = W(\Phi, \bar{\Phi}) \Big|_{x \rightarrow \infty}, \quad \text{então, } |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (2.16)$$

B. $a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} W(\Phi, \Gamma)$.

Seja Γ uma solução da equação de Schrödinger cujo comportamento assintótico é $\Gamma \rightarrow e^{i\lambda x}$, $x \rightarrow \infty$ ³. Calculando o Wronskiano entre Φ e Γ no limite $x \rightarrow \infty$, obtemos $2i\lambda a$. Isso significa que

$$a(\lambda, t) = \frac{1}{2i\lambda} W(\Phi, \Gamma) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{2i\lambda} W(\Phi, \Gamma). \quad (2.17)$$

C. Analiticidade de $a(\lambda, t)$ e $\overline{a(\lambda, t)}$.

Para analisar quando que a função $a(\lambda, t)$ e seu conjugado são analíticas, vamos assumir que as equações de Schrödinger para Φ e para Γ podem ser escritas como equações integrais linear da seguinte maneira:⁴

$$\Phi(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} - \int_{-\infty}^x \frac{\sin(\lambda(x-\beta))}{\lambda} u(\beta) \Phi(\beta, \lambda) d\beta \quad \text{e} \quad \Gamma(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \frac{\sin(\lambda(x-\beta))}{\lambda} u(\beta) \Gamma(\beta, \lambda) d\beta. \quad (2.18)$$

Como simplificação para a análise da analiticidade, vamos considerar a função

$$h(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) e^{i\lambda x} = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{(e^{2i\lambda(x-\beta)} - 1)}{2i\lambda} u(\beta) h(\beta, \lambda) d\beta \quad (2.19)$$

ao invés de $\Phi(x, \lambda)$. Essa troca é possível pois $h(x, \lambda)$ analítica implica $\Phi(x, \lambda)$ analítica. Uma vez que $\Phi(x, \lambda) = h(x, \lambda) e^{-i\lambda x}$, (2.8) corresponde a seguinte equação para $h(x, \lambda)$

$$h'' - 2i\lambda h' + uh = 0. \quad (2.20)$$

As equações lineares, em geral, possuem a seguinte estrutura

$$f(x) = g(x) + \int_a^x k(x, \beta) d\beta. \quad (2.21)$$

Chamamos a função $k(x, \beta)$ de núcleo da equação. Especificamente, para $f(x) = h(x, \lambda)$ temos $g(x) = 1$ e

$$k(x, \beta) = \frac{(e^{2i\lambda(x-\beta)} - 1)}{2i\lambda} u(\beta). \quad (2.22)$$

Teorema 1: Se $k(x, \beta)$ for uma função contínua, limitada e se $|k(x, \beta)| < M \forall x \forall \beta$, onde M é um número real positivo, então a solução da equação linear (2.21) é uma função contínua. Caso $k(x, \beta)$ seja limitada e analítica, a solução será analítica. (Para a demonstração desse teorema, ver [5]).

Assim, para que $h(x, \lambda)$ seja analítica, é necessário que $k(x, \beta)$ seja limitada e analítica. Olhando para os limites da integral de (2.19), vemos que $\beta < x$ ou $x - \beta > 0$. Dito isso, para que a exponencial em (2.22) seja limitada, precisamos que $Im(\lambda) > 0$. Dito isso, concluímos que

$$Im(\lambda) > 0 \text{ implica } k(x, \beta) \text{ limitada.} \quad (2.23)$$

Além disso, uma vez que $k(x, \beta)$ não possui singularidade, ela é uma função analítica. Logo, já que $k(x, \beta)$ é limitada e analítica, pelo **Teorema 1** concluímos que $h(x, \lambda)$ - e, conseqüentemente, $\Phi(x, \lambda)$ - são analíticas. Usando procedimento análogo, é possível mostrar que $\Gamma(x, \lambda)$ também é analítica quando $Im(\lambda) > 0$. Usando esses resultados e considerando que as derivadas das funções $\Phi(x, \lambda)$ e $\Gamma(x, \lambda)$ também são analíticas, verificamos que o Wronskiano $W(\Phi, \Gamma)$ deve ser uma função analítica. Por fim, dado que o Wronskiano é constante e, pela equação (2.17), que $W = 2i\lambda a(\lambda)$,

$$Im(\lambda) > 0 \text{ implica } \overline{a(\lambda)} \text{ analítica.} \quad (2.24)$$

Para descobrir a condição para a função conjugada de $a(\lambda)$, denotada por $\overline{a(\lambda)}$, basta realizar o mesmo procedimento que fizemos para $a(\lambda)$ e no final calcular os conjugados das funções e do Wronskiano. A conclusão será que $\overline{a(\lambda)}$ vai ser analítica quando $Im(\lambda) < 0$.

³Para verificar que Γ é de fato uma solução, basta substituir esse comportamento no limite $x \rightarrow \infty$ da equação de Schrödinger observando que $u(x, t) \rightarrow 0$ nesse caso.

⁴Para provar que essas equações realmente representam Φ e Γ , aplique $L = \partial_x^2 + u$ nessas equações e verifique que o resultado obtido será $-\lambda^2 \Phi$. Para essa conta utilizamos $\frac{d}{d\alpha} \left[\int_a^{b(\alpha)} F(\alpha, y) dy \right] = \int_a^{b(\alpha)} \frac{dF(\alpha, y)}{d\alpha} dy + \frac{db(\alpha)}{d\alpha} F(b, y) - \frac{da(\alpha)}{d\alpha} F(a, y)$.

D. Comportamento de $a(\lambda)$ e $\overline{a(\lambda)}$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Como nas equações integrais lineares de $\Phi(x, \lambda)$ e $\Gamma(x, \lambda)$ (equações (2.18)) sempre teremos x diferente de β , podemos multiplicar e dividir o integrando pela diferença $(x - \beta)$. Assim, se fizermos $\lambda \rightarrow \infty$, teremos $\frac{\sin(\lambda(x-\beta))}{\lambda(x-\beta)} \rightarrow 0$, o que significa que

$$\Phi(x, \lambda) \rightarrow e^{-i\lambda x}, \quad \overline{\Phi(x, \lambda)} \rightarrow e^{i\lambda x}, \quad \Gamma(x, \lambda) \rightarrow e^{i\lambda x} \quad \text{e} \quad \overline{\Gamma(x, \lambda)} \rightarrow e^{-i\lambda x}. \quad (2.25)$$

Nesse limite, $W(\Phi, \Gamma) = 2i\lambda$. Entretanto, o Wronskiano deve ser constante e, pela propriedade **B**, temos $W(\Phi, \Gamma) = 2i\lambda a$. Igualando os dois, temos $a(\lambda) \rightarrow 1$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Pelo mesmo raciocínio, para $\overline{a(\lambda)}$ teremos $\overline{a(\lambda)} \rightarrow 1$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

E. Os dados de espalhamento podem ser totalmente determinados se conhecermos a função $r(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$.

Combinando a definição de $r(\lambda)$ com a (2.16),

$$|a|^2 = \frac{1}{1 - |r|^2} \quad \text{e} \quad |b|^2 = \frac{|r|^2}{1 - |r|^2}. \quad (2.26)$$

Isso significa que $r(\lambda)$ permite achar $|a(\lambda)|$ e $|b(\lambda)|$. Entretanto, como $a(\lambda)$ e $b(\lambda)$ são números complexos, para determiná-los completamente resta encontrar a fase. Pelo teorema de Cauchy, se uma função $\Phi(z)$ é analítica em um domínio D e se \mathcal{C} é um contorno fechado em D , então podemos escrever

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\Phi(w)}{w - z} dw, \quad z \notin \mathcal{C}. \quad (2.27)$$

Assim precisamos apenas conhecer os valores da função no contorno \mathcal{C} .

Fórmulas de Sokohtski-Plemelj: Seja L um contorno suave (fechado ou aberto) e seja $\Phi(z)$ uma função analítica no ponto t . Então os limites $\Phi(t)^+$ e $\Phi(t)^-$ da integral de Cauchy de $\Phi(z)$, definida na equação (2.27), de quando z se aproxima de L pela esquerda ou pela direita, respectivamente, e quando t não é um ponto de fronteira de L , são dados por

$$\Phi(t)^\pm = \pm \frac{\Phi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \text{onde } \int \text{denota o valor principal, } \int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L-L_\epsilon} \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (2.28)$$

O caminho L_ϵ é uma parte do caminho L que possui comprimento 2ϵ e cujo centro é o ponto t . (Para a demonstração dessas fórmulas, ver [6]).

Vamos aplicar (2.28) para calcular o limite $\Phi(\lambda)^+$ da função $\Phi(\lambda) = \ln(a(\lambda))$ e verificar que podemos escrever o argumento de $a(\lambda)$, denotado por $\arg(a(\lambda))$, apenas em termos de $|r(\lambda)|$. Usando o caminho L que vai de $-\infty$ a ∞ , obtemos

$$\Phi(\lambda)^+ = \frac{\ln(a(\lambda))}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(a(\tau))}{\tau - \lambda} d\tau. \quad (2.29)$$

Por outro lado, $\Phi(\lambda)^+$ é definido como

$$\Phi(\lambda)^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(a(\lambda + \epsilon)). \quad (2.30)$$

Onde ϵ é um valor arbitrariamente pequeno, mas nunca negativo. Como $a(\lambda)$ é analítica para $\text{Im}(\lambda) > 0$,

$$\Phi(\lambda)^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(a(\lambda + \epsilon)) = \ln(a(\lambda)). \quad (2.31)$$

Colocando esse resultado na equação (2.29), igualando as partes imaginárias e usando (2.26), é possível determinar o argumento de $a(\lambda)$ em termos de $r(\lambda)$

$$\arg(a(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(\tau)|^2)}{\tau - \lambda} d\tau \quad (2.32)$$

Além disso, como $b(\lambda) = r(\lambda)a(\lambda)$, isso significa que $\arg(b(\lambda)) = \arg(r) + \arg(a)$. Concluímos então que basta conhecer $r(\lambda)$ para escrever os dados de espalhamento.

3 Equação de Gelfand-Levitan-Marchenko

A equação integral linear que temos que resolver para $h(x, \lambda)$ é (2.19), que pode ser reescrita como

$$2i\lambda (h(x, \lambda) - 1) = - \int_{-\infty}^x (e^{2i\lambda(x-z)} - 1) u(z) h(z, \lambda) dz \quad (3.1)$$

Queremos considerar o limite $\lambda \rightarrow \infty$. Já que nesse limite $\Phi(x, \lambda) \rightarrow e^{-i\lambda x}$, teremos $h(x, \lambda) \rightarrow 1$. Porém não podemos calcular diretamente esse limite, visto que encontraríamos uma indeterminação do lado esquerdo. Por isso vamos analisar o que acontece com o lado direito. Podemos separar a integral do lado direito de (3.1) em duas partes,

$$2i\lambda (h(x, \lambda) - 1) = - \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda(x-z)} u(z) h(z, \lambda) dz + \int_{-\infty}^x u(z) h(z, \lambda) dz. \quad (3.2)$$

Assim, no limite $\lambda \rightarrow \infty$, a segunda integral do lado direito será apenas a integral de $u(z)$ de $-\infty$ a x . Sobre a primeira integral do lado direito da equação, podemos usar a desigualdade do módulo da integral para escrever

$$\left| - \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda(x-z)} u(z) h(z, \lambda) dz \right| \leq \int_{-\infty}^x \left| e^{2i\lambda(x-z)} \right| |u(z) h(z, \lambda)| dz. \quad (3.3)$$

Vamos calcular o limite para $\lambda \rightarrow \infty$ na desigualdade. Já que $Im(\lambda) > 0$ e, por causa dos limites da integral, $x - z < 0$, teremos $e^{2i\lambda(x-z)} \rightarrow 0$. Além disso, nesse limite teremos $u(z)h(z, \lambda) \rightarrow u(z)$. Dessa forma, o limite do lado direito da desigualdade torna-se zero e, como o módulo é positivo definido,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda(x-z)} u(z) h(z, \lambda) dz = 0. \quad (3.4)$$

Agora podemos calcular o limite da equação (3.2)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda (h(x, \lambda) - 1) = \int_{-\infty}^x u(x) dx, \text{ então, } u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda (h(x, \lambda) - 1) \right). \quad (3.5)$$

Os comportamentos assintóticos que temos para as soluções da equação de Schrodinger em $x \rightarrow \infty$ são:

$$\Gamma \rightarrow e^{i\lambda x}, \quad \bar{\Gamma} \rightarrow e^{-i\lambda x}, \quad \text{e} \quad \Phi \rightarrow a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda)e^{i\lambda x}. \quad (3.6)$$

Mas, já que são soluções de uma equação diferencial de segunda ordem, não podem ser independentes. Vamos propor

$$\Phi(x, \lambda) = \eta_1 \overline{\Gamma(x, \lambda)} + \eta_2 \Gamma(x, \lambda). \quad (3.7)$$

Comparando com os limites assintóticos, temos $\eta_1 = a(\lambda)$ e $\eta_2 = b(\lambda)$. Ou, já que $a(\lambda)$ é diferente de zero,

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} = \overline{\Gamma(x, \lambda)} + r(\lambda)\Gamma(x, \lambda). \quad (3.8)$$

Vamos manipular essa equação introduzindo uma outra variável que será usada apenas como fator de integração da seguinte maneira,

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)} = [\overline{\Gamma(x, \lambda)} + r(\lambda)\Gamma(x, \lambda)] e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)} \quad (3.9)$$

Se integrarmos os dois lados com respeito a λ de $-\infty$ até ∞ , teremos a integral do lado esquerdo da equação igual a zero. Como já vimos, as funções $\Phi(x, \lambda)$ e $a(\lambda)$ são analíticas para $Im(\lambda) > 0$, ou seja, a integral do lado esquerdo em um contorno fechado valerá zero. Não precisamos nos preocupar com as contribuições no infinito porque a função vale zero nesse limite. Assim, integrando a equação e substituindo $\Gamma(x, \lambda)$ e $\overline{\Gamma(x, \lambda)}$ pela forma em termos de equação linear,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} \left[\int_x^{\infty} k(x, \beta) e^{-i\lambda\beta} d\beta + r(\lambda) \left(e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} k(x, \beta) e^{i\lambda\beta} d\beta \right) \right] d\lambda = 0. \quad (3.10)$$

Seja $\hat{k}(x, \beta)$ uma função que vale $k(x, \beta)$ quando $x < \beta$ e zero quando $x > \beta$. Dessa maneira, o primeiro termo da integral torna-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(x, \beta) e^{-i\lambda\beta} d\beta \right) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(x, \beta) e^{-i\lambda\beta} d\beta \right) = 2\pi \hat{k}(x, y). \quad (3.11)$$

Aqui calculamos a transformada inversa da transformada de Fourier de $\hat{k}(x, y)$. Voltando a (3.10),

$$2\pi \hat{k}(x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{i\lambda(x+y)} d\lambda + \int_x^{\infty} k(x, \beta) e^{i\lambda\beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0. \quad (3.12)$$

Definindo a função

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r\lambda e^{i\lambda z} d\lambda, \quad (3.13)$$

e considerando $x < y$, de forma que $\hat{k}(x, y) = k(x, y)$, torna-se

$$k(x, y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} d\beta k(x, \beta) F(\beta+y) = 0. \quad (3.14)$$

Essa é a equação de Gelfand-Levitan-Marchenko.

3.1 Espectro Discreto

Iremos estudar o que acontece quando restringimos λ a valores discretos. Começamos da nossa equação de Schrodinger para Φ :

$$\Phi'' + (\lambda^2 + u(x))\Phi = 0, \quad (3.15)$$

com a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x)|^2 dx < \infty. \quad (3.16)$$

Teorema 2 (Marchenko): Dado potencial $u(x)$ que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty, \quad (3.17)$$

existe um número finito de λ_n e eles podem ser escritos como $\lambda_n = ik_n$, com $k_n > 0$.

Já sabemos que quando $k_n > 0$, a função $a(\lambda)$ é analítica. Agora queremos mostrar que $a(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = \lambda_n$ (espectro discreto). Primeiro vamos mostrar a ida. Sabemos que

$$a(\lambda) = \frac{W(\Phi, \Gamma)}{2i\lambda}. \quad (3.18)$$

Assim, $a(\lambda) = 0$ implica $W(\Phi, \Gamma) = 0$. Porém, Wronskiano igual a zero significa que as duas soluções não são independentes. Ou seja, existe c tal que $\Phi(x, \lambda) = c\Gamma(x, \lambda)$. Como estamos considerando $Im(\lambda) > 0$, podemos escrever os limites assintóticos da seguinte maneira:

i) quando $x \rightarrow -\infty$, $\Phi \rightarrow e^{-i\lambda x}$ e $|\Phi| = e^{Im(\lambda)x} \rightarrow 0$ e

ii) quando $x \rightarrow \infty$, $|\Phi| = |c|\Gamma \rightarrow |c|e^{-Im(\lambda)x} \rightarrow 0$.

Uma vez que a função tende a zero nos extremos, ela deve ser de quadrado integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 dx < \infty. \quad (3.19)$$

Isso significa que para cada autovalor discreto, temos uma única autofunção. Conclui-se então que λ precisa ser um valor discreto. Para mostrar a volta, considere então $\lambda = \lambda_n$, de forma que

$$a(\lambda_n) = \frac{1}{2i\lambda_n} W(\Phi(x, \lambda_n), \Gamma(x, \lambda_n)). \quad (3.20)$$

Vamos mostrar a equação de Gelfand-Levitan-Marchenko para o caso discreto. Começando de

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)} = \overline{[\Gamma(x, \lambda)]} + r(\lambda)\Gamma(x, \lambda) e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)}. \quad (3.21)$$

Dessa vez, quando integrarmos o primeiro termo do lado esquerdo em relação a λ de $-\infty$ até ∞ , teremos que usar o teorema do resíduo, pois a função é singular nos pontos em que $\lambda = (\lambda)_n$. Entretanto, a integral do segundo termo continua sendo zero, pois é uma função analítica. Chamando a integral do lado esquerdo de I_1 e do lado direito de I_2 , teremos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}_{\lambda=\lambda_n} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} \right] = 2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{\Phi(x, ik_n) e^{-k_n y}}{a'(ik_n)}, \quad (3.22)$$

aqui expandimos $a(\lambda)$ em torno de λ_n e escrevemos $\lambda_n = ik_n$, com $k_n > 0$. Além disso, $a'(ik_n)$ denota a derivada de $a(\lambda)$ em relação a λ no ponto λ_n . Como discutimos antes, nos pontos em que $\lambda = \lambda_n$ as funções Φ e Γ são dependentes. Ou seja, para cada λ_n temos um d_n de tal forma que $\Phi(x, ik_n) = d_n \Gamma(x, ik_n)$. Usando isso e escrevendo $\Gamma(x, ik_n)$ na sua forma integral,

$$I_1 = 2\pi i \sum_{n=1}^N \left(\frac{d_n e^{-k_n(x+y)}}{a'(ik_n)} \right) + \left(\frac{\int_x^{\infty} d_n k(x, \beta) e^{-k_n(\beta+y)} d\beta}{a'(ik_n)} \right). \quad (3.23)$$

Além disso, o lado direito da integral será

$$I_2 = 2\pi k(x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} r(ik_n) e^{-k_n(x+y)} i dk_n + \int_x^{\infty} k(x, \beta) e^{-k_n \beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} r(ik_n) e^{-k_n y} i dk_n. \quad (3.24)$$

Antes de igualar as integrais, vamos definir a função

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(ik_n) e^{-k_n z} i dk_n - i \sum_{n=1}^N \frac{d_n e^{-k_n z}}{a'(ik_n)}. \quad (3.25)$$

Agora igualando as integrais e utilizando a definição de F , obtemos a equação de Gelfand-Levitan-Marchenko discreta:

$$2\pi k(x, \beta) + 2\pi F(x+y) + \int_x^{\infty} k(x, \beta) F(x+\beta) d\beta = 0. \quad (3.26)$$

Para eliminarmos a parte contínua de $F(z)$, vamos considerar $b(\lambda) = 0$. Isso significa que $r(\lambda) = 0$. Nesse caso,

$$F(z) = -i \sum_{n=1}^N \beta_n e^{-k_n z}, \quad (3.27)$$

onde β_n é definida por $\beta_n = \frac{-i d_n}{a'(ik_n)}$. Assim, escrevemos GLM como sendo

$$k(x, y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} k(x, u) F(x+u) du = 0, \quad (3.28)$$

onde u é apenas a variável de integração e não tem relação com a solução $u(x, t)$ do nosso problema. Para simplificar essa integral, vamos lembrar que $k(x, u)$ é o núcleo da integral linear para Γ :

$$\Gamma = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} k(x, u) e^{-k_n u} du. \quad (3.29)$$

Então vamos definir

$$k(x, u) = \sum_{n=1}^N \Lambda_n(x) e^{-k_n y}. \quad (3.30)$$

Então escrevemos GLM como sendo

$$\sum_{n=1}^N e^{-k_n y} \left[\Lambda_n(x) + \beta_n e^{-k_n x} + \sum_{m=1}^N \frac{\Lambda_m(x) \beta_n e^{-x(k_n+k_m)}}{(k_n+k_m)} \right] = 0. \quad (3.31)$$

Já que as exponenciais $e^{-k_n y}$ são independentes para cada valor de n , essa igualdade é satisfeita se, e somente se,

$$\Lambda_n(x) + \beta_n e^{-k_n x} + \sum_{m=1}^N \frac{\Lambda_m(x) \beta_m e^{-x(k_n+k_m)}}{(k_n+k_m)} = 0. \quad (3.32)$$

Note que aqui temos N equações, uma para cada valor de n . Defina $\alpha_n = -\beta_n e^{-k_n x}$. Para escrever esse problema matricialmente, vamos definir uma matriz M com elementos

$$M_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\beta_i e^{-x(k_i+k_j)}}{(k_i+k_j)}. \quad (3.33)$$

Então o problema de se encontrar os $\Lambda_n(x)$ pode ser visto da seguinte maneira: $\Lambda M = A$. Onde Λ é uma matriz coluna cujo elemento da coluna j é $\Lambda_j(x)$, A também é uma matriz coluna cujo elemento da coluna j é α_j . A solução desse problema pode ser encontrada pela regra de Cramer:

$$\Lambda_n(x) = \frac{\det(\mathcal{M}^{(n)})}{\det(M)}, \quad (3.34)$$

onde $\mathcal{M}^{(n)}$ é a matriz M com a n -ésima coluna substituída pela matriz A . A expressão para $u(x, t)$ (3.5) que encontramos na última seção pode ser reescrita utilizando a definição de $h(x, \lambda)$ em termos de equação integral linear (2.19) para obtermos

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial k(x, x)}{\partial x} \quad (3.35)$$

Podemos usar a matriz M para escrever $k(x, x)$

$$k(x, x) = \frac{1}{\det(M)} \sum_{n=1}^N \det(\mathcal{M}^{(n)}) e^{-k_n x} = \text{Tr}[M^{-1} \frac{dM}{dx}] = \frac{d}{dx} [\ln(\det(M))]. \quad (3.36)$$

Então a equação (3.35) torna-se

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\ln(\det(M))]. \quad (3.37)$$

Esse resultado já explica o comportamento de N sólitons. Essa solução tem a forma de pacotes de onda, que estão bem localizados, e cujo comportamento pode ser comparado com o de uma partícula.

4 Caso Periódico: Funções de Baker-Akhiezer

Se abandonarmos a consideração de que $u(x, t) \rightarrow 0$ quando $|x| \gg 1$, todo o desenvolvimento da solução encontrada na seção anterior deixa de ser válido - estamos considerando esse comportamento desde que comparamos a equação (2.8) com a equação de Schrödinger. Nessa seção iremos considerar o caso periódico, ou seja, $u(x + \tau) = u(x)$. Considere a seguinte escolha bastante geral para os operadores que formam o par de Lax:

$$L = \sum_{k=0}^n u_k(x, t) \partial_x^k \quad \text{e} \quad A = \sum_{k=0}^m v_k(x, t) \partial_x^k \quad (4.1)$$

Como qualquer sistema integrável possui uma representação com pares de Lax, essa escolha geral de operadores pode ser aplicada para diversos problemas. Uma forma alternativa de se escrever a condição de curvatura zero é como $[L, \partial_t - A] = 0$ (ver a referência de Integrable System 1). Essa forma é mais conveniente porque podemos tratar o caso estacionário, dado por $[L, A] = 0$, e para generalizar basta mudar o operador A por $\partial_t - A$. Como simplificação, a partir de agora chamaremos L de L_1 e A de L_2 . De início, considere o problema estacionário:

$$\begin{cases} u(x + \tau) = u(x), \\ [L_1, L_2] = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Para a equação de KdV , podemos utilizar os seguintes operadores de Lax em termos de operadores diferenciais [1]:

$$L = -\partial_x^2 + u(x, t) \quad \text{e} \quad A = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x \quad (4.3)$$

A ideia central para a solução desse problema é que iremos procurar por funções de Baker-Akhiezer, definidas sobre uma Superfície de Riemann (ver [3]), cujos parâmetros nos levarão diretamente a $u(x)$. Assim, resolver a equação torna-se equivalente a encontrar a função de Baker-Akhiezer correta para um dado par de Lax. Para esse desenvolvimento, vamos introduzir alguns conceitos sobre funções de Baker-Akhiezer (ver [7] e [8]).

Teorema 3 (Burchnall-Chaundy):

A. Dados dois operadores diferenciais que comutam, $[L_1, L_2] = 0$, existe um polinômio $Q(z, w)$, com z e w complexos, tal que $Q(L_1, L_2) = 0$.

B. Os autovalores z e w tais que $L_1\psi = z\psi$ e $L_2\psi = w\psi$ formam um ponto $P = (z, w)$ que pertence a curva espectral Γ , definida por

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | Q(z, w) = 0\}. \quad (4.4)$$

C. Quando $\text{mdc}(m, n) = 1$ (4.1) a autofunção $\psi(x, P)$ é única. Se $\text{mdc}(m, n) \neq 1$, estaremos no caso degenerado e devemos colocar índices em $\psi(x, P)$. Nesse trabalho iremos sempre considerar o caso não degenerado.

Dito isso, uma função $\psi(x, P)$ de Baker-Akhiezer é uma função do tipo

$$\psi(x, P) = e^{kx} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i(x)}{(k(P))^i} \right), \quad (4.5)$$

onde P representa pontos da curva algébrica Γ de gênero g .

Três propriedades importantes das funções de Baker-Akhiezer:

- i. A função $\psi(x, P)$ possui singularidade essencial em um ponto Q da superfície de Riemann, $k^{-1}(Q) = 0$;
- ii. Existem g pontos, $\gamma_1, \dots, \gamma_g \in \Gamma$, onde a função de Baker-Akhiezer tem pólo simples;
- iii. Para cada k^{-1} com os pontos $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, a função de Baker-Akhiezer é única.

Vamos considerar uma função meromórfica $f(P)$ com pólo de ordem n em q . Nesse caso,

$$f(P) = b_n k^n + \dots + b_1 k + a_0 + \frac{a_1}{k}. \quad (4.6)$$

Queremos mostrar a seguinte relação:

$$[\partial_x^n - u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} - \dots - u_0(x) - f(P)]\psi(x, P) = e^{kx}\mathcal{O}(k^{-1}). \quad (4.7)$$

Vamos começar calculando $\partial_x^n \psi(x, P) - f(P)\psi(x, P)$. A n -ésima derivada de $\psi(x, P)$ vai ser algo do tipo $k^n e^{kx} + \mathcal{O}(k^{n-1})e^{kx}$, então se escolhermos $b_n = 1$ teremos

$$\partial_x^n \psi(x, P) - f(P)\psi(x, P) = u_{n-1}(x)k^{n-1}e^{kx} + \mathcal{O}(k^{n-2})e^{kx}, \quad (4.8)$$

onde $u_{n-1}(x)$ é uma função dos $\xi_i(x)$. Como a $(n-1)$ -ésima derivada de $\psi(x, P)$ será algo como $k^{n-1}e^{kx} + \mathcal{O}(k^{n-2})e^{kx}$,

$$\partial_x^n \psi(x, P) - u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} \psi(x, P) - f(P)\psi(x, P) = u_{n-2}(x)k^{n-2}e^{kx} + \mathcal{O}(k^{n-3})e^{kx}. \quad (4.9)$$

Repetindo esse processo diversas vezes até a derivada de ordem zero, chegamos em nossa relação:

$$[\partial_x^n - u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} - \dots - u_0(x) - f(P)]\psi(x, P) = e^{kx}\mathcal{O}(k^{-1}). \quad (4.10)$$

Definindo o operador L_1

$$L_1 = \partial_x^n - u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} - \dots - u_0(x), \quad (4.11)$$

a relação que provamos pode ser escrita de maneira compacta como

$$(L_1 - f(P))\psi(x, P) = e^{kx}\mathcal{O}(k^{-1}). \quad (4.12)$$

Veja que se tivermos uma outra função de Baker-Akhiezer $\tilde{\psi} = \psi + e^{kx}\mathcal{O}(k^{-1})$, essa função terá os mesmos dados espectrais de ψ : $\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g$. Porém o teorema de Burchall-Chaundy garante que a função de Baker-Akhiezer é única para esses dados espectrais, ou seja, $\mathcal{O}(k^{-1}) = 0$. Assim,

$$L_1\psi(x, P) = f(P)\psi(x, P). \quad (4.13)$$

Analogamente, para uma função meromórfica $g(P)$ com pólo de ordem m em q é possível mostrar que

$$L_2\psi(x, P) = g(P)\psi(x, P), \quad (4.14)$$

com $L_2 = \partial_x^m - v_{n-1}(x)\partial_x^{m-1} - \dots - v_0(x)$. Calculando o comutador entre os dois operadores, obtemos $[L_1, L_2]\psi = 0$. Isso significa que ψ pertence ao núcleo do operador $[L_1, L_2]$. Note que a dimensão desse operador é finita (igual a $m + n - 1$). A dimensão do núcleo de um operador de dimensão finita deve ser também finita, entretanto ψ é definida na superfície de Riemann, ou seja, não pode estar contido em um conjunto de dimensão finita. Concluímos então que L_1 e L_2 comutam: $[L_1, L_2] = 0$. Isso significa que escolhendo os dados espectrais adequados, podemos chegar ao par de Lax desejado por meio da função de Baker-Akhiezer. Em termos dos parâmetros de $\psi(x, P)$, a solução que buscamos (que aparece como u_0 do operador L_1) é dada por $u(x) = u_0 = -\partial_x \xi_1(x)$. Para entender o que acontece no caso não estacionário vamos precisar de mais um teorema.

Teorema 4 (Krichever): para cada conjunto de dados espectrais $\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g$, existe uma única função de Baker-Akhiezer $\psi(x, t, P)$ associada a ele que

i. ao redor de q é dada por

$$\psi(x, t, P) = e^{kx + R(k)t} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i(x)}{(k(P))^i} \right), \quad (4.15)$$

onde $k(P)$, assim como antes, é tal que $k^{-1}(q) = 0$ e $R(k)$ é um polinômio de ordem n com potências de $k(P)$;

ii. é uma função meromórfica com pólos simples em $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Com isso, podemos introduzir a parte temporal de maneira bastante direta. Basta considerar que agora o operador L_2 é dado por $\partial_t - A$ e não mais por A . O desenvolvimento acontece de forma análoga ao que fizemos para o caso estacionário. Na solução da equação de KdV periódica, teremos uma fórmula bastante parecida com aquela que encontramos anteriormente (3.37), entretanto agora teremos funções teta de Riemann ao invés do determinante (ver [9]).

5 Conclusão

Nesse trabalho, utilizamos duas ferramentas muito importantes da Física Matemática para resolver a equação de KdV : espalhamento inverso e funções de Baker-Akhiezer. O espalhamento inverso é uma técnica bastante conhecida com vasta aplicação em problemas clássicos, como o que fizemos nesse projeto, e também em problemas de quantização. Para o problema não periódico, escrevemos KdV no formalismo de Lax e, com isso, foi possível aplicar o espalhamento inverso.

Por outro lado, as funções de Baker-Akhiezer são a única forma de se resolver problemas periódicos de sistemas integráveis e diversas aplicações foram feitas na última década, especialmente na área de gravitação bidimensional e teoria das cordas. O uso dessas funções para resolver problemas quânticos ainda não é totalmente entendido e pretendemos começar um trabalho original nessa área. Também podemos estudar qual a forma de se relacionar o *Thermodynamic Bethe Ansatz* no limite quasi-clássico com as funções de Baker-Akhiezer.

Referências

- [1] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky, and V. E. Zakharov, *Theory Of Solitons. The Inverse Scattering Method*. Springer US, 1984.
- [2] L. D. Faddeev, “Integrable Models In (1+1)-Dimensional Quantum Field Theory,” in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics Les Houches, France, August 2-September 10, 1982*, pp. 294–341. 1982.
- [3] B. Dubrovin, *Riemann Surfaces and Nonlinear Equations*. Amer Mathematical Society, 1999.
- [4] Faddeev and L. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [5] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley, 1989.
- [6] M. Ablowitz and A. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [7] I. K. P.G. Grinevich, *Algebraic-geometry methods in soliton theory*, In: *Soliton Theory: A Survey of Results*. Nonlinear science : theory and applications. Manchester University Press, 1990.
- [8] I. M. Krichever, ed., *Baker-Akhiezer functions and integrable systems*, In: *Integrability: The Seiberg-Witten and Whitham Equations*, CRC Press. CRC Press, 2000.
- [9] B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, and S. P. Novikov, *Integrable Systems. I*, pp. 173–280. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1990.