Supersimetria, dualidade e soluções exatas nas teorias de calibre

Ana Luísa Barbosa Leite[1,], Arsen Melikyan[1,**]

[a]*Universidade de Brasília*
[b]*Universidade de Brasília*

Abstract

Nesse estudo se registra o início do domínio de ferramentas matemáticas e de álgebra, com um pouco de teoria eletromagnética e teoria clássica de campos e topologia, que possibilitam a análise de invariâncias e dualidades eletromagnéticas com o estudo de monopolos, levando à descoberta de valores para as cargas elétrica e magnética e evidenciando simetrias resultantes de transformações como a de calibre ou de ação de grupos de Lie.

Keywords: Invariância de Calibre, Monopolos magnéticos, Dualidade eletromagnética, Grupos de Lie, Topologia

Sumário

1. Preliminares

1.1. Quadrivetores

Definição: Dizemos que um *evento* tem quatro componentes (ct, x, y, z) sendo a primeira a componente temporal. Podemos utilizar a notação:

$$x^i = (ct, r) \leftrightarrow x_i = (ct, -r) \leftrightarrow x^i x_i = c^2t^2 - r^2 \tag{1}$$

Onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. *Proposição*Um *tensor quadridimensional* consiste de 16 quantidades A_{ik}, que transformam-se como dois quadrivetores. Um tensor é dito simétrico quando $A^{ik} = A^{ki}$, e antissimétrico quando $A^{ik} = -A^{ki}$. Mais informações podem ser encontradas em [2]. *Definição:*Temos a *"quadrivelocidade"*:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{2}$$

Onde:

$$dx^i dx_i = ds^2 \leftrightarrow u^i u_i = 1 \tag{3}$$

Analogamente:

$$w^i u_i = 0 \tag{4}$$

Proposição: Os quadrivetores de velocidade e aceleração são perpendiculares entre si.

1.2. Álgebras de Lie

Definição: Um *grupo* é definido como um conjunto que satisfaz as seguintes propriedades:

- associatividade: para todo $a, b, c \in G$, $(ab)c = a(bc)$;
- $\exists$ um elemento unitário $e \in G$, tal que para todo $a \in G, ae = ea = a$;
- $\exists$ elemento inverso $a^{-1} \in G$ para todo $a \in G$ tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Definição: Um *grupo de Lie*, diferenciável no espaço $\mathbb{R}^{2n^2}$, consiste nas coordenadas Re$\mathbf{M_{ij}}$ e Im$\mathbf{M_{ij}}$, que são espaços matriciais $2n^2$, onde sua álgebra é o espaço tangente no elemento unitário.

Exemplo: O grupo U(n), que é o grupo de matrizes $n \times n$ unitárias onde $U^*U = 1$, de modo que $|detU| = 1$ para todo $U \in U(n)$.

Proposição: Se uma álgebra $A \in AG$, segue que:

- O produto de um elemento AG com um número real está contido na álgebra de Lie;
- A soma de dois elementos em AG também está contida na álgebra;
- Se A_1 e A_2 estão contidos em AG, então a comutação $[A_1, A_2]$ também está contido em AG.

Prova: Checar [4].

Proposição: Sendo a álgebra correspondente a um espaço vetorial, as matrizes da base são chamadas de geradores:

$$[T_i, T_j] = C_{ijk} T_k \tag{5}$$

1.3. Homotopias e Grupo Fundamental

Definição: Temos uma relação de *homotopia* entre dois caminhos $a(s)$ e $b(s)$, quando existe uma função contínua $L(s, t)$ tal que:

$$L(0, s) = a(s), \quad L(1, s) = b(s) \tag{6}$$

*Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil.
**Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil.
Email addresses: abarbosa1303@gmail.com (Ana Luísa Barbosa Leite), amelik@gmail.com (Arsen Melikyan)

O produto entre os caminhos, ou seja, $c = ab$ é definido por:

$$c(s) = a(2s),\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \tag{7}$$

$$c(s) = b(2s-1),\ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \tag{8}$$

Definição: Uma *classe de equivalência* é um conjunto $[a]$ em X no qual:

$$[a] = \{x \in \mathbf{X} | x \sim a\} \tag{9}$$

Onde todos os valores que possuem relação de equivalência com x formam uma classe de equivalência.

Proposição: Se existe um conjunto de caminhos homotópicos a a, então temos que $[a]$ é uma classe de homotopia. A lei de multiplicação de classes de homotopia ($[a][b] = [ab]$) define o *grupo fundamental* de $\mathbf{X}$, representado por $\pi_1(\mathbf{X})$. A prova pode ser encontrada em [3].

Definição: O grupo fundamental $\pi_1(\mathbf{X})$ possui as seguintes propriedades:

1. Se $[a] \in \pi_1(\mathbf{X})$ e $[b] \in \pi_1(\mathbf{X})$, então $[ab] \in \pi_1(\mathbf{X})$
2. $(ab)c \sim a(bc)$. Então $([a][b])[c] = [a]([b][c])$
3. $[a][1] = [a]$
4. $[a^{-1}][a] = [1]$

Seja $[X, Y]$ o grupo de todas as classes de homotopia entre X e Y. Logo, o primeiro grupo de homotopia de Y é representado por:

$$[S^1, Y] = \pi_1(\mathbf{Y}) \tag{10}$$

As homotopias entre as funções de calibre χ são representadas por:

$$[S^1, U(1)] = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z} \tag{11}$$

2. Teoria Eletromagnética

2.1. Tensor do campo eletromagnético

Adquirindo a expressão da ação pelo *princípio da mínima ação*, temos:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mcds - \frac{e}{c}\vec{A}_i dx^i\right) = 0 \tag{12}$$

Integrando por partes, temos que o termo diferencial da expressão mostra-se como:

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \tag{13}$$

Trocando índices e utilizando a arbitrariedade de ∂x^i, a expressão dentro da integral torna-se zero. Então temos:

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) \tag{14}$$

Definição: Temos a *força* como um tensor antissimétrico:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{15}$$

Teorema: Sendo o tensor de força eletromagnética definido acima, temos que:

$$F_{ik} = (\vec{E}, \vec{H}) \leftrightarrow F^{ik} = (-\vec{E}, \vec{H}) \tag{16}$$

São invariantes:

$$F^{ik}F_{ik} \tag{17}$$

$$F^{ik}F_{lm}\varepsilon^{iklm} \tag{18}$$

Proposição: Se reduzimos a expressão em (16) para apenas três dimensões, temos então que os invariantes definem-se como:

$$H^2 - E^2\ \vec{E} \cdot \vec{H} \tag{19}$$

A prova dos teoremas encontra-se em [2].

2.2. Invariância e antisimetria dos campos em relação ao tempo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\vec{\phi}\right) dt \tag{20}$$

Expressão da ação para o campo eletromagnético.

*Proposição:*Sendo a Lagrangeana o termo entre parênteses, após transformação de Legendre apropriada temos a expressão da Hamiltoniana:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\vec{\phi} \xrightarrow{transf.} \mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\vec{\phi} \tag{21}$$

Colocando em termos da intensidade de campo magnético e elétrico obtemos a *Força de Lorentz*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H} \tag{22}$$

Teorema: Temos que a variação da energia cinética, ou trabalho, utilizando $\vec{v} \times \vec{H} \cdot \vec{v} = 0$, tem a forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\mathcal{E}_{kin} = e\vec{E} \cdot \vec{v} \tag{23}$$

A grandeza acima é definida apenas pela componente elétrica, visto que a componente magnética exerce uma força perpendicular à velocidade da carga.

Proposição: A transformação $t \to -t$ torna $\vec{H} \to -\vec{H}$. Não há mudança de sinal no campo elétrico, de modo que o *potencial escalar* mantém sinal.

$$\vec{\phi} \longrightarrow \vec{\phi} \tag{24}$$

O termo magnético muda de sinal pois o sistema passa pelos mesmos estados em ordem reversa. Então:

$$\nabla \times \vec{A} \longrightarrow \nabla \times -\vec{A} \tag{25}$$

Definição: Levando em consideração as proposições acima e separando as componentes de partículas livres e interação partículas-campo, a ação do campo *sozinho* se dá por:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}F^{ik}F_{ik}d\Omega,\quad d\Omega = cdtdxdydz \tag{26}$$

2.3. Invariância de calibre

Definição: A *invariância de calibre* é definida como a adição do gradiente de uma função arbitrária no potencial vetor e a subtração da derivada em respeito ao tempo do potencial escalar. O campo em termos de seus *potenciais* se dá por:

$$\vec{E} = \frac{-1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{27}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} \tag{28}$$

A função f define unicamente os potenciais, que por sua vez definem unicamente os campos elétrico e magnético. Se subtraído de cada um dos termos potenciais o termo $\frac{\partial f}{\partial x^k}$, o potencial vetor e o potencial escalar transformam-se respectivamente:

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k} = \vec{A} + \nabla f \tag{29}$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{30}$$

3. Campo Yang Mills

Definição: A álgebra utilizada para o estudo da teoria de Yang Mills é dada por:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \tag{31}$$

*Teorema:*A presença do fator i indica que $(T^a)^+ = T^a$. Então, com o produto interno definido em SU(n), temos a relação de ortogonalidade definido a seguir:

$$\langle T^a, T^b \rangle = tr(T^{a+}, T^b) = tr(T^a, T^b) = \frac{1}{2}\delta^{abc}T^c = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{32}$$

Inserindo os potenciais de calibre nessa álgebra, temos a seguinte associação:

$$A_\mu = A^a_\mu T^a \tag{33}$$

Teorema: A regra de transformação para esses campos de calibre se dá por:

$$A_\mu \to A'_\mu(x) = \omega A_\mu(x)\omega^{-1} \tag{34}$$

Onde $\omega = 1 + \varepsilon(x)$, $\varepsilon \ll 1$. A força associada a esses potenciais deve conter os termos correspondentes ao eletromagnetismo clássico, como definido em (15):

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \tag{35}$$

A transformação do potencial:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \Omega A_\mu(x)\Omega^{-1} \tag{36}$$

Com $\Omega = 1 + \varepsilon(x)$, em que $\varepsilon(x) \ll 1$. A força deve conter um termo $F_{\mu\nu}$.

Proposição Considerando a transformação dos campos definida em 36, temos:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = \Omega F_{\mu\nu}\Omega^{-1} \tag{37}$$

Fazendo então a derivada de $A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1}$, e comparando o resultado com $[A'\mu, A'\nu]$, nota-se que permanecem apenas o primeiro termo de cada derivada, de modo que $F_{\mu\nu}$ é definida como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \tag{38}$$

O último termo, ausente na expressão definida em (35) indica a presença de termos no eixo complexo i.

*Teorema:*Se $dimG = dimR$, então o objeto $\phi = \phi^a T^a$, com $a = 1, ..., dimG$ é o vetor formado pelos campos A_μ. [4]

Então, a derivada covariante com a representação apropriada se dá por:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - i[A_\mu, \phi] \tag{39}$$

A força com o comutador:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi - (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\psi = -iF_{\mu\nu}\psi \tag{40}$$

Da mesma maneira, na representação adjunta, temos:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = -i[F_{\mu\nu}, \phi] \tag{41}$$

A ação do campo de Yang Mills, determinada pelo princípio da mínima ação, é definida por:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\, trF^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{42}$$

Onde g^2 é a constante de acoplamento e a constante anterior à integral é devido à normalização do traço, definida em (32)

As equações de movimento são obtidas através da diferenciação com respeito aos potenciais de calibre. Segue que:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu - iA_\mu)[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]] = 0 = D^*_\mu F^{\mu\nu} \tag{43}$$

Onde o último termo vem da identidade de Bianchi (${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$). As equações acima são as generalizações não-abelianas das leis de Maxwell. Os campos Yang-Mills interagem entre si, visto que as equações resultantes são não-lineares.

Explicitando a expressão inversa do acoplamento, por uma reescala:

$$\tilde{A}_\mu = \frac{1}{g}A_\mu \tag{44}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \tag{45}$$

*Proposição:*Com a mudança de escala acima, temos que a ação do campo altera-se. A constante de acoplamento está inserida na expressão da força, multiplicando assim os termos não-lineares na equação de movimento:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2}\int d^4x\, tr\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{46}$$

4. Estudo de monopolos magnéticos

4.1. Monopolo de Dirac

Analisando quanticamente um monopolo, deve ser definida uma fonte pontual de campo magnético:

$$B(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{47}$$

Onde g é a *carga magnética*. Logo:

$$g = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} \tag{48}$$

Com $\vec{\partial} \times \vec{B} = 0$ enquanto $\sum$ representa uma esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Definição: Introduzindo um potencial vetor $A = A(\vec{r})$, em coordenadas esféricas, no hemisfério superior:

$$\vec{A}_+(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi r}\frac{1 - cos\theta}{sen\theta}\hat{e}_\phi \tag{49}$$

Logo, temos $\vec{\partial} \times \vec{A} = \vec{B}$. A situação é análoga para a análise do hemisfério inferior, exceto quando $\theta = 0$ (eixo z positivo), onde $\vec{A}_-$ é singular.

Definição: Temos uma *corda de Dirac* quando para todo $\vec{A}$ compatível com tal configuração sobre alguma região, a função será sempre singular em uma região com formato de corda.

Podemos encontrar uma função χ localmente definida tal que $\vec{A}_+ + \vec{A}_- = \vec{\partial}\chi$, visto que $\vec{\partial} \times (\vec{A}_+ + \vec{A}_-) = 0$. χ não pode ser contínua.

Temos a dualidade:

$$(\vec{E}.\vec{B}) \longmapsto (\vec{B}.-\vec{E}) \tag{50}$$

Podemos evidenciar a invariância de Lorentz:

$$F^{0i} = -F^{i0} = -E^i \tag{51}$$

$$F^{ij} = -\varepsilon_{ijk}B^k \tag{52}$$

Temos então que

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 = \partial^*_\nu F^{\mu\nu} \tag{53}$$

Onde ${}^*F = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$. Tal notação torna-se útil para trabalhar com transformações de dualidade:

$$F^{\mu\nu} \mapsto^* F^{\mu\nu} \tag{54}$$

$${}^*F^{\mu\nu} \mapsto F^{\mu\nu} \tag{55}$$

No espaço de Minkovski, $\partial^*_\nu F^{\mu\nu} = 0$. Na presença de fontes, é necessário incluir j^ν e k^μ, que transformam-se da mesma maneira que (54) e (55).

$\partial^*_\nu F^{\mu\nu}$ tem que ser diferente de 0 ebp A_μ precisa ser definido nas regiões onde $k^\mu = 0$. Como A_μ é definido localmente, suas soluções relacionam-se com uma transformação de calibre.

O fluxo pode ser calculado em termos de χ:

$$g = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma^+} (\vec{\partial} \times \vec{A}_+)d\vec{S} + \int_{\Sigma^-} (\vec{\partial} \times \vec{A}_-)d\vec{S} = \int_E \vec{\partial}\chi d\vec{l} \tag{56}$$

Que resulta em $\chi(2\pi) - \chi(0)$.

Supondo a quantização da partícula no monopolo magnético, então:

$$\frac{-\hbar}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{57}$$

Teorema: $e^{-ie\chi} = e^{\frac{-ieg\phi}{2\pi}}$ é uma função de valor único, o que é equivalente à condição de quantização de Dirac: $eg = 2\pi n$.

Outra derivação da condição de quantização de Dirac é pela quantização do momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$, que *não é* conservado. De fato, utilizando a força de Lorentz, temos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = ... = \frac{d}{dt}\left(\frac{qg}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{58}$$

Onde a grandeza conservada é $\vec{J} \equiv \vec{L} - \frac{qg}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}$. Assumindo que o momento angular eletromagnético é separadamente quantizado, para que então:

$$|\vec{J}_{em}| = \frac{1}{2}n\hbar\ ,\ n \in \mathbb{Z} \tag{59}$$

O que nos leva novamente à condição de quantização de Dirac.

4.2. Monopolo t Hooft-Polyakov

Definição: A força do campo se dá por:

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - e\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \tag{60}$$

Onde $\vec{W}_\mu$ são os potenciais de calibre, que por tomarem valores em SO(3), podem ser representados como produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

O campo de Higgs:

$$D_\mu\vec{\phi} = \partial_\mu\vec{\phi} - e\vec{W}_\mu \times \vec{\phi} \tag{61}$$

O potencial, definido por $V(\phi)$, é dado:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - a^2)^2,\ \lambda > 0 < \phi^2 \tag{62}$$

Onde a é a constante correspondente ao valor esperado do campo no vácuo.

Com esses valores definidos, podemos montar a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{G}^{\mu\nu} \cdot \vec{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\vec{\phi} \cdot D_\mu\vec{\phi} - V(\phi) \tag{63}$$

Como $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{\phi}, \vec{W}_\mu)$, a lagrangeana transforma-se da seguinte maneira:

$$\vec{\phi} \longmapsto \vec{\phi}' = g(x)\vec{\phi} \tag{64}$$

$$\vec{W}_\mu \longmapsto \vec{W}'_\mu = g(x)\vec{W}_\mu g(x)^{-1} + \frac{1}{e}\partial_\mu g(x)g(x)^{-1} \tag{65}$$

Como analogia à transformação dos potenciais A_μ definidos anteriormente. Definindo $D_\nu \vec{G}^{\mu\nu}$:

$$(\partial_\nu - e\vec{W}_\nu \times \vec{\phi})[\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - e\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu] = -e\vec{\phi} \times D^\mu \phi \quad (66)$$

$$D^\mu D_\mu \vec{\phi} = -\lambda(\phi^2 - a^2)\vec{\phi} \quad (67)$$

As equações citadas anteriormente são as equações de movimento obtidas da Lagrangeana com respeito às coordenadas $\vec{W}_\mu$ e $\vec{\phi}$.

O momento canônico:

$$\vec{E}^i = -\vec{G}^{0i} \quad (68)$$

$$\vec{\Pi} = D_0\vec{\phi} \quad (69)$$

Temos que $\vec{G}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\vec{B}^k = \varepsilon^{ijk}\vec{B}_k$. De maneira que a Hamiltoniana se define como:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{E}^i \cdot \vec{E}^i + \frac{1}{2}\vec{\Pi} \cdot \vec{\Pi} + \frac{1}{2}\vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + \frac{1}{2}D_i\vec{\phi} \cdot D_i\vec{\phi} + V(\phi) \quad (70)$$

Que é invariante sob transformações de calibre. O *vácuo* é definido se $\vec{G}^{\mu\nu} = 0$,$D^\mu\vec{\phi} = 0$ e $V(\phi) = 0$. Quando $a^2 = \phi^2$, temos o vácuo de Higgs, que apresenta quebra de simetria para SO(3).

Encontrar soluções para valores finitos de energia para as equações de movimento implica a existência da integral:

$$E = \int d^3\mathcal{H} \quad (71)$$

A configuração de vácuo deve ser alcançada quando a energia tiver caráter assintótico em direção ao infinito:

$$\vec{\phi}_\infty(\hat{r}) \equiv \lim_{r\to\infty} \vec{\phi}_\infty(\vec{r}) \quad (72)$$

O limite pertence a um grupo de valores nos quais $\vec{x}$ em que $V(\vec{x}) = 0$. Esses valores são como pontos contidos em uma esfera $\mathcal{M}_0$ de raio a.

Definição: As funções de calibre são geradas pelo grupo de homotopia abaixo:

$$[S^1, S^1] = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \quad (73)$$

$\mathbb{Z}$ corresponde a um grupo com n inteiros, onde n corresponde à quantidade de vezes que um caminho fechado circula $S^1 = \left\{e^{i\theta}|0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$. Por sua vez, n corresponde ao *grau* do mapeamento/homotopia entre os dois espaços. Essa quantidade define o número topológico da função $\vec{\phi}_\infty$. Para valores constantes de $\vec{\phi}_\infty$, temos grau zero, que corresponde à configuração de vácuo do sistema.

Teorema: Uma solução de energia finita cujo grau seja diferente de zero corresponde a uma solução estável.

O grupo de calibre, representado por $SU(2)$, é simplesmente conexo:

$$\pi_1(SU(2)) = 1 \quad (74)$$

Proposição: As soluções têm simetria esférica e independem de transformações temporais, para que $\vec{W}_0 = 0$. Então $\vec{E}^i$ e $\vec{\Pi}$ tornam-se nulos em (70), de modo que as soluções correspondem aos valores máximos e mínimos de energia.

Definição: Os valores dos potenciais para a solução das equações de movimento correspondentes ao sistema, são:

$$\vec{\phi}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{er^2}H \quad (75)$$

$$W_a = [0, -\varepsilon_{aij}\frac{r^j}{er^2}(1-K)], i = 1, 2, 3. \quad (76)$$

Onde $H = H(aer)$, $K = K(aer)$ e $W_a^0 = 0$, devido a invariância da coordenada temporal. Ademais, W tem sentido radial.

Queremos que o limite (72) se aproxime de a enquanto r se aproxima do infinito. Inserindo os valores acima na expressão da energia (71), temos:

$$E= \frac{4\pi a}{e}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\left(\xi^2\frac{dH}{d\xi} + \frac{1}{2}(\xi\frac{dH}{d\xi} - H)^2 + \frac{1}{2}(K^2-1)^2 + K^2H^2 + \frac{\lambda}{4e^2}(H^2-\xi^2)\right) \quad (77)$$

A integral existe desde que H e K se aproximem de 0 e 1 tão rápido quanto $\xi = \xi(aer)$ se aproxima de zero, então $\lim_{r\to\infty}\vec{\phi}_\infty(\hat{r}) = a\hat{r}$. Há uma homotopia entre o limite e a função identidade, o que sugere a existência da solução nas condições desejadas.

Seguem as equações de movimento:

$$\xi^2\frac{dK}{d\xi} = KH^2 + K(K^2-1) \quad (78)$$

$$\xi^2\frac{dH}{d\xi} = 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}H(H^2-\xi^2) \quad (79)$$

Que com $\xi \mapsto \infty$ transformam-se em:

$$\frac{dK}{d\xi} = K \quad (80)$$

$$\frac{dH}{d\xi} = 2\frac{\lambda}{e^2}(H-\xi) \quad (81)$$

Cujas soluções juntamente com as condições de contorno impostas abaixo de (77) são:

$$K \sim e^{-\xi} = e^{\frac{-M_W r}{\hbar}} \quad (82)$$

$$H \sim \xi = e^{\frac{-M_H r}{\hbar}} \quad (83)$$

Onde M_H e M_W são as massas para os campos ψ e W_μ, respectivamente.

As formas assintóticas do campo eletromagnético e monopolo magnético:

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk}\frac{r^k}{er^3} \quad (84)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{e}\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (85)$$

Proposição Longe da origem o modelo discutido nessa seção se parece com um monopolo de Dirac de carga $-\frac{4\pi}{e}$.

No vácuo, temos:

$$D_\mu \vec{\phi} = 0 \tag{86}$$

$$\vec{\phi}^2 = a^2 \tag{87}$$

$$\vec{\phi} \times \vec{W}_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu \vec{\phi} \tag{88}$$

Note que em (88) devido ao produto vetorial, não conseguimos definir nenhuma componente de $\vec{W}_\mu$ na direção de $\vec{\phi}$. O que nos leva a calcular que:

$$\vec{W}_\mu = \frac{1}{a^2 e}\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi} + \frac{1}{a}\vec{\phi} A_\mu \tag{89}$$

Calculando o fluxo magnético, por uma superfície Σ que envolve o volume dos monopolos, temos que a carga magnética é:

$$g_\Sigma \equiv \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{2ea^2}\int_\Sigma \varepsilon_{ijk}\vec{\phi} \cdot (\partial_j \vec{\phi} \times \partial_k \vec{\phi}) \tag{90}$$

Como somente $\vec{\phi}$ tem contribuição na integral acima, temos uma dependência que pode ser explicada como uma *classe de homotopia* de $\vec{\phi}$, de modo que:

$$D_\mu \delta\vec{\phi} = 0 \tag{91}$$

$$\vec{\phi} \cdot \delta\vec{\phi} = 0 \tag{92}$$

Conclui-se que: $\delta g_\Sigma = 0$. Logo, a carga magnética é invariante sob pequenas deformações de $\vec{\phi}$ e múltipla da jacobiana de $\vec{\phi} : \Sigma \to \mathcal{M}_0$, que pertence à classe dos inteiros. Define-se essa quantidade como N_Σ, chamada do *grau* de $\vec{\phi} : \Sigma \to \mathcal{M}_0$. Então:

$$eg_\Sigma = -4\pi N_\Sigma \tag{93}$$

Utilizando a hamiltoniana (70) para obter a massa, e omitindo termos positivos, temos a desigualdade:

$$M \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{E}^i \cdot \vec{E}^i + \vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + D_i\vec{\phi} \cdot D_i\vec{\phi}) \tag{94}$$

Com uma pequena manipulação trigonométrica, conseguimos obter:

$$M \leq \sin\theta \int_{\mathbb{R}^3} D_i\vec{\phi} \cdot \vec{E}_i + \cos\theta \int_{\mathbb{R}^3} D_i\vec{\phi} \cdot \vec{B}_i \tag{95}$$

Como o último integrando corresponde a $\partial_i(\vec{\phi} \cdot \vec{B}_i)$, o segundo termo torna-se ag. Analogamente para o primeiro termo, onde $sin\theta \int_{\mathbb{R}^3} D_i\vec{\phi} \cdot \vec{E}_i = aq$. Então:

$$M \leq ag\cos\theta + aq\sin\theta \tag{96}$$

M é máximo quando $g\cos\theta = q\sin\theta$. Logo:

$$M \leq a\sqrt{q^2 + g^2} \tag{97}$$

Definição: Soluções que encaixam-se nas exigências acima são chamadas de *estados BPS*, nos quais os termos que foram omitidos na integral da massa devem ser nulos:

$$\sin\theta = 0, \ \cos\theta = \pm 1 \tag{98}$$

Os termos positivos que foram abandonados em (94) são importantes para o estudo da desigualdade na expressão. Para que exista a igualdade, tais termos devem ser nulos. Anulando os termos temos que:

$$\vec{\Pi} = D_0\vec{\phi} = 0 \tag{99}$$

De modo que, para soluções estáveis, $\vec{E}_i = 0$. Ademais:

$$\vec{B}_i = \pm D_i\vec{\phi} \tag{100}$$

O outro termo $V(\vec{\phi})$ também torna-se zero, então:

$$\lambda(\phi^2 - a^2)^2 = 0 \tag{101}$$

Proposição: Se $\lambda \neq 0$, então $\vec{\phi}^2 = a^2$. Porém, tal condição implica que $\vec{\phi} \cdot \vec{B}_i = 0$. Logo, $\lambda \to 0$ faz com que M atinja seu valor máximo. Cheque [1] para mais informação.

4.3. *Caso* $A_0 = 0$

Temos que nessas circunstâncias:

$$F_{\mu\nu} = 0, \ A_j = \frac{i}{g}G^{-1}\partial_j G \tag{102}$$

Temos que enquanto r tende ao infinito, G se aproxima de um valor constante $G = I$.

*Definição:*As configurações de vácuo pertencem ao grupo de homotopia $\pi_3(SU(2))$, como representado abaixo pelo winding number:

$$N[G] = \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{123}d^3x \ \mathrm{tr}\ G^{-1}\partial_i G G^{-1}\partial_j G G^{-1}\partial_k G \tag{103}$$

$$N[G] = \frac{1}{2\pi^2}\varepsilon^{ijk}\partial_i\Lambda_1\partial_j\Lambda_2\partial_k\Lambda_3 \tag{104}$$

Onde usamos a aproximação $G \approx G_0[I + i\sigma_a\Lambda_a(x)]$, para uma vizinhança qualquer de G com valor G_0 e $\Lambda(x) \ll 1$. O último termo deixa de ser apenas das coordenadas espaciais e começa a também envolver as coordenadas do grupo.

Proposição: Transformações de calibre podem ser representadas por um produto. Levando em consideração a definição acima, temos então que:

$$N[G_1G^2] = N[G_1] + N[G_2] \tag{105}$$

A quantidade $N[G]$ não varia sob mudanças contínuas em $[G]$. Ademais, podemos utilizar esta quantidade para definir a carga Q_A no vácuo:

$$Q_A = N[G] \tag{106}$$

Mas como $Q_A = \int d^3 j_A^0$ e $\partial_\mu j_A^\mu = \frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ é uma quantia que pode ser separada em dois estados, inicial e final, comparando temos que:

$$N_2 - N_1 = \frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{107}$$

Como cada um dos caminhos entre as configurações de vácuo para cada valor de n diferem-se um dos outros por 1, então o valor da integral da difereça $N_2 - N_1$ se dá por:

$$\int d^4x\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{16\pi^2}{g^2} \tag{108}$$

Definição: Definindo T como o operador que leva um estado de vácuo n a outro ($T|n\rangle = |n+1\rangle$), temos;

$$\Psi'[A_j^g(x)] = \Psi[A_j(x)] \tag{109}$$

Para cada winding number n, há um estado quântico $|n\rangle$ que representa a configuração de vácuo referente a n.

Proposição: As configurações de vácuo $|n\rangle$ não são autoestados da Hamiltoneana, pois há a possibilidade das barreiras de potencial serem extrapoladas, então temos que:

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}|n\rangle \tag{110}$$

Onde n é definido pela inversão da transformação de Fourier acima, enquanto $|\theta\rangle$ são os autoestados de T com autovalor $e^{i\theta}$.

Encontrando a matriz $m \times n$ de autovalores e autovetores da base θ, θ' do operador T:

$$\langle\theta'|e^{-iHt}|\theta\rangle = \sum_{m,n} e^{im(\theta'-\theta)}e^{i(m-n)\theta}\langle m|e^{-iHt}|n\rangle \tag{111}$$

5. Dualidades

5.1. Montonen Olive

Proposição: Grupos de calibre são duais, a dualidade em questão diz respeito às forças forte e fraca, e troca da carga elétrica por magnética, no espectro de partículas do limite BPS de SU(2):

$$(q, g) \longmapsto (g, -q) \tag{112}$$

$$e \longmapsto \frac{4\pi}{e} \tag{113}$$

5.2. O efeito Witten

*Proposição:*Temos que $q = ne$ ou $q = ne + \frac{1}{2}e$. N é o operador de rotação em torno do eixo ϕ (ou seja, gera transformação de calibre).

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{a}\vec{\phi} \times \vec{v} \tag{114}$$

$$\delta\vec{W}_\mu = -\frac{1}{ea}D_\mu\vec{\phi} \tag{115}$$

O operador $e^{2\pi iN}$ gera uma transformação identidade no vácuo e uma rotação em termos de ϕ, em quaisquer isovetores. Como em $D_\mu\vec{\phi} = 0$ temos $e^{2\pi iN} = 1$, os autovalores de N são integrais.

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\vec{W}_\mu}\cdot\delta\vec{W}_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\vec{\phi}}\cdot\delta\vec{\phi} = \frac{1}{ae}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{E}_i\cdot D_i\vec{\phi} = \frac{q}{e} \tag{116}$$

Introduzindo o termo, cuja integral corresponde ao número de instanton:

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{1}{2}\frac{e^2\theta}{32\pi^2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\vec{G}_{\alpha\beta}\cdot\vec{G}_{\mu\nu} = -\frac{e^2\theta}{32\pi^2}{}^*\vec{G}^{\mu\nu}\cdot\vec{G}_{\mu\nu} \tag{117}$$

De modo que N se transforma:

$$N \mapsto N - \frac{1}{ae}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathcal{L}_\theta}{\partial\partial_0\vec{W}_i}\cdot D_i\vec{\phi} \tag{118}$$

Então

$$\Delta N = \frac{e\theta}{8\pi^2}g \tag{119}$$

Em conclusão:

$$N = \frac{q}{e} + \frac{e\theta}{8\pi^2}g \tag{120}$$

Porém, como no monopolo supracitado $eg = -4\pi$, então $N = ne + \frac{e\theta}{2\pi}$

5.3. SL(2,$\mathbb{Z}$)

Até então, a ação está definida como:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_\theta = -\frac{1}{4e^2}\vec{G}^{\mu\nu}\cdot\vec{G}_{\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2}{}^*\vec{G}^{\mu\nu}\cdot\vec{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\vec{\phi}\cdot D_\mu\vec{\phi} - V(\phi) \tag{121}$$

Trocando $\vec{W}\mu$ por $e\vec{W}\mu$ ocultando e e θ, com um novo parâmetro $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi}{e^2}i$, temos a combinação linear:

$$\vec{\mathcal{G}}_{\mu\nu} \equiv \vec{G}_{\mu\nu} + i^*\vec{G}_{\mu\nu} \tag{122}$$

Definindo o produto entre as duas quantidades:

$$\vec{\mathcal{G}}_{\mu\nu}\cdot\vec{\mathcal{G}}^{\mu\nu} = 2\vec{G}_{\mu\nu}\cdot\vec{G}^{\mu\nu} + 2i\vec{G}_{\mu\nu}\cdot^*\vec{G}^{\mu\nu} \tag{123}$$

Então:

$$-\frac{1}{4e^2}\vec{G}^{\mu\nu}\cdot\vec{G}_{\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2}{}^*\vec{G}^{\mu\nu}\cdot\vec{G}_{\mu\nu} = -\frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}(\tau\vec{\mathcal{G}}_{\mu\nu}\cdot\vec{\mathcal{G}}^{\mu\nu}) \tag{124}$$

5.3.1. Formas modulares

Definições:

- H: semiplano positivo de $\mathbb{C}$ $(z = x + yi|\mathrm{Im}(z) = y > 0)$
- $SL_2(\mathbb{R})$: grupo de matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com coeficientes reais e $ad - bc = 1$
- $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm 1\}$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),\ z \in \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{125}$$

Representando a ação de $SL_2(\mathbb{R})$ em $\tilde{\mathbb{C}}$:

$$gz = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow \mathrm{Im(gz)} = \frac{\mathrm{Im(z)}}{|cz+d|^2} \tag{126}$$

Então, a ação de $SL_2(\mathbb{R})$ em $\tilde{\mathbb{C}}$ mantém H e $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ age trivialmente em H, ou seja, $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm 1\}$ age efetivamente.

Considere $SL_2(\mathbb{Z})$ subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$ cujas matrizes têm coeficientes em $\mathbb{Z}$, segue:

Definição: É chamado *modular* o grupo $G = SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \{\pm 1\}$, que é a imagem de $SL_2(\mathbb{Z})$ em $PSL_2(\mathbb{R})$. Temos os geradores do grupo G:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G \tag{127}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \tag{128}$$

O *domínio fundamental D* da ação de G em H consiste no subconjunto de H formado por todos os pontos z tais que $|z| \geq 1$ e $\mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$, como mostrado na Figura 1.

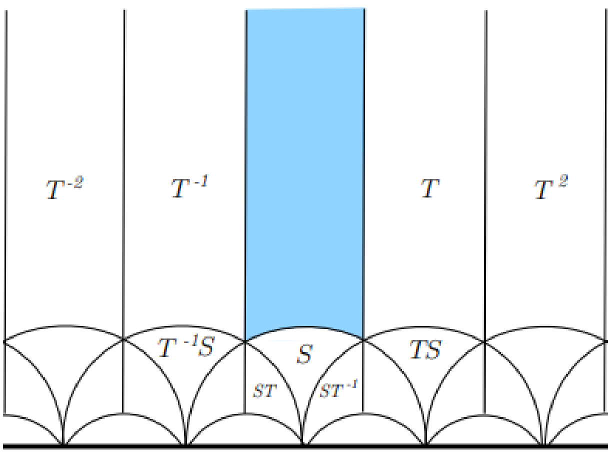

Figura 1: Representação do domínio fundamental

Teorema: Para cada $z \in H$, existe $g \in G$ tal que $gz \in D$. Cheque a prova em Serre [5]

Teorema: O grupo modular G é gerado apenas por S e T definidos acima.

5.3.2. *Massa do estado BPS*

De acordo com a equação (93), as cargas elétrica e magnética são, respectivamente:

$$q = n_e e + \frac{n_m e\theta}{2\pi} \tag{129}$$

$$g = \frac{n_m 4\pi}{e} \tag{130}$$

Definição: $\vec{n} = (n_e, n_m)$ corresponde a um vetor de ordem t, e $A(\tau) = \frac{1}{\mathrm{Im}\tau} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Re}\tau \\ \mathrm{Re}\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix}$

Desenvolvendo $A(\tau)$, obtemos:

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Re}\tau \\ \mathrm{Re}\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\theta}{2\pi} \\ \frac{\theta}{2\pi} & (\frac{\theta}{2\pi})^2 + (\frac{4\pi}{e^2})^2 \end{pmatrix} \tag{131}$$

A massa total é, então:

$$M^2 = 4\pi a^2 \vec{n}^{\,t} \cdot A(\tau) \cdot \vec{n} \tag{132}$$

Suponha $\mathbb{M}$ uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, temos:

$$A(\mathbb{M} \cdot \tau) = (\mathbb{M}^{-1})^t \cdot A(\tau) \cdot \mathbb{M}^{-1} \tag{133}$$

$\mathbb{M}$ é invariante à ação de $SL(2, \mathbb{Z})$, pois:

$$\vec{n} \mapsto \mathbb{M} \cdot \vec{n} \tag{134}$$

Ou seja, qualquer matriz pertencente a $SL(2, \mathbb{Z})$ mantém a massa M inalterada.

Como $A(\tau)$ é positiva e definida, temos:

$$M^2_{\vec{n}} \equiv \vec{n}^{\,t} \cdot A \cdot \vec{n} = \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = ||\vec{n}||^2$$

$$M^2_{\vec{n}+\vec{m}} \equiv (\vec{n}+\vec{m})^{\,t} \cdot A \cdot (\vec{n}+\vec{m}) = ||\vec{n}+\vec{m}||^2$$

Logo, M^2 obedece às propriedades de norma:

$$||\vec{n}+\vec{m}||^2 = (\left\|\vec{n}\right\| + \left\|\vec{m}\right\|)^2$$

Porém, com a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$||\vec{n}+\vec{m}||^2 \leq (\left\|\vec{n}\right\| + \left\|\vec{m}\right\|)^2 \tag{135}$$

Removendo os quadrados, temos a desigualdade triangular.

$$M^2_{\vec{n}+\vec{m}} \leq M^2_{\vec{n}} + M^2_{\vec{m}} \tag{136}$$

Porém, a igualdade não pode ser satisfeita, visto que, $\vec{n} = (p, q)$ e $\vec{m} = (r, s)$ não podem ser colineares, pois a colinearidade implica que p seja um múltiplo de a, pois a e c seriam primos. Logo, a colinearidade não seria possível, como consequência a igualdade não pode acontecer.

6. Conclusão

Fundamentado desde o início, com noções de teoria eletromagnética e conceitos de álgebras e topologia, o estudo teve sua introdução nos campos e potenciais de calibre, evoluindo até suas aplicações em monopolos magnéticos e por fim, construção da massa de estados saturados BPS e suas invariâncias devido a simetrias, todas estudadas detalhadamente neste material.

Referências

[1] JM Figueroa-O'Farrill. Electromagnetic duality for children, 1998.

[2] Lev Davidovich Landau. *The classical theory of fields*, volume 2. Elsevier, 2013.

[3] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.

[4] Valery Rubakov. *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2009.

[5] Jean-Pierre Serre. *A course in arithmetic*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2012.