Teoria de Yang-Mills: Geometria de fibrados principais

Alexandry Moreira A. Pinto
Orientador: Professor Dr. Arsen Melikyan

Agosto de 2022

Resumo

De forma inteiramente matemática foram definidas e descritas propriedades acerca das noções de fibrados e conexão que em seguida foram usadas para identificar e descrever a curvatura em variedades de forma geral. Estes conceitos fazem uso dos grupos e álgebras de Lie que relacionam por operação de grupo elementos de uma dada fibra onde os estados quânticos de um campo podem ser descritos. Por fim, concisamente une-se todas essas definições para introduzir a teoria clássica de calibre (gauge) de Yang-Mills.

Conteúdo

§1 Introdução

Da mesma forma que define-se o *spin* como uma propriedade intrínseca das partículas quânticas, Heisenberg em 1932 propõe o conceito de *spin isotópico* ou *isospin* [6] na tentativa de explicar a semelhança de massa entre o próton e o nêutron. O conceito de isospin baseia-se na ideia de que na ausência de campo elétrico ou força fraca, o próton e o nêutron pudessem ser considerados como estados quânticos de um dado campo referente ao núcleo. A ausência de interação eletromagnética e força fraca está ligado ao fato de que em tais condições suas cargas (próton tem carga elementar positiva e nêutron carga elementar neutra) fossem irrelevantes.

Partindo de noções de espaço topológico e variedades diferenciáveis, de forma completamente matemática define-se o conceito de fibrados ou maço de fibras, onde dado um ponto em um variedade, associamos a ele uma fibra. É construído relações para diferentes mapeamento em fibras ou melhor uma liberdade de identificação nos elementos da fibra. Usando de equivariância e transitividade dos grupos de Lie e por estes elementos agirem livremente, relacionamos os elementos da fibra a partir das operações de grupo. A partir destas construções, introduzimos espaços tangentes a elementos da fibra que é formado por subespaços chamados horizontais e verticais. Pela liberdade de definição de um espaço horizontal somos forçados a definir uma forma-um conexão que irá separar unicamente estes dois subespaços horizontais e verticais. Associado ao subespaço horizontal temos a conexão que sobre mudança de coordenada na fibra nos dá uma relação de compatibilidade que é a lei de transformação devido a mudança de coordenada na fibra e assim surge o conceito chave das teorias de gauge, onde os elementos se diferem por fatores de grupo por diferentes escolhas de identificação destes mesmos elementos.

Definindo um vetor tangente ao espaço base que caminha de acordo com alguma curva, definimos um elevador que cuidará de associar a cada coordenada no espaço base uma coordenada no espaço tangente á fibra. Dizemos que o vetor faz um transporte paralelo se sempre permanece paralelo a si mesmo ou se o elevador tem sempre componente horizontal. Fazendo este caminho no espaço base ser um paralelogramo, introduzimos a noção de derivada covariante que cuida de medir a variação deste vetor tangente durante o transporte paralelo. Mostramos que a conexão compara campos vetoriais em diferentes pontos e a forma curvatura é introduzida para cuidar de medir a falha no fechamento do paralelogramo no caminho elevado no subespaço horizontal e é visto que esta falha é um elemento no subespaço vertical. Assim, podemos ver que a curvatura é a medida de distância vertical que faz o paralelogramo falhar em fechar. Por fim definimos campo de força e potencial de gauge.

Yang e Mills em seu artigo original [7], definiram um campo associado ao núcleo atômico assim como suposto por Heisenberg onde tem componente de estado quântico próton e nêutron e estas componente sendo componentes de uma dada fibra. Se num dado ponto no espaço-tempo escolher um elemento de fibra (ou estado quântico) como sendo o próton e o outro como sendo nêutron, estamos fazendo um processo semelhante a fixar uma base. Se outra identificação for feita então outra escolha de base é feita, por exemplo oposta a feita anteriormente, é de interesse ter a dinâmica invariante por fixação de base, ou seja temos uma teoria de gauge. Ao falar em dinâmica queremos dizer como o campo associado ao núcleo se move no espaço-tempo.

Sendo assim, da mesma forma que construímos o gauge das fibras de forma puramente matemática, a ideia é usada aqui para construir a teoria de gauge de Yang-Mills, onde a dinâmica dos campos são invariantes por transformação de fase (operação de grupo).

§2 Fibrados

2.1 Definições

Um *maço de fibras* ou *fibrado* é composto por um espaço base M de tal forma que elementos de um espaço total E pode ser projetado em M via $\pi : E \to M$ de forma sobrejetiva, isto é, para cada elemento de M tem-se um elemento em E correspondente. Dado um conjunto de coberturas abertas $\{U_i\}$ de M, para um $p \in U_i$, deve-se ter $\pi^{-1}(p) = F_p$ onde chamamos F_p a fibra em p. Temos M, E e F variedades diferenciáveis. Daqui já vemos que um fibrado é localmente mas não necessariamente globalmente o produto entre dois espaços onde temos um mapa $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ de forma que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$.

Definição 1 *Um fibrado diferenciável é uma quíntupla (E, π, M, F, G) onde seus elementos são dados por:*

1. *Uma variedade diferenciável E chamada* ***espaço total****,*
2. *Uma variedade diferenciável M chamada* ***espaço base****,*
3. *Uma variedade diferenciável F, chamada de* ***fibra****,*
4. *Uma sobrejeção $\pi : E \to M$ chamada a projeção. A imagem inversa $\pi^{-1}(p) = F_p$ chamada a fibra em p,*
5. *Um* ***grupo de Lie*** *G, chamado a* ***estrutura de grupo****, que age em F*
6. *Um conjunto de coberturas abertas $\{U_i\}$ de M com difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. Chamamos ϕ_i a* ***trivialização local****.*

Usando notações e o formalismo das definições como em [2]. Sejam U_i e U_j do espaço base M tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Para um elemento $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$ teremos duas trivializações locais ϕ_i e ϕ_j em $U_i \cap U_j$ que podem mapear um elemento $p \in M$ a duas fibras diferentes f_i e f_j. Existe então um mapa $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ que relaciona as duas coordenadas das fibras f_i e f_j de forma

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f) \tag{1}$$

onde $f_i = t_{ij}(p)f_j$. Chamamos t_{ij} de *funções transições* e devem satisfazer as chamadas *condições de consistência*:

$$\begin{aligned} &t_{ii}(p) = \text{mapa identidade} \quad (p \in U_i), \\ &t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p) \quad (p \in U_i \cap U_j), \\ &t_{ij}(p)t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \quad (p \in U_i \cap U_j \cap U_k). \end{aligned} \tag{2}$$

Estas exigências para t_{ij} faz com que possamos construir as fibras desejadas para os pontos em $\{U_i\}$ em que o produto local é satisfeito.

Quando tivermos t_{ij} sendo identidade, chamamos o fibrado de *fibrado trivial* onde todo o espaço total pode ser escrito como $M \times F$. Um bom exemplo de um fibrado trivial é um cilindro onde o espaço total é dado por $S^1 \times I$, onde I é um certo intervalo dos reais.

As possíveis funções transições não são únicas. Dado um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ com $\{U_i\}$ uma cobertura de M. Pode-se ter duas trivializações locais $\{\phi_i\}$ e $\{\widetilde{\phi_i}\}$ para um mesmo $p \in U_i$. Se $p \in U_i \cap U_j$, temos também $\{\phi_j\}$ e $\{\widetilde{\phi_j}\}$ tal que as funções transições serão

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}, \qquad \widetilde{t_{ij}}(p) = \widetilde{\phi_{i,p}}^{-1} \circ \widetilde{\phi_{j,p}}. \tag{3}$$

E para descrever a mesma fibra, surge um homeomorfismo $g_i(p) : F \to F$ para cada $p \in M$ onde

$$g_i(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \widetilde{\phi_{i,p}}, \tag{4}$$

$$\widetilde{t_{i,j}}(p) = g_i^{-1}(p) \circ t_{i,j}(p) \circ g_j(p). \tag{5}$$

Onde podemos ver que através desta não unicidade de escolha de ϕ, podemos sempre estar escolhendo outra forma de mapear elementos de E desde que $t_{i,j}(p)$ e $\widetilde{t_{i,j}(p)}$ obedeçam a equação (5), esta é a origem da teoria de gauge.

Para um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ definimos uma *seção* como um mapa suave $s : M \to E$ satisfazendo que

$$\pi \circ s = id_M. \tag{6}$$

Podemos restringir esta seção a um ponto na forma $s(p) = s|_p$ e a um aberto $U \in M$. Caracterizamos respectivamente por $\Gamma(M, F)$ e $\Gamma(U, F)$ o conjunto de seções em M e conjunto de seções locais em U. A existência de uma seção global está inteiramente ligada com a trivialidade de um fibrado.

Dado o espaço base M, cobertura aberta $\{U_i\}$, funções transições $t_{ij}(p)$, fibra F e estrutura de grupo G podemos sempre fazer uma reconstrução de um fibrado, bastando apenas identificar a projeção π, o espaço total E e as trivializações locais ϕ_i de forma única. Primeiramente definimos um produto entre dois espaços na forma

$$X = \bigcup_i U_i \times F. \tag{7}$$

Dado os produtos $(p, f) \in U_i \times F$ e $(q, f') \in U_j \times F$, queremos distinguir eles completamente tal que dado pontos p e q por exemplo, $(p, f'), (p, f)$ e $(q, f), (q, f')$ sejam distinguíveis apenas em termos das funções transições e fazemos isso introduzindo uma classe de equivalência entre $(p, f) \sim (p, f')$ se e somente se $f' = t_{ij}(p)f$. Esta equivalência denotada por $[(p, f)]$ é inteiramente projetada no ponto p na forma

$$\pi : [(p, f)] \mapsto p. \tag{8}$$

Dessa forma construímos um fibrado E onde seus elementos são $[(p, f)]$ em que

$$E = X/\sim. \tag{9}$$

A trivialização local será dada por pegar duplas (p, f) e mapear em suas respectivas classes de equivalência, isto é

$$\phi_i : (p, f) \mapsto [(p, f)]. \tag{10}$$

Dada uma reconstrução de E, ela é única.

As definições a seguir acerca de grupos de Lie e suas propriedades segue como em [3].

Definição 2 (Grupos de Lie) *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável que é dotada de uma estrutura de grupo tal que as operações*

1. $\cdot : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2,$
2. $^{-1} : G \to G, g \mapsto g^-1.$

são diferenciáveis.

Uma ação suave pela direita de um grupo de Lie G em uma variedade M é um mapa suave:

$$\mu : M \times G \to M$$

$$x \cdot g = \mu(x, g) \quad \forall x \in M, \quad \forall g, h \in G.$$

1. $x \cdot e = x$, $e \equiv id_G$
2. $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (g \cdot h)$.

Se existe tal mapa μ, dizemos que G age suavemente em M pela direita. Uma ação pela esquerda é definida de forma similar. Uma variedade M junto com uma ação pela direita de um grupo de Lie G em M é chamado uma *variedade* $-G$.

Um fibrado $P \xrightarrow{\pi} M$ com fibra G é um *fibrado-G principal* se G age suavemente e livremente em P pela direita e as trivializações locais preservam a fibra:

$$\phi_{U_i} : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i), \tag{11}$$

são $G-$ *equivariante*, i.e. onde G age no elemento da fibra pela direita em $U \times G$:

$$(p, g_i) \cdot a = (p, g_i a).$$

Como G age *transitivamente* (após a ação em um elemento de um espaço, me retorna outro elemento do mesmo espaço) em $\{p\} \times G$ e ϕ_U é G-equivariante, G deve agir transitivamente na fibra P_p também:

Preposição 1 *Se $P \xrightarrow{\pi} M$ é um fibrado-G principal, então o grupo G age transitivamente em cada fibra.*

Como pode ser observado, estamos fazendo um processo semelhante a reconstruir uma fibra, mas aqui redefinindo como o grupo G age com suas propriedades de equivariância, transitividade e de agir livremente ao invés de uma classe de equivalência.

Seja a trivialização local como em (11) dada por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ onde $u \in \pi^{-1}(U_i)$ e $p = \pi(u)$. A ação pela direita de G em $\pi^{-1}(U_i)$ é definida por $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$:

$$u \cdot a = \phi_i(p, g_i a) \tag{12}$$

para todo $a \in G$ e $u \in \pi^{-1}(p)$. Ou seja, a trivialização local acompanha a ação pela direita e consequentemente acompanha toda a fibra de forma contínua.

Sempre que $U_i \cap U_j$ é não vazia, existe como antes duas trivializações locais para $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$:

$$(U_i \cap U_j) \times G \xrightarrow{\phi_i} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \xleftarrow{\phi_j} (U_i \cap U_j) \times G. \tag{13}$$

Então $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \to (U_i \cap U_j) \times G$ é um mapa $G - equivariante$ que preserva a fibra, isto é, para $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$ existe um elemento $a \in G$ tal que devemos ter $u_1 = u_2 \cdot a$. Para $p \in U_i \cap U_j$:

$$u \cdot a = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ij}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a). \tag{14}$$

Onde as funções transições agem pela esquerda. Dado um $\pi(u) = p$, podemos então construir toda uma fibra como $\pi^{-1}(u) = \{u \cdot a | a \in G\}$. E essa ação deve ser *livre*, isto é, se $ua = u$, então a é o elemento identidade de G.

Dado uma seção $s_i(p)$ sobre U_i, definimos uma trivialização local preferencial $\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ chamada *trivialização canônica*. Para $u \in \pi^{-1}(p), p \in U_i$, há um único elemento $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p) g_u$. Então definimos ϕ_i por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$. Nesta trivialização local a seção $s_i(p)$ é expressa como

$$s_i(p) = \phi_i(p, e). \tag{15}$$

Onde por definição: $\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e) \cdot g = s_i(p) g$.

Se $p \in U_i \cap U_j$, duas seções $s_i(p)$ e $s_j(p)$ são relacionadas pela função transição t_{ij}

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) g = \phi_j(p, t_{ij}(p) e) = \phi_j(p, t_{ij}(p)) = \phi_j(p, e) t_{ij}(p) = s_j(p) t_{ij}(p). \tag{16}$$

§3 Conexão e Curvatura

3.1 Motivação

Seja uma variedade M, queremos caracterizar a curvatura desta variedade. Queremos saber dizer se é curva e o quão curva é. Para isso precisamos definir algumas noções básicas.

Dizemos que uma variedade M é curva quando para dois pontos, p e p' por exemplo, os respectivos espaços tangentes $T_p(M)$ e $T_{p'}(M)$ mudam conforme nos movemos de p a p'.Vale lembrar que estamos tratando de variedades diferenciáveis, e sempre falando de pontos separados infinitesimalmente. Sabemos que de forma ingênua um vetor é caracterizado por *modulo*, *direção/sentido*, então para um espaço plano, é esperado que se movermos um vetor de um ponto a outro, não tenhamos mudado nenhuma característica deste vetor, isto é, ele é o mesmo vetor mas em outro ponto. Se caminharmos de p a p' teremos que os vetores podem mudar ou não, dependendo da curvatura. Quem cuidará de observar dois tais espaços tangentes e dizer se diferem é a estrutura chamada *conexão*. Dados dois espaços tangentes como antes, definimos uma curva $\gamma(t)$ que une p e p'. Seja $\vec{X} \in T_p(M)$ tangente a curva γ em p, dizemos que $\vec{X}$ é transportado paralelamente se $\vec{X}$ permanecer paralelo a si mesmo durante o caminho γ. Precisamos definir um operador derivada covariante que irá medir a taxa de variação de $\vec{X}$ em relação a t conforme se move em $\gamma(t)$. Esta derivada covariante irá diferir da derivada parcial por uma certa quantidade que caracteriza se a base de $\vec{X}$ variou ao andar de t_0 a t_1 por exemplo, isto é, se os espaços tangentes se diferem em dois pontos infinitesimalmente separados. Comumente usa-se a derivada parcial ordinária em todos os casos esquecendo o termo que reflete esta curvatura, aqui isso não pode acontecer, queremos conhecer este termo adicional e além disso, medir ele. Este termo adicional que difere os dois operadores diferencial é o que chamamos de conexão. Esta derivada covariante além disso, é não comutativa, quem caracteriza esta não comutatividade é a curvatura.

3.2 Definições

Comecemos lembrando algumas noções básicas de grupos de Lie e suas álgebras de Lie.

Dado um grupo de Lie, definimos translação pela esquerda e translação pela direita respectivamente pelos mapas $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$, que agem da seguinte forma $L_g h = gh$ e $R_g h = hg$. Como sabemos, um grupo de Lie é um grupo onde seus elementos são diferenciáveis e sendo assim podemos falar de espaços tangentes. Ao fazer esta translação, induzimos automaticamente os mapas $L_g : T_h(G) \to T_{gh}(G)$ e $L_g : T_h(G) \to T_{gh}(G)$. Chamamos um vetor $\vec{X}$ de esquerda invariante se $L_g \vec{X}|_h = \vec{X}|_{gh}$, isto é, temos o mesmo vetor mas transladado g unidades.

Definimos a álgebra de Lie como sendo uma álgebra onde seus elementos são vetores esquerda (direita) invariantes e escrevemos $\vec{X} \in \mathfrak{g}$. Esta álgebra é fechada com o *Lie Bracket* $[T_\alpha, T_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma$. Os elementos $\{T_\alpha\}$ são os geradores da álgebra de Lie e $f^\gamma_{\alpha\beta}$ são as estruturas constantes. Além disso temos o mapa adjunto $ad : G \to G$ que age da forma $ad_g h = ghg^{-1}$, que cuida da representação de mudança de base de um elemento. E consequentemente temos o mapa tangente de ad_g que mapeia espaços tangentes dos elementos em que o operador ad agiu, isto é, $Ad : T_h(G) \to T_{ghg^{-1}}(G)$ ou claro, $Ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ e tem a forma $A \mapsto gAg^{-1}$, com $A \in \mathfrak{g}$.

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com espaço base M e fibra G, com G sendo um grupo de Lie. Como M e G são variedades diferenciáveis, P é também e podemos falar de espaços tangentes ao fibrado lembrando que um fibrado é localmente o produto de dois espaços. Para um dado $p \in M$ temos um $u \in G$ tal que $\pi(u) = p$. Podemos falar de vetor tangente em u e para isso, definimos que todo vetor tangente a u pertence ao espaço T_uP, o espaço tangente a G_p tal que

$$T_uP = V_uP \oplus H_uP. \tag{17}$$

Chamamos V_uP de subespaço vertical e a soma direta significa que somamos componentes por componentes e consequentemente todo vetor tangente a $u \in G$ tem componente em V_uP e H_uP. Para um dado $A \in \mathfrak{g}$ podemos definir uma curva que percorre todo $u \in G_p$ através do mapa

$$R_{exp(tA)}u = u \cdot exp(tA), \tag{18}$$

isto é, esta curva mapeia u em toda a sua respectiva fibra através de uma translação pela direita e vale sempre

$$\pi(u) = \pi(u \cdot exp(tA)) = \pi(p). \tag{19}$$

Dado esta curva em G_p, podemos definir um vetor tangente a ela

$$A^{\#} f(u) = \frac{d}{dt} f(u \cdot exp(tA))\bigg|_{t=0}, \tag{20}$$

onde $A^{\#} \in T_uP$ e é tangente a P no ponto u. Este vetor tem a propriedade que $A^{\#} \in V_uP \subset T_uP$ e isto vale para todo $u \in P$, isto é, temos um campo vetorial fundamental definido de forma $\# : \mathfrak{g} \to V_uP$ tal que $A \mapsto A^{\#}$.

O subespaço H_uP diferentemente, não é unicamente determinado, temos ainda que dizer como ele se comporta quando u varia em P, o que é o mesmo que dizer que é determinado somente quando definimos uma *conexão* em P. Este subespaço H_uP pode ser que varie conforme ande pela fibra G_p, então devemos exigir que obedeça uma propriedade de ser o mesmo subespaço, diferindo apenas de uma translação pela direita, ou seja, apenas elevado uma certa quantidade $g \in G$ em $u \in G$.

Definição 3 (Conexão) *Dado um fibrado principal $P(M, G)$. Uma conexão em P é uma separação única do espaço T_uP tal que*

1. $T_uP = V_uP \oplus H_uP$,
2. *Dado um* $X_u \in T_uP$ *então* $X_u = ver(X_u) + hor(X_u)$ *é única,*
3. $H_{ug}P = R_g H_uP$ *para* $u \in P$ *e* $g \in G$.

Podemos dotar uma $forma - um$ destas três propriedades e como resultado separar T_uP em V_uP e H_uP de forma única e que não altere elementos de H_uP ao agir sobre eles.

Definição 4 (Conexão forma-um) *Uma conexão forma-um representado por $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ é uma projeção de T_uP na componente vertical $V_uP \simeq \mathfrak{g}$. Essas propriedades são embutidas nas seguintes atuações de ω:*

1. $\omega(A^{\#}) = A$, $A \in \mathfrak{g}$,
2. $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$.

A segunda propriedade nos diz que a atuação de ω em qualquer $X \in T_uP$, vale

$$R_g^*\omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*}X) = g^{-1}\omega g.$$

Preposição 2 *Definindo*

$$H_uP = \{X \in T_uP | \omega(X) = 0\}.$$

H_uP satisfaz então que

$$R_{g*}H_uP = H_{ug}P.$$

Definimos então a *forma-um conexão* ω que tem valores na álgebra de Lie e age sobre elementos de T_uP da forma como descrita na Def. (2) e Prep. (1) e assim divide o que é componente horizontal e vertical e além disso provoca que o subespaço horizontal permanece inalterado a menos de uma translação. Seja $X \in H_uP$ e suponha que $R_{g*}X \in T_{ug}P$, isto é, uma translação pela direita em um vetor horizontal nos retornaria um vetor com componente horizontal e vertical. Se fosse o caso, ainda assim teríamos:

$$\omega(R_{g*}X) = R_g^*\omega(X) = g^{-1}\omega(X)g = 0,$$

pois $X \in H_uP$ está no kernel de ω. Antes de seguir, vale notar duas propriedades adicionais:

1. $\pi_* X = 0$, se $X \in V_u P$ (desde que $\pi(u) = p$ para todo elemento u na fibra, temos então um mapa constante e sem diferencial),
2. $[A^{\#}, B^{\#}] = [A, B]^{\#}$.

Iremos agora definir um forma-um associado ao subespaço horizontal. Dado uma cobertura $\{U_i\}$ aberta de M, temos uma seção local σ_i definida em cada U_i. Definimos $\mathcal{A}_i$ a forma-um com valores na álgebra de Lie em U_i e que é dado por

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i). \tag{21}$$

Isto é, dado um forma-um $\mathcal{A}_i$ com valores na álgebra de Lie, em U_i, podemos reconstruir um forma ω cujo *pullback* através de σ_i^* é $\mathcal{A}_i$.

Teorema 1 *Seja A_i um forma-um com valores em $\mathfrak{g}\,(T_e G)$ em U_i, uma seção local $\sigma_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$. Existe um forma-um ω com valores na álgebra de Lie, tal que*

$$\omega_i = g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_p g_i, \tag{22}$$

que obedece a Def. (2) e Prep. (1), e que

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega. \tag{23}$$

Estamos definindo a conexão forma-um com objetivo de dividir unicamente o espaço $T_u P$ em subespaços horizontais e verticais, desde que como foi visto, o subespaço horizontal não é unicamente determinado. Definimos a forma-um A_i como sendo o pullback da seção agindo em ω, para $\omega_i = \omega|_{U_i}$ e $\omega_j = \omega|_{U_j} = \omega_j$ teríamos duas maneiras de separar o espaço tangente em subespaços verticais e horizontais. Devemos buscar uma condição para A_i que faça $\omega_i = \omega_j$.

Dado um fibrado principal $P(M, G)$ com seções σ_i e σ_j sobre U_i e U_j que se sobrepõe, $U_i \cap U_j$. Um vetor $\vec{X} \in T_p M$ com $p \in U_i \cap U_j$ definido sobre uma curva $\gamma(t) : [0, 1]$ onde $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(t) = \vec{X}$. Como visto anteriormente, as seções obedecem uma relação devido a existência de funções transições que relaciona dois pontos de uma mesma fibra, isto é

$$\sigma_i(p) = \sigma_j(p) t_{ij}(p).$$

Temos então

$$\sigma_{j*} X = \frac{d}{dt} \sigma_j(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \{\sigma_i(t) t_{ij}(t)\} \Big|_{t=0} = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}(X)) + \sigma_j(p) t_{ij}(p)^{-1} \frac{d}{dt} t_{ij} \Big|_{t=0}. \tag{24}$$

Para a segunda parte da ultima igualdade temos

$$t_{ij}^{-1}(p) \frac{d}{dt} t_{ij} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \{t_{ij}^{-1}(p) t_{ij}(t)\} \Big|_{t=0} \in T_e(G) \simeq \mathfrak{g}. \tag{25}$$

Que pertence á álgebra de de Lie com vetores em e. Uma seção agindo sobre este elemento retorna um elemento de $V_u P$, isto é

$$\sigma_{j*} X = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*} X) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))^{\#}. \tag{26}$$

Ou seja, a seção σ_j agindo sobre um $\vec{X} \in T_p M$ é igual ao mesmo vetor resultante de σ_i transladado por um quantidade t_{ij} mais uma quantidade no subespaço vertical. Vale que

$$\sigma_j^* \omega(X) = t_{ij}^{-1} \omega(\sigma_{i*} X) t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X). \tag{27}$$

E chegamos finalmente na *condição de compatibilidade* exigida:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \tag{28}$$

A seguir usa-se a notação de base dos espaços tangentes ás fibras como em [1]. Temos

$$T(P) = V(P) \oplus H(P), \tag{29}$$

com $dim(T(P)) = n + d$ e sendo assim $dim(G) = d$ e $dim(V(p)) = n$. A base para vetores $\vec{X} \in T(P)$ é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \tag{30}$$

onde o primeiro termo é base de $V(P)$ e o segundo é base de $H(P)$ com $\mu = 1, ..., n$ e $j, i = 1, ..., d$. Como visto antes, $H(P)$ não é especificado unicamente e esta especificação é dada quando $C_{\mu ij}$ é conhecida. O mesmo procedimento de antes é realizado agora, dado um $\vec{X} \in T(P)$ e $V_P \xrightarrow{\omega} T_e(G)$ queremos ter a atuação da conexão ω em $\vec{X}$ divida de forma única os subespaços verticais e horizontais. Com isso, temos

$$\vec{X} = \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} + B^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right). \tag{31}$$

Usamos (22) com

$$\mathcal{A} = A^a_\mu(x)T^a, \tag{32}$$

sendo a forma-um com valores na álgebra de Lie e T^a é a base de geradores, denotamos por $\lambda^a/(2i)$. Essa base satisfaz

$$\left[\frac{\lambda^a}{2i}, \frac{\lambda^b}{2i}\right] = f_{abc}\frac{\lambda^c}{2i}. \tag{33}$$

$$\mathcal{A} = A^a_\mu(x)\left(\frac{\lambda^a}{2i}\right)dx^\mu, \tag{34}$$

Chegamos em

$$\omega = g^{-1}_{ij}(dg)_{ij} + g^{-1}_{ij}A^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2i}dx^\mu g_{kj}. \tag{35}$$

A atuação de ω em $\vec{X}$ se dá então por $\omega_i(\vec{X})$ que é a atuação mais geral da forma conexão. Se $\vec{X} \in H(P)$ então a componente vertical α_{ij} é zero e $\omega_i(\vec{X}) = 0$. Desde que B^μ seja não nulo, temos

$$C_{\mu ij} = -A^a_\mu\frac{\lambda^a_{ik}}{2i}g_{kj}. \tag{36}$$

E desta forma, conhecendo $C_{\mu ij}$, $H(P)$ é determinado.

Sejam dois pontos $p, p' \in M$ e uma curva $\gamma(t)$ em M que une p e p'. Definimos *transporte paralelo* ao elevar qualquer curva $\gamma(t)$ no espaço base M á uma curva $\tilde{\gamma}(t)$ no fibrado P desde que para um vetor $\vec{X} \in T(P)$ é transportado paralelamente ao longo de $\tilde{\gamma}(t)$, isto é se sempre permanece em $H(P)$ ao ser transportado ao longo de $\tilde{\gamma}(t)$. Com isso, temos

$$\gamma(0) = p, \qquad \tilde{\gamma}(0) = u_0, \qquad \pi(u) = p.$$

Para realizar este transporte paralelo através de γ, pegamos um $u \in \pi^{-1}(p)$ e construímos um *elevador* $\tilde{\gamma}$ de γ com ponto inicial u e mapeamos u a $u' \in \pi^{-1}(p')$, onde u' é o ponto de $\tilde{\gamma}$ acima de p'. Em coordenadas locais, isto se traduz como

$$\gamma(t) = (x_\mu(t)) \quad e \quad \tilde{\gamma}(t) = (x_\mu(t), g(t)), \tag{37}$$

ou seja, a curva elevada tem coordenada de espaço base e de fibra. Vetores tangentes a $\tilde{\gamma}(t)$ são definidos por

$$\frac{d}{dt} = \dot{x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{g}\frac{\partial}{\partial g}. \tag{38}$$

Estes vetores pertencem a TP e queremos, pela definição de transporte paralelo, que pertençam somente a $HP \subset TP$. Queremos força-los a estarem contidos no subespaço horizontal fazendo

$$\frac{d}{dt} = \dot{x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{g}\frac{\partial}{\partial g} = B^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^a_\mu\frac{\lambda^a}{2i}g\frac{\partial}{\partial g}\right), \tag{39}$$

isto é

$$\dot{x}^\mu = B^\mu, \qquad \dot{g}(t) = -B^\mu A^a_\mu\frac{\lambda^a}{2i}g = -\dot{x}^\mu A^a_\mu\frac{\lambda^a}{2i}g, \tag{40}$$

logo

$$\dot{g}(t) + \dot{x}^\mu A^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2i}g(t) = 0. \tag{41}$$

E quando um vetor tangente caminha em $\gamma(t)$ no espaço base, um vetor no subespaço horizontal caminha em $\tilde{\gamma}(t)$ se mantendo neste subespaço sempre que $g(t)$ é restringido a ser solução desta equação diferencial.

Usando (38), podemos agora calcular a taxa de variação de um dado vetor tangente $\vec{X} \in M$ definido sobre a curva $\gamma(t)$ com coordenadas locais x^μ, isto é, definimos

$$\frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^a_\mu\frac{\lambda^a}{2i}g\frac{\partial}{\partial g}\right) = \dot{x}D_\mu. \tag{42}$$

como a taxa de variação com respeito a t conforme se move ao longo de $\tilde{\gamma}(t)$. A *Derivada covariante* D_μ é

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^a_\mu\frac{\lambda^a}{2i}g\frac{\partial}{\partial g}, \tag{43}$$

e é uma forma abreviada para as bases de $H(P)$. Para um $\vec{X} \in T(P) = V(P) \oplus H(P)$

$$\vec{X} = \alpha\frac{\partial}{\partial g} + B^\mu D_\mu, \tag{44}$$

e sempre que $A^a_\mu(x) = 0$, a derivada covariante é a derivada parcial comum $D_\mu = \partial_\mu$. Podemos generalizar a derivada covariante para agir em qualquer forma-r com valores em espaços tangentes de fibras a partir da derivada exterior.

A derivada exterior é dada por $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$. Para um forma-r qualquer η com valores reais que age em vetores, temos

$$\eta : TM \wedge ... \wedge TM \to \mathbb{R}. \tag{45}$$

Definimos um forma-r $\phi \in \Omega^r(P) \oplus V$ com valores vetoriais

$$\phi : TP \wedge ... \wedge TP \to V. \tag{46}$$

Definição 5 *Seja $\phi \in \Omega^r(P) \oplus V$ e $X_1, ..., X_{r+1} \in T_uP$. A derivada covariante de ϕ é definida por*

$$D\phi(X_1, ..., X_{r+1}) = d_P\phi(X_1^H, ..., X_{r+1}^H). \tag{47}$$

Podemos agora definir a *forma-dois curvatura* Ω, que é a derivada covariante da forma-um conexão.

Definição 6 (Forma-dois Curvatura) *A forma-dois curvatura é a derivada covariante da forma-um conexão*

$$\Omega = D\omega \in \Omega^2(P) \oplus \mathfrak{g}. \tag{48}$$

Sejam vetores $\vec{X}, \vec{Y} \in T_uP$. Então a forma-dois curvatura e a forma-um conexão satisfazem a *Estrutura de Cartan*:

$$\begin{aligned} \Omega(X,Y) &= d_P\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)], \\ \Omega &= d_P\omega + \omega \wedge \omega. \end{aligned} \tag{49}$$

Foi mencionado antes que a conexão compara campos vetoriais em diferentes pontos, que a curvatura mede a falha da derivada covariante e que ambos estão relacionados com a curvatura do espaço, agora isto ficará claro.

Dado um sistema de coordenada $\{x^\mu\}$ de um chart U. Faremos campos vetoriais percorrerem um laço (paralelogramo infinitesimal de lados ϵ e δ) γ com ambos saindo do mesmo ponto e chegando ao mesmo ponto. A derivada covariante mede a taxa de variação destes campos ao percorrerem $\widetilde{\gamma}(t)$, logo

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] = \left[\partial_\mu - A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}, \partial_\nu - A_\nu^b \frac{\lambda^b}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}\right] &= -\partial_\mu A_\nu^b \frac{\lambda^b}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} + \partial_\nu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} + A_\mu^a A_\nu^b \left(\frac{\lambda^a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}\right)\left(\frac{\lambda^b}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}\right) \\ &\quad - A_\nu^b A_\mu^a \left(\frac{\lambda^b}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}\right)\left(\frac{\lambda^a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}\right), \end{aligned} \tag{50}$$

Definimos $(\lambda^a/2i)g(\partial/\partial g) = R_a$, o gerador de $\mathfrak{g}$, onde

$$[R_a, R_b] = -f_{abc}R_c.$$

A partir disso, ficamos com

$$[D_\mu, D_\nu] = -\partial_\mu A_\nu^b R_b + \partial_\nu A_\mu^a R_a + A_\mu^a A_\nu^b [R_a, R_b] = -F_{\mu\nu}^a R_a \tag{51}$$

e podemos definir o *tensor curvatura* que mede a falha da derivada covariante:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{52}$$

Para $V = \partial/\partial x^\mu$ e $W = \partial/\partial x^\nu$ em que $X, Y \in H_uP$ tal que $\pi_* X = \epsilon V$ e $\pi_* Y = \delta W$, temos

$$\pi_*([X,Y]^H) = 0 = \epsilon\delta[V,W] \tag{53}$$

a partir de um *elevador* $\widetilde{\gamma}(t)$. E consequentemente

$$[X,Y] \in VP.$$

E assim, podemos ver que a curvatura é a medida de distância vertical que faz o paralelogramo falhar em fechar. Não usamos ou comparamos os vetores tangentes á variedade para medir a curvatura da mesma, mas sim os vetores pertencentes aos subespaços horizontais da fibra quando transportamos paralelamente estes vetores tangentes.

A curvatura mede a distância vertical

$$\Omega(X,Y) = -\omega([X,Y]) = A, \tag{54}$$

onde $A \in \mathfrak{g}$ tal que $[X,Y] = A^\#$. O forma F local é definido como sendo

$$\mathcal{F} = \sigma^*\Omega, \tag{55}$$

onde σ é uma seção local definida em um chart U de M. Desde que podemos escrever a forma-dois curvatura como $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$, teremos o tensor curvatura em termos de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \tag{56}$$

a partir de $\sigma(d\omega) = d(\sigma^*\omega)$ e $\sigma^*(\xi \wedge \eta) = \sigma^*\xi \wedge \sigma^*\eta$, e por $\mathcal{A}$ ser uma forma-um, o tensor curvatura é uma forma-dois, onde

$$\mathcal{F} = \frac{F_{\mu\nu}^a}{2} \frac{\lambda^a}{2i} dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{57}$$

Chamamos $\mathcal{F}$ de *Campo de Força*, Ω a curvatura e $A_\mu^a(x)$ o *potencial de Gauge.*

Sejam U_i e U_j charts em M em que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tal que haja uma mudança $(x, g) \to (x, g')$, isto é apenas uma mudança na fibra, e seja $g' = tg = L_t g$, então a partir da equação de compatibilidade (28)

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}, \tag{58}$$

Com $\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i, \mathcal{F}_j = d\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j$, substituímos $\mathcal{A}_j$ em $\mathcal{F}_j$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_j &= d(t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}) + (t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}) \\ &= t_{ij}^{-1}(d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i)t_{ij} = t_{ij}^{-1}\mathcal{F}_i t_{ij}.\end{aligned} \tag{59}$$

Consideremos novamente uma curva $\gamma(t)$ em M. Agora iremos definir seu elevador vertical $\gamma_{TM}(t)$ em $T(M)$, isto é, um caminho sobre um fibrado de vetores tangentes definidos sobre pontos de M. Existe um *fibrado associado* $T(M)$ á $F(M)$, onde $F(M)$ tem como componentes bases ordenadas. Dizemos ser associado porque cada elemento de $T(M)$ pode ser identificado como um elemento de $F(M)$, desde que como visto dado um campo vetorial definido sobre $p \in M$, a liberdade de escolha da trivialização local $\phi_{i,j}$ induz a ação de grupo $GL(n,\mathbb{R})$ que cuida da transformação de base coordenada e sendo assim $F(M)$ é um fibrado principal com fibra $GL(n,\mathbb{R})$. A existência deste fibrado associado irá induzir a existência de um elevador horizontal γ_{TM} em TM de $\widetilde{\gamma}(t)$ um elevador horizontal de P. O que está acontecendo é, um transporte paralelo de um vetor sobre M é realizado e uma mudança infinitesimal de onde este vetor esta definido é identificado como uma alteração sobre γ_{TM} de onde o vetor tangente é definido e consequentemente uma mudança na base que é um caminhar sobre $\widetilde{\gamma}(t)$. Seja um vetor **qualquer** definido sobre $x \in M$ que é identificado por um vetor $\vec{X}$ em $T_x(M)$ dado por $\vec{X} = a^\mu \partial_\mu$. Qualquer outro vetor tangente a algum ponto em M será resultado de ação de grupo (ou translação) do vetor $\vec{X}$. Logo, o elevador horizontal $\gamma_{TM}(t)$ é dado por

$$\gamma_{TM}(t) = \widetilde{\gamma}\vec{X}, \tag{60}$$

onde os elementos $g(t)$ de $\widetilde{\gamma}(t)$ são elementos de grupo $GL(n,\mathbb{R})$ que cuida da mudança de base do transporte de $\vec{X}$, isto é, estamos criando uma restrição para os vetores resultantes de (60), queremos que sejam apenas resultantes de elementos que pertençam ao caminho $\widetilde{\gamma}(t)$. Introduzimos $A^\nu_{\mu\kappa}$ para expressar a combinação de coordenadas locais e de grupo. A taxa de variação é dada pela derivada covariante D_μ

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^a_\mu \frac{\lambda^a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^\nu_{\mu\kappa} X^\kappa_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda_\nu}. \tag{61}$$

Seja a curva $\gamma(t)$ em M que restringe a ação de grupo transladar algum vetor somente em suas coordenadas, isto é $\gamma(t) = (x^\mu(t))$, os vetores tangentes $\vec{Y}$ a esta curva são dados por coordenadas $\dot{x}^\mu(t)$. A ação (60) pode ser vista como uma translação de base do vetor $\vec{X}$ que é um vetor qualquer tangente a M, os vetores tangentes á curva $\gamma(t)$ são dados por $\vec{Y}$ e para cada t temos um vetor $\vec{Z}$ correspondente. O vetor $\vec{Z}$ é dado por $b^\kappa(\partial/\partial x^\kappa)$. Então a taxa de variação de $\vec{Z}$ em relação aos pontos de $\gamma(t)$

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{Y}}\vec{Z} &= \frac{d}{dt}\gamma_{TM}(t) = \frac{d}{dt}\widetilde{\gamma}(t)\vec{X} \\ &= \dot{x}^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - A^\rho_{\lambda\sigma}X^\sigma_\tau \frac{\partial}{\partial x^\rho_\tau}\right)X^\mu_\nu a^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\lambda \frac{\partial b^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \dot{x}^\lambda A^\mu_{\lambda\sigma} b^\sigma \frac{\partial}{\partial x^m u}\end{aligned} \tag{62}$$

De forma compacta temos

$$\nabla_{\vec{Y}}\vec{Z} = C^\lambda b^\mu_{;\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{63}$$

com

$$Y = C^\lambda \frac{\partial}{\partial^\lambda}, \qquad Z = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad b^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial b^\mu}{\partial x^\lambda} - A^\mu_{\lambda\sigma}b^\sigma. \tag{64}$$

Chamamos a quantidade $A^\mu_{\lambda\sigma}$ de *símbolo de Christoffel* e denotamos por $\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}$.

§4 Teorias de Gauge

4.1 Mais sobre Geradores

É de interesse trabalharmos com grupos unitários que agem no espaço vetorial de estados quânticos. Queremos que estes geradores possam transformar estados quânticos de forma continua, isto quer dizer, que possamos alcançar qualquer elemento por repetidas ações destes elementos infinitesimais e para isso, definimos algum grupo G infinitesimal com elementos infinitesimais próximos á origem

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T^a + ... + O(\alpha^2). \tag{65}$$

Os coeficientes α são operadores hermitianos e T^a são os geradores do grupo. Um grupo contínuo com estas propriedades é chamado *grupo de Lie*.

O conjunto de geradores T^a expande o espaço de transformações de grupos infinitesimais, de forma que o comutador dos geradores devem ser uma combinação linear dos geradores, isto é

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{66}$$

chamamos f de estrutura constante tem propriedade que $f^{abc} = -f^{bac}$. O espaço vetorial expandido pelos geradores, dotado com estrutura de adição comutativa é chamada *álgebra de Lie*. As relações de comutação junto com a identidade

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \tag{67}$$

implica que as estruturas constantes obedecem a chamada *estrutura de Jacobi*

$$f^{ade}f^{bcd} + f^{bde}f^{cad} + f^{cde}f^{abd} = 0. \tag{68}$$

Para aplicações em *Teorias de Gauge*, a simetria local é normalmente uma transformação do tipo unitária de um conjunto de campos. Para termos grupos de Lie sendo variedades compactas de dimensões finitas, precisamos que as álgebras de Lie tenham representações Hermitianas de dimensão finita e que tenham geradores finitos.

Se T^a comuta com todas as outras componentes, temos

$$f^{abc} = 0, \tag{69}$$

e geram assim, *grupos Abelianos independentes e contínuos*. Estes grupos são denotados por $U(1)$ e tem estrutura de rotação de fase do tipo

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi. \tag{70}$$

Se a álgebra de Lie não tem tais elementos que comutam entre si, a álgebra é chamada de *semi-simples*. Denotamos um grupo semi-simples por $SU(N)$ e consiste de matizes $N \times N$ hermitianas t^a.

Os geradores são normalizados como

$$Tr[t_r^a, t_r^b] = D^{ab} = C(r)\delta^{ab} \tag{71}$$

como os geradores são hermitianos, as matrizes D^{ab} são sempre positivas definidas e o índice r representa alguma escolha de representação. Para toda representação irredutível, temos $C(r)\delta^{ab}$ com $C(r)$ é uma constante para cada representação r. Temos ainda, que

$$f^{abc} = -\frac{i}{C(r)}Tr\{[t_r^a, t_r^b]t_r^c\}, \tag{72}$$

e assim, f^{abc} é totalmente antissimétrico.

Se a álgebra de Lie é semi-simples, as matrizes t_r^a tem traço zero

$$Tr[t^a] = 0. \tag{73}$$

Para uma álgebra de Lie simples, o operador T^2comuta com todos os geradores do grupo

$$T^2 = T^aT^a, \qquad [T^b, T^aT^a] = (if^{bac}T^c)T^a + T^a(if^{bac}T^c) = 0. \tag{74}$$

Já que as estruturas constantes são antissimétricas. Isto implica que T^a é um invariante da álgebra e T^2 tem um valor constante para toda representação irredutível. Dessa forma, temos que na representação matricial, T^2 é proporcional á matriz unitária

$$t_r^at_r^a = C_2(r) \cdot 1, \tag{75}$$

onde chamamos $C_2(r)$ de o *operador quadrático de Casimir*.

Para o caso de $SU(2)$, caracterizamos a representação por J^2 representando o *spin total*, e na representação bi-dimensional temos uma representação de um *spinor*, dada em termos das *matrizes de Pauli*

$$t_2^a = \frac{\sigma}{2}, \tag{76}$$

assim, pode-se definir o spin como sendo o autovalor do operador Casimir. Para toda representação fundamental matricial, temos

$$Tr[t_N^at_N^a] = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \tag{77}$$

isto é,

$$C(N) = \frac{1}{2}. \tag{78}$$

Os grupos de Gauge podem ser então quaisquer grupos compactos de dimensão finita da forma $G = G_0 \times G_1$, onde G_0 é abeliano e G_1 é semi-simples. Mais informações acerca dos geradores em teorias físicas podem ser vistas em [5].

4.2 A Teoria de Yang-Mills

Dado um grupo de Lie G compacto do tipo SU(2), SU(3) ou U(1). Consideremos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para o grupo de Lie G, consistindo de matrizes $n \times n$ e com traço zero. Consideremos ainda campos sobre o espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional do tipo $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Imaginemos uma partícula no espaço de Minkowski como definido acima, onde seu conjunto de estados são definidos por $\psi(x)$ com valores complexos em $\mathbb{R}^4$ e definimos um espaço total P de todos os estados da tal partícula. Dado dois pontos distintos no espaço-tempo, temos diferentes estados associados em P, denotados por G_x e G_y para dado dois pontos x, y. Estamos definindo a fibra P sobre o espaço-tempo base M.

Sabemos que nossa *Lagrangiana* é invariante sobre transformação de fase

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x), \tag{79}$$

com α sendo um número real constante para todo x.

Imaginemos um caso geral em que as diferentes fibras tem relações completamente diferentes e a única forma de relaciona-las é definindo um caminho em M. Estamos falando de um transporte de ponto a ponto de uma partícula que carrega consigo seu estado. No espaço base esse caminho é identificado como sua *linha de mundo*, já nas fibras chamamos de transporte paralelo. Este transporte sobre a fibra é dado por uma operação de grupo que age no estado ψ e é identificado pela posição da partícula, ou seja, os caminhos diferem por uma fase.

Podemos pensar em generalizar essa simetria global a uma simetria local, e assim construir uma invariância sobre transformação do tipo

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x). \tag{80}$$

Que é uma rotação de fase através de um ângulo $\alpha(x)$ que varia arbitrariamente de ponto a ponto. Estamos buscando então uma independência de transformação de fase para cada ponto do espaço. Chamamos isto de invariância de gauge. Sendo assim, surge uma complicação para quando tivermos termos de derivada na construção, já que campos $\psi(x)$ e $\psi(x+\epsilon)$ estão em pontos diferentes do espaço e se transformam de forma completamente diferente. Devemos então construir um fator que terá o papel de compensar a diferença de transformação de fase em dois dados pontos, mas esse fator já foi construído em seções anteriores e é a derivada covariante que inclui o termo de derivada parcial mais um termo de conexão

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu(x). \tag{81}$$

Seja uma transformação infinitesimal, temos então

$$g(x) = e^{i\alpha(x)} = 1 + \alpha(x) = 1 + \alpha^a(x)t^a. \tag{82}$$

Sabemos que $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)(t^a)$ se transforma em primeira ordem de α^a segundo

$$A_\mu^g(x) = g(x)^{-1}A_\mu(x)g(x) + g(x)^{-1}\partial_\mu g(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x). \tag{83}$$

E agora podemos verificar como a derivada covariante se transforma

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu - A_\mu(x))\psi(x) &\rightarrow [\partial_\mu - A_\mu(x) - \partial_\mu(\alpha(x)) - [A_\mu(x), \alpha(x)]](1+\alpha(x))\psi(x) \\ &= (1+\alpha)(\partial_\mu - A_\mu(x))\psi(x) = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x). \end{aligned} \tag{84}$$

Observemos que $D_\mu\psi(x)$ se transforma assim como $\psi(x)$. Sem essa propriedade, não poderíamos escrever uma Lagrangiana envolvendo termos de derivada. Assim, qualquer combinação de ψ e suas derivadas covariantes que são invariantes globalmente por transformação de fase, serão também invariantes por transformação local. Logo, tanto as derivadas do campo, a conexão quanto suas transformações descrevem então o mesmo sistema físico.

Pode-se concluir então que não apenas um conjunto de campo mas toda uma classe de configurações de gauge equivalente correspondem ao mesmo sistema físico real. Isto implica num espaço interno de estado sem base fixa com respeito a um campo de matéria que se dá em termos de componentes ψ. Tais bases podem ser introduzidas localmente em cada ponto do espaço-tempo, no entanto, não há razão física para fixar sua posição. A alteração local da base é interpretada como uma mudança de gauge do campo.

Seja uma curva $\gamma(s)$ no espaço-tempo definido como antes por

$$\gamma(s) = x_\mu(s). \tag{85}$$

O campo vetorial $\dot{\gamma}(s)$ de vetores tangentes a $\gamma(s)$ tem componentes $X_\mu = dX_\mu/ds$. Podemos falar de transporte paralelo de $\psi(x)$ ao longo de $\gamma(s)$ desde que

$$\nabla_\mu\psi(s)|_{x=x(s)}X_\mu = 0, \tag{86}$$

sendo a derivada covariante na direção tangencial onde as coordenadas de γ satisfazem essa igualdade. Definindo como antes um transporte paralelo através de um paralelogramo fechado de vértices

$$(x, x+\Delta_1 x, x+\Delta_1 x+\Delta_2 x, x+\Delta_2 x). \tag{87}$$

A não comutatividade de $\psi(x)$ pode ser calculada via

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = -[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{bca}A^bA^c]t^a\psi(x), \tag{88}$$

onde podemos definir

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a t^a, \tag{89}$$

a curvatura no espaço de estado. Onde podemos abrir o ultimo termo como segue

$$i[A_\mu, A_\nu] = i[A_\mu^b(x)t^b, A_\nu^c t^c] = iA_\mu^b(x)A_\nu^c(x)[t^b, t^c] = -(f^{bca}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x))t^a. \tag{90}$$

E abrimos as componentes do tensor $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - f^{bca}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x). \tag{91}$$

Seja $G = SU(2)$, isto é, o grupo das matrizes 2×2 unitárias. Os geradores são dados pelas *matrizes de Pauli*:

$$t^a = \frac{1}{2i}\sigma^a, \tag{92}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

A conexão será dada por

$$\mathcal{A} = A^a_\mu(x)\left(\frac{\sigma^a}{2i}\right)dx^\mu. \tag{94}$$

Usando a propriedade dos comutadores, temos

$$[\sigma^a, \sigma^b] = \epsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2i}. \tag{95}$$

Dessa forma, temos $[D_\mu, D_\nu] = -F^a_{\mu\nu}\sigma^a/2i$. Escrevemos as componentes do tensor curvatura na forma

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{96}$$

Da lei de transformação (59), segue que o campo de força se transforma como

$$F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i} \to e^{i\alpha}F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i}e^{-i\alpha} = (1 + \alpha^a\frac{\sigma^a}{2i})F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i}(1 - \alpha^a\frac{\sigma^a}{2i}) = F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma}{2i} + [\alpha^a\frac{\sigma^2}{2i}, F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i}]. \tag{97}$$

Que nos mostra que $F^a_{\mu\nu}$ não é invariante por gauge desde que tem dependência em três direções σ^a. Mas ainda podemos tentar construir uma função de Lagrange invariante por gauge, na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr\{F_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i}F^{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i}\} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a. \tag{98}$$

E dessa forma, podemos mostrar que obtemos com exito a construção da Lagrangiana invariante por transformação de fase

$$(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a) \to (e^{i\alpha}F^a_{\mu\nu}e^{-i\alpha})\left(e^{i\alpha}F^{\mu\nu}_a e^{-i\alpha}\right) = e^{i\alpha}(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a)e^{-i\alpha}. \tag{99}$$

Onde usa-se a propriedade do traço de uma matriz: $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$.

§5 Conclusão

Foi apresentado um formalismo completo acerca de fibrados, conexão e curvatura que só foi introduzido nos estudos físicos a partir da publicação do artigo de Yang e Mills em 1954. Apesar de uma enorme contribuição conceitual da invariância da dinâmica de campos por transformação de fase ou por fixação de base que define o conceito do modelo de isospin introduzido por Heisenberg, atualmente no *modelo padrão de partículas*, o modelo mais aceito hoje em dia que classifica as partículas existentes na natureza, usa-se a construção de partículas *bariônicas* identificadas por partículas formadas por *quarks*. A descrição dos quarks como proposto por *Murray Gell-mann* em 1964 descreve o próton e o nêutron, assim como outras partículas, sendo formadas por partículas ainda mais elementares e dessa forma no *esquema* de *caminho óctuplo* o próton e o nêutron são algumas das 8 configurações dos quarks. Mais informações sobre a construção do modelo padrão e o formalismo de Murray Gell-Mann pode ser lido em [6]. De toda forma, a construção matemática introduzida foi de bastante proveito por parte dos físicos e ainda hoje temos teorias surgindo e sendo usadas com base no formalismo de teorias de gauge, fibrados, conexão e curvatura.

Referências

[1] C. Nash and S. Sen (1983) *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, San Diego.

[2] Nakahara, M. (2003) *Geometry, Topology and Physics.*, CRC Press. 2nd ed.

[3] Tu, L.W. (2007) *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*, Springer International Publishing.

[4] Faddeev, L.D., & Slavnov, A.A. (1991) *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, (G.B. Pontecorvo, Trans.; 2nd ed.). CRC Press.

[5] Peskin, Michael Edward and Schroeder, Daniel V. (1995) *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press.

[6] Griffiths, D. (2008) *Introduction to Elementary Particles.*, 2nd Edition, Wiley-VCH, Weinheim.

[7] C.N. Yang and R.L. Mills *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys. Rev. **96** (1954) 191.